

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

Tesis Doctoral



Análisis estacionario e inestacionario de perfiles aerodinámicos rígidos y flexibles a números de Reynolds ultra-bajos.

Autor: Mgter. Ing. Dino ANTONELLI
Director: Dr. Ing. Carlos SACCO

Mayo de 2017

Análisis estacionario e inestacionario de perfiles aerodinámicos rígidos y flexibles a números de Reynolds ultra-bajos.

por

Mgter. Ing. Dino ANTONELLI

Dr. Ing. Carlos SACCO

Director

COMISIÓN ASESORA:

Dr. Ing. Carlos SACCO

IUA

Dr. Ing. Sergio ELASKAR

FCEFyN - UNC

Dr. Ing. José TAMAGNO

FCEFyN - UNC

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina
Mayo de 2017



ACTA DE EXAMENES

Libro: 00001

Acta: 03881

Hoja 01/01

LLAMADO: 1

03/05/2017

CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGRESO	COND.	NOTA	FIRMA
32080279	ANTONELLI, DINO PAOLO	DNI: 32080279	2011	T	<i>Aprobado</i>	

CASTELLO, Walter Braulio - PAZ, Rodrigo - RIOS RODRIGUEZ, Gustavo Adolfo - ROCCIA, Bruno Antonio -

Observaciones:

Sergio Elaskar
DIRECTOR
Doctorado en Ciencias de
la Ingeniería
F.C.E.F. y N. - U.N.C.

Córdoba, ___/___/___.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: *Sergio Elaskar*

1 - 1 - 1
Inscriptos Ausentes Examinados Reprobados Aprobados

Resumen

El propósito de este estudio es describir los fenómenos que se manifiestan en perfiles rígidos y flexibles sometidos a flujos donde el número de Reynolds es ultra-bajo ($Re < 10000$), con aplicaciones ingenieriles y biológicas. Para lograr dicho estudio, se utilizan técnicas matemáticas capaces de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible-laminar en interacción con estructuras flexibles. El método de elementos finitos provee un apropiado procedimiento de resolución, sin embargo debe tenerse en cuenta el problema que surge de la hipótesis de incompresibilidad donde la ecuación de continuidad cambia su estado de parabólico a elíptico. Para hacer frente a este problema, se utiliza el método de *Pasos Fraccionados*, que resulta en un integrador temporal semi-implícito y para la estabilización de los términos convectivo y de presión, se aplica el algoritmo Proyección Ortogonal de Subescalas (OSS). La interacción entre el fluido y la estructura se basa en un algoritmo con una estructura tipo staggered, en la cual el código estructural interacciona con el algoritmo fluido-dinámico de manera iterativa, en base a un esquema de Gauss-Seidel y con relajación de Aitken. El objetivo es poder simular interacciones aeroelásticas fuertes en la que la densidad del fluido se asemeja a la de la estructura del cuerpo en estudio. Además, se contemplan los efectos de masa adherida del fluido circundante. Por otra parte, el movimiento de la malla de elementos finitos se basa en la formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) de las ecuaciones de Navier-Stokes y se implementa mediante un algoritmo de resolución de la ecuación de Poisson y optimización de la métrica de cada elemento de la malla.

Se presentan resultados útiles y básicos para describir el comportamiento de geometrías 2D rígidas y elásticas en flujos estacionarios e inestacionarios a números de Reynolds ultra-bajos. Se evalúan variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y su posición sobre la cuerda, la relación de espesor, etc. Además, se estudia la ubicación del desprendimiento del flujo cercano al cuerpo, sus características en función del número de Reynolds y como influye en los parámetros aerodinámicos de mayor importancia. Posteriormente, se analizan diferentes cinemáticas de vuelo como *heaving*, *pitching*, *flapping* y *hovering*, en las cuales se determinan las características aerodinámicas de perfiles en función de parámetros adimensionales como el número de Strouhal, el número de Reynolds, la frecuencia reducida, la flexibilidad, el factor de interacción fluido estructura, etc. Se analizan los mecanismos de propulsión y sustentación para perfiles batientes, en función de la topología de la estela, la deformación de la geometría y los parámetros cinemáticos. Se establece un marco de estudio ingenieril, aplicado a Micro Vehículos Aéreos y uno biológico aplicado a aves e insectos.

Abstract

The purpose of this study is to describe the phenomena that manifest themselves in rigid and flexible airfoils submitted to flows where Reynolds numbers are ultra-low ($Re < 10000$), with engineering and biological applications. To accomplish this study, mathematical techniques capable of solving the Navier-Stokes equations for laminar-incompressible flows in interaction with flexible structures are used. It is noted that a solver based on the Finite Element Method provides an appropriate resolution procedure. However, it must also be taken into account that the continuity equation changes its status from parabolic to elliptic due to the problem arising from the incompressible assumption. To deal with this problem we use the Fractional Step method, which evolves toward a semi-implicit temporal integrator, and to handle the convective and pressure terms we apply the *Orthogonal Subgrid Scale*(OSS) algorithm. The interaction between the fluid and the structure is based on an algorithm with a type staggered structure, in which the structural code interacts iteratively with the fluid-dynamic algorithm, based on a scheme Gauss-Seidel and relaxation Aitken . The purpose is to simulate aeroelastic strong interactions in which fluid density is similar to the structure of the body under study. Furthermore, the effects of the surrounding fluid mass are also considered. In addition, the motion of the finite elements computational mesh is based on the *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE) formulation of Navier-Stokes equations and it is implemented by solving the Poisson equation and optimizing each element metric.

We present basic useful results to describe the behavior of various 2D rigid and elastic geometries at steady and non-steady ultra-low Reynolds flows. Different geometric parameters, like thickness ratio, mean lines camber, shape of leading edge, etc. were changed and its effects evaluated. In addition, we assess the flow detachment location, its features and the impact on main aerodynamic properties. The behavior of several unsteady flight dynamics like heaving, pitching, flapping and hovering were also analyzed and its aerodynamic properties determined in terms of Strouhal numbers, reduced frequencies and Reynolds numbers. Propulsion and lift mechanisms for flapping airfoils, depending of the topology of the wake, the deformation of the geometry and kinematic parameters are analyzed as well. A framework of engineering study is applied to Micro Air Vehicles and a biological one to birds and insects.

Resumo

O objectivo deste estudo é descrever os fenómenos que se manifestam em perfis rígidos e flexíveis sujeitos a fluxos, onde o número de Reynolds é ultra-baixo ($Re < 10000$) com aplicações engenharia e biológicas. Para atingir este estudo, são utilizadas técnicas matemáticas capazes de resolver as equações de Navier-Stokes para fluxo laminar incompressível e interagir com estruturas flexíveis. O método de elementos finitos fornece um processo de resolução adequado, no entanto, deve notar-se o problema que surge a partir da suposição de incompressibilidade onde a equação de continuidade altera o seu estado de parabólico para elíptica. Para resolver este problema, é usado o método de Passos fraccionado, resultando em um integrador semi-implícito temporária e a estabilização do termo de pressão e termo convectivo, é aplicado o algoritmo de projecção ortogonal do Subescalas (OSS). A interacção entre o fluido e a estrutura é baseada num algoritmo com uma estrutura escalonada no qual o código estrutural interage com o algoritmo fluido-dinâmico de forma iterativa, com base num esquema de Gauss-Seidel e relaxamento do Aitken. O objectivo é o de simular fortes interacções aeroelásticas em que a densidade do fluido se assemelha à da estrutura do corpo sob estudo. Além disso, os efeitos do elemento de massa de fluido circundante são contemplados. Por outro lado, o movimento da malha de elementos finitos é baseado na formulação ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) das equações de Navier-Stokes e é implementado por um algoritmo com equação de Poisson e otimização da métrica de cada elemento da malha.

Resultados úteis e básicos são apresentados para descrever o comportamento de geometria 2D rígida e elástica em fluxos estacionários e não estacionários a números de Reynolds ultra-baixos. São avaliadas as variações dos parâmetros geométricos, como empenamento e a sua posição sobre a corda, a relação da espessura, etc. Além disso, é estudado a localização do lançamento do fluxo próximo ao corpo, suas características, dependendo do número de Reynolds e como ela influencia os parâmetros aerodinâmicos de grande importância. Posteriormente, são estudados diferentes tipos de cinemática como *heaving*, *pitching*, *flapping* e *hovering*, em que são determinados as características aerodinâmicas de perfis em função de parâmetros adimensionais como o número de Strouhal, o número de Reynolds, a frequência reduzida, flexibilidade, o factor de interacção fluido-estrutura, etc. Analisados mecanismos de propulsão e sustentação para perfis de batente, dependendo da topologia da estela, a deformação da geometria e os parâmetros cinemáticos. O estabelecimento de um quadro de estudo de engenharia, é aplicado aos Micro Veículos Aéreos e um quadro biológico às aves e insectos.

En agradecimiento a: Dres. C. Sacco y J. Tamagno por todo su aporte y apoyo. Al Dr. S. Elaskar por hacer que todo este trabajo fuera posible. A mis compañeros de departamento por estar siempre. A mi familia y a mis amigos.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE FIGURAS	V
LISTA DE TABLAS	XIX
LISTA DE SÍMBOLOS	XXI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Visión general	1
1.2. Breve reseña histórica del flujo inestacionario y a ultra-bajo Reynolds	3
1.3. Motivación y objetivos del trabajo	6
1.4. Resumen del trabajo por capítulos	8
2. AERODINÁMICA DE ULTRA-BAJO REYNOLDS	11
2.1. Aerodinámica del vuelo estacionario	12
2.1.1. Escala de vuelo y parámetros adimensionales del flujo estacionario	12
2.1.2. Sobre las hipótesis del flujo	14
2.2. Aerodinámica del vuelo inestacionario	15
2.2.1. Vuelo sin potencia	16
2.2.2. Vuelo con potencia	16
2.2.3. Producción de potencia y efecto sobre la estela	19
2.2.4. Parámetros adimensionales fundamentales del vuelo inestacionario	20
2.2.4.1. Número de Reynolds	21
2.2.4.2. Número de Strouhal	22
2.2.4.3. Frecuencia reducida	22
2.2.4.4. Relación de avance	23
2.2.4.5. Parámetros de Performance	23
2.2.5. Geometría y cinemática del vuelo inestacionario	24
2.2.6. La pérdida dinámica y el vórtice de borde de ataque (LEV)	26
2.3. Geometrías flexibles	29
2.3.1. Parámetros adimensionales de interacción fluido-estructura	31
2.3.2. Mecanismos pasivos del flujo oscilante	34

2.4.	Motivación del estudio en dos dimensiones	36
3.	ECUACIONES DE GOBIERNO Y MÉTODO NUMÉRICO	37
3.1.	Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible	37
3.1.1.	Condiciones de contorno	38
3.1.2.	La restricción de incompresibilidad	39
3.1.3.	La problemática de la convección	39
3.2.	Formulación Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	40
3.2.1.	Formulación ALE	40
3.2.2.	La ecuación fundamental ALE	42
3.2.3.	Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes	43
3.3.	Discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	43
3.3.1.	Aproximación por el método de Galerkin	43
3.3.2.	Discretización espacial por el método de elementos finitos	44
3.3.3.	Existencia y unicidad de la solución del problema estacionario	45
3.3.4.	Discretización monolítica del tiempo	46
3.4.	Esquema de pasos Fraccionados para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	47
3.4.1.	Esquema de pasos fraccionados	47
3.4.2.	Implementación sobre las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	48
3.5.	Algoritmo de Estabilización	49
3.5.1.	Implementación del algoritmo de estabilización de subescalas ortogonales (OSS)	50
3.5.2.	Estabilización de la presión	50
3.5.3.	Estabilización de la convección	51
3.5.4.	Problema estabilizado en formulación Arbitraria Lagrangeana-Euleriana (ALE)	52
3.5.5.	Condiciones de contorno	52
3.5.6.	Paso de tiempo crítico	52
3.6.	Estructuras elásticas	53
3.6.1.	Teoría de vigas lineales: viga de Euler-Bernoulli	53
3.6.2.	Discretización del modelo elástico	53
3.6.3.	Esquemas de integración temporal	54
3.6.3.1.	Método de Newmark	54
3.6.3.2.	Método de Hilber-Hughes-Taylor	56
3.6.3.3.	Método α Generalizado	56
3.7.	Un algoritmo para el movimiento de malla	57
3.8.	Fuerzas actuantes sobre un cuerpo inmerso en un fluido	60

3.9.	Interacción fluido-estructura (FSI)	63
3.9.1.	Condiciones de acoplamiento para la interfaz de códigos particionados en problemas de interacción fluido-estructura	64
3.9.2.	Esquemas particionados	64
3.9.2.1.	Esquemas explícitos	65
3.9.2.2.	Esquemas implícitos	66
3.9.3.	Implementación del algoritmo de interacción fluido-estructura	68
3.9.3.1.	Implementación de las condiciones de acoplamiento	68
3.9.3.2.	Algoritmo de interacción fluido estructura	74
4.	VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO	77
4.1.	Flujo viscoso sobre una placa plana	77
4.2.	Flujo estacionario sobre un cilindro	79
4.3.	Flujo viscoso estacionario sobre perfiles	83
4.3.1.	Perfil NACA 0008	84
4.3.2.	Perfil NACA 0002	85
4.4.	Flujo viscoso inestacionario sobre perfiles	86
4.4.1.	Movimiento de cabeceo o “ <i>pitching</i> ”	87
4.4.2.	Combinación de movimiento de cabeceo (<i>pitching</i>) con oscilación vertical (<i>heaving</i>)	90
4.4.3.	Análisis cualitativo	92
4.5.	Análisis de Mallado	95
4.6.	Verificación del código estructural	96
4.7.	Verificación de problemas de interacción fluido-estructura	98
4.7.1.	Vibración de una placa 2D excitada por vórtices	98
4.7.2.	Movimiento <i>heaving</i> de una placa plana flexible inmersa en una corriente libre	103
4.7.3.	Placa plana flexible sometida a un movimiento oscilatorio en un fluido estático	110
5.	FLUJO ESTACIONARIO SOBRE PERFILES RÍGIDOS	117
5.1.	Dominio computacional	117
5.2.	Efectos generales del número de Reynolds ($Re < 10000$)	117
5.2.1.	Sobre el concepto de capa límite	118
5.2.2.	Distribución de presiones	120
5.2.3.	Parámetros aerodinámicos	122
5.2.4.	Separación del flujo laminar	123
5.3.	Efectos de la relación de espesor	126
5.4.	Efectos de la combadura	129

5.4.1.	Efecto de la variación proporcional de combadura	131
5.4.2.	Efecto de la posición de la combadura	134
5.5.	Consideraciones para la combinación y posterior elección de una geometría apropiada	136
6.	FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES RÍGIDOS	139
6.1.	Dominio de simulación	139
6.2.	Desplazamiento vertical (<i>heaving</i>)	140
6.2.1.	Efecto de la relación de espesor	140
6.2.2.	Efecto de la combadura	150
6.3.	Movimiento de cabeceo (<i>pitching</i>)	154
6.3.1.	Efecto de la relación de espesor	154
6.3.2.	Efecto de la combadura	159
6.4.	Movimiento vertical y de cabeceo combinado (<i>flapping</i>)	161
6.4.1.	Efecto de la amplitud de cabeceo o <i>pitching</i>	161
6.4.2.	Efecto de la amplitud de desplazamiento vertical o <i>heaving</i>	164
6.4.3.	Efecto de la frecuencia	168
6.4.4.	Variación de la amplitud de desplazamiento vertical o <i>heaving</i> y su frecuencia con el número de Strouhal constante ($St = 0,3$)	170
6.5.	Movimiento vertical y de cabeceo combinado sin la presencia de corriente libre (<i>hovering</i>)	171
6.5.1.	<i>Hovering</i> simétrico	173
6.5.2.	<i>Hovering</i> asimétrico	179
7.	FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES FLEXIBLES	183
7.1.	Dominio de simulación y detalles numéricos	183
7.2.	Efecto de la flexibilidad en movimiento vertical (<i>heaving</i>)	184
7.3.	Efecto de la flexibilidad en movimiento vertical y de cabeceo combinado (<i>flapping</i>)	192
7.3.1.	Cinemática sinusoidal	192
7.3.2.	Cinemática alternativa	196
7.4.	Efecto de la flexibilidad en el movimiento sin corriente libre (<i>hovering</i>)	202
7.4.1.	<i>Hovering</i> simétrico	202
7.4.1.1.	<i>Hovering</i> simétrico con movimiento de cabeceo	202
7.4.1.2.	<i>Hovering</i> simétrico sin movimiento de cabeceo	207
7.4.1.3.	<i>Hovering</i> simétrico sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical	214
7.4.2.	<i>Hovering</i> Asimétrico	217

8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	223
8.1. Publicaciones y Presentaciones	226
A. Algoritmo de Estabilización	227
B. Formulación por el método de elementos finitos para una viga en flexión	231
B.1. Formulación para un elemento de viga en flexión	231
B.2. Ensamble de la matriz global de la estructura	234
C. Algoritmo de relajación de Aitken	237
D. Gráficos complementarios	239

LISTA DE FIGURAS

1.1. Modelos de MAV.1.1a Ala fija, 1.1b Alas rotatorias, 1.1c Alas batientes.	2
2.1. Microvehículo aéreo capaz de ejercer tanto el vuelo estacionario como el inestacionario, [22].	11
2.2. Diagrama general de vuelo que expone las relaciones entre peso, velocidad de crucero y carga alar [109].	13
2.3. Relación entre número de Reynolds y número de Mach.[68]	14
2.4. Burbuja de separación laminar.	15
2.5. Esquema de vuelo <i>soaring</i> [47].	17
2.6. Esquema de los tipos de vuelos suspendidos.[a] Asimétrico. [b] Simétrico. [47]. .	18
2.7. Calle de vórtices que indica la producción de resistencia.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].	19
2.8. Calle de vórtices que indica la producción de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].	20
2.9. Calle de vórtices que indica la producción nula de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].	20
2.10. Tipos de movimientos en el plano bidimensional. (1) <i>heaving</i> . (2) <i>pitching</i> . (3) <i>flapping</i>	25
2.11. Esquema de la cinemática del vuelo inestacionario [47].	25
2.12. Esquema del desprendimiento dinámico de un perfil y el efecto sobre las curvas de sustentación y momento [109].	27
2.13. Contornos de presión para un perfil NACA 0012 sometido a <i>flapping</i> a: $Re = 1100$, $St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$. (a) $t=0.6152s$, (b) $t=1.0104s$, (c) $t=1.6834s$, (d) $t=2.4372s$, (e) $t=3.2775s$, (f) $t=3.8954s$	28
2.14. Coeficientes de sustentación C_L y resistencia C_D	29

2.15. Estructura anisotrópica del ala de una libélula y su sección corrugada, [42]. . .	30
2.16. Captura de la maniobra evasiva de una mosca, [87].	30
2.17. Configuraciones rígida y deformada del perfil. La línea punteada representa la configuración deformada.	33
2.18. Modos de rotación de un ala rígida y fuerzas resultantes, [34].	35
2.19. Modos de rotación pasivos de un ala flexible, [66].	36
3.1. Esquema de las funciones de transformación para los diferentes dominios de la formulación ALE.	40
3.2. Relaciones geométricas entre la malla estructural y la malla aerodinámica. . . .	70
3.3. Longitudes utilizadas para determinar ξ	70
3.4. Diagrama de flujo del esquema de interacción fluido-estructura.	76
4.1. Condiciones de contorno para la simulación de la placa plana (Gráfico fuera de escala).	78
4.2. Comparación del coeficiente de fricción a lo largo de la placa.	78
4.3. Condiciones de contorno para la simulación del cilindro (Gráfico fuera de escala). .	79
4.4. Mallado del dominio para las simulaciones del cilindro.(a)Dominio total.(b) Refinamiento sobre la superficie del cilindro.	79
4.5. Flujo sobre un cilindro $Re = 20$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.	80
4.6. Nomenclatura de los parámetros geométricos a ser comparados y calculados en la simulación del cilindro.[84]	80
4.7. Flujo sobre un cilindro $Re = 40$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.	81
4.8. Líneas de velocidad constante.(a) Flujo sobre un cilindro $Re = 100$. (b) Flujo sobre un cilindro $Re = 200$	83
4.9. Coeficiente de sustentación del cilindro a $Re = 200$. (a) C_L de ref.[84]. (b) C_L del presente trabajo.	83
4.10. Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0008. . .	84
4.11. Comparación de la distribución de presiones con los resultados obtenidos por [73] sobre un perfil NACA 0008.	84
4.12. Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0008. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$. .	85
4.13. Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0002. . .	86
4.14. Distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 en comparación con los obtenidos en ref. [73] a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	86
4.15. Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0002. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$. .	87
4.16. Mallado sobre un perfil NACA 0008. (a) Mallado sin deformar a $\alpha_a = 0^\circ$. (b) Mallado deformado a $\alpha_a = 5^\circ$	88

4.17. Contornos de velocidad y presión sobre un perfil NACA 0008 para el caso P4 de la Tabla 4.5. (a) Contornos de presión. (b) Contornos de velocidad.	88
4.18. Comparación de resultados con los obtenidos en ref. [94] y [47]. Movimiento <i>pitching</i> : coeficiente de tracción $\bar{c}t$ vs. frecuencia reducida k ($Re = 1100$).	89
4.19. Coeficiente de sustentación y de tracción: Caso P2 de la Tabla 4.5 (a) coeficiente de sustentación, (b) coeficiente de tracción.	90
4.20. Coeficiente de tracción $\bar{c}t$ vs. amplitud angular α_a a $Re = 1100$. Comparación de resultados con los obtenidos en ref. [94] y [47].	91
4.21. Comparación de topología de estela para $h = 0,025$, $Re = 20000$ y $k = 4$:(a) resultado experimental [76]; (b) resultado numérico laminar [135]; (c) resultado numérico turbulento [135]; (d) resultado numérico del presente trabajo (Líneas de vorticidad).	93
4.22. Comparación de topología de estela para $h = 0,05$, $Re = 20000$ y $k = 4$: (a) resultado experimental [76]; (b) resultado numérico laminar [135]; (c) resultado numérico turbulento [135]; (d) resultado numérico del presente trabajo (Líneas de vorticidad).	94
4.23. Dominio de análisis y detalle de la zona a refinar.	95
4.24. Coeficiente de tracción en función del refinamiento de malla. $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$, $k = 8$	96
4.25. Comparación del desplazamiento del borde libre respecto a los casos analizados por Han et al. [48].	97
4.26. Geometría y condiciones de contorno (fuera de escala).	98
4.27. Mallado del problema.	99
4.28. Desplazamiento del borde libre obtenido en el presente trabajo.	99
4.29. Comparación de los desplazamientos del borde libre para tres mallados estructurales. 10, 20 y 40 elementos.	100
4.30. Comparación de los desplazamientos del borde libre con [67], [125] y [128].	101
4.31. Contornos de velocidad del problema.(a) $t = 12,51s$. (b) $t = 12,659s$.(c) $t = 12,812s$.(d) $t = 12,962s$	102
4.32. Coeficiente de sustentación.	103
4.33. Geometría y condiciones de contorno (fuera de escala).	104
4.34. Mallado del dominio para la simulación de la placa flexible.	104
4.35. Comparación del coeficiente de sustentación para diferentes mallados con el resultado obtenido por Olivier [91].	105
4.36. Comparación del coeficiente de tracción para diferentes mallados con el resultado obtenido por Olivier [91].	105
4.37. Comparación del coeficiente de sustentación para diferentes integradores temporales en el código estructural, con el resultado obtenido por Olivier [91].	106

4.38. Comparación del coeficiente de tracción para diferentes integradores temporales en el código estructural, con el resultado obtenido por Olivier [91].	106
4.39. Influencia del efecto de masa adicionada sobre el coeficiente de sustentación y comparación con el resultado obtenido por Olivier [91].	107
4.40. Influencia del efecto de masa adicionada sobre el coeficiente de tracción y comparación con el resultado obtenido por Olivier [91].	108
4.41. Contornos de velocidad para dos mallados diferentes. [a],[c] y [e] mallado grueso. [b], [d] y [f] mallado fino. [a] y [b] $ft = 1,575[s]$. [c] y [d] $ft = 3,5[s]$. [e] y [f] $ft = 3,875[s]$	109
4.42. Desplazamiento del borde de fuga y desplazamiento vertical de la placa en función del tiempo.	110
4.43. Geometría y condiciones de contorno (fuera de escala).	111
4.44. Mallado del dominio para la simulación de la placa flexible en flujo estático. . .	112
4.45. Coeficiente de resistencia en función del tiempo para los tres mallados utilizados (Caso 2).	113
4.46. Coeficiente de tracción en función del tiempo para los tres mallados utilizados (Caso 2).	113
4.47. Desplazamiento del borde de fuga para los tres mallados analizados sobre el Caso 2, en comparación con el desplazamiento de la placa.	114
4.48. Contornos de velocidad del problema [a] y [c] mallado fino, [b] y [d] mallado grueso. [a] y [b] $t = 7,645s$. [c] y [d] $t = 12,75s$	115
5.1. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	118
5.2. Distintas topologías de mallado. (a) NACA 4404. (b) NACA 4404. (c) NACA 6302.	119
5.3. Comparación de la distribución de presiones de flujo no viscoso obtenida por [73] y flujo viscoso obtenida en el presente trabajo para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 0^\circ$	120
5.4. Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 0^\circ$	121
5.5. Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 1^\circ$ a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	121
5.6. Curva $C_L - \alpha$ para perfiles NACA 0002 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	122
5.7. Distribución de presiones sobre perfiles a $\alpha = 3^\circ$: (a) NACA 0008. (b) NACA 0002.	123
5.8. Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [73] a $Re = 6000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [73].	124

5.9. Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [73] a $Re = 2000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [73].	125
5.10. Perfiles de velocidad del <i>flujo cercano al cuerpo</i> para perfil NACA 0008 a $Re = 6000$.(a) $\alpha = 2^\circ$. (b) $\alpha = 4^\circ$	126
5.11. Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008, [73].	126
5.12. Curva de sustentación a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008. Incluye la curva de sustentación para un perfil simétrico en flujo no viscoso.	127
5.13. Curva polar a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para NACA 0002, 0006 y 0008.	127
5.14. Contornos de velocidad para perfiles NACA 0002 y NACA 0008 a $\alpha = 4^\circ$.(a) NACA 0002 $Re = 6000$. (b) NACA 0008 $Re = 6000$. (c) NACA 0002 $Re = 2000$.(d) NACA 0008 $Re = 2000$	129
5.15. Perfiles NACA 2302, 4302 y 6302, [73].	130
5.16. Perfiles NACA 4302 y NACA 4502, [73].	130
5.17. Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	130
5.18. Curva $C_L - C_D$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	131
5.19. Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	132
5.20. Comparación de los contornos de velocidad y de presión para los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$. (a) y (b) NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, (c) y (d) NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y (e) y (f) NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$	133
5.21. Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	134
5.22. Curva $C_L - C_D$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	135
5.23. Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	135
5.24. Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 4302 y NACA 4502 a $Re = 2000$ y $\alpha = 3^\circ$, $\alpha = 6^\circ$ y $\alpha = 7^\circ$. (a) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 5,1^\circ$ (b) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 5,4^\circ$, (c) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 8,1^\circ$ y (d) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 8,4^\circ$ y (e) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 9,1^\circ$ y (f) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 9,4^\circ$	137
6.1. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	139
6.2. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	140
6.3. Mallado genérico de cuerpo y estela.	141
6.4. Movimiento vertical $h(t)$ ejemplo, con $f_h = 1$ y $h_a = 0,15$	141
6.5. Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$	142
6.6. Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$	142

6.7.	Contornos de velocidad y topología de la estela para un caso con resistencia y un caso con propulsión. (a) Perfil NACA 0012. $St = 0,3$ $f_h = 1$, $h_a = 0,15$ y $Re = 1100$ (propulsión). (b) Perfil NACA 0012. $St = 0,1$ $f_h = 1$, $h_a = 0,05$ y $Re = 1100$ (resistencia).	143
6.8.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$	143
6.9.	Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$	144
6.10.	Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$	144
6.11.	Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $1c$ desde el borde de fuga, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$, $St = 0,3$ y $t = 4s$	145
6.12.	Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0012. Condición de máxima eficiencia propulsora ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$.(b) $t = 0,86[s]$.(c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,08[s]$.(f) $t = 2,65[s]$	146
6.13.	Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0004. Condición de máxima eficiencia propulsora ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$.(b) $t = 0,86[s]$.(c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,08[s]$.(f) $t = 2,65[s]$	147
6.14.	Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$	148
6.15.	Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$	149
6.16.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$	149
6.17.	Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 2$	150
6.18.	Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 1$	151
6.19.	Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 1$	151
6.20.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 4404, a $Re = 1100$, $f_h = 1$	151
6.21.	Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 4404, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$	152
6.22.	Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 2$	152

6.23. Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 2$	153
6.24. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 4404, a $Re = 1100$, $f_h = 2$	153
6.25. Movimiento de cabeceo $\alpha(t)$ ejemplo con $k = 10$ y $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$	154
6.26. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	154
6.27. Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	155
6.28. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	155
6.29. Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	156
6.30. Comparación del coeficiente de momento en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	156
6.31. Contornos de velocidad y topología de la estela para perfiles NACA 0012 y NACA 0002 a $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $Re = 1100$ y $t = 1,03s$. (a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 0012.	157
6.32. Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $0,5c$ desde el borde de fuga, para NACA 0002, 0012, a $Re = 1100$, $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $t = 1,03s$	157
6.33. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$	158
6.34. Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$	158
6.35. Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$	159
6.36. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$	159
6.37. Comparación de eficiencias propulsoras η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$	160
6.38. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$	160
6.39. Comparación del coeficiente de resistencia C_D en función del tiempo, para NACA 0002, 2302 y 4302 a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	160
6.40. Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad]$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 0,5[m]$	161

6.41. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	162
6.42. Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	162
6.43. Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} para cada ciclo, en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	163
6.44. Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 5^\circ$, (b) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 15^\circ$.(c) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 5^\circ$.(d) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 20^\circ$	164
6.45. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	165
6.46. Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	165
6.47. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	165
6.48. Comparación de las eficiencias propulsoras η en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	166
6.49. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	166
6.50. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	167
6.51. Comparación de eficiencias propulsoras en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	167
6.52. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	167

6.53. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	168
6.54. Comparación de eficiencias propulsoras en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	169
6.55. Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	169
6.56. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical con $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	170
6.57. Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical con $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	170
6.58. Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical para NACA 0004 y 0012 con $St = 0,3$, $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$	171
6.59. Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $St = 0,3$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_h = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$ (b) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.(c) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_h = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$.(d) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$	172
6.60. Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo <i>hovering</i> simétrico.	173
6.61. Comparación del coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática sinusoidal.	174
6.62. Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática sinusoidal.	175
6.63. Contornos de velocidad para la visualización de topología de estela en NACA 0012 con $\alpha_a = 20^\circ$, $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 150$. (a) $t = 0,60[s]$.(b) $t = 0,92[s]$.(c) $t = 1,20[s]$.(d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,00[s]$.(f) $t = 2,26[s]$.(g) $t = 2,58[s]$.(h) $t = 3,34[s]$	176
6.64. Coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $k = 1/2$ y cinemática sinusoidal.	177
6.65. Movimiento combinado alternativo. Con $f_\alpha = 0,75$, $f_h = 0,75$, $\alpha_a = 0,1745[rad]$ = 10° , $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 1[m]$	178

6.66. Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática alternativa.	178
6.67. Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática alternativa.	178
6.68. Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico para dos cinemáticas (sinusoidal y alternativa) a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$	179
6.69. Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo <i>hovering</i> asimétrico.	179
6.70. Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $f_x = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $h_a = 0,5[m]$ y $h_x = 0,2[m]$	180
6.71. Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	180
6.72. Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	181
7.1. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	183
7.2. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	184
7.3. Mallado genérico de cuerpo y estela.	185
7.4. Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0012 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	186
7.5. Desplazamiento del borde de fuga δ y coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p para el perfil NACA 0012 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	186
7.6. Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0012 en función de las relaciones de frecuencia a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	187
7.7. Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012.	187
7.8. Coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ para un perfil NACA 0012 para $\Sigma = 0,2168$. (a) $\delta^* = 8,71e^{-4}$. (b) $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (c) $\delta^* = 8,71e^{-3}$	188
7.9. Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0004 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	189
7.10. Desplazamiento del borde de fuga δ y coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p para el perfil NACA 0004 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	189
7.11. Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0004 en función de las relaciones de frecuencia a $St = 0,3$ y $Re = 1100$	190

7.12. Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0004.	190
7.13. Contornos de velocidad sobre los perfiles NACA 0004 y 0012 a $\Sigma = 0,2168$ y $t = 4,67[s]$. (a) y (c) con $\delta^* = 8,71e^{-6}$. (b) y (d) con $\delta^* = 2,64e^{-3}$	191
7.14. Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η en función de la flexibilidad δ^* para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y para el NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	193
7.15. Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p$ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	193
7.16. Desplazamiento del borde de fuga δ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	194
7.17. Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η en función de la relación de frecuencias f/f_1 para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	194
7.18. Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b).	195
7.19. Coeficiente de tracción en cinemática sinusoidal para los perfiles NACA 0004 y 0012 con $\delta^* = 2,64e^{-3}$	195
7.20. Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η en función de la flexibilidad δ^* para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y para el NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	196
7.21. Desplazamiento del borde de fuga δ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	197
7.22. Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p$ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	197
7.23. Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η en función de la relación de frecuencias f/f_1 para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$	198
7.24. Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b).	199
7.25. Contornos de velocidad sobre los perfiles NACA 0004 y 0012 a $t = 4,67[s]$. (a) y (c) cinemática sinusoidal con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (b) y (d) cinemática alternativa con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 8,71e^{-4}$	200
7.26. Coeficiente de tracción en la cinemática alternativa para los perfiles NACA 0004 y 0012 con $\delta^* = 8,71e^{-4}$	201
7.27. Coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ y el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$ para un perfil NACA 0012 con $\Sigma = 0,2168$. (a) y (b) cinemática sinusoidal y $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (c) y (d) cinemática alternativa y $\delta^* = 8,71e^{-4}$	201

7.28. Geometría representativa de la sección del ala de un insecto utilizada para los análisis. (Imagen (a) tomada de [42]).	203
7.29. <i>Hovering</i> simétrico con movimiento de cabeceo.	203
7.30. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ (a) y eficiencia propulsora o de sustentación η (b) para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> a $Re = 4200$	204
7.31. Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ (a) y desplazamiento del borde de fuga δ (b), para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> a $Re = 4200$	204
7.32. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ en función de la relación de frecuencias f/f_1 (a) y modos de rotación en función de las variables δ^* y Σ (b), para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> a $Re = 4200$	205
7.33. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ (a) y eficiencia propulsora o de sustentación η (b) para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> a $Re = 1800$	206
7.34. Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ (a) y desplazamiento del borde de fuga δ (b) para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> a $Re = 1800$	206
7.35. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ (a) y modos de rotación en función de las variables δ^* y Σ (b) para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> a $Re = 1800$	206
7.36. <i>Hovering</i> simétrico sin movimiento de cabeceo.	207
7.37. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	208
7.38. Coeficiente de eficiencia η para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	208
7.39. Coeficiente de potencia alternativa promedio $\bar{c}p_s$ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	209
7.40. Máximo desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	209
7.41. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> en función de la relación de frecuencias f/f_1 a $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	210
7.42. Distribución de los modos de rotación avanzado, sincrónico y retardado en función de las variables δ^* y Σ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> a $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	210

7.43. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	211
7.44. Coeficiente de eficiencia η para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	211
7.45. Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	212
7.46. Máximo desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	212
7.47. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> en función de la relación de frecuencias f/f_1 a $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	213
7.48. Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> a $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.	213
7.49. <i>Hovering</i> simétrico sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	214
7.50. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ y eficiencia propulsora η para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	214
7.51. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$, eficiencia propulsora η en función de f/f_1 y distribución de los modos de rotación para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $Re = 4200$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	215
7.52. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ y eficiencia propulsora η para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	216
7.53. Coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$, eficiencia propulsora η en función de f/f_1 y distribución de los modos de rotación para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $Re = 1800$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	216
7.54. <i>Hovering</i> asimétrico sobre un plano con una inclinación β_p	217
7.55. Coeficientes de fuerza vertical $\bar{c}v$ (a) y horizontal $\bar{c}h$ (b) promedios. Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$	218
7.56. Eficiencia propulsiva vertical η_v (a) y horizontal η_h (b). Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ (c) y modos de rotación (d). Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$	219

7.57. Coeficientes de fuerza horizontal C_H y vertical C_V en función de t/T para el caso con $\Sigma = 1,25$ y $\delta^* 8,1e^{-3}$	220
7.58. Coeficientes de fuerza vertical \bar{c}_v y horizontal \bar{c}_h promedios. Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$	221
7.59. Eficiencia propulsiva vertical η_v (a) y horizontal η_h (b). Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$	221
B.1. Elemento de viga bidimensional, [132].	231
B.2. Funciones de forma para el elemento de viga, [132].	232
B.3. Cargas sobre los nodos del elemento, [132].	232
B.4. Proceso de ensamble de dos elementos, [132].	234
D.1. Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_l y desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie <i>Hawkmoth</i> $R_e = 4200$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical	239
D.2. Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_l y desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie <i>Honeybee</i> $R_e = 1800$ en movimiento <i>Hovering</i> sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.	239
D.3. Desplazamiento máximo en función de la flexibilidad δ^* . Para planos de carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$ y $\beta_p = 30^\circ$	240
D.4. Coeficientes \bar{c}_h (a), \bar{c}_v (b), η_h (c), η_v (d) en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$	240
D.5. Coeficientes \bar{c}_h (a), \bar{c}_v (b), η_h (c), η_v (d) en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$	241

LISTA DE TABLAS

4.1. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 20$	81
4.2. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 40$	82
4.3. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 100$	82
4.4. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 200$	82
4.5. Parámetros cinemáticos para los casos de “ <i>pitching</i> ”.	88
4.6. Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo, presente trabajo, ref. [94] y [47].	89
4.7. Parámetros cinemáticos para los casos de “ <i>flapping</i> ” (F1-F5).	91
4.8. Coeficiente de tracción promedio y de sustentación máximo para los casos <i>flapping</i> analizados con el presente trabajo y las ref. [94] y [47].	91
4.9. Errores en frecuencia y amplitud respecto de los casos analizados por Han et al. [48].	97
4.10. Errores en frecuencia y amplitud respecto a los casos analizados por [67], [125] y [128].	100
4.11. Comparación de los coeficientes de tracción, potencia y eficiencia con los obtenidos por Kang y Shyy [66].	112
5.1. Espesor de capa límite en una placa plana a diferentes números de Reynolds.	119
5.2. Comparación de los coeficientes de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0002 con $\alpha = 1^\circ$, a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	122
5.3. Relación $C_L - (\alpha)$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	128
5.4. Relación C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$	129
5.5. Relación $(C_L - (\alpha - \alpha_0))$ para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$	131
5.6. Eficiencia (C_L/C_D) para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$	132
5.7. Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4302 y 4502 a $Re = 2000$ y $Re = 10000$	134
5.8. Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4302 y 4502 a $Re = 2000$ y $Re = 10000$	136
7.1. Parámetros de vuelo y máxicos de algunas especies de insectos.	202

7.2. Coeficientes de fuerzas promedios \bar{c}_h y \bar{c}_v para diferentes planos de carrera β_p
con $\Sigma = 1,25$ y $\delta^* = 8,1e^{-3}$ 220

LISTA DE SÍMBOLOS

ACRÓNIMOS

2D	Dos dimensiones
3D	Tres dimensiones
ALE	<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i>
ASGS	<i>Algebraic Subgrid-Scale Stabilized</i>
b.a.	Borde de ataque
CDR	Convectiva-Difusiva-Reactiva
CSS	Conventional Serial Staggered
DN	Dirichlet-Neumann
FSI	<i>Fluid Structure Interaction</i>
GLS	<i>Galerkin Least Squares</i>
ISS	Improved Serial Staggered
LBB	Babuska-Brezzi
LEV	<i>Leading edge vortex</i>
MAV	<i>Micro air Vehicles</i>
OSS	<i>Ortogonal Subgrid-Scale</i>
PIV	<i>Particle Image Velocimetry</i>
SUPG	<i>Streamline Upwind / Petrov Galerkin</i>
TEV	<i>Trailing edge vortex</i>

SÍMBOLOS GRIEGOS

α	Ángulo de ataque
α_0	Ángulo de sustentación nula
α_a	Media amplitud angular de cabeceo
α_f^s	Parámetro numérico del método α Generalizado
α_H	Parámetro numérico del Método de Hilber-Hughes-Taylor

α_m^s	Parámetro numérico del método α Generalizado
α_H	Parámetro numérico del método HHT
β	Parámetro numérico y de precisión del método de Newmark
β_p	Ángulo del plano de carrera en el vuelo <i>Hovering</i> asimétrico
$\tilde{\Upsilon}$	Matriz de rotación del sistema global al sistema local del elemento estructural de las posiciones de los nodos aerodinámicos
ξ	Vorticidad
β	Transformación del dominio material al dominio espacial
χ	Función vectorial genérica
Ω_x	Dominio de referencia
Ω_X	Dominio de material
Ω_x	Dominio espacial
ψ	Función de aproximación para la velocidad
ψ_h	Función de forma para la velocidad asociada al elemento
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensiones
κ	Transformación del dominio de referencia al dominio material
ζ	Transformación del dominio de referencia al dominio espacial
χ	Función escalar genérica
$\Delta\phi$	Diferencia de potencial
Δt	Incremento de tiempo
Δt_c	Incremento de tiempo <i>crosswind</i>
Δt_u	Incremento de tiempo <i>upwind</i>
Δt_{crit}	Paso de tiempo crítico
δ	Espesor de capa límite. Perturbación o desplazamiento de malla
δ_{99}	Espesor de la capa límite al 99 % de la velocidad de corriente libre
$\dot{\alpha}$	Velocidad angular del movimiento de cabeceo
η	Eficiencia propulsora. Variable adimensional
η_h	Eficiencia del coeficiente de fuerza horizontal \bar{c}_h
η_v	Eficiencia del coeficiente de fuerza vertical \bar{c}_v
γ	Parámetro numérico. Parámetro numérico y de precisión del método de Newmark
$\hat{\Psi}$	Espacio funcional en la escala de la subgrilla
$\hat{\psi}$	Función de aproximación de la velocidad en la escala de la subgrilla
μ	Viscosidad dinámica
μ_i	Métrica de distorsión del elemento
μ_s	Masa de la estructura por unidad de longitud

μ_m	Métrica de distorsión del elemento mínima
ω_a	Velocidad angular
Ω_{crit}	Condición de estabilidad
ω_k	Factor de relajación
ϕ	Función de aproximación para la presión
ϕ_h	Función de forma para la presión asociada al elemento
Φ_s	Espacio funcional que contiene a la presión
Φ_t	Espacio funcional que contiene a la función de aproximación de la presión
Φ_{h_s}	Espacio funcional que contiene a la presión asociado a la partición de elementos finitos
Φ_{h_t}	Espacio funcional que contiene a la función de forma de la presión asociado a la partición de elementos finitos
π_h^n	Proyección del término convectivo sobre $\tilde{\Psi}_h$
$\pi_{h_{pc}}^n$	Proyección del gradiente de presión y del término convectivo
Ψ	Espacio de funciones continuas $H_0^1(\Omega)$
Ψ^\perp	Complemento ortogonal de $\hat{\Psi}$
ψ^\perp	Cualquier función en Ψ^\perp
Ψ_h	Espacio dimensional finito que aproxima el espacio funcional continuo Ψ
Ψ_s	Espacio funcional que contiene al vector velocidad
Ψ_t	Espacio funcional que contiene a la función de aproximación del vector velocidad
Ψ_{h_s}	Espacio funcional que contiene al vector velocidad asociado a la partición de elementos finitos
Ψ_{h_t}	Espacio funcional que contiene a la función de forma del vector velocidad asociado a la partición de elementos finitos
ρ	Densidad del fluido
ρ^*	Relación de densidades
ρ_f	Densidad del fluido
ρ_s	Densidad de la estructura
τ	Parámetro de estabilización
τ_1	Parámetro de estabilización en el término convectivo
τ_2	Parámetro de estabilización en el término de la presión
τ_K	Aproximación de la inversa del operador \mathcal{L}
θ	Parámetro numérico. Ángulo de desprendimiento del flujo sobre la superficie del cilindro
ϱ	Ángulo girado por la puntera del ala

$\tilde{\Psi}_h$	Espacio de funciones Ψ_h extendido que contiene las funciones vectoriales continuas asociadas a los nodos del contorno
$\tilde{\psi}_h$	Función de forma del elemento que pertenece al espacio $\tilde{\Psi}_h$
ξ	Coordenada generalizada
ξ_h^n	Proyección del término de presión sobre $\tilde{\Psi}_h$
${}^G\bar{\Omega}_j$	Tensor antisimétrico
${}^G\omega_j$	Vector de velocidad angular del nodo estructural j en coordenadas globales
f_α	Frecuencia de cabeceo
$\delta\mathbf{U}_a$	Vector de desplazamientos virtuales de la malla aerodinámica
$\delta\mathbf{U}_e$	Vector de desplazamientos virtuales de la malla estructural
Γ_D	Contorno de un dominio espacial con condiciones de velocidad (Dirichlet)
Γ_M	Contorno de un dominio espacial con condiciones Mixtas
Γ_N	Contorno de un dominio espacial con condiciones de Neumann
Γ_P	Contorno de un dominio espacial con condiciones de presión (Dirichlet)
Γ	Contorno de un dominio espacial
ν	Viscosidad cinemática
Ω^e	Partición de elementos finitos
Ω	Dominio espacial
σ	Módulo del tensor de tensiones
φ	Ángulo de fase

SÍMBOLOS LATINOS

$C_{F_{imp}}$	Coefficiente de fuerza impulsiva
\bar{c}_l	Coefficiente de sustentación promedio
\bar{c}_h	Coefficiente de fuerza horizontal promedio
\bar{c}_v	Coefficiente de fuerza vertical promedio
$e\bar{r}r$	error ponderado
\bar{V}_x	Velocidad media en la dirección de x
\bar{c}_p	Coefficiente de potencia promedio
\bar{c}_t	Coefficiente de tracción promedio
\mathbf{F}_a	Vector de fuerzas aerodinámicas
\mathbf{F}_e	Vector de fuerzas estructurales
\mathbf{c}	Velocidad convectiva
\mathbf{c}_h	Velocidad convectiva elemental
\mathbf{d}	Vector de desplazamientos nodales

\mathbf{d}_m	Distancia sobre el sistema local de la intersección de \mathbf{r}_m con el elemento estructural
\mathbf{F}	Solver fluido-dinámico
\mathbf{f}_e	Fuerzas externas
\mathbf{g}_i	Vector gradiente direccional para cada elemento
\mathbf{k}	Matriz de rigidez elemental
\mathbf{K}_r	Matriz de rigidez global
\mathbf{m}	Matriz de masa elemental
\mathbf{M}_r	Matriz de masa global
\mathbf{m}_{ci}	Matriz de masa elemental concentrada con inercia de rotación
\mathbf{m}_{si}	Matriz de masa elemental concentrada sin inercia de rotación
\mathbf{N}	Vector de funciones de forma
\mathbf{n}	Vector normal unitario al contorno
\mathbf{P}	Vector de cargas externas
\mathbf{R}	Vector de cargas en coordenadas globales
\mathbf{r}	Vector de desplazamientos en coordenadas globales
\mathbf{r}_m	Distancia de la intersección normal del nodo aerodinámico con el elemento estructural
\mathbf{S}	Solver estructural
\mathbf{s}	Vector tangente unitario al contorno
\mathbf{t}_c	Tracción sobre el contorno
\mathbf{u}	Vector velocidad
\mathbf{u}_0	Velocidad inicial
\mathbf{u}_c	Velocidad impuesta sobre el contorno
\mathbf{u}_f	Desplazamiento de la malla fluido-dinámica sobre la interfaz FSI
\mathbf{u}_h	Vector velocidad asociado al elemento
\mathbf{u}_s	Desplazamiento de la estructura sobre la interfaz FSI
\mathbf{w}	Vector de desplazamiento transversal
\mathbf{w}	Velocidad de la partícula fluida
\mathbf{x}	Vector de coordenadas
\mathbf{x}_a	Distancia del nodo aerodinámico a un sistema global
\mathbf{x}_{em}	Distancia sobre el sistema global de la intersección de \mathbf{r}_m con el elemento estructural
$\bar{\mathbf{H}}$	Matriz de relación entre las posiciones de los nodos estructurales y los nodos aerodinámicos
$\bar{\mathbf{I}}$	Tensor unitario

$\hat{\mathbf{v}}$	Velocidad de la malla
\mathbf{F}_a	Fuerza de masa agregada sobre un cuerpo sumergido
\mathbf{F}_{im}	Fuerza impulsiva sobre un cuerpo sumergido
\mathbf{F}	Fuerza sobre un cuerpo sumergido
\mathbf{f}_a	Fuerzas sobre el nodo aerodinámico
\mathbf{f}_{ej}	Fuerzas sobre el nodo estructural j
\mathbf{m}_a	Momentos sobre el nodo aerodinámico
\mathbf{m}_{ej}	Momentos sobre el nodo estructural j
$\mathbf{v}_a(t)$	Velocidad del nodo aerodinámico
$\mathbf{v}_{1e}(t)$	Velocidad del nodo estructural 1
$\mathbf{v}_{2e}(t)$	Velocidad del nodo estructural 2
\mathbf{u}_{mf}	Velocidad de la malla fluido-dinámica
\mathbf{u}_{ms}	Velocidad de la malla estructural
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$	Tensor de tensiones del fluido sobre la interfaz FSI
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s$	Tensor de tensiones de la estructura sobre la interfaz FSI
$\hat{\mathbf{u}}_h$	Velocidad intermedia o fraccionada asociada al elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	Velocidad intermedia o fraccionada
\mathcal{L}	Operador de la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva
\dot{y}	Velocidad del movimiento vertical
$\frac{f}{f_1}$	Relación de frecuencias
\hat{u}	Velocidad en la escala de la subgrilla
\mathcal{N}	Dimensión espacial
\mathcal{L}^*	Operador adjunto de \mathcal{L}
$\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$	Vector desplazamiento de la estructura al final de la iteración $k+1$ con relajación de Aitkens
a	Longitud al centro de los vórtices formados en la estela de un flujo con desprendimiento estacionario sobre un cilindro.
a_i	Velocidad solenoidal de advección
AR	Alargamiento del ala
B	Operador de discretización del término dependiente la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva
c	cuerda
C_D	Coefficiente de resistencia
C_f	Coefficiente de fricción
C_H	Coefficiente de fuerza horizontal

C_L	Coeficiente de sustentación
C_M	Coeficiente de momento
c_m	Cuerda media
C_P	Coeficiente de potencia. Coeficiente de presión
C_T	Coeficiente de tracción
C_V	Coeficiente de fuerza vertical
C_{F_a}	Coeficiente de fuerza impulsiva
$C_{L\alpha}$	Pendiente de sustentación
C_{Lmax}	Coeficiente de sustentación máximo
C_{P_s}	Coeficiente de potencia alternativa.
D	Resistencia
E	Módulo de Young
e	Espesor
E^*	Rigidez normalizada
err	error
f	Frecuencia. Cantidad escalar en un dominio espacial. Función aproximada. Fuerza interna
f^*	Cantidad escalar en un dominio de referencia
f^{**}	Cantidad escalar en un dominio de material
f_α	Frecuencia de <i>pitching</i>
f_h	Frecuencia de <i>heaving</i>
f_n	Frecuencia natural
f_v	Frecuencia de movimiento vertical en <i>Hovering</i>
FS	Factor de seguridad
h	Amplitud adimensional de la carrera de movimiento. Tamaño típico del elemento
h_a	Media amplitud de la carrera de movimiento
h_v	Media amplitud de movimiento vertical en <i>Hovering</i>
I	Momento de inercia flexural
J	Relación de avance
K	Elemento genérico
k	Frecuencia reducida. Iteración.
K_a	Constante positiva
K_b	Constante positiva
k_{efh2}	Frecuencia reducida en <i>hovering</i> bidimensional
k_{efh3}	Frecuencia reducida en <i>hovering</i> tridimensional

L	Sustentación. Operador de discretización del término independiente la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva. Longitud del elemento de viga
l	Longitud característica
l_e	Tamaño del elemento
Lv	Longitud de los vórtices formados en la estela de un flujo con desprendimiento estacionario sobre un cilindro.
M	Momento. Número de Mach
N	Dimensión espacial. Superficie normal evaluada en el centro del triángulo. Cantidad de nodos
n	Paso de tiempo genérico
$N_1...N_4$	Funciones de forma
n_a	Nodo aerodinámico
N_c	Norma del término convectivo
N_d	Norma del término difusivo
N_l	Norma del término independiente
n_{1e}, n_{2e}	Nodos de un elemento estructural bidimensional
P	Potencia
p	Presión
p_0	Presión inicial
$P_1...P_4$	Cargas nodales
p_c	Presión impuesta sobre el contorno
P_h	Proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos
p_h	Presión asociada al elemento
$q(x)$	Carga distribuida transversal
R	Longitud de la semienvergadura
Re	Número de Reynolds
Re_{fh2}	Número de Reynolds en <i>hovering</i> bidimensional
Re_{fh3}	Número de Reynolds en <i>hovering</i> tridimensional
Re_x	Número de Reynolds en función de la longitud de la placa
S	Superficie de referencia
s	Constante de reacción
St	Número de Strouhal
STB_p	Proyección del término de presión
STB_u	Proyección del término convectivo
T	Tracción o empuje. Energía cinética

t	Tiempo
t_0	Tiempo inicial
t_f	Tiempo final
tol	Tolerancia
U	Velocidad de referencia. Energía potencial de deformación
u	Velocidad sobre el elemento. Velocidad horizontal
u_n	Módulo de velocidad normal al contorno
u_{ske}	Vector velocidad asociado al elemento
v	Velocidad vertical
v_i	Componente de velocidad vertical
V_x	Velocidad en la dirección de x
W	Peso del vehículo. Trabajo
w	Desplazamiento transversal
x	Longitud de coordenadas
Y	Coordenada vertical
\mathbf{r}_k	Vector residuo para la relajación de Aitkens
\mathbf{u}_{k+1}	Vector desplazamiento calculado por el solver estructural en la iteración $k + 1$
T	Período del movimiento oscilatorio inducido
W_a	Trabajo virtual de las cargas aerodinámicas
W_e	Trabajo virtual de las cargas estructurales

SUBÍNDICES

max	Máximo
min	Mínimo
num	Numérico
pt	Presente trabajo
ref	Referencia
teo	Teórico

La aerodinámica de bajo Reynolds ha sido de interés para ingenieros y biólogos con el afán de entender su naturaleza y como aplicarla a la tecnología de vehículos de pequeña escala.

1.1 Visión general

Desde los años '90 momento en el que surge la denominación “Micro Air Vehicles”(MAV's), ha existido una atracción especial sobre la ciencia e ingeniería de estas pequeñas aeronaves. En un principio, se define como MAV's a los vehículos con una dimensión máxima de hasta 15 cm, comparables con pequeñas aves o murciélagos. Con el rápido progreso de los últimos años en áreas como el análisis estructural, ciencia de los materiales, comunicación y miniaturización de plantas propulsoras, muchos grupos alrededor del globo se animaron al desarrollo y construcción de MAV's [109].

Existen varios conceptos o alternativas al diseño, en donde se encuentran vehículos con ala fija (Fig.1.1a), alas rotatorias (Fig.1.1b), alas batientes (Fig.1.1c), o la combinación de ellos.

Además de las investigaciones ingenieriles, existe un gran apoyo por parte de los modelistas aficionados a esta área, que poseen un considerable conocimiento práctico capaz de aportar a desarrollos de relevancia. También existe un trabajo en paralelo con biólogos que proporciona valiosa información sobre las escalas, morfologías, potencias involucradas etc., ya que gran cantidad de especies de aves e insectos tienen dimensiones similares a los MAV's.

Se puede pensar que la naturaleza tiene cientos de millones de años de desarrollo en especies capaces de volar o nadar de forma eficaz y controlada. Para tener una idea de ello, se puede comparar la velocidad de un animal o vehículo, dada como la longitud de su propio cuerpo, por unidad de tiempo recorrido. Por ejemplo el cuerpo humano es capaz de recorrer cinco veces su cuerpo en un segundo, un caballo de carrera 18 cuerpos por segundo, un avión de transporte a su máxima velocidad 3.6 cuerpos por segundo, un avión militar que viaja a Mach 3, alcanza 32 cuerpos por segundo.

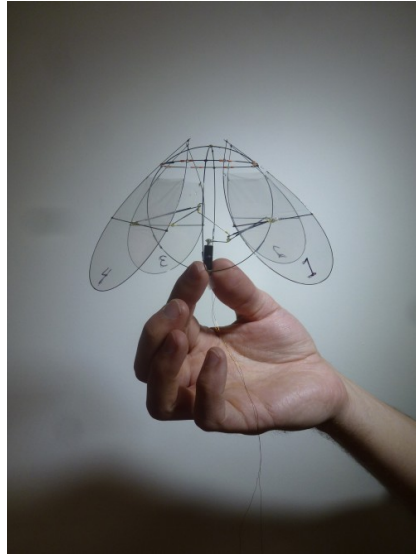
Ahora si se refiere a aves o insectos por ejemplo, una paloma es capaz de recorrer 75



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1: Modelos de MAV.1.1a Ala fija, 1.1b Alas rotatorias, 1.1c Alas batientes.

longitudes de su cuerpo en un segundo, un cisne 23 cuerpos por segundo y una mosca común, capaz de volar a 3 metros por segundo, recorre 430 longitudes de su cuerpo en ese mismo tiempo [47].

Para dar una noción de la maniobrabilidad, un avión acrobático es capaz de girar 400 grados en un segundo y una golondrina 5000 grados en ese lapso. Este ángulo está estrechamente vinculado a la fuerza G que el vehículo o animal es capaz de resistir, por ejemplo, un avión militar llega a 8 o 10 G y un ave puede tener desde 10 a 14 G en cualquier vuelo rutinario.

Obviamente que estas grandes diferencias se deben a la escala en la que se realiza, las fuerzas de inercia, las velocidades de pérdida y demás, pero deja una buena comparación cualitativa de la naturaleza y el alcance de la tecnología al día de hoy [47].

Recientemente, en la comunidad ingenieril y en particular la aeroespacial, se ha despertado el interés especial de la aerodinámica de bajo Reynolds y los potenciales que presenta en el desarrollo de MAV's, sobre todo en los métodos de propulsión poco convencionales en la práctica tecnológica actual. En cuanto a las utilidades que se pueden mencionar, están las

misiones de vigilancia, reconocimiento en lugares remotos, monitoreo de tráfico, fotografía y filmación aérea, exploración de catástrofes, entre otras [83].

Si bien es un panorama alentador, a lo largo de los últimos años, alas de tipo fijas y móviles han sido estudiadas en detalle para este tipo de aplicaciones, encontrándose una amplia caída en las prestaciones aerodinámicas respecto a aeronaves de gran porte, debido al predominio de fenómenos viscosos sobre el cuerpo y la estela. Además debe tenerse presente que el análisis a números de Reynolds menores a 10^5 , los factores aerodinámicos y las geometrías puestas en juego, deben acotarse a estrechos rangos separados de número de Reynolds para obtener una evaluación adecuada. Es decir que no es lo mismo hablar de cuerpos que vuelan a Reynolds menores a 10^4 que cuerpos que vuelan a Reynolds del orden 10^5 . Esto se debe a que los fenómenos fluido-dinámicos presentes son muy sensibles a la variabilidad de este parámetro.

Luego, el camino a seguir parece ser la imitación de la naturaleza. El estudio de alas batientes promete ser la clave para que las deficiencias aerodinámicas encontradas sean subsanadas [107] y contrariamente a un ala fija, el flujo no permanece adherido a la superficie en todo instante, si no que se aprovechan los desprendimientos característicos de borde de ataque y de fuga, para lograr altos picos de sustentación, mayor eficiencia y sobre todo nuevos fenómenos que en el flujo estacionario no están presentes, como por ejemplo, la propulsión [33].

1.2 Breve reseña histórica del flujo inestacionario y a ultra-bajo Reynolds

En esta sección se presenta una breve síntesis de los estudios más relevantes de carácter experimental como numérico al día de hoy. Hay una gran cantidad de documentos referidos a este tema provenientes del área de biología, ingeniería y aerodinámica desde hace siglos.

Desde Leonardo da Vinci con sus bocetos de aeronaves, hasta Otto Lilienthal, gran pionero de la aeronáutica moderna, imaginaron y experimentaron cantidades de modelos de alas fijas y móviles. Lilienthal descubrió que agregar combadura a una placa plana permitía obtener mayor sustentación en sus planeadores. Este último, luego de su muerte, fue quien inspiró a los hermanos Wright en su carrera por desarrollar una aeronave capaz de volar bajo control. Luego el estudio de vehículos a gran escala con alas batientes se desanimó con la llegada de los primeros aeroplanos.

Las primeras teorías en flujo inestacionario de perfiles sólo se basaban en vuelo *heaving* (oscilación vertical). En estudios independientes Knoller [70] 1909 y Betz [116] 1912 sumergieron en una corriente libre un perfil con este tipo de movimiento, creando un ángulo de ataque efectivo para el cuerpo y como resultado obtuvieron una fuerza normal con componentes vertical (sustentación) y horizontal (empuje) hoy conocido como el efecto Knoller-Betz. Luego Katzmayer validó este efecto en un túnel de viento en 1922.

En 1930, con las características aerodinámicas alcanzadas en las alas, el estudio del flujo inestacionario se centró en el área de aeroelasticidad con el fenómeno de *flutter* y los problemas

que acarrea. En esa misma década, Theodorsen [8] utilizó la hipótesis de flujo incompresible no viscoso totalmente adherido a la superficie con pequeñas oscilaciones sinusoidales como movimiento inducido. Además se cumplía con la condición de Kutta sobre el borde de fuga y la estela estaba compuesta de vórtices de intensidades variables en forma sinusoidal. Esta teoría constituyó un modelo estándar para el análisis de problemas aeroelásticos.

Karman y Burger [124] ofrecieron la primera explicación teórica de la resistencia y empuje generado en perfiles *heaving* y Garrick [45] al mismo tiempo demostraba que el empuje generado en este tipo de movimiento se daba para un cierto rango de frecuencias; y para perfiles *pitching* (movimiento de cabeceo) ocurría algo similar pero con la dependencia además, de la posición del pivot. Luego le sucedieron análisis de flujo potencial inestacionario más sofisticados, donde se combinaban movimientos de poca amplitud, con simplificaciones severas como la aplicabilidad únicamente a perfiles delgados.

Con el advenimiento del cálculo por computadoras, comenzaron a aparecer códigos de flujo potencial más complejos donde ya se podían tener en cuenta efectos tridimensionales como el espesor y formas arbitrarias de perfiles. Estos métodos eran denominados métodos de paneles. Quienes desarrollaron con mayor profundidad este tipo de modelos fueron Teng [115], Platzer *et al.* [99] y Jones *et al.* [98].

En el modelo potencial no se puede predecir el punto de separación del flujo, hay que establecerlo en todo momento y se debe cumplir la condición de Kutta para la convección de vórtices hacia la estela. Esto no es necesario en software numéricos de Navier-Stokes, ya que el punto de separación no se establece a priori y permiten tener la formación de vórtices de borde de fuga y de ataque con el desprendimiento viscoso en la sección que debe ocurrir.

Con el avance computacional, estos últimos ganaron terreno y han sido usados en la simulaciones de aerodinámica inestacionaria, más precisamente en alas y perfiles batientes.

Algunos trabajos recientes con modelos que consideran las ec. de Navier-Stokes son tomados como referencia, por ejemplo Young y Lai [136] mostraron la estructura de vórtices en la estela y la fuerte vinculación de la frecuencia de oscilación con la sustentación y el empuje. Isogai *et al.* [62] calcularon la eficiencia propulsiva para varias combinaciones de frecuencias y fases en un perfil y el efecto de la pérdida dinámica en dicha eficiencia. Kunz [73] en su tesis doctoral estudia diferentes geometrías sobre perfiles a números de Reynolds ultra-bajos para luego aplicarlas al diseño de micro-rotores. Liu *et al.* [80] utilizaron un software 3D de Navier-Stokes en la simulación del vuelo suspendido (*hovering*) de una polilla. Wang [129] observó el comportamiento de un perfil elíptico sobre las características propulsivas en vuelo suspendido. Pedro *et al.* [94] estudiaron la eficiencia propulsiva de un perfil acuático a Reynolds 1100. Hover *et al.* [56] utilizaron movimientos sinusoidales y no sinusoidales en perfiles con movimiento vertical y de cabeceo, con el fin de comparar las eficiencias propulsivas de los ángulos de ataque temporales. Tuncer *et al.* [118][119][120] estudiaron el efecto de la separación sobre la propulsión generada en perfiles con movimiento vertical, de cabeceo y combinado.

Desde el punto de vista experimental se pueden mencionar varios trabajos de interés y que sirvieron para validar códigos numéricos aplicados en esta rama. Entre ellos Lai y Platzer [76], visualizaron en un túnel de agua perfiles sometidos a movimientos oscilatorios, proporcionando valiosa información sobre la topología de la estela y su vinculación con la propulsión. Triantafyllou *et al.* [117] basado en los resultados experimentales de Koochesfahani [72] y un análisis de estabilidad lineal de un perfil de velocidades promedio, concluyó que la eficiencia propulsiva óptima se obtiene cuando ocurre la máxima amplificación espacial de la estela. Anderson *et al.* [1] observaron en sus experimentos que el ángulo de fase entre el movimiento vertical y de cabeceo, es clave en la máxima eficiencia propulsiva. Jones y Platzer [97] demostraron que dos perfiles en configuración de biplano y oscilando en contra-fase, tienen mayor eficiencia propulsiva que un perfil simple.

Recientemente Heathcote y Gursul [49] realizaron experimentos en un túnel de agua en perfiles flexibles en movimientos de *heaving* y *pitching*, observando que el pico de propulsión cambia para ambos movimientos manteniendo fijas las amplitudes. Miao y Ho [85] estudiaron el efecto de la amplitud flexural sobre perfiles batientes para diferentes combinaciones de frecuencias reducidas y números de Reynolds. Ellos observaron una mejora en la eficiencia propulsiva para una amplitud flexural del 30 % de la cuerda y a un número de Strouhal de 0.225.

Kang y Shyy [66] realizaron estudios numéricos sobre una placa plana flexible sometida a vuelo *hovering*, con el fin de obtener la influencia de la flexibilidad y la frecuencia reducida sobre los coeficientes aerodinámicos. Olivier [91] en su tesis doctoral, estudió las características aerodinámicas de una placa plana mediante un código computacional particionado de interacción fluido-estructura. El algoritmo estructural que utiliza, contempla desplazamientos geométricos no lineales.

Yin y Luo [134] estudiaron el efecto de la inercia estructural sobre la sustentación y la propulsión en perfiles aerodinámicos flexibles sometidos a vuelo *hovering*. Encontraron que alas con baja inercia producen menor resistencia, mayor sustentación y mayor eficiencia propulsora. Además, la deformación del ala produce gran influencia sobre los los vórtices circundantes al ala.

Es de notar que a la fecha existen diversos trabajos que presentan resultados experimentales y de simulaciones numéricas, que tratan sobre el flujo a ultra-bajo Reynolds en alas batientes 3-D. En este sentido se pueden referenciar, por ejemplo, los trabajos de Shyy *et al.* ([109], [110], [106], [108]), Koehler *et al.* [71], Di *et al.* [32], Hedrick *et al.* [52] y Nakata and Liu [88]. Así, se puede mencionar que en el campo de la mecánica de fluidos aplicada a la biología (bio-fluid) se observa que el vórtice de borde de ataque (LEV) es la principal fuente de sustentación para grandes insectos (libélulas, por ejemplo). Sin embargo, se observa que en 3-D el LEV crece hasta un cierto tamaño y luego se estabiliza, mientras que esto no ocurre en 2-D. El objetivo de trabajos recientes centrados en la visualización del flujo 3-D [71] es capturar los mecanismos de formación, adhesión y convectado (shedding) de los LEV's así como también obtener pistas

o información acerca de por qué dichas estructuras vorticosas son más estables en 3-D que en 2-D, analizando para ello el flujo en la dirección de la envergadura. Shyy *et al.* [110] mencionan que para alas batientes de bajo alargamiento, los vórtices de puntera de ala (TIV's) pueden funcionar como un mecanismo para incrementar la sustentación de dos maneras: a) creando una región de baja presión en la puntera de ala y b) extendiendo y estabilizando el LEV de manera tal de retrasar el desprendimiento o incluso aún, evitándolo. También encuentran que para ciertas cinemáticas de alas batientes, el LEV permanece adherido a lo largo de la envergadura y los efectos del TIV no son importantes, por lo cual el alargamiento del ala no afecta a la aerodinámica. Se conocen varios mecanismos 3-D que son responsables del incremento de la sustentación de alas batientes. Uno de ellos es la captura de la propia estela y otro es el retraso de la pérdida del LEV, la cual depende de la estabilidad del LEV. A altos Reynolds, se encuentran que el LEV puede estabilizarse debido al flujo en la dirección de la envergadura en el núcleo del vórtice, y que a Reynolds ultra-bajos el flujo inducido por los TIV's contribuye a su estabilidad. En Shyy *et al.* [65] se menciona que de sus simulaciones de Navier- Stokes han identificado mecanismos físicos que afectan la aerodinámica de alas batientes a ultra-bajos Reynolds. Uno de ellos es un jet hacia abajo, persistente, en la estela y en los TIV's. Finalmente, en Shyy *et al.* [106] se menciona que a Reynolds 6000, para el caso de la mariposa Hawkmoth, el LEV es intenso, cónico y con un flujo en la dirección de la envergadura significativo en el núcleo del LEV, el cual se rompe al 75 % de la envergadura. A Reynolds 120, representativo para las moscas de la fruta, el LEV está conectado con el TIV y el flujo en la dirección de la envergadura es más débil.

Otros trabajos destacados en el área que se pueden mencionar son: Lee *et al.* [69] analizaron el efecto de la flexibilidad estructural sobre un ala de insecto bidimensional sometida a vuelo *flapping*. Ellos imitaron la cinemática de vuelo de una mosca (*blowfly*) para realizar el análisis. Estudiaron diferentes distribuciones simples de rigidez sobre la cuerda y analizaron los diferentes puntos sobre la carrera donde se produce la mayor sustentación y la mayor propulsión. Berman y Wang [7] investigaron diferentes tipos de cinemáticas para vuelo de insectos (*hovering*), con el fin de optimizar el consumo de potencia teniendo en cuenta la sustentación adecuada para sostener el peso del cuerpo implicado. Miller y Peskin [86] utilizaron un código CFD para estudiar los cambios en la sustentación y en la dinámica de vórtices para números de Reynolds entre 8 y 128. En el código numérico implementaron la técnica de condiciones de contorno inmersas (*immersed boundary method*) para computar la cinemática de un perfil bidimensional.

1.3 Motivación y objetivos del trabajo

La motivación para la elaboración de este trabajo es que el conocimiento base existente sobre el comportamiento de perfiles alares a números de Re ultra-bajos es mínimo en comparación

con la cantidad de alternativas que se presentan. La necesidad de una comprensión mayor de los problemas en esta área hace que el análisis bidimensional (2D) sea un punto de partida práctico. Estos análisis, por ser relativamente rápidos, permiten el estudio de una matriz de casos computacionales mayor y más variada, lo cual es importante cuando la investigación es exploratoria tanto en geometría como en propiedades del flujo.

La investigación está enfocada en la obtención de datos que permitan una comprensión clara del comportamiento de geometrías aerodinámicas estándares en flujo de ultra-bajo Reynolds. Tanto el estudio estacionario como inestacionario de perfiles rígidos y flexibles son de competencia para áreas específicas de desarrollo como palas de micro-rotores oscilantes, eficiencia de microplaneadores, vehículos propulsados con alas batientes, cuadricópteros, estudios de interacción fluido-estructura, etc. Y con respecto al flujo, el comportamiento de la capa límite a este régimen, la topología de estela, la pérdida dinámica, la formación y difusión de vórtices, la influencia de los parámetros adimensionales de gobierno y las cualidades aerodinámicas de cada geometría.

Los objetivos a plantearse para el presente trabajo son:

- Comprender las cualidades del flujo a ultra-bajo Reynolds. Capa límite, puntos de separación, distribución de presiones y otros.
- Estudiar los parámetros geométricos sobre perfiles estándares como la relación de espesor y la combadura en flujo estacionario.
- Analizar los parámetros geométricos sobre perfiles estándares como la relación de espesor y la combadura en flujo inestacionario, más específicamente en cinemáticas como *heaving*, *pitching* y *flapping*.
- Conocer como es el rol de parámetros adimensionales fundamentales como el número de Strouhal, frecuencia reducida y número de Reynolds en flujo inestacionario en el régimen planteado. Entender la influencia de la cinemática de vuelo sobre la aerodinámica de perfiles.
- Desarrollar un código particionado de interacción fluido-estructura bidimensional, que sea lo suficientemente robusto para simular casos donde la interacción es fuerte. Además, contemplar efectos de masa adicionada.
- Utilizar el código desarrollado de interacción fluido-estructura con el objetivo de estudiar los fenómenos que se presentan en perfiles flexibles sometidos a flujo inestacionario. Principalmente la variación de flexibilidad y del factor de interacción fluido-estructura como parámetros gobernantes de los problemas.
- Expandir el área de conocimiento en esta rama de estudio, con la finalidad de generar futuras áreas de trabajo, como por ejemplo dinámica del vuelo de MAV, control,

biomimética, cinemáticas, flujos con transición, biología, etc.

1.4 Resumen del trabajo por capítulos

Para cumplir los objetivos planteados en el presente trabajo, se decidió dividir la tesis en 8 capítulos. En el Cap. 1 se presenta un panorama general del tema, las investigaciones relevantes a la fecha, las motivaciones y los objetivos a cumplir.

En el Cap. 2 se ponen en evidencia las principales controversias que se asumen sobre la física del vuelo a ultra-bajo Reynolds y las herramientas que se utilizan para representarla, las hipótesis que se realizan para simplificar el estudio, el concepto de vuelo estacionario e inestacionario y su relación con la naturaleza, parámetros adimensionales fundamentales, cinemáticas intervinientes, geometrías flexibles y parámetros fundamentales de interacción fluido-estructura.

En el Cap. 3, se desarrollan las ecuaciones de gobierno para flujo viscoso incompresible laminar. Posteriormente se plantean estas ecuaciones para un sistema Euleriano-Lagrangiano Arbitrario ó ALE por *Arbitrary Lagrangean-Eulerian*. Luego se detalla el método numérico aproximado a utilizar para resolver dichas ecuaciones de gobierno. Se evidencian paso a paso las discretizaciones espaciales (elementos finitos) y temporales (pasos fraccionados) aplicadas, en conjunto con el método de estabilización para el correcto funcionamiento del código. Posteriormente, se presenta el modelo estructural elástico, el método de discretización del problema y los integradores temporales a utilizar. Luego se detalla un algoritmo para la implementación del movimiento de la malla. Finalmente, se introducen los tipos de algoritmos de interacción fluido-estructura, la implementación y el concepto de fuerzas actuantes sobre un cuerpo sumergido.

En el Cap. 4 se realizan una serie de pruebas numéricas que se contrastan con resultados tanto teóricos como experimentales obtenidos de la bibliografía, ya sea para flujo estacionario, inestacionario y de interacción fluido-estructura, con el objetivo de llevar a cabo la validación y verificación del código numérico.

En el Cap. 5 se presentan estudios base para el conocimiento del comportamiento de diferentes perfiles rígidos en flujo estacionario a números de Reynolds ultra-bajos. Se tienen en cuenta variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y la posición de la misma sobre la cuerda del perfil y el espesor. Además, se estudia la posición del desprendimiento del flujo cercano al cuerpo, su espesor en función del número de Reynolds y como influencia a los parámetros aerodinámicos de mayor importancia.

Luego en el Cap. 6 se exponen resultados de simulaciones sobre perfiles aerodinámicos rígidos sometidos a flujo inestacionario. Principalemente el mismo se divide en las cinemáticas más importantes como *heaving*, *pitching* y *flapping*, donde se estudia el comportamiento de perfiles aerodinámicos en función de sus características geométricas, parámetros adimensionales de flujo y cinemáticos intervinientes. Además se presentan algunos casos de vuelo *hovering*

simétrico y asimétrico.

En el Cap. 7 se estudian los efectos que causa la flexibilidad y el factor de intensidad de interacción sobre los coeficientes aerodinámicos más importantes en vuelo *heaving* y *flapping*. Se analizan diferentes geometrías y cinemáticas de vuelo con el objetivo principal de observar las performances propulsivas de los perfiles. Se analizan los modos de deformación de cada caso y sus repercusiones sobre el flujo circundante.

En el vuelo *hovering* de perfiles flexibles se diferencian dos tipos de vuelo: *hovering* simétrico y *hovering* asimétrico en un marco biomimético, ya que se toman parámetros geométricos, cinemáticos y dinámicos de insectos reales. El enfoque principal está dado sobre la propulsión y las performances obtenidas en función de la flexibilidad, la masa de la estructura y las cinemáticas del vuelo.

Finalmente se expresan las conclusiones y trabajos a futuro.

AERODINÁMICA DE ULTRA-BAJO REYNOLDS

Para una mayor interpretación del vuelo de micro vehículos o de animales pequeños, se estima necesario dar una noción o marco general del tema y de los parámetros requeridos para un estudio puntual, además de poner en evidencia las principales controversias y falencias sobre la física y las herramientas que se utilizan para representar dicho vuelo y que al día de hoy, siguen vigentes. Sobre el concepto “ultra-bajo” aplicado al número de Reynolds de vuelo, cabe aclarar que es un término subjetivo y netamente aeronáutico que se utiliza con el fin dar un lugar a los MAV’s en su amplio campo de estudio, [109].



Figura 2.1: Microvehículo aéreo capaz de ejercer tanto el vuelo estacionario como el inestacionario, [22].

En este capítulo se presenta en que contexto la aerodinámica de ultra-bajo Reynolds debe ser tratada, que hipótesis deben ser tomadas para simplificar el estudio, el vuelo inestacionario y su relación con la naturaleza, cinemáticas intervinientes, parámetros adimensionales fundamentales etc.

2.1 Aerodinámica del vuelo estacionario

Numerosas aplicaciones pueden encontrarse en la literatura de estados de vuelo estacionario a números de Reynolds muy bajos (fig. 2.1). Existen microvehículos de ala fija o móvil capaces de desarrollar el vuelo controlado en este régimen y para ello necesitan de una geometría adecuada y eficiente para lograr ese objetivo. Dicha geometría difiere totalmente si se la compara con la de un avión tripulado de grandes dimensiones y además la naturaleza se encarga de proveer soluciones particulares referentes a cada caso.

2.1.1 Escala de vuelo y parámetros adimensionales del flujo estacionario

Un diagrama interesante que resume la amplia escala de vuelo que va desde insectos a aeronaves tripuladas, se puede ver en la fig. 2.2 [109], donde se expone la correlación entre velocidad de vuelo de crucero, peso y carga alar. Con los avances de las técnicas actuales aplicadas a MAV's, sus dimensiones, su carga alar y su potencia disponible, hacen posible un descenso continuo hacia la esquina inferior izquierda de la gráfica.

En la aerodinámica subsónica, donde los efectos de compresibilidad pueden no ser tenidos en cuenta, el parámetro al que debe referenciarse cualquier diseño es el número de Reynolds. Dicho número se puede expresar de la siguiente forma

$$Re = \frac{\rho_f U l}{\mu} = \frac{U l}{\nu} \quad (2.1)$$

donde U es la velocidad, l una longitud característica, ρ_f la densidad del fluido, μ la viscosidad dinámica y ν la viscosidad cinemática. El número de Reynolds define la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en un fluido en movimiento.

Otro parámetro es la sustentación en vuelo recto y nivelado que se expresa

$$L = W = \frac{1}{2} \rho_f S C_L U^2 \quad (2.2)$$

donde S es la superficie alar de referencia, W el peso y C_L el coeficiente de sustentación. Para el caso de un perfil alar bidimensional (2D), la sustentación por unidad de envergadura se escribe

$$L = \frac{1}{2} \rho_f c C_L U^2 \quad (2.3)$$

donde c es la cuerda del perfil.

La carga alar se define como

$$\frac{W}{S} = \frac{\rho_f U^2}{2} C_L \quad (2.4)$$

y la resistencia aerodinámica por unidad de envergadura de un perfil 2D se puede escribir de

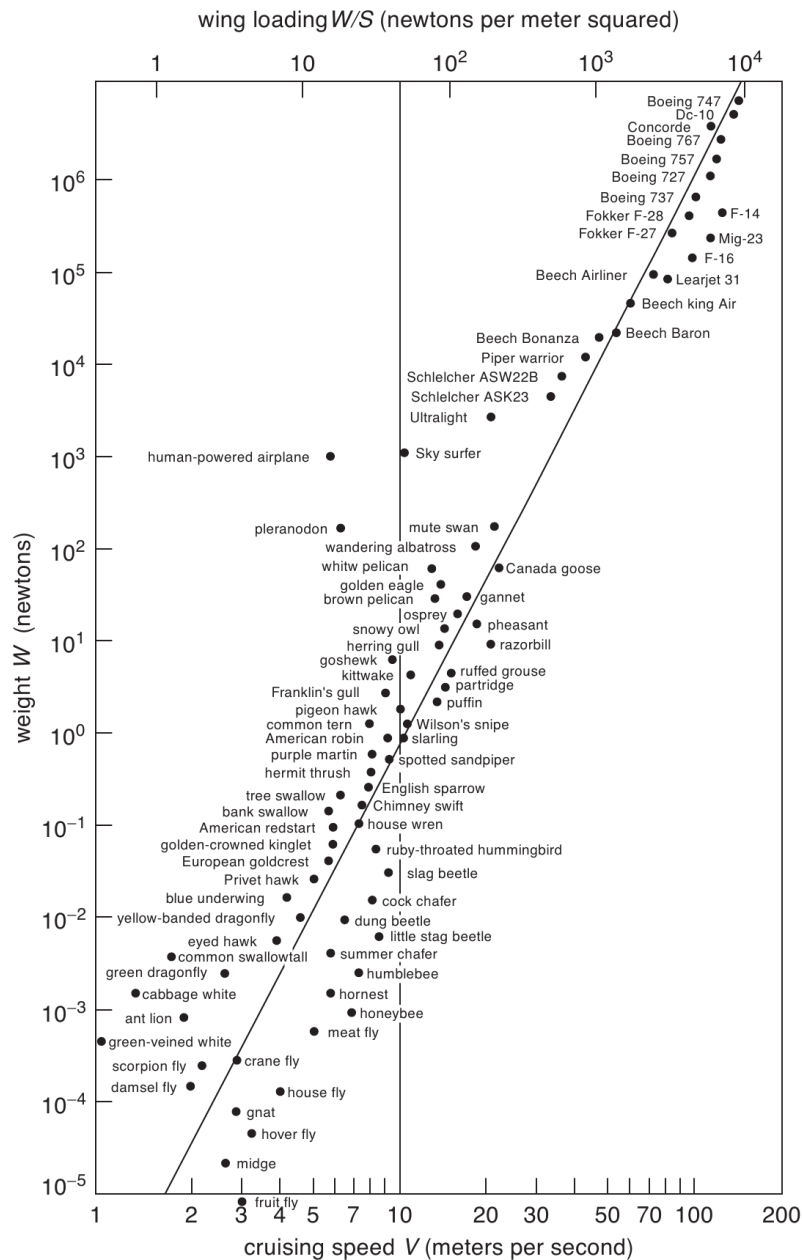


Figura 2.2: Diagrama general de vuelo que expone las relaciones entre peso, velocidad de crucero y carga alar [109].

la siguiente manera

$$D = \frac{1}{2} \rho_f c C_D U^2 \quad (2.5)$$

donde C_D es el coeficiente de resistencia.

Otra figura interesante es la 2.3, donde se relacionan el número de Reynolds, el número de Mach y los tipos de vehículos aéreos que operan en cada rango. La fig. 2.3 destaca que para

aeronaves que vuelen aproximadamente en rangos de Re menores a 7000, el flujo es laminar, es decir predomina la viscosidad sobre la inercia.

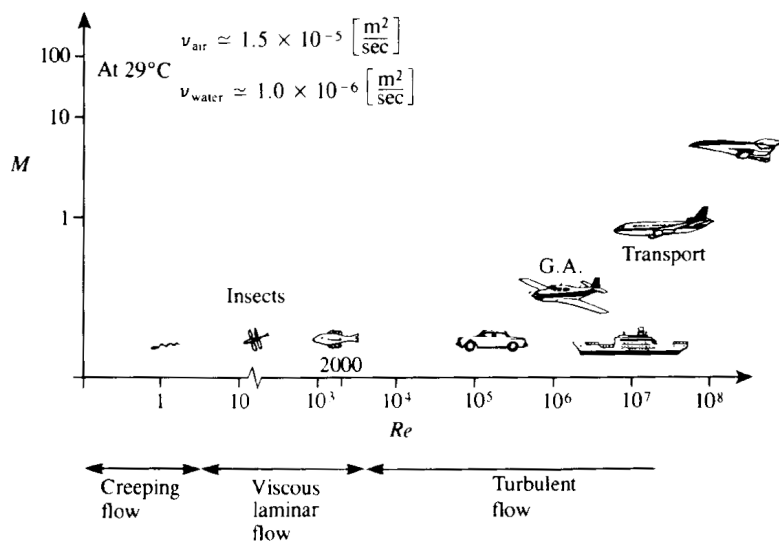


Figura 2.3: Relación entre número de Reynolds y número de Mach.[68]

2.1.2 Sobre las hipótesis del flujo

El flujo a estudiar en este trabajo se basa en un fluido newtoniano, con las ecuaciones de Navier-Stokes como ecuaciones de gobierno.

Como primera hipótesis, el flujo se asume incompresible, ya que el número de Mach en cualquier análisis de esta tesis es $M \ll 0,3$. La segunda simplificación asume que el flujo es completamente laminar. Esta hipótesis es un tanto incierta, ya que depende del número de Reynolds, del ángulo de ataque, de la distribución de presión, de la geometría y de la rugosidad de la superficie. Esta simplificación se tratará a continuación.

A números de Reynolds altos, tal como ocurre en aeronaves de transporte donde su valor supera ampliamente 10^6 , los desprendimientos ocurren a altos ángulos de ataque y el flujo se caracteriza por ser turbulento en su totalidad. En cambio, a números de Reynolds bajos es importante destacar que al impactar el flujo sobre el cuerpo en estudio, el mismo puede tener el carácter laminar y luego transicionar a turbulento debido a la presencia de gradientes adversos de presión. De aquí surgen dos posibilidades, que el flujo se separe de la superficie por completo, o que una vez separado vuelva a adherirse pero con la capa límite ya transicionada a turbulenta, previa formación de una burbuja denominada burbuja de separación laminar, fig. 2.4.

Dicho fenómeno es importante de mencionar, ya que su formación induce un cambio en la geometría efectiva del perfil, dando lugar a una variación importante en sus cualidades aerodi-

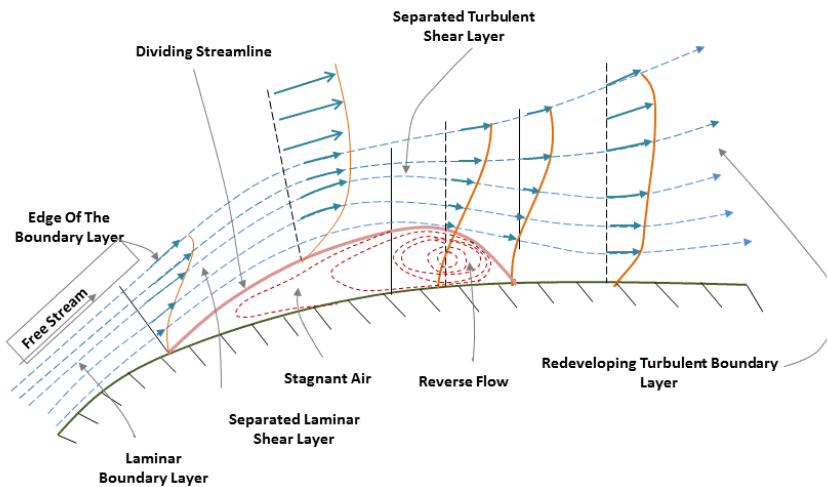


Figura 2.4: Burbuja de separación laminar.

námicas. Varios experimentos fueron realizados por distintos autores con el fin de observar y determinar, principalmente, cuando y como ocurre el fenómeno de separación laminar. El más importante puede decirse que fue el que realizó Carmichael [12], donde estableció una regla empírica que dice que el flujo va a readherirse sobre la superficie de un perfil, si el número de Reynolds basado en la corriente libre y considerando como longitud de referencia la distancia desde el punto de separación hasta el punto donde vuelve a adherirse, es aproximadamente 50000. Si es menor, el flujo no vuelve a adherirse y si es ligeramente mayor, se formará una burbuja de gran longitud sobre el extradós. Finalmente, el tamaño de la misma se reduce con el aumento del número de Re .

Si bien esta regla debe ser usada con cautela, en el presente trabajo los números de Reynolds a tratar son menores a 10000. Por ende, se puede asumir que el flujo se encuentra lejos de presentar algún desprendimiento laminar con posterior transición a turbulento, lo cual habilita el uso de la hipótesis de flujo totalmente laminar. Para mayores detalles consultar la ref. [109].

2.2 Aerodinámica del vuelo inestacionario

El ejemplo más claro del flujo inestacionario, es el desarrollado por aves e insectos capaces de volar y maniobrar de manera casi perfecta, acelerando y desacelerando con pleno control. Ellos tienen la habilidad de generar sustentación y a la vez empuje a través de sus alas. Por

ejemplo el vuelo de pájaros puede dividirse de dos maneras: vuelo sin potencia (*gliding* y *soaring*) y vuelo con potencia (*flapping* y *hovering*).

Dicha experiencia extraída de la naturaleza, facilita la comprensión del fenómeno físico para luego llevarla a las aplicaciones tecnológicas desarrolladas por el ser humano (MAV).

2.2.1 Vuelo sin potencia

Para formalizar, se decide describir este tipo de vuelo observado en aves con el fin de tener un mejor panorama del tema, sin entrar luego en mayores detalles, como sí se lo hace con vuelos que brindan algún tipo de tracción o empuje.

Gliding o planeo es cuando la sustentación se produce mediante el ala a una determinada altura en un campo gravitacional y con un ligero ángulo de ataque respecto a la corriente libre, sólo que el animal o microvehículo utiliza su propio peso como fuerza de propulsión. Es decir, que al avanzar en el aire, existe una resistencia ejercida sobre el ala y el cuerpo que produce una pérdida de velocidad, lo que implica una pérdida de sustentación, de allí que el animal debe transformar energía potencial en cinética. Otro parámetro importante, es el ángulo entre la corriente de aire que impacta al cuerpo y la dirección de movimiento, dicho ángulo se denomina ángulo de planeo y es directamente proporcional a la relación sustentación-resistencia (L/D), la cual aumenta con el número de Reynolds. Esto quiere decir que para grandes aves o vehículos de similar tamaño, dicha relación es considerablemente alta $L/D \approx 19$ lo que permite realizar maniobras controladas sin demanda de potencia. En aves o insectos de pequeño tamaño, esto no se observa ya que el Re es ampliamente menor al igual que la relación $L/D \approx 1,8$.

Desde el punto de vista a analizar, el *gliding* puede ser considerado como un vuelo estacionario de a tramos, donde cada tramo termina con cambio de altura.

El otro tipo de vuelo sin potencia es *soaring*¹ fig. (2.5), el cual es similar al anterior, sólo que el animal o vehículo para elevarse, se sumerge en una corriente ascendente de aire atmosférico de origen térmico o por desnivel geográfico.

2.2.2 Vuelo con potencia

Flapping es el tipo de vuelo desarrollado por animales o microvehículos aéreos, capaces de generar sustentación y tracción mediante el movimiento cíclico de sus alas. El mismo posee una mayor complejidad de la que puede encontrarse en cualquier aeronave con ala de geometría fija.

El vuelo *flapping* [47] o batiente envuelve dos etapas: una es *power stroke* o *downstroke* y es la que provee la mayor parte de la sustentación y tracción. El movimiento del ala consta de un desplazamiento hacia abajo y hacia atrás respecto del ave, siendo variable a través de la envergadura, es decir que en la cuerda de raíz existe poco desplazamiento y giro, y en la

¹planeo sin pérdida de altura (vuelo en corriente ascendente)

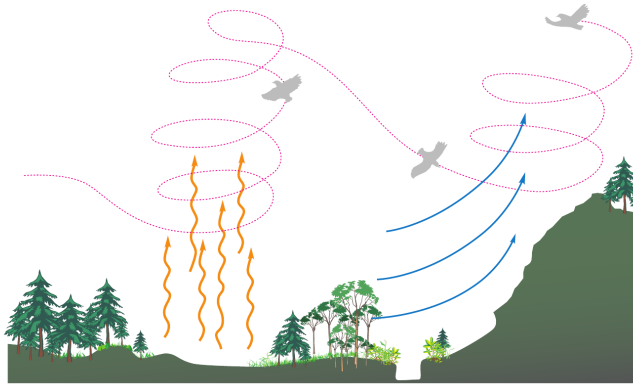


Figura 2.5: Esquema de vuelo *soaring* [47].

cuerda de puntera una gran traslación. El objetivo es mantener el ángulo de ataque ideal para cada sección del ala, de tal manera de producir una gran fuerza sustentadora con poca pérdida de altitud y a su vez, como dicha fuerza está ligeramente inclinada hacia adelante, produce propulsión.

La segunda etapa es la carrera hacia arriba o *upstroke* y trata de llevar el ala con la mayor velocidad y menor resistencia posible a la posición de inicio de la carrera hacia abajo. En dicha carrera el ala se pliega hacia el cuerpo, es decir que acorta la envergadura con un ángulo de ataque que proporcione la menor resistencia. A su vez en dicha carrera, se produce algo de sustentación que es suficiente para que el cuerpo no pierda altitud.

El otro tipo de vuelo con potencia característico, es *hovering* o vuelo suspendido. Tiene las mismas etapas que el vuelo batiente, sólo que el objetivo es mantener el cuerpo del animal o vehículo en una posición fija. Aquí toda la potencia está destinada a mantener la sustentación, dependiendo de la forma, del tamaño, los grados de libertad y el momento de inercia del ala, cosa que no es factible en muchas especies de aves.

Este tipo de vuelo se observa con mayor frecuencia en aves pequeñas e insectos. Las aves de mayor tamaño lo desarrollan pero por tiempos muy breves.

Existen dos tipos de vuelos suspendidos, *hovering* simétrico y *hovering* asimétrico [47], [109], (fig. 2.6). El primero tiene la particularidad de mantener el ala extendida durante toda la carrera y sólo se observa en insectos o aves de pequeño tamaño como el colibrí. Cuando la carrera es hacia adelante, el ala rota sobre su eje longitudinal de tal manera que el extradós se transforma en el intradós y viceversa. Dicho vuelo suele denominarse *insect-stroke*.

El segundo se encuentra en aves de mayor tamaño, incapaces de girar el ala por completo, por ende sólo se extiende en su totalidad en la carrera de *downstroke* (*power-stroke*) y es plegada hacia el cuerpo del animal, en la carrera de *upstroke* (*recovery-stroke*) para disminuir la resistencia. Este vuelo suele denominarse *avian-stroke*.

El vuelo *hovering* es el que ha planteado mayores incertidumbres a lo largo de los años,

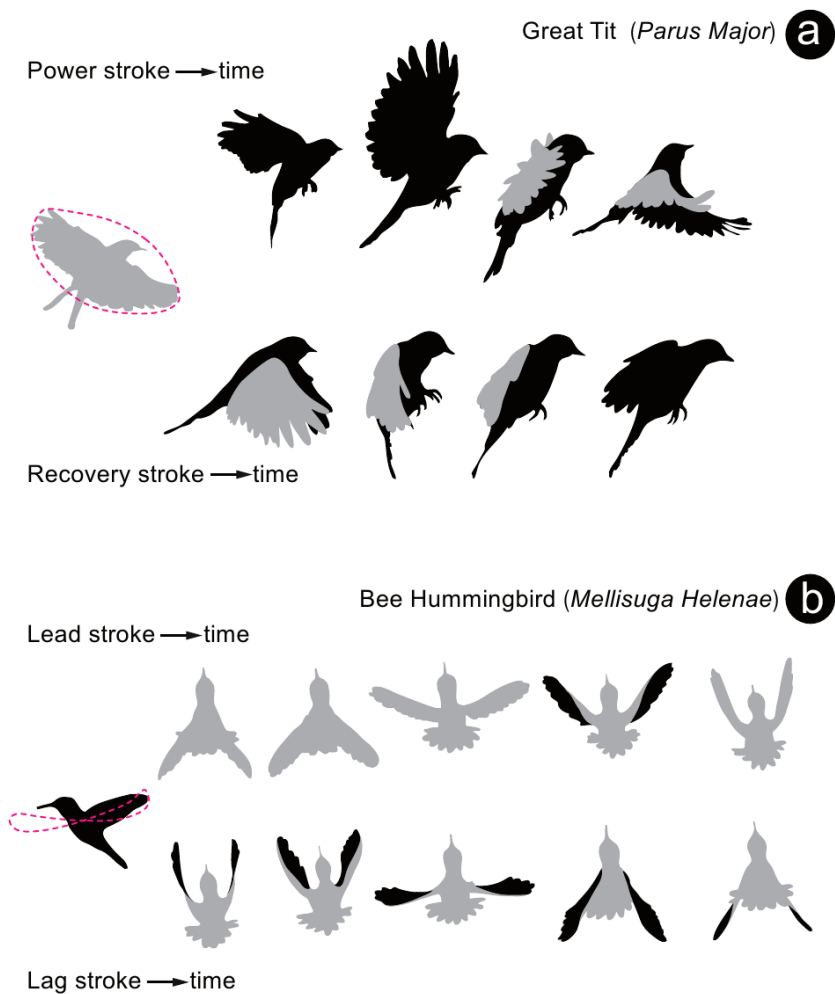


Figura 2.6: Esquema de los tipos de vuelos suspendidos.[a] Asimétrico. [b] Simétrico. [47].

debido a la presencia y complejidad de fenómenos simultáneos. La variabilidad de cinemáticas de vuelo y las distintas geometrías encontradas en la naturaleza, más la cantidad de variables fluido-dinámicas involucradas, abren un abanico inmenso de posibilidades a explorar y campos de estudio aún desconocidos.

Mantener el vuelo *hovering* es desde el punto de vista energético muy costoso. Por lo tanto cabe preguntarse como especies tan diminutas son capaces de volar por tiempos prolongados y como es la optimización de la potencia puesta en juego para llevarlo a cabo. De aquí surgen muchos trabajos que hasta el día de hoy tratan de explicar este fenómeno tan esencial para la tecnología de microvehículos.

2.2.3 Producción de potencia y efecto sobre la estela

En esta sección se trata de explicar como es que las aves o microvehículos generan una fuerza propulsora hacia adelante mediante el batimiento de sus alas.

En 1935 Karman y Burgers modelaron el flujo a bajo número de Reynolds alrededor de un cuerpo romo, observando la formación de dos filas de vórtices detrás del cuerpo con signo alternado. Esta configuración de la estela es conocida como calle de vórtices de von Karman. En la fig. 2.7 puede verse que los vórtices de la fila de arriba son de sentido horario y los de la fila de abajo son anti-horarios. La consecuencia de ello es la aparición de un déficit en la velocidad de la estela respecto a la velocidad de la corriente libre. Luego, el efecto resultante es la producción de una fuerza de resistencia.

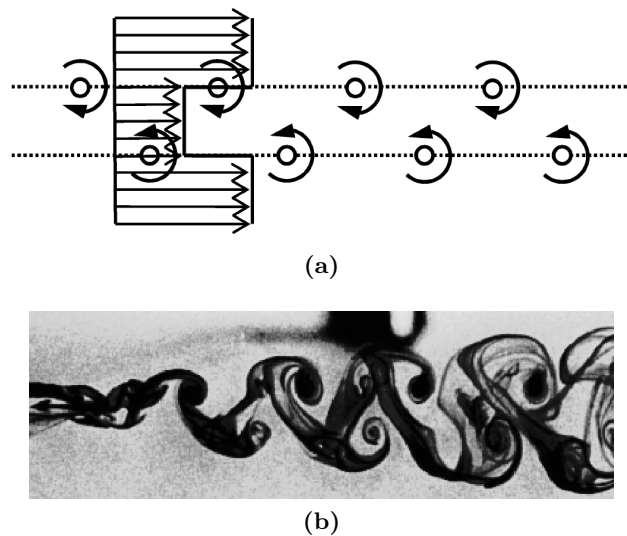


Figura 2.7: Calle de vórtices que indica la producción de resistencia.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].

Ahora cuando un perfil es sometido por ejemplo a un movimiento sinusoidal vertical, también se puede encontrar un desprendimiento de vórtices desde el borde de fuga con formato similar al descrito anteriormente, pero con la particularidad de que los vórtices poseen un sentido de giro contrario al de la fig. 2.7a. Esto hace que la velocidad del flujo en la estela sea mayor a la de la corriente libre. Este fenómeno conocido como calle reversa de von Karman, fig.2.8 es el responsable de la producción de tracción o fuerza propulsora.

La conclusión interesante que se obtiene de estos dos análisis, es que el espaciado vertical entre ambas filas de vórtices de la estela es proporcional a la resistencia o la propulsión generada por el cuerpo, dando así una pauta cualitativa del fenómeno.

Existe además un caso neutral donde el espacio vertical entre ambas filas es nulo, lo cual refleja un equilibrio de la cantidad de movimiento de la estela y por lo tanto, la resistencia neta es igual al empuje neto (fig. 2.9).

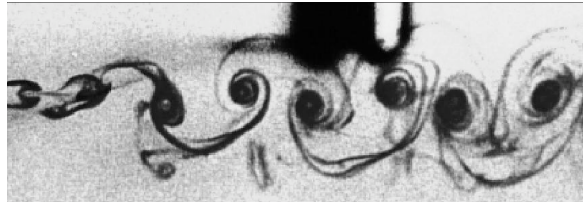
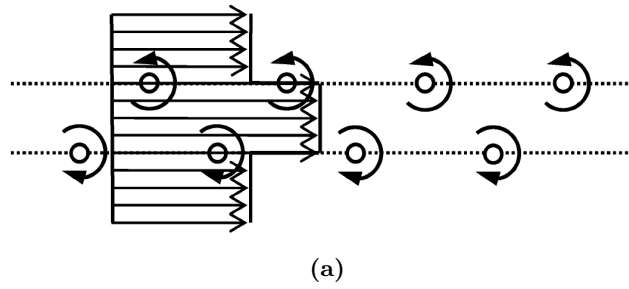


Figura 2.8: Calle de vórtices que indica la producción de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].

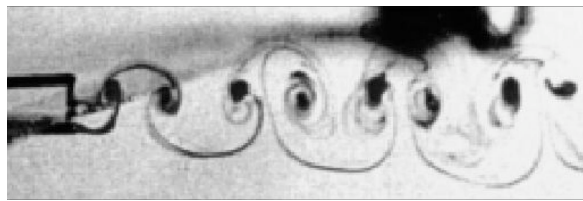
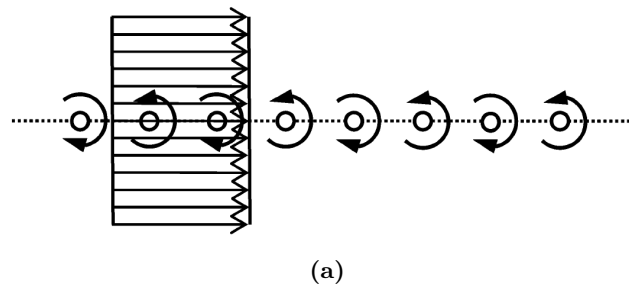


Figura 2.9: Calle de vórtices que indica la producción nula de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [135].(b) Visualización experimental obtenida [64].

2.2.4 Parámetros adimensionales fundamentales del vuelo inestacionario

Una manera de llevar a cabo comparaciones aerodinámicas sobre geometrías en vuelo inestacionario, es mediante los parámetros adimensionales fundamentales que se definen a continuación [47] y [109].

2.2.4.1 Número de Reynolds

El número de Reynolds ² se define mediante la ec.2.1 y representa la relación existente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas de un fluido en movimiento. En aves o MAV, suele utilizarse como longitud de referencia, a la cuerda media del ala y en animales o vehículos acuáticos a la longitud del cuerpo.

La velocidad de referencia U en vuelo suspendido *hovering*, es diferente a la adoptada en un vuelo con presencia de corriente libre. Para el primero puede tomarse como U de referencia a la velocidad de puntera del ala, igual a $U = \omega_a R$, donde ω_a corresponde a la frecuencia angular del movimiento y R a la longitud de la semienvergadura. Luego $\omega_a = 2\varrho f$, donde ϱ es la amplitud en radianes del ángulo girado por la puntera y f la frecuencia del movimiento o vuelo *hovering*. Finalmente el número de Reynolds en *hovering* 3D es

$$Re_{fh3} = \frac{2\rho_f c_m \varrho f R}{\mu} = \frac{\rho_f c_m \varrho f R^2}{AR\mu} \quad (2.6)$$

donde AR es el alargamiento del ala igual a $AR = (2R)^2/S$ y c_m la cuerda media.

Lo interesante por destacar aquí, es que para el vuelo de insectos el AR y la amplitud ϱ no varían demasiado entre una especie u otra, no siendo así la frecuencia, que generalmente aumenta en la medida que el insecto es más pequeño, resultando en un rango de Reynolds que puede encontrarse en estos animales de $10^1 < Re < 10^4$.

Otro punto a remarcar, es que para una misma amplitud ϱ , se puede preservar el número de Reynolds mediante el producto fR^2 variando uno u otro parámetro y esto significa que se pueden construir modelos a escalas mayores, reduciendo la frecuencia y manteniendo una parte de la similitud aerodinámica, cualidad de sumo interés para la construcción de MAVs. Se dice una parte, ya que además de satisfacer el número de Reynolds, se debe mantener el número de Strouhal (parámetro explicitado a continuación) y de hecho es posible hacerlo mediante la variación de la amplitud de *flapping* o *hovering*.

Para *hovering* bidimensional el número de Reynolds se define en base a la máxima velocidad de movimiento vertical como

$$Re_{fh2} = \frac{2f\rho_f\pi h_a c}{\mu} \quad (2.7)$$

donde h_a es la amplitud de carrera de dicho movimiento.

Por último, en vuelos hacia adelante o con velocidad relativa al fluido circundante (*heaving* o *flapping*) en 2 y 3 dimensiones, el número de Reynolds se basa en dicha velocidad como velocidad de referencia y en la cuerda media como longitud de referencia, (ec. 2.1).

²fh2 y fh3 es la asignación para el número de Reynolds del vuelo *hovering* correspondiente a 2 y 3 dimensiones respectivamente.

2.2.4.2 Número de Strouhal

El segundo parámetro que define a estos flujos inestacionarios es el número de Strouhal (St), el cual representa el comportamiento dinámico de los vórtices convectados hacia la estela. Se denota como:

$$St = \frac{fl}{U} = \frac{2fh_a}{U} \quad (2.8)$$

donde U es la velocidad de la corriente libre, f la frecuencia de *flapping*, h_a la amplitud de carrera. El número de Strouhal puede interpretarse como la relación entre la velocidad del movimiento inducido (fh_a) con la velocidad de la corriente libre. Además, da una idea de la eficiencia propulsora para cada tipo de vuelo.

Las investigaciones al día de hoy muestran o avalan que el número de Strouhal es el parámetro dominante en el estudio del vuelo inestacionario y en él se centrará la mayor atención para la obtención de resultados en el presente trabajo.

2.2.4.3 Frecuencia reducida

Otro parámetro adimensional que no se puede obviar y que caracteriza la aerodinámica de movimientos como *pitching* o *heaving*, es la frecuencia reducida, la cual representa la relación entre el período del movimiento inducido y el tiempo que tarda una partícula en recorrer la cuerda del perfil. Para una velocidad de referencia U y una longitud de referencia $l = c_m$, la misma se define como:

$$k = \frac{2\pi fl}{2U} = \frac{\pi f c_m}{U} = \frac{\omega_a c_m}{2U} \quad (2.9)$$

donde f es la frecuencia de movimiento y ω_a su velocidad angular.

En vuelo *hovering* tridimensional, donde la velocidad de referencia es la velocidad de la puntera del ala se escribe:

$$k_{fh3} = \frac{\pi c_m}{2\rho R} = \frac{\pi}{\rho AR} \quad (2.10)$$

y para el caso bidimensional:

$$k_{fh2} = \frac{c}{2h_a} \quad (2.11)$$

Una relación interesante entre la frecuencia reducida y el número de Strouhal se expresa como:

$$St = \frac{fl}{U} = \frac{2fh_a}{U} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_a c_m}{2U} \frac{2h_a}{c_m} = \frac{k}{\pi} \frac{2h_a}{c_m} = \frac{2}{\pi} kh \quad (2.12)$$

donde h es la amplitud adimensional $h = h_a/c_m$ y el producto kh se define como la máxima velocidad de *heaving* adimensional.

2.2.4.4 Relación de avance

En adición a los parámetros presentados se define la relación de avance para el vuelo en 2 y 3 dimensiones como:

$$J = \frac{U}{2\pi fh_a} \quad (2.13)$$

y da una idea del avance o velocidad de avance obtenida, en función de la velocidad de movimiento impuesto.

2.2.4.5 Parámetros de Performance

En el análisis de perfiles en vuelo batiente o inestacionario, es necesario definir ciertos parámetros que permitan cuantificar el comportamiento aerodinámico propiamente dicho. Para ello, primero se presentan los ya conocidos coeficientes de sustentación y resistencia para un análisis bidimensional, es decir por unidad de envergadura:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c} \\ C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde c es la cuerda del perfil, U la velocidad de corriente libre y L y D son las fuerzas de sustentación y resistencia respectivamente.

En este tema, es preferible hablar de tracción producida que en vez de resistencia, ya que el empuje generado por un perfil es del mismo valor absoluto pero con diferente signo. Luego el coeficiente de tracción por unidad de envergadura se define como:

$$C_T = -C_D = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c} \quad (2.15)$$

donde $T = -D$.

La potencia instantánea que debe impartir el perfil para llevar a cabo el movimiento para una cinemática periódica, se calcula en función de la sustentación y del momento aerodinámico a vencer como:

$$P(t) = L(t)\dot{y}(t) + M(t)\dot{\alpha}(t) \quad (2.16)$$

donde $\dot{y}(t)$ es la velocidad vertical, $\dot{\alpha}(t)$ es la rapidez con que cambia el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$ de cabeceo o *pitching* del perfil sobre el punto de "pivot" y M es el momento de cabeceo generado por las fuerzas actuantes sobre el perfil. Además, se define una potencia alternativa $P_s(t)$ la cual representa sólo la contribución positiva de los dos términos en la ec. 2.16 más los términos inerciales del movimiento, [134].

El coeficiente de momento por unidad de envergadura se escribe como:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c^2} \quad (2.17)$$

Luego el coeficiente de potencia por unidad de envergadura puede presentarse como:

$$C_P(t) = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho_f U^3 c} \quad (2.18)$$

y el coeficiente de potencia alternativa,

$$C_{Ps}(t) = \frac{P_s(t)}{\frac{1}{2}\rho_f U^3 c} \quad (2.19)$$

El valor medio en el tiempo de cualquiera de los coeficientes, puede expresarse,

$$\bar{c}_x = \frac{1}{\mathbb{T}} \int_t^{t+\mathbb{T}} C_X(t) dt \quad (2.20)$$

donde \mathbb{T} es el período del movimiento oscilatorio inducido y $C_X(t)$ puede ser $C_L(t)$, $C_D(t)$, $C_P(t)$, etc.

Finalmente la eficiencia propulsora puede ser interpretada como la energía que propulsa transferida a la estela, en relación a la energía puesta en juego para generar empuje neto, y se expresa por

$$\eta = \frac{T_{medio} U}{P_{medio}} = \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}_p} \quad (2.21)$$

donde la barra indica que son los valores medios de cada coeficiente, obtenidos en el intervalo de tiempo de cálculo.

2.2.5 Geometría y cinemática del vuelo inestacionario

En esta etapa de la investigación el estudio sólo se lleva a cabo en 2 dimensiones como simplificación del movimiento más complejo que se desarrolla en 3 dimensiones. La bibliografía indica que las simulaciones bidimensionales son la base necesaria para interpretar los fenómenos que luego se presentan en casos tridimensionales.

El análisis del movimiento tridimensional de un ala en vuelo batiente o *flapping*, se simplifica si se consideran dos movimientos separados tal como se muestra en la fig. 2.10.

Dichos movimientos son: desplazamiento vertical del perfil sometido a una corriente libre o *heaving* donde los parámetros de gobierno son la amplitud máxima de desplazamiento h_a , la frecuencia f_h y el ángulo de fase φ con el movimiento de cabeceo o *pitching*. Los parámetros de este último son: la máxima amplitud o ángulo de giro α_a y la frecuencia f_α . En la fig. 2.11 se esquematizan algunos de estos parámetros, además de x_p que es la distancia al punto de

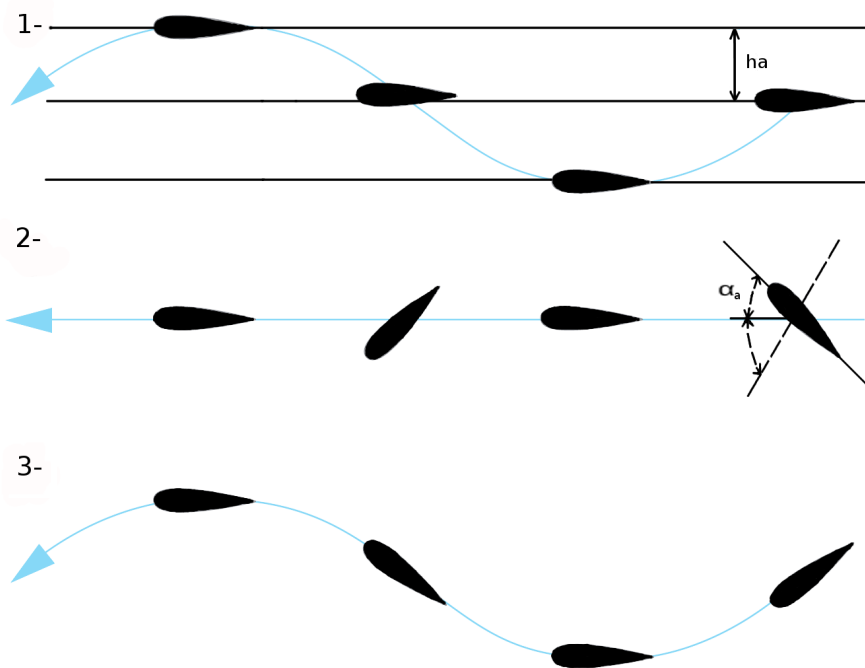


Figura 2.10: Tipos de movimientos en el plano bidimensional. (1) *heaving*. (2) *pitching*. (3) *flapping*.

pivot.

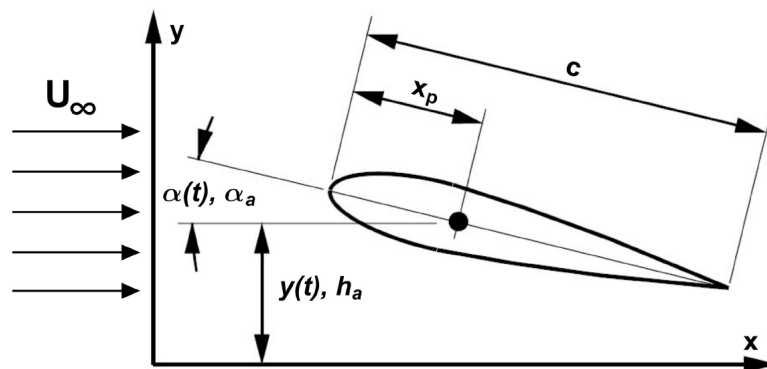


Figura 2.11: Esquema de la cinemática del vuelo inestacionario [47].

El movimiento puede representarse por las ecuaciones periódicas simétricas listadas a con-

tinuación:

$$\begin{aligned}
h(t) &= h_a \cos(2\pi f_h t) \\
\dot{h}(t) &= -2\pi f_h h_a \sin(2\pi f_h t) \\
\ddot{h}(t) &= -4\pi^2 f_h^2 h_a \cos(2\pi f_h t) \\
\alpha(t) &= \alpha_a \sin(2\pi f_\alpha t) \\
\dot{\alpha}(t) &= 2\pi f_\alpha \alpha_a \cos(2\pi f_\alpha t) \\
\ddot{\alpha}(t) &= -4\pi^2 f_\alpha^2 \alpha_a \sin(2\pi f_\alpha t)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Las aves y los MAV no utilizan para el vuelo cada movimiento por separado, sino una combinación de *pitching* y *heaving* separados generalmente por un ángulo de fase. De todos modos es conveniente e interesante estudiar cada movimiento con independencia.

2.2.6 La pérdida dinámica y el vórtice de borde de ataque (LEV)

Muchos autores en sus trabajos reconocen la importancia y el potencial de la pérdida dinámica y del vórtice que se desprende del borde de ataque de un perfil (*Leading Edge Vortex*, LEV), cuando se lo somete a un movimiento oscilatorio o simplemente cuando cambia rápidamente su ángulo de ataque y como es aprovechado por las diferentes especies naturales capaces de volar. Si bien en la literatura lo que se encuentra y utiliza son estados cuasi estacionarios, donde se termina cuantificando la sustentación y resistencia como promedios en intervalos de tiempo, se debe tener presente que son representaciones un tanto simplistas. No obstante, son útiles para el diseño y optimización de geometrías que eventualmente pueden ser llevadas a la práctica.

El fenómeno propiamente dicho, se destaca por ser no lineal e inestacionario y de difícil predicción teórica, capaz de afectar sustancialmente la sustentación y resistencia durante el período en el que ocurre el desprendimiento y el vórtice se desplaza hasta el borde de fuga. Luego ocurre una interacción con el vórtice desprendido desde el borde de fuga, dando así origen al formato característico presente en la estela.

En la fig. 2.12 se grafica un esquema extraído de ([109]), en el que se describe el proceso de pérdida dinámica de un perfil al aumentar su ángulo de ataque respecto de la corriente libre.

En el punto (a) se excede el ángulo de pérdida cuando el perfil está estático, para luego darse la aparición de secciones con flujo reverso y la formación de vórtices sobre la capa límite y el borde de fuga del perfil (b) y (c). La parte más importante de este efecto, es la que acontece entre los puntos (d) y (h), donde primero ocurre una gran sección de flujo reverso sobre el extradós y luego el desprendimiento del vórtice de borde de ataque. Básicamente, este último modifica la geometría efectiva del perfil en su recorrido hasta llegar a la estela, provocando el pico de sustentación (h) que se manifiesta en la gráfica. Una vez que el LEV se ha desprendido, (h) a (k), un fenómeno interesante debe ser tenido en cuenta y es que la caída brusca de sustentación provoca un gran aumento de momento negativo sobre el perfil, o en todo caso,

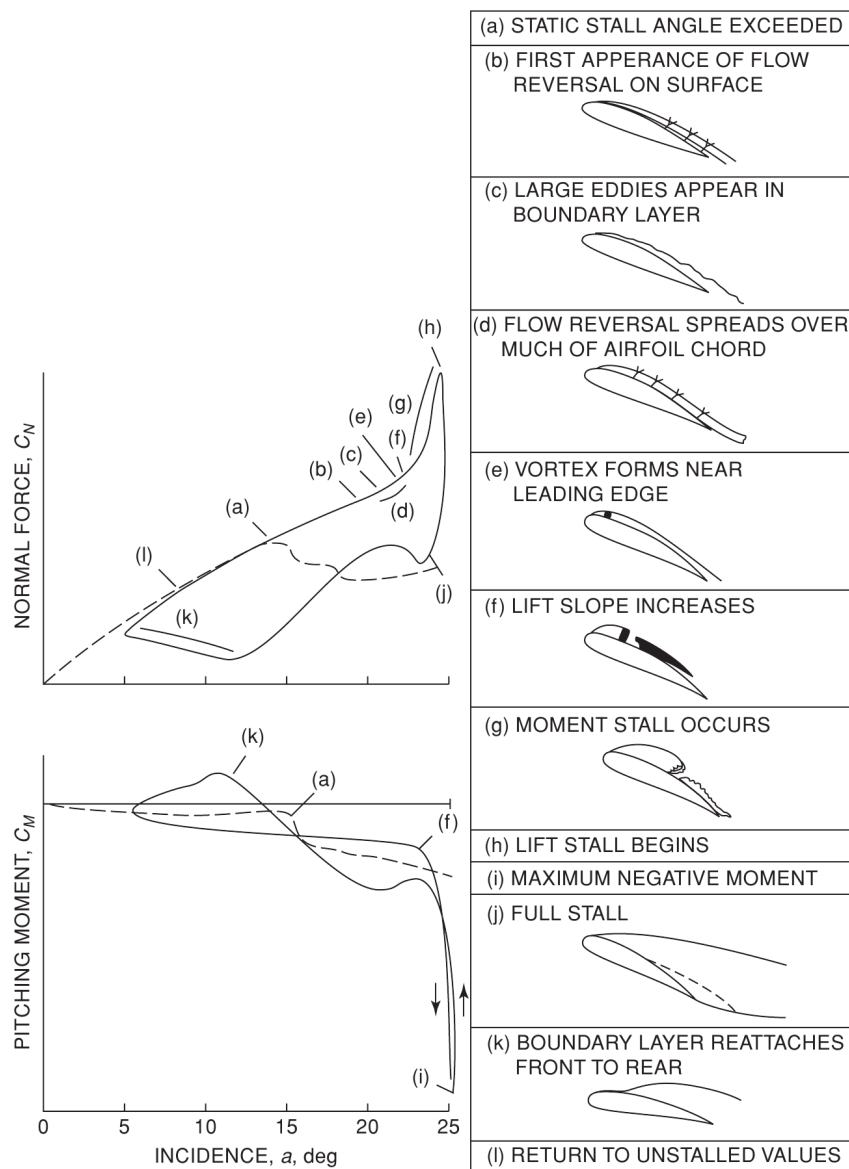


Figura 2.12: Esquema del desprendimiento dinámico de un perfil y el efecto sobre las curvas de sustentación y momento [109].

en la estructura elástica que soporta los esfuerzos del mismo. Como puede verse, este ciclo inestacionario deriva en problemas complejos cuando se trata de acoplar algún tipo de modelo elástico, o peor aún, cuando se trata de llevar a cabo la construcción de algún prototipo de MAV.

Insectos y aves pueden aprovecharse de este efecto y dominarlo con facilidad para obtener grandes performances de vuelo y de este modo llevar a cabo maniobras complejas que no se detallarán aquí. Sí se pueden mostrar en la fig. 2.13, resultados numéricos obtenidos con

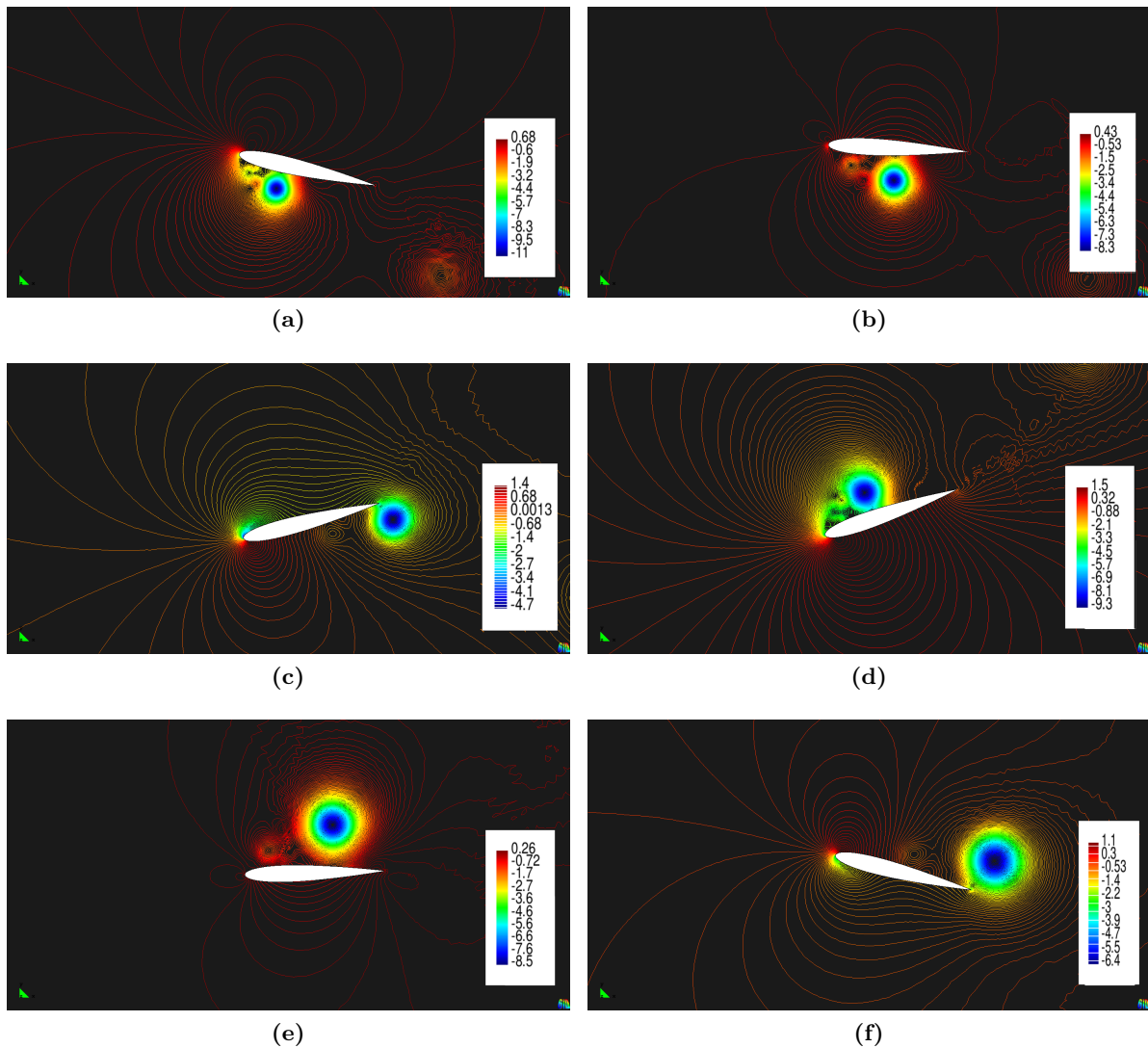


Figura 2.13: Contornos de presión para un perfil NACA 0012 sometido a *flapping* a: $Re = 1100$, $St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$. (a) $t=0.6152s$, (b) $t=1.0104s$, (c) $t=1.6834s$, (d) $t=2.4372s$, (e) $t=3.2775s$, (f) $t=3.8954s$.

el software utilizado en el presente trabajo, cuando el perfil NACA 0012 es sometido a un movimiento de *flapping* y cuyos parámetros son: $Re = 1100$, $St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$.

La figura muestra una secuencia de contornos de presión a diferentes tiempos y en ella se observa como actúa la pérdida dinámica y el desprendimiento de vórtices desde bordes de ataque y de fuga.

Durante el *upstroke* el LEV que se desprende 2.13a desde el borde de ataque, viaja por el intradós del perfil fig. 2.13b hasta arribar al borde de fuga desde donde deja y se aleja del perfil fig. 2.13c. Ocurre algo semejante con la carrera de *downstroke*, pero el LEV que se desprende

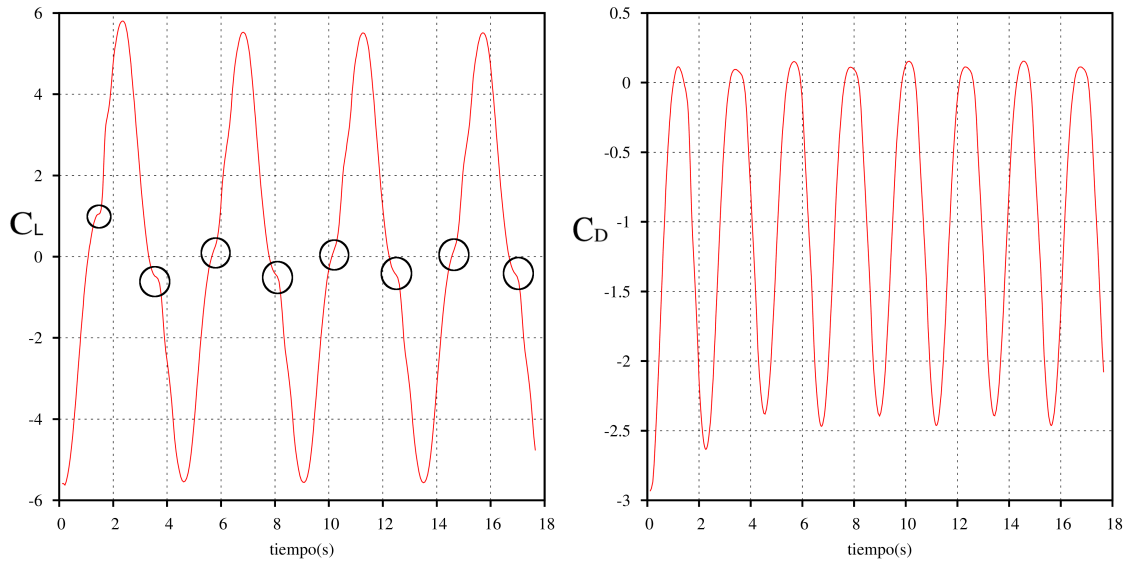


Figura 2.14: Coeficientes de sustentación C_L y resistencia C_D .

desde el borde de ataque, viaja por el extradós del perfil (figs.2.13d, 2.13e y 2.13f).

Los efectos sobre los coeficientes de sustentación y resistencia del fenómeno presentado pueden verse en la fig.2.14, donde el primer desprendimiento ocurre para $t=1.68s$ y provoca el salto señalado mediante un círculo negro en la curva de C_L y con menos intensidad sobre C_D . Al momento del desprendimiento, el perfil muestra una tendencia a perder sustentación, pero es rápidamente recuperada debido a que el flujo se adhiere nuevamente a la superficie.

2.3 Geometrías flexibles

La aerodinámica, la dinámica de estructuras, dinámica del vuelo y el control, son las áreas que dominan este tipo de problemas. El estudio en conjunto de las mismas, lleva a la comprensión de la naturalidad del vuelo de aves e insectos y posibilitan su traslado a la tecnología de los MAVs. No obstante, no hace falta aclarar que llevar a cabo simulaciones numéricas o realizar experimentos donde se contemple el acoplamiento de dos o más fenómenos vinculados con las disciplinas antes mencionadas, es definitivamente complejo.

Por ejemplo, existe una anisotropía entre las rigideces de la cuerda y la envergadura de las alas de aves e insectos ³ [25], [23], [24], que permiten ejercer pleno control espacial y temporal del flujo inestacionario sobre el ala. Esto no sólo aumenta la sustentación, la propulsión y la eficiencia, si no que en combinación con diferentes cinemáticas impulsadas por especies en vuelo, mejoran la estabilidad y maniobrabilidad del mismo. En la fig. 2.15 se muestra el ala

³Se encuentra en la naturaleza que la rigidez en la envergadura de las alas de insectos, es una o dos veces en orden de magnitud más grande que la rigidez de la cuerda, [42].

de una libélula, en donde se observa la sección reforzada sobre el borde de ataque mediante el corrugado. En la literatura se encuentra que dicho corrugado aumenta la rigidez al pandeo y a la flexión, además de prevenir la fractura por fatiga. Por lo general, las alas de los insectos son deformables y su geometría responde de manera cuasi-instantánea a las fuerzas de inercia y presión que actúan en cada ciclo de movimiento, [105], [131].

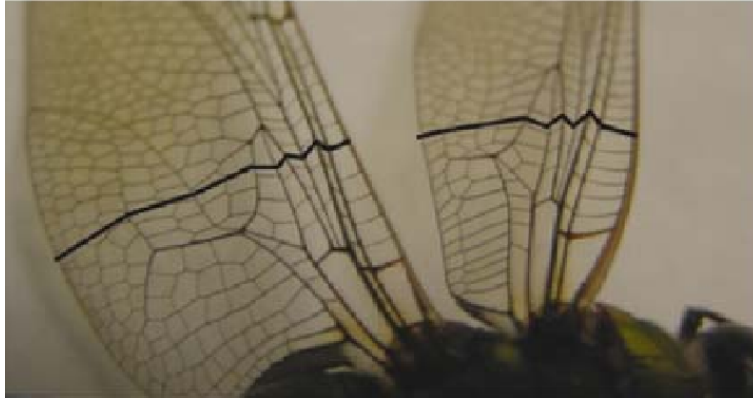


Figura 2.15: Estructura anisotrópica del ala de una libélula y su sección corrugada, [42].

La gran flexibilidad del ala de las aves e insectos sometida a las altas frecuencias de movimiento, conduce a problemas de interacción fluido-estructura fuertes, de difícil simulación numérica, y las maniobras espectaculares realizadas por los mismos, conducen a problemas no lineales acoplados que involucran la mecánica de fluidos, aeroelasticidad, dinámica del vuelo y control.

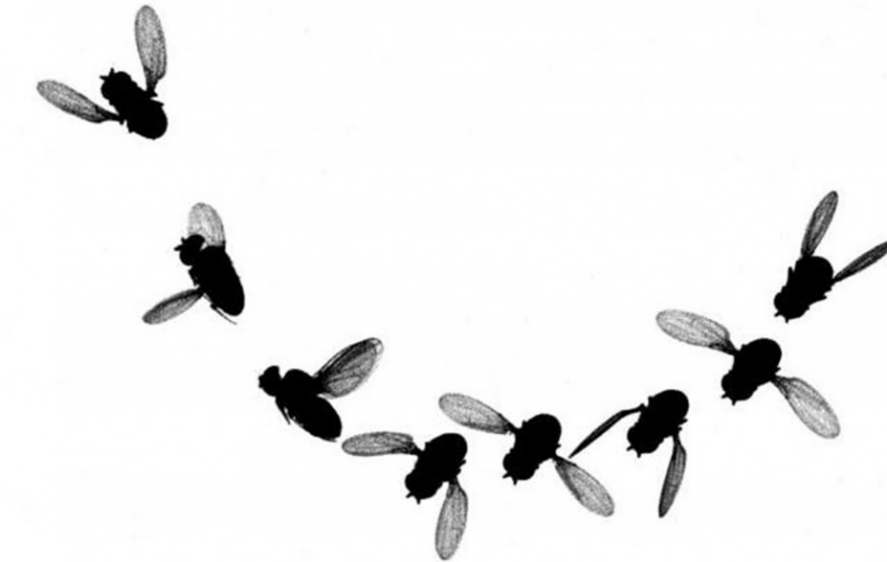


Figura 2.16: Captura de la maniobra evasiva de una mosca, [87].

Un ejemplo de lo planteado es el trabajo de Muijres *et al.* [87], donde utilizaron una serie de cámaras de video de alta velocidad (7500 cuadros por segundo), para capturar el movimiento del ala y el cuerpo de una mosca en una maniobra evasiva ante la imagen de un depredador. (fig. 2.16). Ellos descubrieron que las moscas alteran su curso de vuelo en una milésima de segundo, 50 veces más rápido que el parpadeo de un ojo. En dicha maniobra su cerebro realiza un rápido y sofisticado cálculo que le ordena a la mosca escapar por la trayectoria más segura posible, dependiendo del lugar de donde provenga el peligro. Además observaron la deformación que toman las alas y la orientación del cuerpo al momento de la aceleración y el escape.

No existe aún, la capacidad de cálculo desarrollada sobre dispositivos tan pequeños, algoritmos que puedan emular las velocidades de reacción del cerebro de una mosca, ni mecanismos de potencia que puedan llevar a cabo dichas maniobras. Puede que se esté a la vanguardia de encontrar bio-materiales con comportamientos semejantes a los de sus alas, pero falta mucho por conocer sobre el comportamiento fluido-estructural en tales problemas. En principio, una forma de llevar la naturaleza a la tecnología sería analizar por separado los diferentes mecanismos biológicos actuantes, identificar los esenciales requeridos y reproducirlos en el laboratorio.

El interés de este trabajo es responder cuales son los efectos que puede causar la interacción entre el fluido inestacionario circundante a un ala con Reynolds ultra-bajo y la estructura de la misma, sobre los parámetros aerodinámicos más importantes. Una forma de encontrar una respuesta es llevar a cabo simulaciones numéricas, con un código donde acoplan un modelo para el fluido y otro para la estructura de forma particionada. Dichos modelos, deben realizar los cálculos con coordinación y respetar ciertas condiciones para lograr estabilidad en los resultados.

En la literatura existen muchos trabajos al respecto [49], [50], [51], [107], [85], [66], [91], [135], [37], en los que se encuentra por ejemplo, que en alas fijas flexibles, la torsión provocada por las cargas aerodinámicas, produce vibraciones y una disminución del ángulo de ataque en comparación con un ala idealmente rígida. En alas batientes, la flexibilidad estructural puede aumentar la succión y la convección de vórtices desde el borde de ataque, resultando en un aumento de la propulsión, etc.

2.3.1 Parámetros adimensionales de interacción fluido-estructura

Los parámetros adimensionales de alas o perfiles flexibles son los mismos que se utilizan para alas o perfiles rígidos, más dos parámetros adicionales relacionados a la parte estructural. Si se remite al análisis realizado por Olivier [91], los dos parámetros adicionales son:

$$\rho^* = \frac{\rho_s}{\rho_f}; \quad E^* = \frac{E}{\rho_f U^2} \quad (2.23)$$

donde ρ^* es la relación de densidades y E^* es la rigidez normalizada. Es de hacer notar que la forma así planteada, no está fuertemente vinculada con el problema de *flapping* planteado en

las ec. 2.22.

Primero la rigidez normalizada E^* puede ser interpretada como sigue. En algunos problemas simples como una barra con esfuerzo axial, la tensión es directamente relacionada con la deformación a través del módulo de Young. Por lo tanto, la rigidez normalizada que es la relación entre el módulo de Young y la presión dinámica, da una estimación de la inversa de la deformación del ala o perfil y no de su desplazamiento, que en definitiva es lo que interesa.

Por otro lado, la relación de densidades ρ^* , es generalmente relacionada a la intensidad de interacción entre el fluido y la estructura, o una forma de escalar las fuerzas de inercia con la densidad del sólido, y las fuerzas aerodinámicas con la densidad del fluido. Por lo tanto, esta relación no es un buen indicador de la intensidad de interacción. En efecto, las fuerzas del fluido actúan sobre una superficie de la estructura, mientras que las fuerzas de inercia sobre un volumen, por lo cual, se debería tener en cuenta algún parámetro geométrico. Un ejemplo ilustrativo, sería plantear el caso de la comparación entre las respuestas que tomaría una lámina delgada de algún material cualquiera, sumergida en un campo fluido y la de un bloque grueso del mismo material.

Se pueden obtener parámetros más relevantes considerando la ecuación de la dinámica de la viga [91]. Considerando una carga lineal F_{ref} se obtienen los siguientes parámetros

$$\left[\frac{\rho_s A L_{ref}}{F_{ref} T_{ref}^2} \right]; \quad \left[\frac{EI}{F_{ref} T_{ref}^3} \right] \quad (2.24)$$

donde I es el momento de inercia, A es el área, L_{ref} y T_{ref} una longitud y un tiempo de referencia respectivamente.

Para el caso bidimensional la carga de referencia se transforma en $F_{ref} = p_{ref} b$, donde p_{ref} es la presión sobre el ala y b la envergadura, luego resulta

$$\left[\frac{\rho_s e L_{ref}}{p_{ref} T_{ref}^2} \right]; \quad \left[\frac{EI'}{F_{ref} p_{ref}^3} \right] \quad (2.25)$$

donde $I' = I/b$ y para una placa bidimensional el momento de inercia es $I = e^3/12$.

La mecánica de materiales provee una fórmula para calcular el desplazamiento del borde libre de una viga en cantilever bajo una carga uniforme lineal [53],

$$\frac{\delta_{y,tip}}{L} = \frac{wL^3}{8EI} \quad (2.26)$$

donde w es la carga lineal actuante en la dirección y sobre la viga de longitud L a lo largo del eje x . Como esta ecuación funciona bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, se pueden establecer las siguientes relaciones de proporcionalidad

$$\frac{\delta_{\bar{y},tip}}{c} \sim \frac{p_{est} c^3}{EI'}; \quad \frac{\delta_{\bar{y},tip}}{c} \sim \frac{\rho_s e a_{est} c^3}{EI'} \quad (2.27)$$

donde p_{est} y a_{est} son estimaciones de la carga aerodinámica de presión y la aceleración de la estructura respectivamente. $\delta_{\bar{y}}$ es la componente en \bar{y} del desplazamiento relativo del ala a la posición que ocuparía si esta fuera rígida en un sistema de coordenadas locales fig. 2.17.

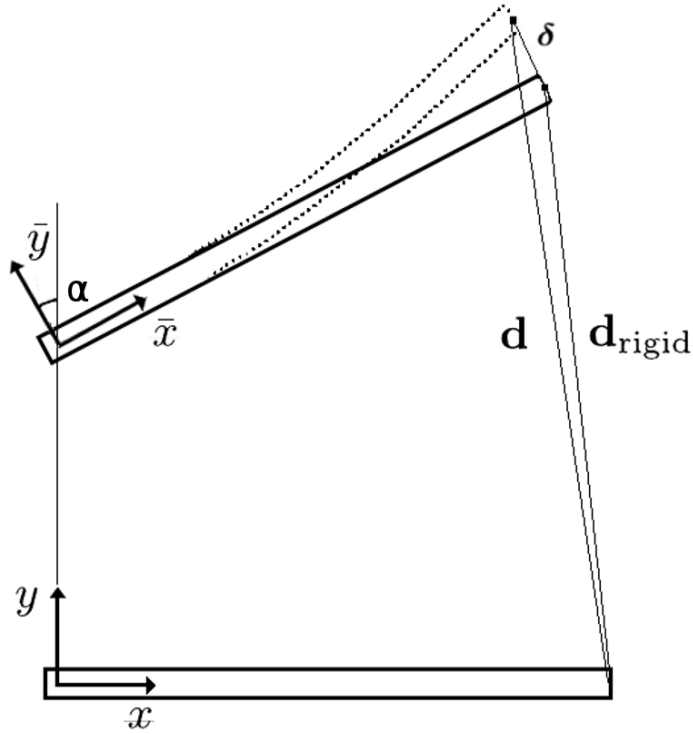


Figura 2.17: Configuraciones rígida y deformada del perfil. La línea punteada representa la configuración deformada.

Para obtener el desplazamiento relativo en las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{x}} &= \delta_x \cos(\alpha) + \delta_y \sin(\alpha) \\ \delta_{\bar{y}} &= -\delta_x \sin(\alpha) + \delta_y \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{2.28}$$

La carga debido a la presión puede ser estimada mediante la presión dinámica, mientras que la carga inercial se obtiene directamente mediante la aceleración del perfil. Considerando las cinemáticas específicas de las ec. 2.22, se pueden definir dos fases. La fase de rotación, donde el ala tiene una alta velocidad angular $\dot{\alpha}$ con pequeña velocidad de desplazamiento vertical \dot{h} , correspondiente a los períodos cercanos a $ft = 0$ y $ft = 1/2$ en la carrera de movimiento. Por otro lado, en la fase de desplazamiento (*heaving*), el ala tiene una alta velocidad de desplazamiento y una baja velocidad de rotación, correspondiente a los períodos $ft = 1/4$ y

$ft = 3/4$. Luego, como la fase es igual a $\pi/2$, la aceleración máxima de desplazamiento ocurre en la máxima velocidad de rotación y biceversa.

Considerando que la rotación está fuertemente vinculada al ángulo de ataque del perfil, no es conveniente incluirla en la definición de parámetros adimensionales estructurales. Además, las cargas de presión e inercia serán estimadas a través del movimiento vertical *heaving*,

$$\begin{aligned} p_{est} &= \rho_f (2\pi f h_a)^2 \\ a_{est} &= (2\pi f)^2 h_a \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde p_{est} es la presión dinámica y a_{est} es la aceleración, ambos del movimiento vertical. Estas estimaciones de carga junto a las ec. 2.27, permiten encontrar dos parámetros adimensionales que caracterizan el desplazamiento del borde fuga. El primero se define como *flexibilidad* δ^* y relaciona la rigidez del ala con la presión dinámica del fluido,

$$\delta^* = \frac{\rho_f (f h_a)^2 c^3}{EI'} \quad (2.30)$$

El segundo es un estimador de la intensidad de la interacción entre el fluido y la estructura. Siendo un estimador, es cercano a la unidad cuando la interacción es moderada, osea que las cargas de inercia son similares a las de presión. Manteniendo esto en mente, el factor de *intensidad de interacción* Σ se define como la relación de las cargas,

$$\Sigma = \frac{p_{est}}{a_{est} e} \quad (2.31)$$

y teniendo en cuenta las definiciones de ambas cargas para movimiento vertical introducidas en la ec. 2.29 resulta:

$$\Sigma = \frac{\rho_f h_a}{\rho_s e} \quad (2.32)$$

Otro parámetro que se usará en este trabajo es la relación de frecuencias,

$$\frac{f}{f_1} \quad (2.33)$$

donde f es la frecuencia del movimiento impuesto a la geometría y f_1 es la primera frecuencia natural de la estructura.

2.3.2 Mecanismos pasivos del flujo oscilante

En sus trabajos Heathcote and Gursul [49], [50] muestran que el efecto de la flexibilidad en la cuerda de un perfil, puede ser interpretado como un movimiento de cabeceo pasivo. Esta idea sugiere, que la energía del flujo puede ser usada para modificar la cinemática de movimiento con el objeto de mejorar la propulsión. No se puede esperar una extracción de energía del flujo para

transformarla en propulsión, porque se iría en contra de los principios de la termodinámica, pero sí se puede aprovechar en algunos momentos la energía del flujo para mejorar la tracción.

Los mecanismos pasivos son usados por animales voladores y nadadores, para minimizar el consumo de energía. Por ejemplo, las libélulas se benefician del torque aportado por el fluido, para lograr un menor esfuerzo en la rotación del ala, [123],[92]. Es decir, la dinámica de vuelo de las especies podría depender significativamente de mecanismos pasivos. En su trabajo Dickinson *et al.* [34] imponen un movimiento de traslación y rotación en *hovering* simétrico a un modelo de alas rígidas de mosca *Drosophila melanogaster*, en el cual categorizan tres modos de rotación: avanzado, en el cual el ala comienza a rotar antes del final de cada carrera de desplazamiento, sincronizado, donde el ala queda vertical al final de cada carrera de desplazamiento; retardado, donde el ala rota después del final de cada carrera de desplazamiento, fig.2.18. .

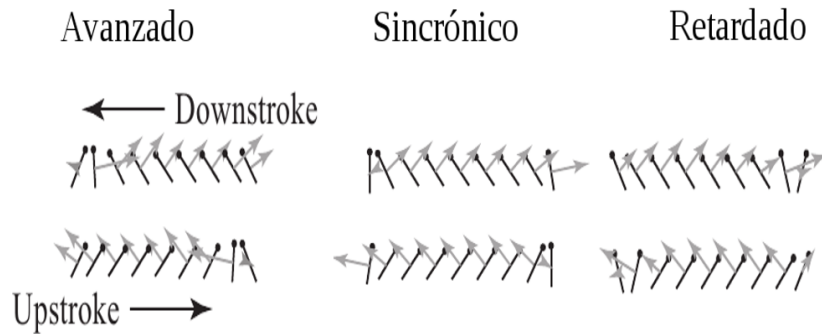


Figura 2.18: Modos de rotación de un ala rígida y fuerzas resultantes, [34].

El mismo efecto causado por las rotaciones impuestas sobre un ala rígida, se puede obtener sobre un ala flexible sin rotación impuesta y sometida a un desplazamiento. Es decir que mediante la flexión estructural del ala se pueden presentar los diferentes modos de rotación mencionados anteriormente. Este mecanismo pasivo de propulsión fue estudiado por Kang y Shyy [66] sobre una placa plana flexible, sometida a un desplazamiento horizontal en un flujo estático. Ellos llegaron a la conclusión, de que se pueden conseguir buenos coeficientes de sustentación en vuelo *hovering*, mediante el mecanismo pasivo de la flexibilidad estructural y la relación de frecuencias $\frac{f}{f_1}$, y de la importancia que ello tiene en el diseño de MAVs, ya que evitaría instalar un dispositivo para la rotación del ala, lo que ahorraría considerable peso al mismo. A modo de ejemplo, en la fig. 2.19 se pueden observar los modos pasivos de rotación.

En análisis posteriores, se tomará como criterio para determinar el modo de rotación pasivo de la estructura de perfiles, que la rotación es sincronizada si el desplazamiento del borde de fuga al momento del final de la carrera, está entre $-0,05c < \delta < 0,05c$, donde c es la cuerda

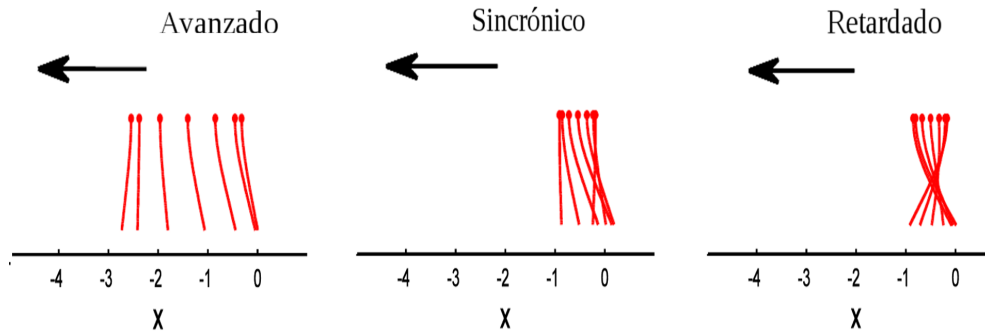


Figura 2.19: Modos de rotación pasivos de un ala flexible, [66].

del perfil.

2.4 Motivación del estudio en dos dimensiones

Si bien el conocimiento que aportan los estudios de aplicaciones fluido-dinámicas en dos dimensiones son limitados, este no es el caso cuando lo que se intenta investigar o desarrollar requiere una base firme de pautas de diseño, o simplemente cuando el conocimiento adquirido en una determinada área, no es suficiente. La aerodinámica a números de Reynolds muy bajos es una rama que presenta ambas situaciones, es decir, que un diseño que esté enmarcado en dicho régimen requiere especificaciones de vital importancia para su óptimo funcionamiento y si bien el crecimiento computacional de la última década ha permitido la elaboración de importantes trabajos en el área, aún quedan bastantes ítems a explorar.

Además, como el objetivo final de este trabajo es extender el estudio hacia tres dimensiones, se considera un buen punto de partida comenzar con dos dimensiones, lo cual facilita la disponibilidad de recursos y tiempo. Los análisis son más rápidos, permitiendo así elaborar un abanico de posibilidades y combinaciones entre las geometrías y las propiedades del flujo. Otra ventaja que ofrece, la observación directa de la interacción entre el campo de movimiento y la actitud geométrica libre de interferencias propias de las tres dimensiones (p. ej. la resistencia inducida y el flujo transversal).

ECUACIONES DE GOBIERNO Y MÉTODO NUMÉRICO

En este capítulo se presentan las ecuaciones para un flujo viscoso incompresible laminar, las condiciones de contorno y los problemas que acarrearán las simplificaciones realizadas, para luego escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema Euleriano-Lagrangiano Arbitrario (ALE).

Posteriormente el capítulo describe un método numérico apto para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible-laminar, el cual se lleva a cabo mediante la discretización de dichas ecuaciones según el método de elementos finitos [138],[26], [102]. Para salvar la complicación introducida con la hipótesis de incompresibilidad, se desarrolla un esquema temporal de integración explícito de tipo pasos fraccionados (Euler-Forward) y con precisión de primer orden. La estabilización se explica mediante la descripción de un método basado en la teoría de subescalas aplicado a una ecuación de convección-difusión-reacción [60], [100]. Luego, se aplica dicho método de estabilización al esquema discreto obtenido mediante un algoritmo denominado Proyección Ortogonal de Subescalas (OSS).

En la sección correspondiente a estructuras elásticas, se describen la ecuación de gobierno de una viga lineal de Euler-Bernoulli, la discretización correspondiente mediante el método de elementos finitos y los integradores temporales a utilizar.

Por último, se presenta un algoritmo para el movimiento de la malla fluido-dinámica y finalmente, se presentan las técnicas de interacción fluido-estructura junto a la implementación utilizada en el presente trabajo.

3.1 Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible

En cierto tipo de problemas fluido dinámicos, la densidad puede ser considerada constante, lo cual conlleva a una simplificación considerable de las ecuaciones de gobierno. Esta simplificación no sólo se da en líquidos, sino también en gases a baja velocidad. Si además el flujo es isotérmico, la viscosidad se mantiene constante. La ecuación de conservación de la masa sobre un dominio espacial Ω , un contorno Γ y un intervalo de tiempo (t_0, t_f) toma entonces la

siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.1)$$

donde \mathbf{u} es el vector velocidad.

Es de hacer notar que el carácter hiperbólico del flujo compresible, se transforma en elíptico. Esto que a simple vista parece simplificar el problema, trae ciertas complicaciones a la hora de resolver las ecuaciones mediante aproximaciones numéricas.

La conservación de la cantidad de movimiento puede escribirse como:

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_e \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.2)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, ρ la densidad y \mathbf{f}_e las fuerzas externas.

Las ec. 3.1 y 3.2 son las ecuaciones de gobierno (forma fuerte) del flujo incompresible isotérmico y a ellas se aplica el método de resolución basado en elementos finitos.

3.1.1 Condiciones de contorno

Para completar el modelo físico, se deben anexar a las ecuaciones para flujo incompresible las condiciones de borde e iniciales específicas del dominio espacial Ω y sus contornos $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M$, en un contexto temporal de análisis (t_0, t_f) .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c & \text{en} & \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= u_n; \quad (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f) \cdot \mathbf{s} = \sigma_f(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_M \times (t_0, t_f) \\ p(\mathbf{x}, t_0) &= p_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_P \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}); \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \Omega \times (t_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde:

Γ_D : parte del contorno Γ donde se prescribe el campo de velocidades \mathbf{u}_c (contorno tipo Dirichlet).

Γ_N : parte de Γ donde se especifican las tracciones \mathbf{t}_c (contorno tipo Neumann).

Γ_M : parte de Γ donde se prescribe la velocidad normal u_n y la componente tangencial de la fuerza σ_f (condición de tipo Mixta).

Γ_P : parte del contorno Γ donde se prescribe el campo de presiones p_c (contorno tipo Dirichlet).

Note que se ha denominado \mathbf{n} al vector normal unitario a Γ_N o Γ_M , mientras que \mathbf{s} es un vector unitario tangente a Γ_M y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$.

3.1.2 La restricción de incompresibilidad

Como se ha mencionado, la hipótesis de incompresibilidad en las ecuaciones de Navier Stokes introduce complicaciones importantes. Estas complicaciones se derivan, principalmente, del hecho que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones, ya no es una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho, si se toma el rotacional de (3.2), se elimina la presión de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento. Se calcula entonces un campo de velocidades que cumpla con dicha ecuación y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que permita satisfacer la condición de incompresibilidad, si se toma la divergencia de la ec. (3.2) y se impone la ec. (3.1). Como se verá en el próximo capítulo, es posible demostrar la existencia y unicidad del problema estacionario asociado al sistema escrito en forma discreta, en determinadas circunstancias [38].

3.1.3 La problemática de la convección

La problemática que presenta la aparición de términos convectivos dominantes es conocida desde el principio del desarrollo de los métodos numéricos en diversos campos. Si los términos convectivos predominan sobre los términos viscosos o difusivos, hecho que se produce con altos números de Reynolds, la solución numérica clásica del método de los elementos finitos falla y aparecen oscilaciones en todo el dominio. Una solución del problema consiste en el uso de mallas muy finas, impensables desde el punto de vista computacional. Desde un punto de vista físico, el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades “negativas” proporcionales al número de Reynolds, lo que provoca una mala estabilidad del problema y la aparición de oscilaciones. Este problema es característico, de las ecuaciones que incorporan términos importantes proporcionales a las derivadas primeras de las variables, por lo que esta dificultad se extiende a muchas ramas de la mecánica de medios continuos. Diversos autores han presentado procedimientos para resolver este inconveniente, entre ellos se destacan los métodos clásicos de evaluación *upwind* de las derivadas y la familia de métodos tipo Petrov Galerkin, Characteristic Galerkin, SUPG (Streamline Upwind / Petrov Galerkin) y GLS (Galerkin Least Squares). Todos los métodos anteriores se basan en la adición de cierta cantidad de difusión numérica a las ecuaciones básicas, diferenciándose entre ellos por las bases conceptuales sobre las cuales se diseña esa adición. No obstante, ninguno de los métodos anteriores, permite tener control sobre las oscilaciones que se producen en presencia de altos gradientes de las variables (capa límite u ondas de choque). Estas oscilaciones suelen ser localizadas y no tienden a propagarse en problemas lineales, pero en problemas no lineales pueden provocar inestabilidades globales [38]. En el capítulo 4 se estudiará esta problemática y se presentará un método de estabilización que permite tratarla.

3.2 Formulación Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Es bien conocido que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de Navier-Stokes: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento del fluido en un seguimiento de sus partículas, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio. Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con la formulación Euleriana. Sin embargo, en este trabajo, resulta más conveniente utilizar un sistema de referencia arbitrario, en particular el definido por el movimiento de la malla de elementos finitos. La formulación que describe el movimiento en este caso se denomina ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Este tipo de formulaciones arbitrarias provienen del contexto de los métodos de diferencias finitas [55] y más recientemente han sido incorporados al mundo del método de los elementos finitos [59], [39], [35], [93] principalmente para su aplicación en problemas de interacción fluido-estructura, [125].

3.2.1 Formulación ALE

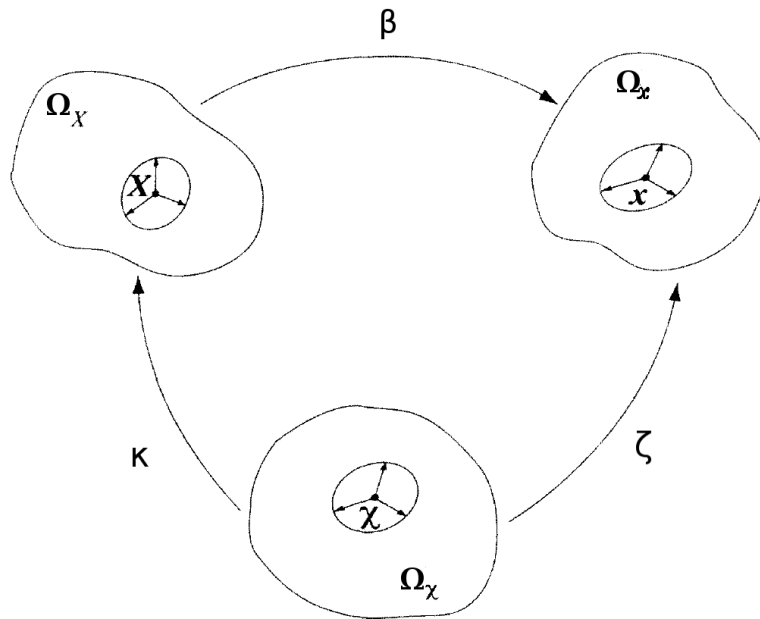


Figura 3.1: Esquema de las funciones de transformación para los diferentes dominios de la formulación ALE.

La idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia que se denomina Ω_χ y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector $\mathbf{X}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$. De la misma

manera se denomina $\Omega_{\mathbf{X}}$ al dominio material (correspondiente a la formulación Lagrangeana), cuyas coordenadas $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$ son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en $t = 0$) y por último el dominio espacial común (fijo en el espacio correspondiente a la formulación Euleriana) $\Omega_{\mathbf{x}}$ de coordenadas $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$. Luego existen las funciones de transformación de coordenadas de un dominio a otro y las mismas son: β , κ , ζ , fig. 3.1.

El mapeo ζ desde el sistema referencial al dominio espacial, el cual puede entenderse como el movimiento de los puntos de la grilla sobre este último y se representa como [36]

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega_{\boldsymbol{\chi}} \times [t_0, t_{final}] &\rightarrow \Omega_{\mathbf{x}}[t_0, t_{final}] \\ (\boldsymbol{\chi}, t) &\rightarrow \zeta(\boldsymbol{\chi}, t) = (\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

y su gradiente es

$$\frac{\partial \zeta}{\partial (\boldsymbol{\chi}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} & \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{0}^T$ es un vector fila nulo y la velocidad de la malla $\hat{\mathbf{v}}$ es

$$\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} \quad (3.6)$$

donde $|_{\boldsymbol{\chi}}$ significa que se mantiene fijo el dominio de referencia. La transformación κ conviene representarla mediante su inversa κ^{-1} de modo que

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} : \Omega_{\mathbf{X}} \times [t_0, t_{final}] &\rightarrow \Omega_{\boldsymbol{\chi}}[t_0, t_{final}] \\ (\mathbf{X}, t) &\rightarrow \kappa^{-1}(\mathbf{X}, t) = (\boldsymbol{\chi}, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

y su gradiente es

$$\frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde la velocidad \mathbf{w} es

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (3.9)$$

se interpreta como la velocidad de la partícula fluida en el sistema de referencia manteniendo fijo el dominio material.

Ahora la relación entre las velocidades de cada dominio se obtiene por la diferenciación de la ecuación $\beta = \zeta \circ \kappa^{-1}$, como sigue

$$\frac{\partial \beta}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial (\boldsymbol{\chi}, t)}(\kappa^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial (\boldsymbol{\chi}, t)}(\boldsymbol{\chi}, t) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) \quad (3.10)$$

Ahora si $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} |_{\mathbf{x}}$ resulta

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \mathbf{w} \quad (3.11)$$

luego esta velocidad puede ser reescrita como

$$\mathbf{c} := \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \mathbf{w} \quad (3.12)$$

definida como la velocidad convectiva \mathbf{c} y representa la velocidad relativa entre el dominio material y la malla.

3.2.2 La ecuación fundamental ALE

Al ser necesario expresar las leyes de conservación en un marco ALE, se debe encontrar la derivada total o material inherente a las mismas con la implementación del nuevo dominio de referencia Ω_χ añadido en la formulación. Entonces, para determinar la ecuación fundamental ALE, se utiliza una cantidad arbitraria escalar f descrita en un dominio espacial y la misma variable descrita en un dominio material de la forma f^{**} , con la siguiente relación entre ellas que se escribe como [36]:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.13)$$

Luego, si la variable que se describe en el nuevo dominio de referencia se denota como f^* , y con la ayuda del mapeo κ , la transformación de $f^*(\chi, t)$ a $f^{**}(\mathbf{X}, t)$ se escribe como

$$f^{**} = f^* \circ \kappa^{-1} \quad (3.14)$$

y los gradientes se calculan de la siguiente manera

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial f^*}{\partial (\chi, t)}(\kappa^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) \quad (3.15)$$

La ecuación anterior resulta ser un vector. Posteriormente si se utiliza la definición de velocidad convectiva en la segunda componente se llega a

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.16)$$

Si se eliminan los asterisco y se utilizan las notaciones explícitamente, se llega a las relaciones de las derivadas en el dominio material, espacial y referencial [36]

$$\frac{\partial f}{\partial t} |_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} |_{\chi} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} |_{\chi} + \mathbf{c} \cdot \nabla f \quad (3.17)$$

donde la relación anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* y expresa que la derivada material de una cantidad f es la variación local con respecto al dominio de referencia

(Ω_χ) , más un término convectivo que tiene en cuenta el movimiento relativo entre el dominio material y el dominio de referencia.

3.2.3 Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes

Si a las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible (ec. 3.1 y 3.2), se aplica la relación 3.17 con la velocidad de la malla $\mathbf{u}_{\mathbf{mf}}$ ¹ resulta [36]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} \Big|_x + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\nabla^2\mathbf{u} - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{mf}}$ es la velocidad convectiva.

Si la simulación fuera tal que los nodos de la malla se movieran de acuerdo a la velocidad de las partículas del fluido, la resolución sería de tipo lagrangiana ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{mf}}$). En el caso contrario, si la simulación fuera tal que los nodos de la malla permanecieran quietos, el proceso seguiría un esquema euleriano ($\mathbf{u}_{\mathbf{mf}} = 0$).

3.3 Discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Las ecuaciones de gobierno se aplican durante un intervalo de tiempo (t_0, t_f) en un dominio espacial Ω limitado por un contorno Γ y se presentan de la siguiente manera,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_e \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.21)$$

Nuevamente las condiciones de contorno son;

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t); \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \quad \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c & \text{en} & \quad \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= u_n; \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{s} = \sigma_f(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \quad \Gamma_M \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}); \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \quad \Omega \times (t_0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3.1 Aproximación por el método de Galerkin

Las ecuaciones de Navier-Stokes no poseen solución analítica fuerte y por ende se debe recurrir a una formulación débil o variacional para encontrar algún tipo de solución. Si se aplica el método de Galerkin [17] a las ecuaciones (3.20), (3.21) se debe encontrar $\mathbf{u} \in \Psi_s$ y

¹se aclara que la velocidad de la malla $\mathbf{u}_{\mathbf{mf}} = \hat{\mathbf{v}}$ expresada en la sección anterior

$p \in \Phi_s$ tal que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}\right) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) &= -\left(\nabla \frac{p}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi}\right) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}_e, \boldsymbol{\psi}) \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \Psi_t \\ (\phi, \nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall \phi \in \Phi_t \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde la nomenclatura (\cdot, \cdot) significa el producto interno L^2 : $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega$. Los espacios funcionales de acuerdo con las condiciones de contorno (3.3) son [17]

$$\begin{aligned} \Psi_t &:= \left\{ \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), H^1(\Omega)^N] \mid \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, t \in (t_0, t_f) \right\} \\ \Psi_s &:= \left\{ \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), H^1(\Omega)^N] \mid \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_c, \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}, t \in (t_0, t_f) \right\} \\ \Phi_t &:= \left\{ \chi \in [L^2(t_0, t_f), L^2(\Omega)^N] \mid \chi|_{\Gamma_D} = 0 \right\} \\ \Phi_s &:= \left\{ \chi \in [L^2(t_0, t_f), L^2(\Omega)^N] \mid \chi|_{\Gamma_D} = p_c \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Donde N es la dimensión espacial del problema, $H^1(\Omega)^N$ el espacio de Sobolev de funciones cuyas primeras derivadas pertenecen a $L^2(\Omega)^N$ y donde se remarca que $\Psi_t = H_0^1(\Omega)^N$ es un subespacio de $H^1(\Omega)^N$ con traza nula sobre Γ .

Lo que se logra aquí, es escribir las ecuaciones de gobierno en forma débil, reducir en uno el orden de derivación para los términos de presión y fuerzas viscosas y aproximar las incógnitas por funciones continuas derivables. En este trabajo se utilizarán funciones derivables por tramos del tipo lagrangeanas lineales.

3.3.2 Discretización espacial por el método de elementos finitos

Para la discretización del espacio de funciones (3.23), se definen los espacios funcionales $\Psi_{h_s} \subset \Psi_s$, $\Phi_{h_s} \subset \Phi_s$, $\Psi_{h_t} \subset \Psi_t$, $\Phi_{h_t} \subset \Phi_t$, asociados a una partición del dominio Ω , denominada partición de elementos finitos Ω^e . Por lo tanto el problema discreto consta de encontrar $\mathbf{u}_h \in \Psi_{h_s}$ y $p_h \in \Phi_{h_s}$ tal que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{u}_h)}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}_h\right) + ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= -\left(\nabla \frac{p_h}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h\right) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \\ &\quad + (\mathbf{f}_e, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\ (\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) &= 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como ya se había adelantado, existen ciertas dificultades cuando se trata de resolver numéricamente el sistema (3.23). La primera se refiere a la restricción $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, que en general obliga a la elección de espacios de interpolación $\Psi_s, \Psi_t, \Phi_s, \Phi_t$ tal que permitan cumplir la condición denominada Babuska-Brezzi (LBB). Dicha condición se expone a continuación [38][9].

Sean ψ_h y ϕ_h , existen K_a y K_b dos constantes positivas tal que se cumple,

$$\begin{aligned} \frac{\nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_{\Psi_h}} &\geq K_a \|\psi_h\| & \forall \psi_h \in \Psi_h \\ \sup_{\mathbf{u}_h \in \Psi_h - \{0\}} \frac{(\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|} &\geq K_b \|\phi_h\|_{L^2} & \forall \phi_h \in \Phi_h \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde Ψ_h y Φ_h son los espacios conformes de elementos finitos asociados a la partici3n Ω^e del dominio espacial Ω y la notaci3n $\|\mathbf{u}_h\|$ se utiliza como la norma de \mathbf{u}_h .

La condici3n (3.26) supone una restricci3n a la elecci3n de los espacios de interpolaci3n de elementos finitos Ψ_h y Φ_h . En general, esta condici3n no permite que la interpolaci3n de los espacios de velocidad y presi3n sea del mismo orden. Para m1s detalles consultar [10], [111] y [38]. En la pr1ctica, existen metodolog1as que permiten utilizar igual interpolaci3n para los espacios de velocidad y presi3n, mediante la modificaci3n de la forma variacional (3.25). Entre estas metodolog1as, quiz1 la m1s conocida es la denominada GLS (Galerkin Least/Squares) [58]. Otra posibilidad, es la de modificar la forma del sistema (3.25), mediante el desacoplamiento en la ecuaci3n de balance de cantidad de movimiento del efecto de la presi3n. De esta forma, la presi3n jugar1a, precisamente ese papel de correcci3n que se le otorg3o anteriormente. Esta metodolog1a, denominada M3todo de Pasos Fraccionados (Fractional Step Method) [15] ser1 estudiada detenidamente en la pr3xima secci3n del presente trabajo, donde se expondr1n las importantes ventajas que su forma semi-impl1cita propone.

3.3.3 Existencia y unicidad de la soluci3n del problema estacionario

Anteriormente se plante3o el problema discreto.(3.23) en forma variacional de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible y a continuaci3n, se discutir1 la unicidad de la soluci3n para el problema as1 planteado. Si se supone que la condici3n LBB se cumple para una adecuada elecci3n de espacios de elementos finitos y adem1s que el sistema (3.25) es estacionario, resulta [38]

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h, \psi_h) &= -(\nabla \frac{p_h}{\rho}, \nabla \psi_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h) + (\mathbf{f}_e, \psi_h) & \forall \psi_h \in \Psi_{ht} \\ (\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) &= 0 & \forall \phi_h \in \Phi_{ht} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por otro lado, si se definen las normas de los t3rminos convectivo, difusivo e independiente como[17]:

$$\begin{aligned} N_c &= \sup \frac{((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h, \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\| \|\mathbf{u}_h\| \|\psi_h\|} \\ N_d &= \sup \frac{\nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\| \|\psi_h\|} \\ N_l &= \sup \frac{(\mathbf{f}_e, \psi_h)}{\|\psi_h\|} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Puede demostrarse la existencia y unicidad del problema estacionario (3.27) si se cumple que [58][38]:

$$\chi = \frac{N_c N_l}{K_a^2} < 1 \quad (3.29)$$

siendo N_c, N_l las constantes de continuidad de las formas correspondiente al término convectivo e independiente, respectivamente, de la ecuación de cantidad de movimiento (3.21), y K_a es la constante de estabilidad de la forma correspondiente al término difusivo ya definida anteriormente. La ec. (3.29) es restrictiva y no se cumple para valores elevados y moderados de número de Reynolds. La realidad experimental muestra que pueden encontrarse soluciones no estacionarias e incluso varias soluciones, cuya aparición depende de las condiciones iniciales que se planteen.

3.3.4 Discretización monolítica del tiempo

Con el fin de introducir la notación que se utilizará más adelante, se plantea una discretización temporal mediante el uso de un esquema de diferencias finitas y la regla del trapecio, para establecer el cambio de las magnitudes a medida que evolucionan en el tiempo. Si se considera una partición uniforme del intervalo de tiempo $[0, T]$ de tamaño δt y si f^n es la aproximación de una función f dependiente del tiempo en el nivel de tiempo $t^n = n\delta t$, entonces se denota como

$$f^{n+\theta} := \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \quad (3.30)$$

al valor de la función f en un instante $t^{n+\theta}$, intermedio entre t^n y t^{n+1} siendo $\theta \in [0, 1]$.

La integración temporal del problema planteado, se puede resolver mediante una regla trapezoidal generalizada. Dado \mathbf{u}_h^n conocido en el instante t^n , hallar \mathbf{u}_h^{n+1} y p_h^{n+1} en t^{n+1} en función de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}_h \right) + ((\mathbf{u}_h^{n+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) &= - \left(\nabla \frac{p_h^{n+1}}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \\ &+ (\mathbf{f}_c^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\ (\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) &= 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Los valores de interés para θ son: $\theta = 1/2$ que corresponde al esquema de segundo orden de Crank- Nicholson, $\theta = 1$ al método de Euler hacia atrás (implícito) y $\theta = 0$ correspondiente al método de Euler hacia adelante (explícito).

3.4 Esquema de pasos Fraccionados para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

3.4.1 Esquema de pasos fraccionados

La condiciones que se deben cumplir para la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Navier Stokes quedaron demostradas bajo el cumplimiento de la condición LBB [3] [18] [111], tal como se presentó en la sección anterior. Esta condición obliga a que los espacios de elementos finitos para la interpolación de la velocidad y la presión sean compatibles [3]. En la práctica y en el contexto del método de los elementos finitos, existen dos posibilidades para evitar los indeseables efectos de inestabilidad. La solución más clásica consiste en utilizar interpolaciones mixtas velocidad-presión que verifiquen LBB. Junto a ésta, existe la posibilidad de modificar la forma variacional típica, resultante de la aplicación del método de Galerkin al problema fuerte (3.20),(3.21), de manera que la restricción LBB desaparezca. Dentro de este segundo tipo se encuentran metodologías que, como GLS (Galerkin Least Squares) [57][58][9] han ganado mucha popularidad en los últimos años. Un importante grupo de soluciones dentro de esta aproximación lo constituyen los denominados métodos de pasos fraccionados [15] [126].

Básicamente, han sido desarrollados dos procedimientos diferentes que se agrupan bajo la misma denominación de métodos de pasos fraccionados. El primer procedimiento está basado en la idea de separar los efectos de los términos de transporte por convección de los viscosos. De esta forma es posible separar, por ejemplo, el tratamiento de los términos convectivos de los efectos de la capa límite. Pero, quizá el más conocido de estos algoritmos y al que se referirá exclusivamente bajo la denominación de método de pasos fraccionados, se debe a A.J. Chorin [15], quien propuso fraccionar la ecuación de balance de cantidad de movimiento, al eliminar el término del gradiente de la presión. La idea es resolver una ecuación de balance de cantidad de movimiento aproximada, resolver luego la ecuación de balance de masa y por último corregir la cantidad de movimiento. Este último paso puede interpretarse también como una proyección de la solución sobre el espacio de velocidad con divergencia nula, por lo que el algoritmo se denomina a veces de proyección. El objetivo principal que se persigue con este fraccionamiento es precisamente la estabilización de la presión. A la vez, se consigue el beneficio adicional de poder utilizar espacios de interpolación iguales para velocidad y presión. De las diversas variantes que admite el método de pasos fraccionados se estudia el denominado algoritmo semi-implícito. Este algoritmo resuelve de manera explícita los pasos correspondientes a la resolución aproximada de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y su posterior corrección, mientras que es implícito el cálculo del campo de presiones. Dado que las características de esta algorítmia son especialmente apropiadas para el problema que se pretende resolver, esta ha sido la elegida para la implementación.

Algunas ventajas que se pueden nombrar de la metodología a estudiar son:

- La posibilidad de resolver la ecuación de balance de cantidad de movimiento independi-

entamente de la restricción de incompresibilidad, lo que permite desarrollar un esquema semi implícito de manera que en cada paso de tiempo sólo haya que invertir una matriz de un sistema (tipo Poisson) con un grado de libertad por nodo (la presión), lo que ahorra una considerable cantidad de memoria.

- El esquema semi implícito es además especialmente adecuado en problemas donde existen contornos en los cuales la presión está prescrita, ya que permite que la inversión de la matriz del sistema, sea bastante rápida.
- Los dos aspectos considerados con anterioridad indican que el sistema resultante tiene características óptimas para su inversión, siendo simétrico y bien condicionado.

3.4.2 Implementación sobre las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Para mayor claridad se aplica el método de pasos fraccionados a las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma fuerte (Eqs. (3.20) y (3.21)). El método implica considerar una nueva variable auxiliar, denominada velocidad intermedia o momento fraccionado $\hat{\mathbf{u}}$, que permite fraccionar el problema planteado [19]. Este método satisface la condición LBB con el mismo orden de aproximación para las velocidades y para la presión. Luego, la ecuación de momento se divide en dos partes de la forma

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta t \left[\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\theta} + \gamma \frac{1}{\rho} \nabla p^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\theta} + \mathbf{f}^{n+\theta} \right] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p^{n+1} - \gamma \nabla p^n) \quad (3.33)$$

En las ecuaciones (3.32) y (3.33) aparece una nueva variable que se conoce como momento fraccionado. Si se toma la divergencia en la ecuación (3.33) y se aplica la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\nabla^2 (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (3.34)$$

donde γ es un parámetro numérico cuyos valores de interés son 0 y 1.

Si se aplica la discretización por elementos finitos desarrollada anteriormente a las ecua-

ciones (3.32), (3.33) y (3.34) se llega a [103]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \frac{\gamma}{\rho}(\mathbf{p}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - \\
&\quad - (\mathbf{f}_e^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\
-\delta t(\nabla(p_h^{n+1} - \gamma p_h^n), \nabla \phi_h) &= \rho(\phi_h, \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\
\frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{1}{\rho}((p_h^{n+1} - \gamma p_h^n), \nabla \boldsymbol{\psi}_h) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Puede demostrarse [20], que el error debido a la partición de la ecuación de momento, es de orden $O(\delta t)$ cuando $\gamma = 0$ y de orden $O(\delta t^2)$ cuando $\gamma = 1$. Luego para tener el mismo orden de error debido a la partición, que el debido a la discretización temporal, se consideran en general dos conjuntos de parámetros. El primero es $\gamma = 0$ y $\theta = 0$ ó $\theta = 1$, lo que corresponde a los esquemas de proyección de primer orden. Y el segundo conjunto es $\gamma = 1$ y $\theta = \frac{1}{2}$, lo que conduce a un esquema de segundo orden de precisión en el tiempo (Crank-Nicholson).

Esta formulación permite trabajar con las mismas funciones de aproximación para interpolar la presión y velocidad a nivel elemental, lo cual resulta ventajoso al momento de la implementación. Además, se elige el método explícito (Euler hacia adelante ($\theta = 0$ y $\gamma = 0$)), que muestra ventajas respecto a los métodos implícitos convencionales en la eficiencia computacional asociada a la solución de sistemas lineales de menor tamaño. Esto disminuye la necesidad de emplear algoritmos iterativos en la solución del sistema de ecuaciones y lo único que se resuelve de manera implícita, es la ecuación de Poisson (operador de Laplace) a través de un esquema de Gradientes Conjugados [103].

Por último, con las elecciones mencionadas y luego de algunos manejos algebraicos, se puede escribir el esquema de pasos fraccionados en forma compacta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - \\
&\quad - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\
(\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t} \left[(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h) \right] \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\
(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho}(\nabla p_h^{n+1}, \phi_h)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

El esquema resultante es semi-implícito, siendo la primera y tercera ecuación de 3.36 explícitas y la segunda ecuación de 3.36 para el cálculo de la presión, resulta implícita.

3.5 Algoritmo de Estabilización

En el problema discreto de Navier-Stokes, la ecuación para la presión se vuelve inestable al computarla con las velocidades discretas desacopladas de la misma, al igual que en el término convectivo, por ende se necesita plantear algún método de estabilización. En el presente trabajo

se utiliza el algoritmo de estabilización de subescalas ortogonales (OSS). Para mayores detalles consultar el Apéndice A.

3.5.1 Implementación del algoritmo de estabilización de subescalas ortogonales (OSS)

Si se toma el problema en forma discreta (3.36), se procede a añadir el término de estabilización que toma la forma siguiente:

$$\tau(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} + \nabla p^{n+1} - \pi_{h_{pc}}^n, \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \nabla \psi_h + \nabla \phi_h) \quad \forall \psi_h \in \tilde{\Psi}_h \quad (3.37)$$

Donde $\tilde{\Psi}_h$ es el espacio de funciones Ψ_h extendido, el cual contiene las funciones vectoriales continuas asociadas a los nodos del contorno. La nueva variable auxiliar $\pi_{h_{pc}}^n$ es la proyección del gradiente de presión y del término convectivo sobre el espacio de elementos finitos Ψ_h . Una versión alternativa de la proyección del término ortogonal, presentada en [4] se utilizará en este trabajo. Esta consiste en dividir en dos mínimos cuadrados el término proyectado, una corresponde a la proyección del gradiente de presión y la otra está asociada al término convectivo. Las mismas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} STB_u &= \tau_1(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n, \mathbf{u}_h^n \nabla \psi_h) \\ STB_p &= -(\tau_2(\nabla p^n - \xi_h^n), \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde ξ_h^n y π_h^n son las proyecciones del gradiente de presión y término convectivo sobre $\tilde{\Psi}_h$, respectivamente, y se calculan:

$$\begin{aligned} (\pi_h^n, \tilde{\psi}_h) &= (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\psi}_h) \\ (\xi_h^n, \tilde{\psi}_h) &= (\nabla p^n, \tilde{\psi}_h) \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $\tilde{\psi}_h \in \tilde{\Psi}_h$. Además, se observa de esta última ecuación que los términos corresponden al paso n , lo que da la pauta de que se resuelven de manera explícita.

3.5.2 Estabilización de la presión

En [20] se demuestra que la estabilidad de la presión en esquemas de primer orden como de segundo orden, depende del tamaño del paso de tiempo. Se sabe que si δt es demasiado pequeño pueden ocurrir problemas de estabilidad, es por ello que se debe recurrir a una formulación estabilizada.

El problema variacional correspondiente consiste en encontrar $\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in \Psi_h$, $p_h^{n+1} \in \Phi_h$,

$\mathbf{u}_h^{n+1} \in \Psi_h$ y $\xi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$, tal que

$$\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.42)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.43)$$

donde τ es el parámetro de estabilización que depende de los tamaños de elementos locales. El análisis de estabilidad y convergencia permite obtener su valor como,

$$\tau = \frac{h^2}{4\nu + 2|u|h} \quad (3.44)$$

donde h y u son el tamaño y velocidad típicas sobre el elemento. Este parámetro debe calcularse elemento a elemento en un problema real.

3.5.3 Estabilización de la convección

Al añadir el término que estabiliza la convección, el problema se completa de la siguiente manera: Sea $\hat{\mathbf{u}}_h^n \in \Psi_h$, $p_h^n \in \Phi_h$, $\mathbf{u}_h^n \in \Psi_h$, $\xi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$, $\pi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$ encontrar $\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in \Psi_h$, $p_h^{n+1} \in \Phi_h$, $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \Psi_h$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \\ &\quad - (\tau_1(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \nabla \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.47)$$

$$(\pi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.48)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.49)$$

Puede verse que el método de estabilización es consistente. Esto significa que cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, no sólo la viscosidad numérica de estabilización τ_1 y τ_2 tienden a cero, sino que también los términos de estabilización de presión y convección. El sistema de ecuaciones de (3.46) (presión), se resuelve mediante gradientes conjugados con preconditionador diagonal. Las ecuaciones restantes se resuelven en forma explícita mediante la condensación de las matrices de masas.

3.5.4 Problema estabilizado en formulación Arbitraria Lagrangeana-Euleriana (ALE)

El problema puede generalizarse aún más si se lo plantea en un marco de referencia Euleriano-Lagrangeano arbitrario (ALE). Si se tienen en cuenta las ecuaciones planteadas en la Sec.3.2.3, se pueden escribir las ecuaciones estabilizadas en función de la velocidad convectiva \mathbf{c} y por consiguiente de la velocidad de la malla \mathbf{u}_{mf} :

$$\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\tau_1(\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \nabla \mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.52)$$

$$(\pi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.53)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.54)$$

3.5.5 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se aplican sobre la velocidad o la presión. De acuerdo al dominio espacial, que está dado por Ω y sus contornos por $\Gamma_D \cup \Gamma_N$, en un dominio temporal de análisis (t_0, t_f) se pueden establecer como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t) && \text{en} && \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= t_c && \text{en} && \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) && \text{en} && \Omega \times (0) \\ p(\mathbf{x}, t_0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{en} && \Omega \times (0) \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.5.6 Paso de tiempo crítico

La estabilidad del algoritmo se regula mediante el tamaño del paso de tiempo. El incremento de tiempo es calculado para ecuaciones Convectivas-Difusivas-Reactivas (CDR), según [21]. En el presente trabajo, para todos los sistemas de ecuaciones se utilizará el mismo incremento de tiempo siendo evaluado en cada nodo de la siguiente forma,

$$\Delta t = \frac{FS}{\frac{1}{\Delta t_c} + \frac{1}{\Delta t_u}} \quad (3.56)$$

donde Δt_c es el incremento de tiempo “crosswind” y se calcula mediante el término difusivo de la ecuación CDR y Δt_u es el incremento “upwind”, que se calcula mediante el uso de la

forma general de la ecuación CDR, la cual depende de la relación entre el término difusivo y el convectivo (a través del número de Péclet y de Reynolds). FS es un factor de seguridad menor o igual a la unidad.

3.6 Estructuras elásticas

3.6.1 Teoría de vigas lineales: viga de Euler-Bernoulli

En la bibliografía pertinente existen múltiples teorías de vigas lineales que brindan una respuesta lineal a una carga transversal externa dinámica. Uno de ellos es el modelo de viga dinámica de Euler-Bernoulli, que provee aproximaciones razonables a muchos problemas de ingeniería. Las hipótesis asumidas por dicho modelo son: una de las dimensiones de la geometría (axial) es considerablemente más grande que las otras dos, el material es linealmente elástico (responde a la ley de Hooke), el efecto de la relación de Poisson es despreciable, el área transversal es simétrica, tal que la fibra neutra coincide con la línea media, los planos perpendiculares al eje neutro se mantienen en esa posición luego de la deformación y los ángulos de rotación son pequeños, [48]. Por lo tanto la ecuación de gobierno se escribe:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) = -\mu_s \frac{\partial w^2}{\partial t^2} + q(x) \quad (3.57)$$

donde w es el desplazamiento transversal, μ_s es la masa por unidad de longitud, E el módulo de Young, I el momento de inercia y $q(x)$ una carga distribuida transversal.

Las condiciones de contorno para casos con un borde empotrado ($w_{x=0} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ y sin carga externa son:

simplemente apoyado,

$$w_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w^2}{\partial x^2}_{x=L} = 0 \quad (3.58)$$

empotrado,

$$w_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x}_{x=L} = 0 \quad (3.59)$$

borde libre,

$$\frac{\partial w^3}{\partial x^3}_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w^2}{\partial x^2}_{x=L} = 0 \quad (3.60)$$

y borde deslizante

$$\frac{\partial w^3}{\partial x^3}_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x}_{x=L} = 0 \quad (3.61)$$

3.6.2 Discretización del modelo elástico

El método de mayor aplicación para el modelado estático y dinámico de estructuras aeronáuticas es el método de elementos finitos [26],[132]. La idea es particionar la estructura en ele-

mentos conectados por vértices llamados nodos. Los desplazamientos y rotaciones de los nodos se transforman en las incógnitas de las ecuaciones que en principio se plantean para un medio continuo, y que luego se reducen a discretas con una cantidad finita de grados de libertad. El método propiamente dicho se basa primero en encontrar las propiedades dinámicas (matrices de masa y rigidez) de cada elemento, ensamblarlas en una matriz global, para luego determinar los modos y respuestas.

Las matrices de masa y rigidez de cada elemento se encuentran mediante una aproximación energética, previa adopción de funciones de forma para los desplazamientos dentro de cada elemento.

La ecuación resultante a resolver es

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_r \mathbf{w} = \mathbf{R} \quad (3.62)$$

donde \mathbf{M}_r es la matriz de masa global, \mathbf{w} es el vector de desplazamientos, \mathbf{K}_r es la matriz de rigidez global y \mathbf{R} representa el vector de cargas externas. Para mayores detalles consultar el Apéndice B.

3.6.3 Esquemas de integración temporal

Los esquemas de solución temporal se pueden clasificar como *explícitos* o *implícitos*. En los esquemas explícitos se acostumbra a utilizar la matriz de masa concentrada y encontrar la posición de un vector \mathbf{w} en el tiempo t_{n+1} mediante un valor conocido de dicho vector \mathbf{w} en el tiempo t_n . Además, en un método explícito no se requiere la solución de ningún sistema de ecuaciones, es condicionalmente estable y requiere que el paso de tiempo Δt , sea menor a un paso de tiempo crítico Δt_{crit} que depende del tamaño del elemento. Por lo cual, el avance en el tiempo es pequeño y no son convenientes para casos en que el desplazamiento varía con la carga de manera lenta. Por su parte los esquemas implícitos se basan en encontrar la posición de un vector \mathbf{w} en el tiempo t_{n+1} con valores del vector \mathbf{w} en los tiempos t_n y t_{n+1} . Un esquema implícito es estable aún con pasos de tiempo, uno o dos ordenes de magnitud más grandes que los esquemas explícitos, aunque requiere solucionar un sistema de ecuaciones algebraicas [125].

No obstante, resulta conveniente utilizar esquemas implícitos para resolver los problemas dinámicos estructurales.

3.6.3.1 Método de Newmark

En el método de Newmark [125] se suponen conocidas las soluciones en el tiempo t_n para los desplazamientos \mathbf{w}_n y sus derivadas $\dot{\mathbf{w}}_n$ y $\ddot{\mathbf{w}}_n$. La ecuación de movimiento semi-discreta a ser resuelta en el tiempo t_{n+1} es

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}}_{n+1} + \mathbf{K}_r \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{R} \quad (3.63)$$

El desplazamiento \mathbf{w}_{n+1} y su derivada en el tiempo se escriben,

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = \dot{\mathbf{w}}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{w}}_n + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{w}}_{n+1} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \Delta t\dot{\mathbf{w}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{w}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{w}}_{n+1} \quad (3.65)$$

donde Δt es el paso de tiempo y los parámetros γ y β determinan la estabilidad y precisión del esquema. Los diferentes valores de dichos parámetros son los que dan origen a la familia de métodos de Newmark. Las condiciones de estabilidad para los métodos de Newmark están dados por:

$$\begin{aligned} \text{Incondicional} \quad & 2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \\ \text{Condicional} \quad & \gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{\gamma}{2} \\ \text{con} \quad & f_n \Delta t \leq \Omega_{crit} \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde Ω_{crit} es la condición de estabilidad y f_n es la frecuencia natural y debe ser satisfecha para cada modo del sistema. El segundo orden de precisión se logra si y solo si $\gamma = \frac{1}{2}$ lo que implica que el amortiguamiento numérico es nulo. Por ejemplo, dos métodos de Newmark con segundo orden de precisión son: la *regla trapezoidal* que es incondicionalmente estable con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$ y *aceleración lineal* con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$, que tiene como condición de estabilidad a $\Omega_{crit} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Para resolver la ecuación semi-discreta de movimiento con ecuaciones algebraicas, el valor de $\ddot{\mathbf{w}}_{n+1}$ se obtiene de la ec. 3.65, lo que conduce a:

$$\ddot{\mathbf{w}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{w}}_{n+1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{w}}_n \quad (3.67)$$

El valor de $\dot{\mathbf{w}}_{n+1}$ se obtiene de sustituir la ec.3.67 en la ec.3.64 lo que conduce a:

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{w}}_n - \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{w}}_n \quad (3.68)$$

Se debe tener presente que si existe algún tipo de fuerza de amortiguamiento, la misma será dependiente de la velocidad ec. 3.68. Luego la ec. 3.63 se puede escribir en función de los resultados obtenidos como,

$$\mathbf{K}_r \mathbf{w}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_r \mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{R} = \mathbf{M}_r \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{w}_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{w}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{w}}_n \right] \quad (3.69)$$

donde los valores para \mathbf{w}_{n+1} pueden ser calculados con valores obtenidos en el tiempo t_n . Luego con los resultados de \mathbf{w}_{n+1} , los valores de $\ddot{\mathbf{w}}_{n+1}$ y $\dot{\mathbf{w}}_{n+1}$ pueden ser actualizados según las ecs. 3.67 y 3.68.

3.6.3.2 Método de Hilber-Hughes-Taylor

Este método introduce disipación numérica para altas frecuencias sin degradación del orden de precisión. Se retienen las ecuaciones del método de Newmark 3.65 y 3.64, mientras que la ecuación semi-discreta se modifica según [54], [125]. Resulta

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}+1} + \mathbf{K}_r \mathbf{w}_{\mathbf{n}+1+\alpha_H} = \mathbf{R} \quad (3.70)$$

donde el cambio está dado por:

$$\mathbf{w}_{\mathbf{n}+1+\alpha_H} = (1 + \alpha_H) \mathbf{w}_{\mathbf{n}+1} - \alpha_H \mathbf{w}_{\mathbf{n}} \quad (3.71)$$

si $\alpha_H = 0$ el método se reduce al método de Newmark. El sistema es incondicionalmente estable para un sistema lineal cuando los parámetros se seleccionan iguales a:

$$\alpha_H \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \quad \gamma = \frac{1-2\alpha_H}{2}, \quad \beta = \frac{(1-\alpha_H)^2}{4} \quad (3.72)$$

Notar que para cualquier valor que toma α_H la precisión del esquema es de segundo orden.

Ahora con la sustitución de las ecs. 3.67 y 3.64 en 3.70 se obtiene:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{w}_{\mathbf{n}+1+\alpha_H} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_r \mathbf{w}_{\mathbf{n}+1+\alpha_H} - \mathbf{R} = \mathbf{M}_r \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{w}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}} \right] \quad (3.73)$$

donde los valores para $\mathbf{w}_{\mathbf{n}+1}$ pueden ser calculados con los valores obtenidos en el tiempo t_n .

3.6.3.3 Método α Generalizado

El método α Generalizado desarrollado por Chung y Hulbert [16], logra una buena disipación a altas frecuencias y la minimiza a bajas frecuencias [125]. El método conserva las ecs. 3.64 y 3.65 del método de Newmark, mientras que la ecuación semi-discreta se transforma de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}+\alpha_m^s} + \mathbf{K}_r \mathbf{w}_{\mathbf{n}+\alpha_f^s} = \mathbf{R} \quad (3.74)$$

donde los cambios se dan en:

$$\mathbf{w}_{\mathbf{n}+\alpha_f^s} = (1 - \alpha_f^s) \mathbf{w}_{\mathbf{n}} + \alpha_f^s \mathbf{w}_{\mathbf{n}+1} \quad (3.75)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}+\alpha_m^s} = (1 - \alpha_m^s) \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}} - \alpha_m^s \ddot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}+1} \quad (3.76)$$

la disipación es óptima a bajas frecuencias cuando:

$$\rho_\infty^s \in [0, 1], \quad \alpha_f^s = \frac{1}{1+\rho_\infty^s}, \quad \alpha_m^s = \frac{(2-\rho_\infty^s)}{(1+\rho_\infty^s)} \quad (3.77)$$

y se consigue disipación a altas frecuencias con segundo orden de precisión cuando:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m^s - \alpha_f^s, \quad \beta = (1 + \alpha_m^s - \alpha_f^s)^2 \quad (3.78)$$

Luego, operando con las ecs. 3.64, 3.65 y 3.76 en la ec. 3.74 se puede obtener:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{w}_{n+\alpha_f^s} + \frac{\alpha_m^s}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_r \mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{R} = \mathbf{M}_r \left[\frac{\alpha_m^s}{\beta \Delta t^2} \mathbf{w}_n + \frac{\alpha_m^s}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{w}}_n + \left(\frac{\alpha_m^s}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{w}}_n \right] \quad (3.79)$$

3.7 Un algoritmo para el movimiento de malla

La necesidad de mover la malla a utilizar para la discretización del dominio computacional, surge como consecuencia de la simulación de problemas con cuerpos de geometrías complejas, fallas en algoritmos malladores, geometrías móviles, etc.

Existen numerosos trabajos al respecto, los cuales pueden dividirse en función del método utilizado para reordenar la malla, en aquellos que emplean o introducen cambios topológicos (eliminación, inserción de nodos etc.) o los que reubican los vértices pero no modifican la topología [2], [5].

El algoritmo utilizado en este trabajo se basa en operaciones de optimización de suavizado desarrollado para el paquete de software ANSYS® [11]. El mismo suaviza la malla en sucesivas iteraciones, luego de la deformación impuesta por el movimiento del cuerpo a estudiar. Los nodos que serán móviles y fieles a la cinemática impuesta, serán aquellos que estén sobre la superficie del cuerpo y son exentos de ingresar al suavizado de la malla.

Dicho algoritmo de suavizado puede ser aplicado en mallas estructuradas y no estructuradas con elementos triangulares, cuadrangulares o la combinación de ambos. Además es capaz de suavizar mallas con grandes irregularidades de manera eficiente y robusta y hasta reacomodar elementos invertidos. El mismo se divide en dos partes, la primera consta de un suavizado que reacomoda en posición adecuada los nodos más alejados, y la segunda de un suavizado optimizado más robusto y puntual, capaz de restaurar elementos altamente deformados e invertidos.

El algoritmo de movimiento y suavizado de malla se describe en forma general de la siguiente manera:

- Para cada paso de tiempo de cálculo “DO”:
 - Convocar el primer suavizado para los nodos habilitados, luego del movimiento inicial del cuerpo.
 - Contador ICOUNT=ICOUNT+1
 - if (ICOUNT=2)
 - Convocar al suavizado optimizado.

- ICOUNT=0
- end if
- Actualizar la posición de la malla y calcular su velocidad de movimiento.
- fin del cálculo “END DO”

El primer suavizado realiza un reposicionamiento iterativo de los nodos mediante una función de peso promedio o métrica de distorsión, que da una idea de la deformación del elemento y que puede estar basada en las longitudes de los lados o en el área del elemento. El suavizado puede describirse de la siguiente forma:

- Loop sobre un número arbitrario de iteraciones “DO”:
 - Loop sobre el número de elementos “DO”.
 - Calcular la métrica de distorsión en base al desplazamiento del nodo y el área del elemento.
 - Se calcula una variable auxiliar que acumula las métricas calculadas sobre un nodo que es común a elemento vecinos.
 - Se pondera la métrica de distorsión de cada nodo con las áreas de los elementos que lo contienen.
 - “END DO”.
- “END DO”

Ahora se procede a describir el algoritmo de optimización utilizado para el suavizado [11]. Dado μ como métrica de distorsión con valores que varían entre -1 y 1. El valor 1 corresponde a un elemento con forma perfecta (por ej. un triángulo con todos sus ángulos iguales), el valor 0 a un elemento con gran deformación prácticamente inutilizable (por ej. un triángulo con alguno de sus ángulos menor a 20 grados) y -1 a un elemento totalmente invertido.

Sea \mathbf{x} el vector de posiciones de un determinado nodo conectado con los elementos E_1, E_2, \dots, E_n con métricas positivas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ respectivamente. El objetivo de la optimización es mover \mathbf{x} tal que $\mu_{min} = \min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ es incrementado tanto como sea posible, tal que los elementos incidentes sobre la posición \mathbf{x} sean optimizados.

El valor de la métrica para elementos triangulares se calcula como [11]:

$$\mu(ABC) = (I)2\sqrt{3} \frac{\|CA \times CB\|}{\|CA\|^2 \|AB\|^2 \|BC\|^2} \quad (3.80)$$

donde:

$$I = \begin{cases} 1, (CA \times CB) \cdot N_x > 0 \\ -1, (CA \times CB) \cdot N_s < 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

N es la superficie normal evaluada en el centro del triángulo y CA , CB y BC son las longitudes de los lados del elemento. Notar que la métrica tiene el signo de I para capturar la inversión del elemento. La métrica es básicamente el área del elemento dividido por la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. El factor $2\sqrt{3}$ es la normalización para que al triángulo equilátero le corresponda un valor máximo de $\mu = 1$.

Esta metodología se encuentra inmersa en un *loop* de iteraciones, donde la posición \mathbf{x} se mueve en direcciones de gradientes tal que μ_{min} se incremente tanto como sea posible. Dentro de una iteración el algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Calcular los gradientes $\mathbf{g}_i = (g_x^i, g_y^i, g_z^i)$ para cada elemento E_i , con $1 \leq i \leq n$:
 - Perturbar la coordenada x de \mathbf{x} con un pequeño desplazamiento δ . La perturbación puede estar basada en la dimensión de las coordenada de los vértices, por ejemplo puede ser 10^{-5} de la dimensión máxima del modelo a estudiar.
 - Calcular la métrica perturbada μ_i^+ para cada E_i .
 - Calcular el gradiente como: $g_x^i = (\mu_i^+ - \mu_i)/\delta$. (g_y^i se calcula de manera similar).
2. El gradiente direccional se toma como $\mathbf{g} = \mathbf{g}_m$ donde m es el subíndice tal que $\mu_m = \mu_{min}$. Si $\mathbf{g} \approx 0$, luego $\mathbf{g} = \mathbf{g}_m^+$, donde m^+ es el subíndice tal que $\mu_m^+ = \mu_{min}^+$ donde μ_{min}^+ es la siguiente métrica más pequeña a μ_{min} . El vértice con posición \mathbf{x} se mueve a $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{g}$, donde λ se calcula como sigue:

- Si μ_i es considerado que es una función de \mathbf{x} , luego la expansión en serie de Taylor:

$$\mu_i(\mathbf{x}^+) = \mu_i(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{g}) \approx \mu_i(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.82)$$

Si $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \geq 0$, μ_i se incrementa para valores pequeños de λ . Esto es la elección de la dirección del gradiente tiene más probabilidad de mejorar la calidad para E_i , lo que provocará que no haya que preocuparse de que μ_i^+ sea menor que μ_{min}^+ .

- Por otro lado si $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \leq 0$, luego μ_i decrece para valores pequeños λ con la elección de la dirección del gradiente. En este caso el valor de λ necesita ser restringido tal que $\mu_{min}^+ \geq \mu_i^+$ o:

$$\mu_{min} + \lambda\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq \mu_i + \lambda\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.83)$$

luego λ puede limitarse a:

$$\lambda = \min \left[\frac{(\mu_i - \mu_{min})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i)} \right] \quad (3.84)$$

sobre los índices i por el cual $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i < 0$

3. Una vez que el valor de λ es obtenido y es suficientemente grande, luego el movimiento de \mathbf{x} a $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{g}$ se realiza de la siguiente manera:

- Con el valor de \mathbf{x}^+ , se calculan los nuevos valores de las métricas μ_i^+ para cada E_i .
- El nuevo valor mínimo de la métrica μ_{min}^+ se calcula como:

$$\mu_{min}^+ = (\mu_1^+, \mu_2^+, \mu_3^+) \quad (3.85)$$

- El movimiento de \mathbf{x} a \mathbf{x}^+ es aceptado y μ_i es seteado a μ_i^+ para cada i , si:

$$\mu_{min}^+ \geq \mu_{min} + tol \quad (3.86)$$

donde tol es una tolerancia que puede ser 10^{-5} .

- Es posible que con estas aproximaciones el λ utilizado sea demasiado grande, por lo tanto el movimiento no es aceptado. Para salvar esto se puede probar un pequeño movimiento mediante la disminución de λ con un factor de 2 y se repite el proceso para un nuevo \mathbf{x}^+ , si nuevamente no es aceptado, a los sumo se puede probar un valor de reducción por ejemplo de 4, antes de descartar el movimiento.

Finalmente, se realiza un suavizado *Laplaciano* de la grilla, el cual consiste en tomar la posición de un nodo luego de deformar la malla y determinar su nueva posición en función del promedio de las posiciones de los nodos vecinos. La siguiente ecuación describe el proceso,

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \quad (3.87)$$

donde \mathbf{x}_j son las posiciones de los nodos vecinos y N su cantidad. Dicho algoritmo puede ser inmerso en un proceso iterativo para reforzar el suavizado. En el caso del presente trabajo las iteraciones se determinan en base al caso particular a simular y a la experiencia adquirida.

3.8 Fuerzas actuantes sobre un cuerpo inmerso en un fluido

Es interesante plantear las fuerzas a las que se somete un cuerpo sumergido en un medio fluido, ya que puede brindar información de los esfuerzos a tener presente sobre la estructura. En el trabajo de Kang *et al.* [65] se presenta un análisis donde se deriva la fuerza impulsiva y la fuerza de masa agregada (*add-mass*) sobre un cuerpo sumergido en un fluido y que posee movimiento.

Si se considera un volumen de fluido Ω con un contorno en el infinito Γ_∞ , en el cual se mueve un cuerpo B en el tiempo t sobre el espacio $x \in \Omega$. Si se integra en Ω la ecuación de

cantidad de movimiento (ec. 3.2) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho_f \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial B(t)} \mathbf{n} \cdot (-p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Gamma = \int_{\Gamma_\infty} \mathbf{n} \cdot (-p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_\infty} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \rho_f \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\partial B(t)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \rho_f \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde $\partial B(t)$ es la superficie de B , \mathbf{n} es el versor normal saliente del cuerpo, \mathbf{u}_s es la velocidad de la superficie, $\bar{\mathbf{I}}$ es un tensor unitario y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ el tensor de tensiones. La fuerza actuante sobre un cuerpo sumergido en un fluido viscoso incompresible es:

$$\mathbf{F} = \rho_f \int_{\partial B(t)} \mathbf{n} \cdot (-p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Gamma \quad (3.89)$$

Si no hay flujo através del contorno del cuerpo $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂B y bajo la hipótesis de términos viscoso y convectivo despreciable sobre Γ_∞ , la ec. 3.88 se simplifica a:

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\infty} \rho_f \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_\infty} \mathbf{n} \cdot (-p\bar{\mathbf{I}}) d\Gamma - \int_{\partial B(t)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \rho_f \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.90)$$

Basado en la ec.3.90, Noca [89] derivó una expresión para \mathbf{F} sobre un dominio infinito doblemente conexo Ω_∞ de la forma:

$$\frac{\mathbf{F}}{\rho_f} = -\frac{1}{\mathcal{N} - 1} (\mathbf{F}_{im} + \mathbf{F}_a) \quad (3.91)$$

donde

$$\mathbf{F}_{im} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\infty} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi} d\Omega \quad (3.92)$$

$$\mathbf{F}_a = \frac{d}{dt} \int_{\partial B(t)} \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) d\Gamma \quad (3.93)$$

donde \mathcal{N} es la dimensión espacial y $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$ es la vorticidad. La primer integral \mathbf{F}_{im} representa la derivada respecto al tiempo del impulso hidrodinámico, la cual es igual a fuerzas no conservativas externas para flujo no viscoso. Si se sigue la discusión dada por Saffman [104] y se considera un campo de flujo tridimensional resultante del movimiento del cuerpo, tal que los vórtices son confinados en un volumen material Ω_v , se tiene que para el impulso,

$$\mathbf{F}_{im} \approx \frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi} d\Omega_v = \int_{\Omega_v} \mathbf{x} \times \frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} d\Omega_v = 2 \int_{\Omega_v} \frac{\mu}{\rho_f} \mathbf{x} \times \nabla^2 \boldsymbol{\xi} d\Omega_v + 2 \int_{\Omega_v} \mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\xi} \quad (3.94)$$

donde la velocidad externa \mathbf{u}_e proviene de vórtices no confinados en Ω_v . Debido a la evolución temporal de la vorticidad en el campo de flujo, la fuerza que imparte este término puede tener diferente fase que la del movimiento del cuerpo. Saffman [104] además, establece que para un flujo no viscoso e irrotacional sin circulación neta alrededor de B el segundo término \mathbf{F}_a de la

ec. 3.91, corresponde a la masa adicionada (*add-mass*).

Se pueden estimar las magnitudes de las fuerzas de la ec. 3.91 mediante los parámetros adimensionales introducidos en el Cap 2. Si se asume que la vorticidad está confinada en una región de fluido rectangular del orden de la cuerda media $O(c_m)$ de un ala sobre la dirección de la corriente libre y del $O(h_a)$ en la dirección normal, con $x \sim c_m$, $\xi \sim U_{ref}/c_m$ y $u_e \sim 2\pi f h_a$, el integrando de la ec.3.94 resulta:

$$C_{F_{im}} \sim St \left\{ \frac{1}{Rek} O(1) + \frac{St}{k} O(1) \right\} \quad (3.95)$$

Entonces, el coeficiente de fuerza impulsiva $C_{F_{im}}$ será despreciable cuando el número de Strouhal St tienda a cero, y también, cuando la escala de tiempo viscoso c_m/ν sea mucho más grande que la escala de tiempo del movimiento $1/2\pi f$, tal que, $Rek \gg 1$.

De manera similar la fuerza de masa adicionada puede ser adimensionalizada como

$$C_{F_a} \sim \{Stk\} \quad (3.96)$$

teniendo en cuenta que $u \sim 2\pi f h_a$ en el integrando de la ec. 3.93. Como se observa el coeficiente de fuerza de masa adicionada C_{F_a} , es proporcional al número de Strouhal St y a la frecuencia reducida k . Para el movimiento *flapping*, la masa adicionada depende del cuadrado de la frecuencia f^2 de movimiento. En cambio, en el movimiento *hovering* la frecuencia reducida k y el número de Strouhal St , son independientes de la frecuencia, sin embargo, la fuerza dimensional en dicho movimiento es proporcional a f^2 .

Cuando un cuerpo acelera en un medio fluido, la energía cinética cambia, por ende, el trabajo hecho por la presión del cuerpo en movimiento en un flujo no viscoso, cambia de manera proporcional a la aceleración. La constante de proporcionalidad de la relación tiene dimensión de masa, por lo cual es denominada *masa adicionada*. Dicha masa adicionada es una fracción de la masa de fluido desplazada por el cuerpo y se expresa mediante un tensor. Su determinación no es tan sencilla ya que no siempre la aceleración local del fluido, es igual a la aceleración del cuerpo.

En base a la teoría de aerodinámica linealizada, se puede elaborar una aproximación para la fuerza de masa adicionada sobre una placa plana con cuerda media c_m sumergida en un flujo incompresible no viscoso. La fuerza normal actuante sobre dicha placa, se puede determinar mediante la diferencia del potencial de la velocidad,

$$\Delta\phi = c_m v_i \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c_m/2}\right)^2} \quad (3.97)$$

donde v_i es la componente de velocidad vertical. Entonces la componente de la fuerza normal

correspondiente a la masa adicionada actuante sobre la placa es:

$$\rho_f F_a = \frac{d}{dt} \left(\rho_f \frac{\pi}{4} v_i c_m^2 \right) \quad (3.98)$$

lo que expresa que el término de masa adicionada de una placa plana que acelera verticalmente, es igual a la masa de fluido de radio $c_m/2$ circundante a la placa. En este trabajo se utiliza esta aproximación para calcular el efecto de masa adicionada.

3.9 Interacción fluido-estructura (FSI)

La interacción entre el fluido y la estructura FSI (*fluid structure interaction*) es la mutua interrelación entre el flujo y la deformación de la estructura. El fluido circundante ejerce fuerzas sobre la estructura adjacente, lo cual resulta en deformaciones de la misma. Existen numerosos ejemplos de aplicaciones, como por ejemplo, en el cuerpo humano, donde las paredes flexibles de las arterias interactúan con la sangre que pasa a través de ellas, en válvulas cardíacas, pulmones, músculos del corazón, etc. y fenómenos aeroelásticos de gran impacto, como por ejemplo en puentes, edificios, alas de aviones, turbo-máquinas, alas de insectos, etc. Esto conduce a un gran interés ingenieril sobre el desarrollo del área.

Existen dos enfoques en cuanto a simulaciones numéricas de problemas FSI. El primero es el enfoque monolítico [61], en el cual las ecuaciones del flujo y las ecuaciones estructurales se resuelven simultáneamente, por lo tanto, la interacción fluido-estructura se tiene en cuenta, durante el proceso de solución. Por otro lado, la técnica particionada [28],[125], resuelve las ecuaciones del flujo separadamente de las ecuaciones estructurales. Este algoritmo estipula un orden de resolución de las ecuaciones e impone condiciones a cumplirse en la interfaz fluido-estructura. Si la interacción entre ambos es fuerte, el algoritmo de acoplamiento generalmente hace uso de iteraciones entre la solución de las ecuaciones fluido-dinámicas y la solución de las ecuaciones estructurales. Con el acoplamiento monolítico no hay iteraciones a realizar entre ambas soluciones, lo que conduce a un ahorro de tiempo de cálculo en problemas de interacción fuerte, en las cuales con algoritmos particionados el número de iteraciones se incrementa por paso de tiempo, y la convergencia puede ser muy lenta. No obstante debe tenerse presente que no todo algoritmo de acoplamiento es estable en cualquier situación.

Por otro lado, una ventaja importante del acoplamiento particionado, es que permite reutilizar y optimizar códigos existentes por separado, y combinar diferentes técnicas ya desarrolladas y evaluadas, de manera sencilla y rápida. Esto permite generar una estructura modular capaz de admitir el acoplamiento de otro tipo de problema fácilmente. Por lo tanto, en este trabajo se opta por la utilización del esquema particionado como alternativa de resolución.

3.9.1 Condiciones de acoplamiento para la interfaz de códigos particionados en problemas de interacción fluido-estructura

Dado que la dinámica del fluido y la estructura han sido modeladas en base a la teoría de medios continuos, la interfaz entre ambos no es la excepción. Para representar el movimiento del fluido incompresible sólo son necesarias las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. Estas dos ecuaciones conducen a las siguientes condiciones sobre la interfaz fluido-estructura, [91]

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{ms} &= \mathbf{u}_{mf} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s \cdot \mathbf{n}\end{aligned}\tag{3.99}$$

donde \mathbf{u}_{ms} y \mathbf{u}_{mf} son las velocidades de la malla estructural y de la malla fluido-dinámica respectivamente. Luego, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s$ son los tensores de esfuerzos sobre la interfaz. Además, para que estas condiciones tengan sentido debe cumplirse que

- las deformaciones elásticas deben tener una magnitud tal que impacten sobre el flujo,
- las fuerzas provenientes del fluido sean comparables con la inercia del sólido.

La primera condición está relacionada a la flexibilidad de la estructura o a su parámetro adimensional δ^* y la segunda está directamente vinculada a la intensidad de la interacción entre el fluido y la estructura Σ , dada por la relación entre las fuerzas del fluido y las inerciales del sólido.

3.9.2 Esquemas particionados

Las técnicas particionadas pueden ser categorizadas como de acoplamiento explícito o implícito, y pueden ser explicadas mediante el uso de una malla fluido-dinámica móvil y una descomposición Dirichlet-Neumann (DN) comunmente utilizada en problemas FSI. En una descomposición DN, las ecuaciones del flujo son resueltas para una velocidad dada de la interfaz fluido-estructura, mientras que las ecuaciones de la estructura son resueltas para una distribución de fuerzas sobre dicha interfaz. Si el desplazamiento de la interfaz es representado por un vector \mathbf{x} y las fuerzas sobre la interfaz por un vector \mathbf{y} , el efecto del solver fluido-dinámico sobre el solver de la estructura puede ser representado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\tag{3.100}$$

donde la función \mathbf{y} es la resultante de los pasos de un algoritmo que implica — — — — —

1. aplicar el desplazamiento \mathbf{x} al contorno del dominio fluido,
2. realizar el movimiento de la malla fluido-dinámica,
3. calcular las variables dentro de todo el dominio fluido,

4. extraer las fuerzas \mathbf{y} sobre la interfaz fluido-estructura.

Por su parte, el efecto del solver de la estructura sobre el fluido-dinámico puede ser representado por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}(\mathbf{y}) \tag{3.101}$$

donde el algoritmo correspondiente es:

-
1. aplicar las fuerzas \mathbf{y} al contorno del dominio estructural,
 2. calcular las variables estructurales,
 3. extraer el desplazamiento \mathbf{x} sobre sobre la interfaz fluido-estructura.
-

3.9.2.1 Esquemas explícitos

Varios esquemas explícitos (también conocidos como de acoplamiento débil *loosely, weakly*), [40], [41], [95], [96], [121], [122] resuelven las ecuaciones estructurales y fluido-dinámicas una sola vez en cada paso de tiempo. Además, estas técnicas no imponen el equilibrio de cargas y desplazamientos sobre la interfaz, lo cual implica restricciones en el paso de tiempo por razones de estabilidad. Ha sido demostrado que el efecto de masa adicionada (*added mass*) contribuye a generar inestabilidades en simulaciones débilmente acopladas con flujo incompresible y estructuras muy flexibles [13]. Los acoplamientos débiles requieren un menor paso de tiempo, pero también un menor costo computacional debido a la ausencia de iteraciones dentro de dicho paso de tiempo. Además, es común utilizar menores pasos de tiempo para el solver fluido-dinámico que para el estructural, lo cual requiere una técnica de subciclos.

El esquema más básico de acoplamiento es la denominada técnica escalonada serial convencional (*conventional serial staggered*) CSS, cuyo algoritmo es el siguiente:

-
1. Resolver las ecuaciones del flujo $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$.
 2. Resolver las ecuaciones estructurales $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{S}(\mathbf{y}_{n+1})$.
 3. Ir al próximo paso de tiempo.
-

Este esquema es de primer orden de precisión en el tiempo, más allá de los ordenes propios de los esquemas estructural y del flujo y además, el máximo paso de tiempo obtenido es menor que el de cada código por separado [40].

En el esquema escalonado serial mejorado (*improved serial staggered*) ISS, las ecuaciones del flujo se resuelven en los pasos de tiempo $t_{n-1/2}, t_{n+1/2}, t_{n+3/2}, \dots$, mientras que las variables estructurales se calculan en los pasos de tiempo $\dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$. Si ambos solvers son de segundo orden de precisión en el tiempo, y el solver del fluido satisface la ley de conservación

geométrica (para mayores detalles de la ley de conservación geométrica consultar [44], [28]), el esquema resulta de segundo orden. Luego el algoritmo puede presentarse como,

-
1. Predecir el desplazamiento de la interfaz $\mathbf{x}_{n+1/2}$.
 2. Resolver las ecuaciones del fluido $\mathbf{y}_{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{n+1/2})$.
 3. Predecir las fuerzas sobre la interfaz \mathbf{y}_{n+1} .
 4. Resolver las ecuaciones estructurales $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{S}(\mathbf{y}_{n+1})$.
 5. Ir al próximo paso de tiempo.
-

3.9.2.2 Esquemas implícitos

Los esquemas implícitos (también conocidos como de acoplamiento fuerte *strongly*), fuerzan el equilibrio de las fuerzas y desplazamientos de la interfaz fluido-estructura en cada paso de tiempo. Esto puede ser logrado con iteraciones entre ambos solvers o iteraciones de Newton-Raphson [28]. En este trabajo se utiliza la técnica de iteraciones entre solvers.

Las técnicas de acoplamiento fuerte más comunmente utilizadas son los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. El algoritmo de Jacobi es descrito a continuación en el contexto de un paso de un tiempo genérico t_n :

-
1. Resolver las ecuaciones del fluido $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.
 2. Resolver las ecuaciones estructurales $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{S}(\mathbf{y}_k)$.
 3. **if** converge **then**
 4. Ir al próximo paso de tiempo t_{n+1} .
 5. **else**
 6. Incrementar la iteración k e ir a la línea 1.
 7. **end if**
-

----- y el
algoritmo de Gauss-Seidel para un tiempo genérico t_n es:

-
1. Resolver las ecuaciones del fluido $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.
 2. Resolver las ecuaciones estructurales $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{S}(\mathbf{y}_{k+1})$.
 3. **if** converge **then**
 4. Ir al próximo paso de tiempo t_{n+1} .
 5. **else**
 6. Incrementar la iteración k e ir a la línea 1.
 7. **end if**
-

En el esquema de Jacobi se necesita una condición inicial adecuada para cada solver, \mathbf{x}_0 e

\mathbf{y}_0 que se basa en pasos de tiempos previos. Ambas se pueden ejecutar en paralelo el paso 1 y el paso 2. Por otro lado, el esquema de Gauss-Seidel utiliza información del paso 1 en el paso 2 y por ende sólo se requiere de una extrapolación inicial \mathbf{x}_0 . Además, ambos pasos se ejecutan secuencialmente.

Ambos esquemas de solución son de convergencia lenta respecto a métodos con iteraciones de Newton-Raphson y especialmente si el flujo es incompresible (para obtener más detalles de la convergencia y estabilidad de los métodos consultar [28]). Se ha demostrado que la convergencia del esquema de Gauss-Seidel se acelera si se tiene en cuenta el efecto de la masa agregada o *added-mass* en el solver estructural [13].

Un estudio de la estabilidad de esquemas particionados y específicamente de Gauss-Seidel sobre problemas FSI, se realiza en los trabajos de Degroote [28] y de Causin *et al.* [13]. Básicamente se puede resumir que responden a diferentes parámetros físicos y numéricos los cuales conducen a una reducción de la estabilidad si,

- La relación de densidades ρ^* disminuye.
- Los espesores de las estructuras intervinientes son de pequeño tamaño, (valores altos de Σ).
- El paso de tiempo Δt disminuye.
- El orden del predictor aumenta.
- La flexibilidad δ^* aumenta.
- El orden del integrador temporal (fluido o estructura) aumenta.

Además de tener presente dichos items se puede recurrir a algoritmos de relajación que pueden ayudar a la convergencia de esquemas particionados, por ejemplo, la convergencia del esquema de Gauss-Seidel, puede ser acelerada por el método de relajación de Aitken. Para mayor detalle consultar el Apéndice C.

El esquema del algoritmo de Gauss-Sidel con relajación de Aitken es

-
1. $k = 0$.
 2. $\tilde{\mathbf{w}}_1$.
 3. $\mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{w}}_1 - \tilde{\mathbf{w}}_0$
 4. **while** $\|\mathbf{r}_k\|_2 > \epsilon_0$ **do**
 5. **if** $k = 0$ **then**
 6. $\omega_0 = \text{sign}(\omega_n) \min(|\omega_n|, \omega_{max})$
 7. **else**
 8. $\omega_k = -\omega_{k-1} \frac{(\mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})}$
 9. **end if**

10. $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \omega_k \mathbf{r}_k$
 11. $k = k + 1$
 12. $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = \mathbf{S} \circ \mathbf{F}(\mathbf{w}_k)$
 13. $\mathbf{r}_k = \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} - \mathbf{w}_k$
 14. **end while**
-

3.9.3 Implementación del algoritmo de interacción fluido-estructura

En este trabajo, se utiliza una técnica de acoplamiento particionada en bloque con esquema iterativo de Gauss-Seidel, con un predictor de segundo orden y relajación de Aitken. Los algoritmos de solución para el fluido y la estructura son los que se detallaron en secciones anteriores y el algoritmo de movimiento de la malla es el detallado en la Sec. 3.7. Además, para llevar a cabo el cumplimiento de las condiciones de acoplamiento para la interfaz fluido-estructura, se recurre a lo presentado por Maza *et al.* [82].

3.9.3.1 Implementación de las condiciones de acoplamiento

Al plantear las condiciones de acoplamiento sobre el desplazamiento y las cargas, se establece también, la conservación de la energía total y las cantidades de movimiento lineal y angular del sistema. La conservación de la energía total puede ser forzada a través de la igualdad de trabajos virtuales de las cargas a transferir $\delta W_e = \delta W_a$, [82]:

El trabajo virtual de las cargas estructurales es:

$$\delta W_e = \mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{U}_e \quad (3.102)$$

donde $\delta \mathbf{U}_e$ es el vector de desplazamientos virtuales de los nodos de la malla estructural y \mathbf{F}_e es el vector de cargas sobre los mismos nodos. De manera análoga, se puede escribir el trabajo virtual de las fuerzas fluido-dinámicas δW_a de tal manera que la igualdad de trabajos virtuales se escribe

$$\mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_a^T \delta \mathbf{U}_a \quad (3.103)$$

La posición de los nodos de la malla estructural o la grilla aerodinámica, pueden escribirse en función de una posición de referencia \mathbf{X}^0 , y un desplazamiento relativo a ella \mathbf{U} ,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{U} \quad (3.104)$$

luego, si se toma una variación de \mathbf{X} :

$$\delta \mathbf{X} = \delta \mathbf{U} \quad (3.105)$$

por lo que la ec. 3.103 puede escribirse:

$$\mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{X}_e = \mathbf{F}_a^T \delta \mathbf{X}_a \quad (3.106)$$

Si existe una matriz $\bar{\mathbf{H}}$ que relaciona las posiciones de los nodos de la malla estructural con los de la malla aerodinámica, se puede escribir

$$\mathbf{X}_a = \bar{\mathbf{H}} \mathbf{X}_e \quad (3.107)$$

Por lo tanto, si se toma la variación de \mathbf{X}_a y se considera que las posiciones relativas son constantes, resulta

$$\delta \mathbf{X}_a = \bar{\mathbf{H}} \delta \mathbf{X}_e \quad (3.108)$$

Si se combinan las ecs. 3.106 y 3.108 se concluye que

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{F}_a \quad (3.109)$$

De esta manera, la imposición de la conservación del trabajo virtual relaciona la transferencia de variables cinemáticas desde la malla estructural a la grilla aerodinámica y con las fuerzas en sentido contrario. En el presente trabajo, se estudiarán casos bidimensionales, por ende no resulta de complejidad encontrar las relaciones que contiene la matriz $\bar{\mathbf{H}}$.

El procedimiento para conservar los desplazamientos es análogo al que se presenta en [14], donde se plantea que al comienzo de la simulación se determinan las posiciones relativas entre los nodos aerodinámicos y los nodos estructurales. Luego, dichas posiciones se conservan de manera tal, que las distancias relativas entre ambas mallas no varían durante todo el proceso de solución.

En la fig. 3.2 se presentan las relaciones geométricas entre ambas mallas para el proceso de transferencia de desplazamientos. Se observa la posición de un nodo aerodinámico n_a sobre la superficie del cuerpo a una distancia \mathbf{x}_a de un sistema de referencia global y a una distancia normal \mathbf{r}_m de un elemento estructural e cuyos nodos son n_{1e} y n_{2e} . Dicha distancia \mathbf{r}_m es la que se debe conservar durante toda la simulación y se puede escribir como:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{em} \quad (3.110)$$

donde \mathbf{x}_{em} es la distancia sobre el sistema global de la intersección de \mathbf{r}_m con el elemento estructural e , que se denomina n_{em} . Además \mathbf{r}_m se puede escribir en el sistema de coordenadas locales del elemento e como:

$$\mathbf{d}_m = \bar{\mathbf{\Upsilon}}^T \mathbf{r}_m \quad (3.111)$$

donde $\bar{\mathbf{\Upsilon}}$ es la matriz de rotación del sistema de coordenadas globales a locales. Luego la

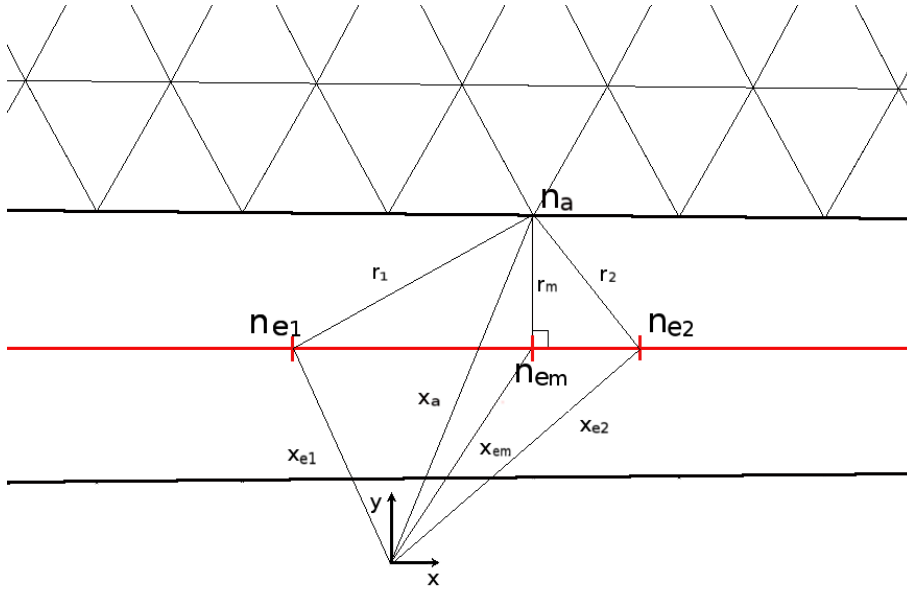


Figura 3.2: Relaciones geométricas entre la malla estructural y la malla aerodinámica.

distancia \mathbf{x}_a puede escribirse,

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{em} + \mathbf{r}_m = \mathbf{x}_{em} + \bar{\mathbf{r}}\mathbf{d}_m \quad (3.112)$$

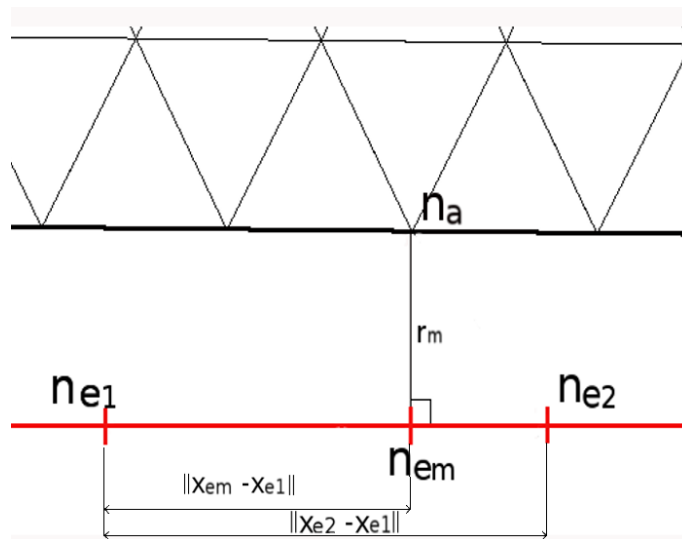


Figura 3.3: Longitudes utilizadas para determinar ξ .

Para establecer la relación entre ambas mallas durante la simulación, conviene expresar la coordenada del nodo aerodinámico \mathbf{x}_a en función de las coordenadas de los nodos estructurales

que *contienen* a dicho nodo fig. 3.3, \mathbf{x}_{1e} y \mathbf{x}_{2e} . Luego, es necesario definir una coordenada normalizada ξ que cuantifica las distancia del punto n_{em} sobre la longitud del elemento e .

$$\xi = \frac{\|\mathbf{x}_{em} - \mathbf{x}_{1e}\|}{\|\mathbf{x}_{2e} - \mathbf{x}_{1e}\|} \quad (3.113)$$

con lo cual resulta:

$$\mathbf{x}_{em} = (1 - \xi)\mathbf{x}_{1e} + \xi\mathbf{x}_{2e} \quad (3.114)$$

y también de la misma forma puede calcularse la distancia relativa como:

$$\mathbf{r}_m = (1 - \xi)\mathbf{r}_1 + \xi\mathbf{r}_2 \quad (3.115)$$

que se puede escribir como:

$$\mathbf{r}_m = (1 - \xi)\bar{\mathbf{Y}}_1\mathbf{d}_1 + \xi\bar{\mathbf{Y}}_2\mathbf{d}_2 \quad (3.116)$$

luego, con las ecs. 3.112, 3.114 y 3.116 se puede escribir la posición del nodo aerodinámico en coordenadas globales como:

$$\mathbf{x}_a = (1 - \xi)(\mathbf{x}_{1e} + \bar{\mathbf{Y}}_1\mathbf{d}_1) + \xi(\mathbf{x}_{2e} + \bar{\mathbf{Y}}_2\mathbf{d}_2) \quad (3.117)$$

Para que exista la conservación cinemática en la interfaz fluido-estructura las velocidades deben ser tratadas de la misma manera. Entonces, la velocidad del nodo aerodinámico en coordendas globales se encuentra derivando respecto al tiempo la ec. 3.117 como sigue,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_a = (1 - \xi) \left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}_{1e}(t) + \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{Y}}_1(t)\mathbf{d}_1 \right) + \xi \left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}_{2e}(t) + \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{Y}}_2(t)\mathbf{d}_2 \right) \quad (3.118)$$

las matrices de rotación son ortogonales y su derivada resulta:

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{Y}}_j(t) = {}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_j\bar{\mathbf{Y}}_j(t) \quad (3.119)$$

donde ${}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_j$ es un tensor antisimétrico con *vector axial asociado* ${}^G\boldsymbol{\omega}_j$ que es precisamente, el vector de velocidad angular del nodo estructural j expresado en coordenadas globales. Luego la velocidad del nodo aerodinámico es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(t) &= (1 - \xi) \left(\mathbf{v}_{1e}(t) + {}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_1\bar{\mathbf{Y}}_1(t)\mathbf{d}_1 \right) + \xi \left(\mathbf{v}_{2e}(t) + {}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_2\bar{\mathbf{Y}}_2(t)\mathbf{d}_2 \right) \\ &= (1 - \xi) \left(\mathbf{v}_{1e}(t) + {}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_1\mathbf{r}_1 \right) + \xi \left(\mathbf{v}_{2e}(t) + {}^G\bar{\boldsymbol{\Omega}}_2\mathbf{r}_2 \right) \\ &= (1 - \xi) \left(\mathbf{v}_{1e}(t) + {}^G\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 \right) + \xi \left(\mathbf{v}_{2e}(t) + {}^G\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 \right) \end{aligned} \quad (3.120)$$

donde puede verse que la velocidad del nodo aerodinámico está en función de las velocidades de traslación y rotación de los nodos estructurales.

Para que exista conservación dinámica en la interfaz fluido-estructura, se deben compati-

lizar las cargas aplicadas sobre los nodos aerodinámicos con los nodos estructurales. Para ello se utiliza la transpuesta de la matriz $\bar{\mathbf{H}}$ que relaciona los desplazamientos definida en la ec. 3.107. Si se toma la variación del desplazamiento del nodo aerodinámico ec. 3.117:

$$\delta \mathbf{x}_a = (1 - \xi)(\delta \mathbf{x}_{1e} + \delta \bar{\mathbf{\Upsilon}}_1 \mathbf{d}_1) + \xi(\delta \mathbf{x}_{2e} + \delta \bar{\mathbf{\Upsilon}}_2 \mathbf{d}_2) \quad (3.121)$$

que también puede escribirse como:

$$\delta \mathbf{x}_a = (1 - \xi)(\delta \mathbf{x}_{1e} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1) + \xi(\delta \mathbf{x}_{2e} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2) \quad (3.122)$$

donde la variación de $\delta \bar{\mathbf{\Upsilon}}_j$ es igual a $\delta \bar{\mathbf{\Upsilon}}_j = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_j \bar{\mathbf{\Upsilon}}_j$, siendo $\bar{\boldsymbol{\Omega}}_j$ un tensor antisimétrico con *vector axial asociado* $\boldsymbol{\omega}_j$.

Para obtener mayor generalidad se pueden escribir los términos del producto vectorial para 3 dimensiones de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_j &= -\mathbf{r}_j \times \boldsymbol{\omega}_j \\ &= \bar{\mathbf{R}}_j \boldsymbol{\omega}_j \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{r}_j(3) & -\mathbf{r}_j(2) \\ -\mathbf{r}_j(3) & 0 & \mathbf{r}_j(1) \\ \mathbf{r}_j(2) & -\mathbf{r}_j(1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

luego la matriz que relaciona los desplazamientos virtuales del nodo aerodinámico n_a con los del nodo estructural n_{ej} es:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}_j &= \alpha_j \begin{bmatrix} \mathbf{1}, \bar{\mathbf{R}}_j \end{bmatrix} \\ &= \alpha_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{r}_j(3) & -\mathbf{r}_j(2) \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{r}_j(3) & 0 & \mathbf{r}_j(1) \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{r}_j(2) & -\mathbf{r}_j(1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.124)$$

donde α_j es igual ξ ó $(1 - \xi)$, según sea n_{2e} o n_{1e} respectivamente.

Las cargas sobre los nodos estructurales resultan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ej} \\ \mathbf{m}_{ej} \end{bmatrix} = \alpha_j \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \bar{\mathbf{R}}_j^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (3.125)$$

donde $\bar{\mathbf{R}}_j^T = -\bar{\mathbf{R}}_j$ por ser $\bar{\mathbf{R}}_j$ antisimétrica.

Ahora se debe tener presente que cada nodo estructural recibirá la carga de una cantidad

k de nodos aerodinámicos, por lo tanto, la ec. 3.125 debe generalizarse a la forma:

$$\mathbf{f}_{ej} = \sum_{k=1}^q \alpha_k \mathbf{f}_{ak} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{m}_{ej} = \sum_{k=1}^q \alpha_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ak}) \quad (3.127)$$

Si existe una cantidad N_e de nodos estructurales y una cantidad N_a de nodos aerodinámicos, la conservación de las cargas totales exige que:

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}_{ej} = \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{f}_{ai} \quad (3.128)$$

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ej} + \mathbf{m}_{ej} = \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{f}_{ai} \quad (3.129)$$

donde \mathbf{x}_{ej} y \mathbf{x}_{aj} son las posiciones de los nodos estructurales y aerodinámicos si se toma como referencia el origen de coordenadas. Mediante la ec. 3.126, la ec.3.128 resulta:

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}_{ej} = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^q \alpha_k \mathbf{f}_{ak} \quad (3.130)$$

Recordando que el subíndice k se utiliza para indexar solamente las fuerzas a aplicar en n_{ej} , se puede escribir,

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}_{ej} = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_a} \alpha_{ij} \mathbf{f}_{ai} \quad (3.131)$$

Para cada valor de i , hay sólo dos valores de α_{ij} , $(1 - \xi_i$ y $\xi_i)$ ya que cada n_{ai} depende de dos n_{ej} . Por lo tanto la expresión se simplifica a:

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{f}_{ej} = \sum_{i=1}^{N_a} (1 - \xi_i) \mathbf{f}_{ai} + \xi_i \mathbf{f}_{ai} \quad (3.132)$$

que es la forma que adquiere la ec. 3.128.

De manera similar, se pueden tratar los momentos con la introducción de las ecs. 3.126 y 3.127 en la ec. 3.129, además de utilizar el índice i en vez del índice k ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ej} + \mathbf{m}_{ej} &= \sum_{j=1}^{N_e} \left[\mathbf{x}_{ej} \times \sum_{i=1}^{N_a} \alpha_{ij} \mathbf{f}_{ai} + \sum_{i=1}^{N_a} \alpha_{ij} (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ai}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_a} \alpha_{ij} (\mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ai} + \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ai}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Como $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_{ai} - \mathbf{x}_{ej}$ resulta $\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ai} = \mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{f}_{ai} - \mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ai}$ y luego,

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ej} + \mathbf{m}_{ej} = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_a} \alpha_{ij} (\mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{f}_{ai}) \quad (3.134)$$

Finalmente, para cada valor de i hay sólo dos valores de α_{ij} , lo que resulta:

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{x}_{ej} \times \mathbf{f}_{ej} + \mathbf{m}_{ej} = \sum_{i=1}^{N_a} (1 - \xi_i) (\mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{f}_{ai}) + \xi_i (\mathbf{x}_{ai} \times \mathbf{f}_{ai}) \quad (3.135)$$

que es la forma que adquiere la ec. 3.129.

3.9.3.2 Algoritmo de interacción fluido estructura

Con el fin de esquematizar el algoritmo de interacción fluido-estructura utilizado, se presenta una secuencia de pasos descriptivos que parte de valores conocidos para la estructura, el fluido y la malla, en un tiempo t_n .

-
1. Establecer las relaciones geométricas entre la malla estructural y la malla fluido-dinámica.
Relación $\mathbf{X}_a = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{X}_e$.
 2. Avanzar en el paso de tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.
 3. Establecer la iteración $k = 1$
 4. Calcular el desplazamiento de la interfaz fluido-estructura mediante algún predictor.
 - (a) Predictor estructural o de Neumann-Dirichlet: Consiste en determinar el desplazamiento de la estructura mediante algún tipo de carga fluido-dinámica de presión o de fricción.
 - Orden 1:
Carga de presión: $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n$
Carga de fricción ($\mathbf{t}_c = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}$) : $\mathbf{t}_{cn+1} = \mathbf{t}_{cn}$
 - Orden 2:
Carga de presión: $\mathbf{p}_{n+1} = 2\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$ para $n \geq 2$.
Carga de fricción: $\mathbf{t}_{cn+1} = 2\mathbf{t}_{cn} - \mathbf{t}_{cn-1}$ para $n \geq 2$.
 - (b) Predictor de desplazamiento o de Dirichlet-Neumann: Consiste en establecer un desplazamiento prefijado a la estructura.
 - Orden 0: $\tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}^n$
 - Orden 1: $\tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}^n + \Delta t \mathbf{u}_{ms}^n$
 - Orden 2: $\tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} \mathbf{u}_{ms}^n - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{ms}^{n-1} \right)$ para $n \geq 2$
 5. Iteraciones del acoplamiento fluido-estructura:
 - (a) Movimiento de la malla:
 - Se transfiere $\tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1}$ al solver de movimiento de la malla.

- Se calculan los desplazamientos sobre los nodos aerodinámicos de la interfaz y además el movimiento del resto de la malla fluido-dinámica.

- Se calculan las velocidades de la malla $\mathbf{u}_{mf_k}^{n+1}$

(b) Resolver las ecuaciones fluido-dinámicas:

- Transferir la velocidad de la malla $\mathbf{u}_{mf_k}^{n+1}$ al solver fluido-dinámico.

- Resolver el problema fluido-dinámico y encontrar velocidades \mathbf{u}_k^{n+1} y presiones \mathbf{p}_k^{n+1} .

- Elaborar las cargas de presión y de fricción $\bar{\sigma}_f$ sobre la interfaz.

(c) Resolver el código estructural:

- Elaborar las cargas estructurales a través de $\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{F}_a$ y el vector de cargas externas $\mathbf{R} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i$ donde \mathbf{F}_i es el vector de fuerzas inerciales.

- Resolver el problema estructural y encontrar \mathbf{w}_{k+1}^{n+1} .

(d) Fase de relajación mediante el método de Aitken:

- Calcular el parámetro óptimo de relajación ω_k .

- Relajación con la posición predicha para la interfaz,

$$\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}^{n+1} = (1 - \omega_k) \tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1} + \omega_k \mathbf{w}_{k+1}^{n+1}$$

(e) Avanzar en la iteración $k = k + 1$.

(f) Chequear la convergencia con $\|\mathbf{r}_k^{n+1}\| \leq \epsilon_0$, donde $\|\mathbf{r}_k^{n+1}\|$ es la norma del residuo del esquema de Aitken y ϵ_0 una tolerancia impuesta. Si converge ir al paso (5), si no volver al paso (5).

6. Chequear el paso de tiempo. Si el tiempo de simulación no ha terminado: volver al paso (1). Si ha terminado: fin de la simulación.

Se adjunta un diagrama de flujo del esquema de interacción fluido-estructura para una mejor comprensión, fig. 3.4.

Cabe indicar que los códigos fluido-dinámico, estructural, de movimiento de malla y de interacción son propios del autor y sus directores.

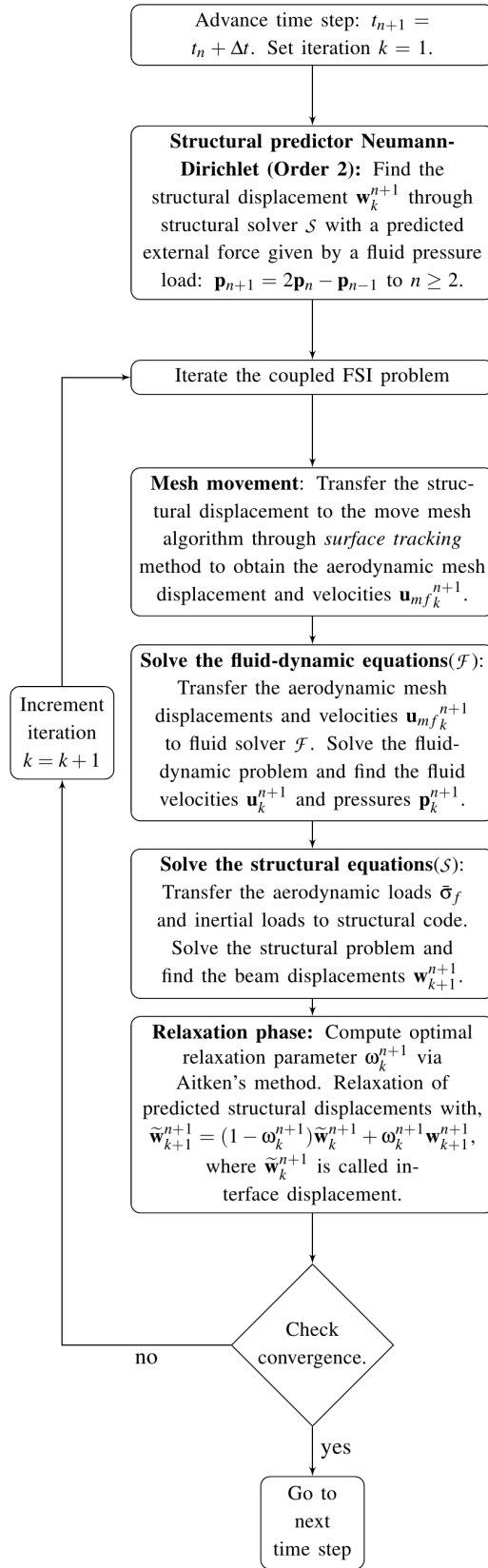


Figura 3.4: Diagrama de flujo del esquema de interacción fluido-estructura.

VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO

La validación y la verificación son procesos para asegurar que el código desarrollado es capaz de simular con precisión un problema del mundo real o hipotético, esto es resolver las ecuaciones correctas (validación), o resolver las ecuaciones correctamente (verificación). La validación se logra comparando resultados con algún modelo teórico, experimental ¹ ó la combinación de ambos. La verificación se puede conseguir cotejando resultados con los de alguna simulación numérica existente.

En este capítulo se desarrolla una serie de simulaciones numéricas cuyos resultados se comparan con teorías y/o experimentos extraídos de bibliografía técnica apropiada. Dichas simulaciones abarcan flujos estacionarios, inestacionarios e interacción de fluido con estructura.

4.1 Flujo viscoso sobre una placa plana

El principal objetivo de esta sección, es constatar si la simulación numérica predice las tensiones tangenciales inducidas por la fricción sobre una superficie plana, y si tales tensiones se aproximan a las propuestas por Blasius. El coeficiente de fricción según Blasius, se escribe

$$C_{f_{teo}} = \frac{0,664}{R_{ex}^{1/2}} \quad (4.1)$$

donde R_{ex} es el número de Reynolds a lo largo de la longitud de la placa.

Para la simulación numérica se considera una placa plana sin espesor y ángulo de ataque nulo. El dominio de simulación y las condiciones de contorno se pueden ver en la fig. 4.1 y el resultado en la fig. 4.2. Se observa una paridad aceptable entre el coeficiente de fricción según Blasius y la simulación numérica. Se realizó una ponderación del error entre ambos resultados

¹El modelo experimental de validación suele calificarse como *benchmark*.

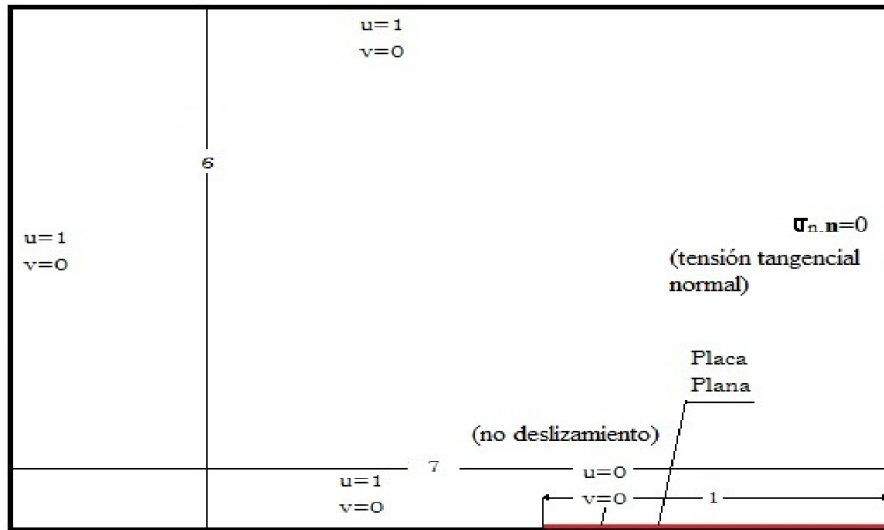


Figura 4.1: Condiciones de contorno para la simulación de la placa plana (Gráfico fuera de escala).

sobre 1000 puntos tomados a lo largo de la placa. El error ha sido definido por:

$$err = \frac{C_{fnum} - C_{fteo}}{C_{fteo}} \quad (4.2)$$

donde los subíndices *num* y *teo* significan numérico y teórico respectivamente. La ponderación de errores a lo largo de la placa resulta ser:

$$e\bar{r}r = 0,028 = 2,8\% \quad (4.3)$$

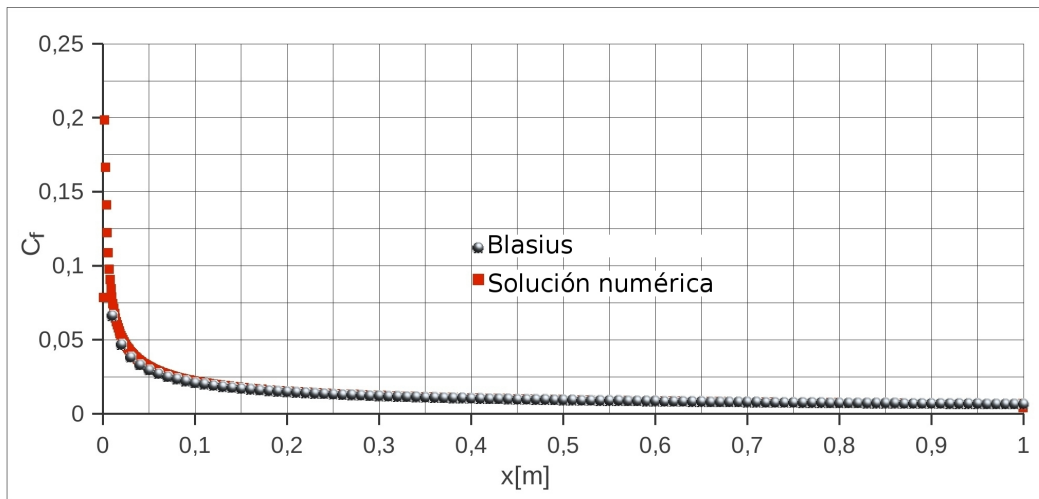


Figura 4.2: Comparación del coeficiente de fricción a lo largo de la placa.

4.2 Flujo estacionario sobre un cilindro

Esta sección tiene como objetivo simular el flujo alrededor de un cilindro de sección circular inmerso en una corriente uniforme. Los resultados se comparan con estudios numéricos y experimentales disponibles en la bibliografía.

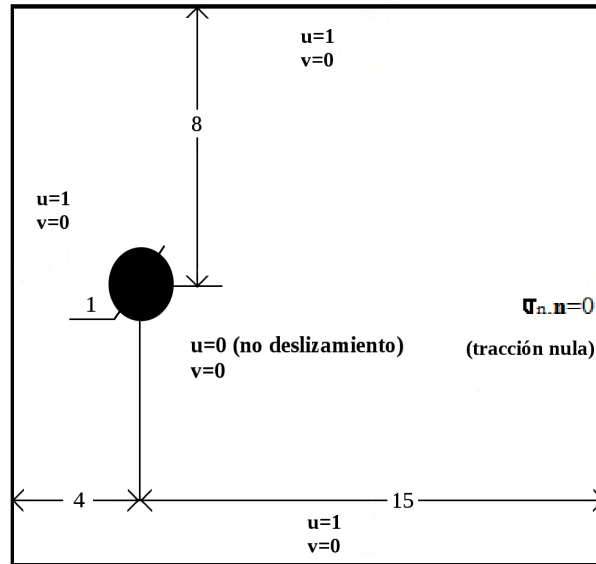


Figura 4.3: Condiciones de contorno para la simulación del cilindro (Gráfico fuera de escala).

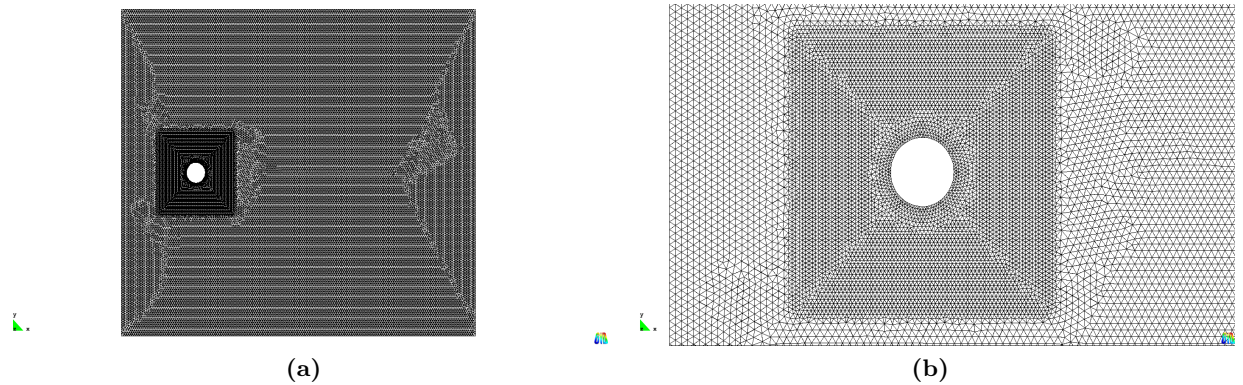


Figura 4.4: Mallado del dominio para las simulaciones del cilindro. (a) Dominio total. (b) Refinamiento sobre la superficie del cilindro.

Las simulaciones que se presentan son para números de Reynolds 20, 40, 100 y 200 ($Re = (D\rho U)/\mu$), siendo la longitud característica el diámetro del cilindro $D = 1m$, $U = 1m/s$ la velocidad de la corriente libre, $\rho = 1kg/m^3$ la densidad del fluido y μ la viscosidad dinámica utilizada como parámetro de control. La discretización del dominio computacional utilizado que se muestra en la figs. 4.3 y 4.4, consta de una malla no estructurada de 64527 elementos

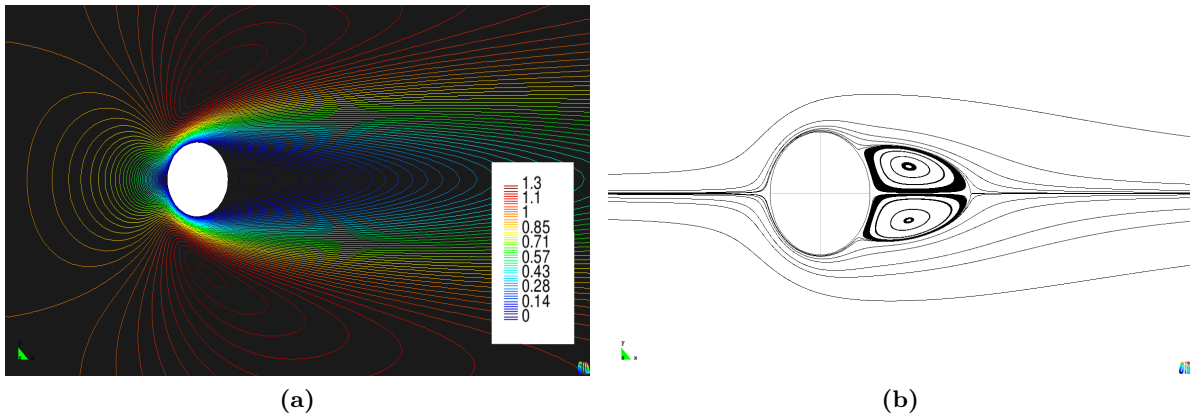


Figura 4.5: Flujo sobre un cilindro $Re = 20$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.

triangulares, en un dominio $[x_a, x_b] \times [y_a, y_b] = [-4, 15] \times [-8, 8]$. El rango de Reynolds estudiado permite cubrir regímenes de flujo estacionario, transición de estacionario a inestacionario e inestacionario.

Las condiciones de contorno que se imponen son:

- Sobre los contornos entrantes, superior e inferior velocidad $(u, v) = (1, 0)$.
- Sobre el contorno saliente, tracción nula $\sigma_n \cdot \mathbf{n} = 0$.
- Sobre la superficie del cuerpo, condición de no deslizamiento $(u, v) = (0, 0)$.

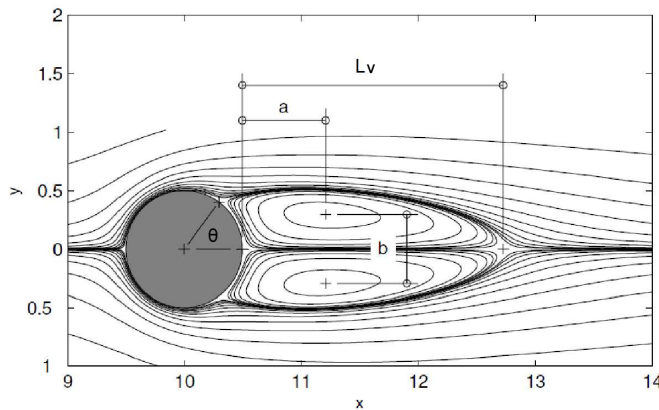


Figura 4.6: Nomenclatura de los parámetros geométricos a ser comparados y calculados en la simulación del cilindro.[84]

Los experimentos muestran que en el rango $40 < Re < 50$ comienzan las inestabilidades y la consecuente transición de flujo estacionario a inestacionario. Para $Re = 20$ (fig. 4.5) y $Re = 40$ (fig. 4.7), la estela muestra un estado simétrico detrás del cuerpo, que consta de dos

vórtices adheridos al mismo, de diferentes sentidos de circulación y estables en el tiempo, es decir, el flujo se mantiene estacionario.

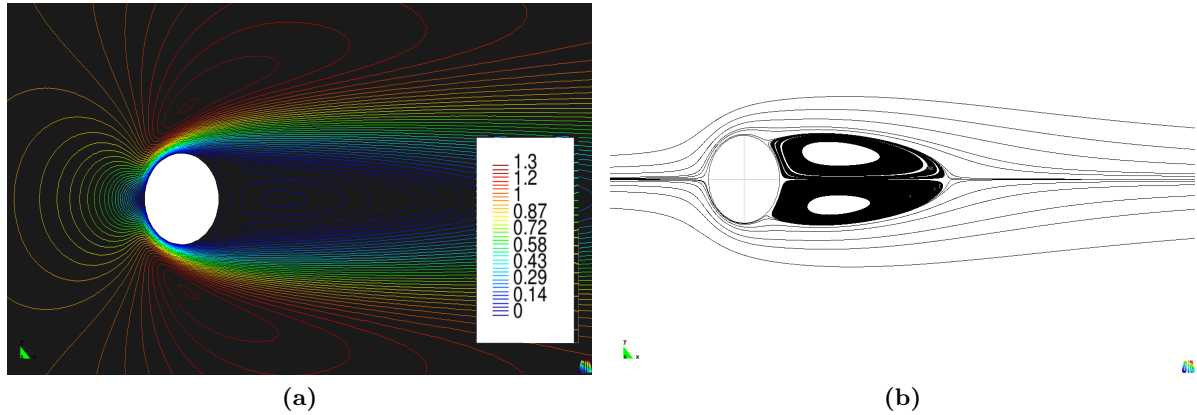


Figura 4.7: Flujo sobre un cilindro $Re = 40$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.

$Re = 20$	L_v [m]	a [m]	b [m]	θ	C_D
Dennis & Chang[29]	0.94	-		43.7	2.05
Countaunceau & Bouard*[27]	0.93	0.33	0.46	45	-
Linnik[78]	0.93	0.36	0.43	43.9	2.16
Gopalan[46]	0.92	0.34	0.42	-	-
Medjroubi [84]	0.92	0.35	0.43	44.5	2.16
Fornberg[43]	0.91	-	-	-	2
Presente trabajo	0.97	0.38	0.44	44.1	2

Tabla 4.1: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 20$.

La diferencia que se observa es que al aumentar el número de Reynolds (mientras se mantenga $Re < 50$) los vórtices adheridos aumentan su tamaño, con disminución del coeficiente de resistencia. Los parámetros geométricos² se definen en la fig. 4.6 y las comparaciones con resultados de la bibliografía se presentan en las Tablas 4.1 y 4.2. Se puede observar que las diferencias entre valores no exceden el 10%. Nótese que con (*) se indican resultados experimentales.

Según predice la teoría lineal [63],[47], el flujo se torna inestable para $Re = 46 \pm 1$. Si se supera este valor comienzan a aparecer oscilaciones asimétricas en la estela, causadas por el desprendimiento de vórtices desde la superficie del cilindro. Este proceso se denomina transición a inestacionario o calle de vórtices de von Karman. Para representar este fenómeno, se analiza

²El parámetro θ corresponde al ángulo sobre la superficie del cilindro en el cual ocurre el desprendimiento del flujo.

$Re = 40$	Lv [m]	a [m]	b [m]	θ	C_D
Dennis & Chang[29]	2.35	-		53.8	1.52
Countaunceau & Bouard*[27]	2.13	0.76	0.59	53.8	-
Linnik[78]	2.23	0.71	0.59	53.4	1.61
Gopalan[46]	2.15	0.7	0.6	-	-
Medjroubi[84]	2.21	0.7	0.59	53.8	1.6
Fornberg[43]	2.24	-	-	-	1.5
Presente trabajo	2.28	0.73	0.6	53.1	1.51

Tabla 4.2: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 40$.

el flujo sobre un cilindro a números de Reynolds 100 y 200, con tiempos totales de simulación de 170s y 174s respectivamente.

$Re = 100$	St	C_D	C_L
Berger & Wille*[6]	0.165	-	-
Liu et al. [79]	0.165	1.35	± 0.339
Linnik[78]	0.166	1.34	± 0.333
Gopalan[46]	0.167	-	-
Medjroubi[84]	0.167	1.36	± 0.336
Guerrero[47]	-	1.39	± 0.333
Presente trabajo	0.167	1.31	± 0.33

Tabla 4.3: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 100$.

El parámetro adimensional que se tiene en cuenta para caracterizar el flujo inestacionario es el número de Strouhal $St = Ul/f$, donde l es la longitud característica, U es la velocidad de la corriente libre y f es la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Dicho desprendimiento de vórtices es causante de la sustentación generada sobre el cilindro.

$Re = 200$	St	C_D	C_L
Berger & Wille*[6]	0.185	-	-
Liu et al.[79]	0.192	1.31	± 0.69
Linnik[78]	0.195	1.37	± 0.7
Medjroubi[84]	0.19	1.35	± 0.69
Guerrero[47]	-	1.4	± 0.725
Presente trabajo	0.191	1.27	± 0.68

Tabla 4.4: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $Re = 200$.

Como se puede ver en las figs. 4.8a y 4.8b los contornos de velocidad evidencian el carácter

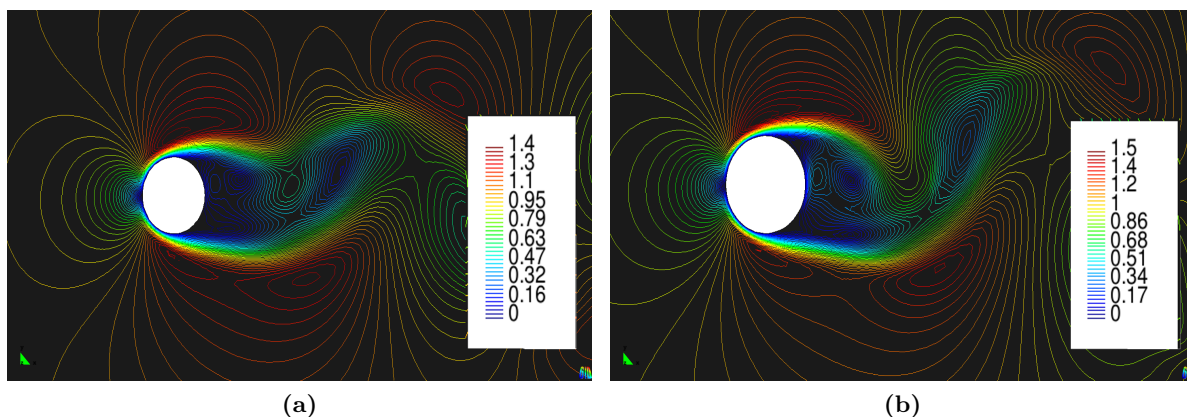


Figura 4.8: Líneas de velocidad constante. (a) Flujo sobre un cilindro $Re = 100$. (b) Flujo sobre un cilindro $Re = 200$.

inestacionario de la estela y además se observa claramente la calle de von Karman. En las Tablas 4.3 y 4.4 se presentan las comparaciones entre resultados numéricos y experimentales provistos por la bibliografía y los resultados del presente trabajo. En la fig. 4.9 se visualiza el período y la amplitud de las oscilaciones del C_L obtenidas en este trabajo y en la ref. [84] para $Re = 200$. La concordancia entre resultados de ambos trabajos es muy satisfactoria.

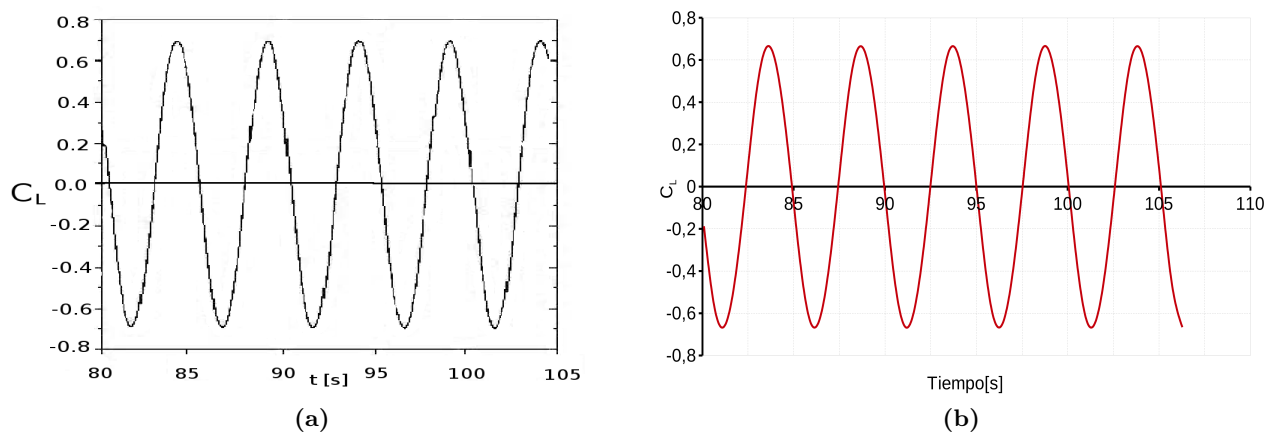


Figura 4.9: Coeficiente de sustentación del cilindro a $Re = 200$. (a) C_L de ref.[84]. (b) C_L del presente trabajo.

4.3 Flujo viscoso estacionario sobre perfiles

En esta sección se presentan casos de verificación del código donde se analizan los resultados del flujo estacionario sobre perfiles aerodinámicos estudiados intensivamente a lo largo de los años.

4.3.1 Perfil NACA 0008

La discretización del dominio espacial utilizado que muestra la fig. 4.10, consta de una malla no estructurada de 147480 elementos triangulares. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0009c$. Sobre la zona cercana al perfil y sobre la estela los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0065c$. El refinamiento de la malla, tiene como criterio conservar de la mejor manera posible, los gradientes de velocidad generados sobre la superficie del cuerpo como consecuencia de la condición de no deslizamiento. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de $0.07c$.

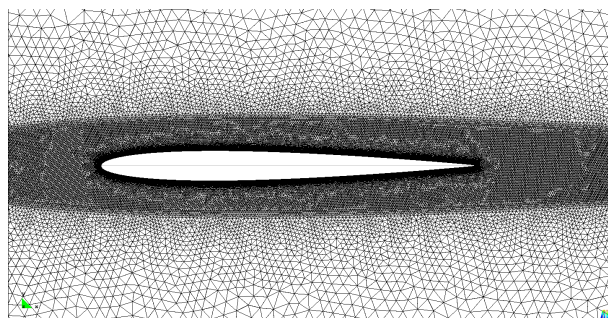


Figura 4.10: Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0008.

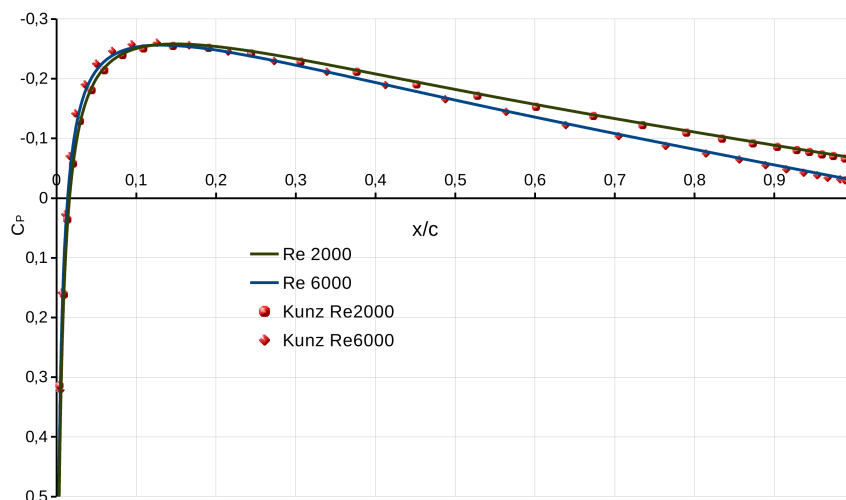


Figura 4.11: Comparación de la distribución de presiones con los resultados obtenidos por [73] sobre un perfil NACA 0008.

En la fig. 4.11 se observa la distribución de presiones sobre el perfil NACA 0008 en comparación con los resultados numéricos de Kunz [73]. Para Reynolds 2000 y 6000 existe una muy buena paridad demostrando que el código funciona bien en este régimen. También se realizó una ponderación del error (err) para ambos números de Reynolds, sobre 20 puntos tomados a

lo largo del perfil. El valor del error aquí se define por,

$$err = \frac{C_{p_{pt}} - C_{p_{ref}}}{C_{p_{ref}}} \quad (4.4)$$

donde los subíndices “*pt*” y “*ref*” significan “presente trabajo” y “referencia” respectivamente. La ponderación de errores a lo largo del perfil para $Re = 6000$ es:

$$e\bar{r}r = 0,039 = 3,9\% \quad (4.5)$$

y para $Re = 2000$ es:

$$e\bar{r}r = 0,042 = 4,2\% \quad (4.6)$$

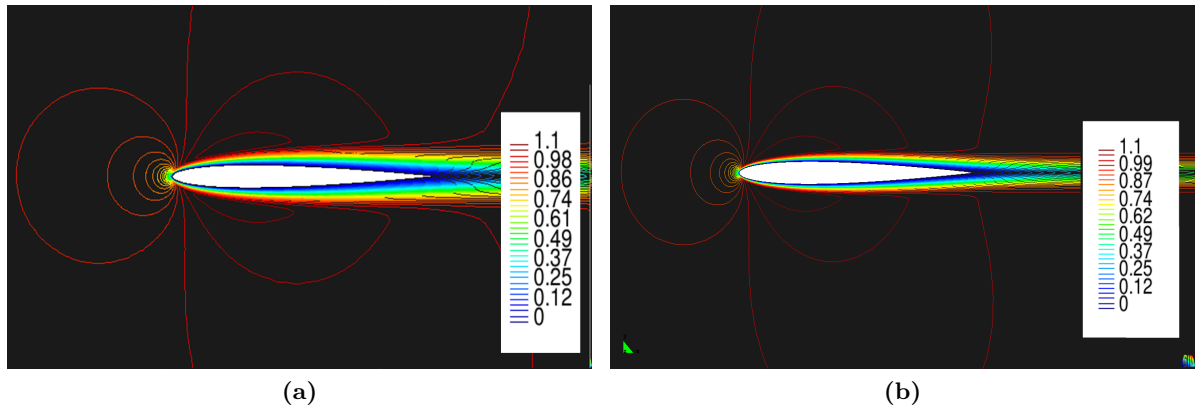


Figura 4.12: Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0008. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$.

Los contornos de velocidad a Reynolds 2000 y 6000 se muestran en la fig. 4.12, donde se observa que a menor Re mayor es la influencia de la viscosidad.

4.3.2 Perfil NACA 0002

Para un perfil NACA 0002, se realiza el mismo análisis que el caso anterior. La discretización del dominio computacional consiste de una malla no estructurada de elementos triangulares, fig. 4.13. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0005c$. Sobre la zona cercana al perfil y sobre la estela los elementos tienen un tamaño promedio de $0.003c$. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de $0.07c$ ³.

En la fig. 4.14 se observa la distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 y se compara con los resultados de Kunz [73]. Para Reynolds 2000 y 6000 existe una buena concordancia en los resultados, lo cual confirma que el código funciona correctamente.

Al igual que el caso anterior, la ponderación del error err para ambos números de Reynolds,

³El refinamiento sobre el perfil es de tipo empírico en base a resultados y análisis realizados previamente.

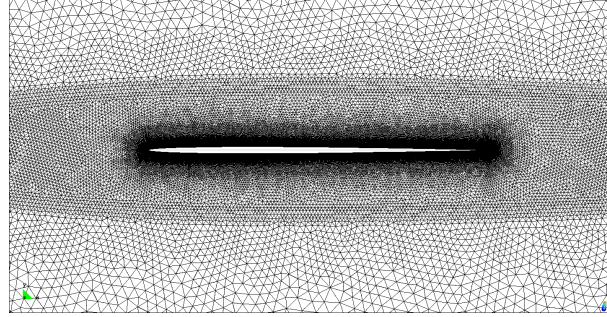


Figura 4.13: Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0002.

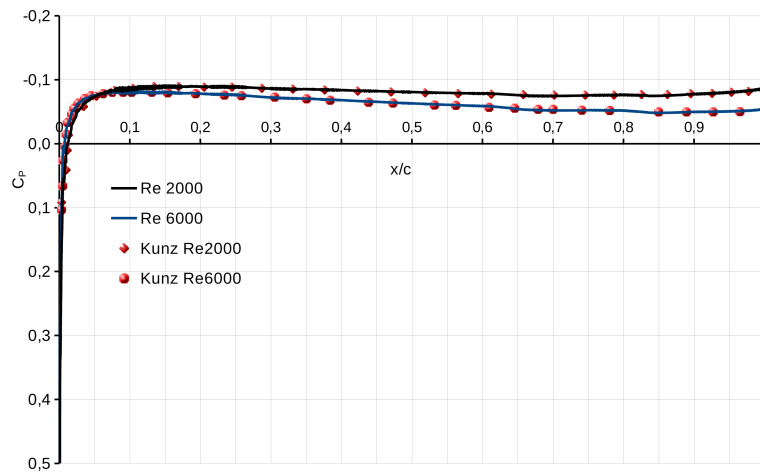


Figura 4.14: Distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 en comparación con los obtenidos en ref. [73] a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

sobre 30 puntos tomados a lo largo del perfil resulta para $Re = 6000$:

$$e\bar{r}r = 0,0186 = 1,86 \% \quad (4.7)$$

y para $Re = 2000$ es:

$$e\bar{r}r = 0,034 = 3,4 \% \quad (4.8)$$

Los contornos de velocidad a Reynolds 2000 y 6000 se muestran en la fig. 4.15, donde se observa que ocurre lo mismo que en el perfil 0008, a menor Re , mayor es la zona del flujo afectada por la condición *no slip* impuesta sobre el perfil.

4.4 Flujo viscoso inestacionario sobre perfiles

En esta sección las comparaciones también se hacen con resultados numéricos y experimentales publicados por diferentes autores. Ellos utilizaron el método de volúmenes finitos con una

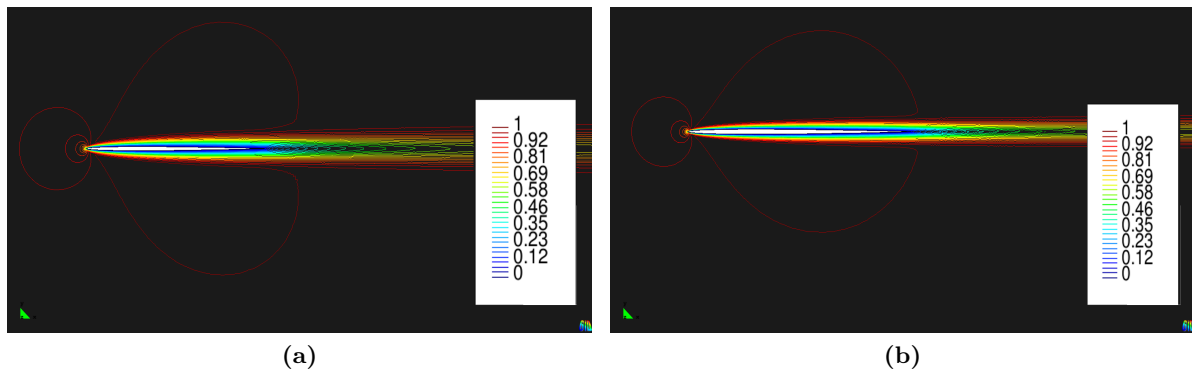


Figura 4.15: Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0002. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$.

ecuación específica para la presión y experimentos empleando técnicas PIV (Particle Image Velocimetry).

Pedro et al.[94] realizaron un estudio sobre la eficiencia propulsora de *flapping* en hidroperfiles NACA 0012 a $Re = 1100$. Utilizaron un método de volúmenes finitos solucionando una ecuación de transporte para la presión y un esquema temporal explícito. La grilla que utilizaron es estructurada. Las ecuaciones de transporte fueron discretizadas mediante diferencias centradas y para el movimiento del cuerpo se utilizó la formulación *Arbitrary Lagrangean-Eulerian* (ALE). Guerrero [47] realizó el mismo tipo de análisis para validar su trabajo. Por lo tanto y como primera verificación, se pueden llevar a cabo pruebas comparativas con los resultados publicados por los autores citados.

4.4.1 Movimiento de cabeceo o “*pitching*”

Un primer escenario a considerar es un movimiento de cabeceo puro. Los parámetros a tener en cuenta son: el número de Reynolds Re en base a la velocidad de la corriente libre U , la frecuencia de cabeceo f_α , la frecuencia reducida k y la máxima amplitud o ángulo máximo alcanzado en grados α_a . En el análisis, la única variable será la frecuencia de cabeceo y el punto de pivot se ubica al 25% de la cuerda del perfil. En la Tabla 4.5 se presentan los diferentes casos a comprobar.

La malla de elementos finitos utilizada para el caso P4 de la Tabla 4.5, se muestra en la fig.4.16. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de $0.002c$. Sobre la zona cercana al perfil los elementos tienen un tamaño promedio de $0.002c$. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de $0.1c$. En estos casos los efectos importantes que se deben capturar, son la zona influenciada por la condición *no slip* impuesta sobre el cuerpo y el desprendimiento de vórtices, ya sea desde el borde de fuga o de ataque. Cabe hacer notar que al aumentar la frecuencia f_α , el refinamiento de la malla en la zona del comienzo de la estela es esencial.

Casos	f_α , [Hz]	k	α_a [°]
P1	0.6366	2.0	5.0
P2	1.9098	6.0	5.0
P3	2.5464	8.0	5.0
P4	3.1830	10.0	5.0
P5	4.4562	14.0	5.0
P6	5.7294	18.0	5.0

Tabla 4.5: Parámetros cinemáticos para los casos de “pitching”.

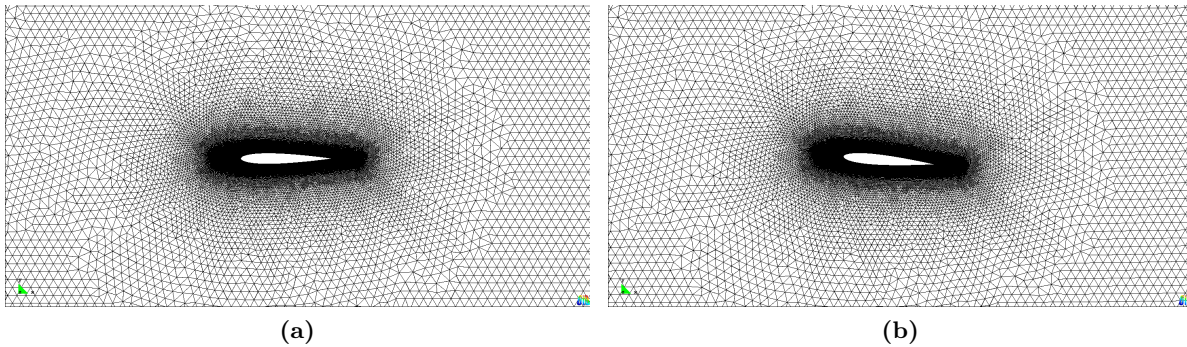


Figura 4.16: Mallado sobre un perfil NACA 0008. (a) Mallado sin deformar a $\alpha_a = 0^\circ$. (b) Mallado deformado a $\alpha_a = 5^\circ$.

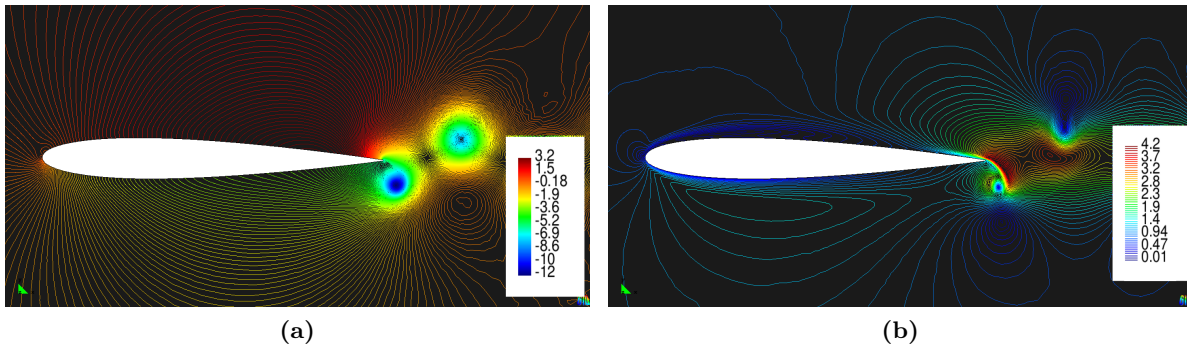


Figura 4.17: Contornos de velocidad y presión sobre un perfil NACA 0008 para el caso P4 de la Tabla 4.5. (a) Contornos de presión. (b) Contornos de velocidad.

En la Tabla 4.6⁴ se muestra el coeficiente de potencia o tracción promedio generado (ec. 2.15) y el coeficiente de sustentación máximo para cada caso, una vez alcanzado el régimen cuasi estacionario de flujo. Para alcanzar dicho régimen, se toma la diferencia entre picos máximos de sustentación (C_{Lmax}) y se observa si cae dentro de un rango menor al 1%. En la mayoría de los

⁴Los valores de C_{Lmax} son de gran magnitud debido a que las frecuencias de cabeceo son considerablemente altas.

Casos	Pedro et al.[94]		Guerrero[47]		Presente Trabajo		Errores en $\bar{c}t$	
	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	err Ped.	err Gue.
P1	-0.1132	0.7107	-0.1280	0.6689	-0.0978	0.7108	-	-
P2	-0.0168	5.4341	-0.0204	5.2650	-0.0101	5.3858	-	-
P3	0.0964	9.8144	0.0986	9.3430	0.0969	9.6300	0.0058	0.0166
P4	0.2174	15.5948	0.1779	14.9362	0.2167	15.4524	0.0032	0.2181
P5	0.8624	34.1262	0.7356	29.3190	0.6300	31.1200	0.2694	0.1435
P6	1.7467	57.5248	1.4418	49.3107	1.2700	52.0250	0.2677	0.1129

Tabla 4.6: Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo, presente trabajo, ref. [94] y [47].

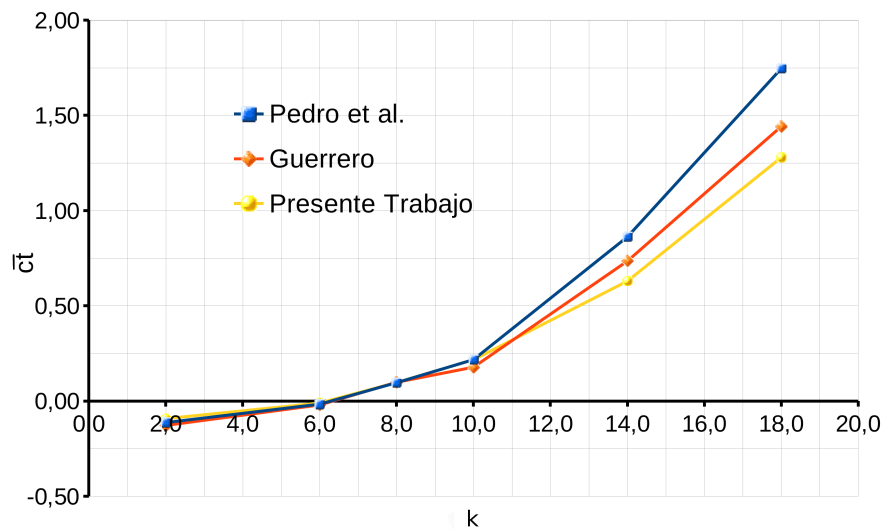


Figura 4.18: Comparación de resultados con los obtenidos en ref. [94] y [47]. Movimiento *pitching*: coeficiente de tracción $\bar{c}t$ vs. frecuencia reducida k ($Re = 1100$).

casos el estado cuasi-estacionario se alcanza entre los 3 y 5 ciclos de movimiento. Los resultados se comparan con los obtenidos por Pedro et al.[94] y Guerrero [47]. Además, se presentan los errores relativos del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ respecto a ambas referencias. El mismo se calcula según

$$err = \frac{\bar{c}t_{pt} - \bar{c}t_{ref}}{\bar{c}t_{ref}} \quad (4.9)$$

Los mismos muestran una paridad adecuada en los casos P3 y P4, en comparación con los resultados obtenidos por Pedro et al. y se acercan más a los resultados obtenidos por Guerrero en los casos P5 y P6. Cuando la tracción es casi nula (P2), el error puede tomar valores altos, por ello no es representativo y es descartado. Luego en la curva de la fig.4.18 se grafican dichos resultados. Las diferencias pueden estar dadas por la metodología utilizada, la pérdida

o desprendimiento dinámico, la captura de vórtices y por la naturaleza del flujo altamente irregular.

En la fig. 4.17 se muestran contornos de velocidad y de presión para el caso P4. Su objeto es dar una idea de la topología del flujo y como actúan las diferencias de presión sobre la geometría. Además en la fig. 4.19, se observa el comportamiento en función del tiempo de los parámetros aerodinámicos C_T y C_L para el caso P2 de la Tabla 4.5.

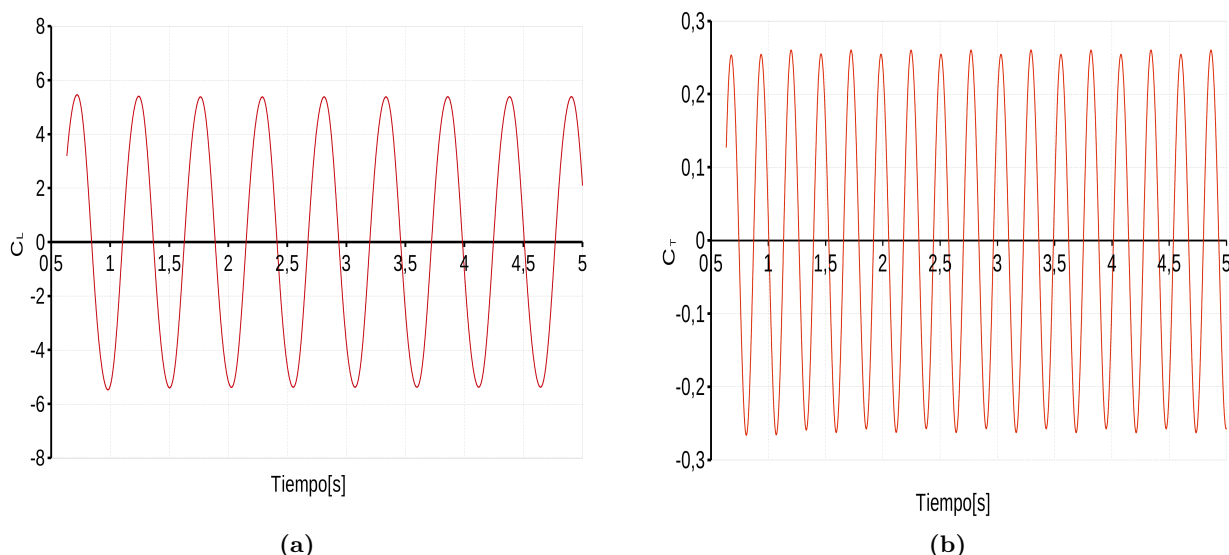


Figura 4.19: Coeficiente de sustentación y de tracción: Caso P2 de la Tabla 4.5 (a) coeficiente de sustentación, (b) coeficiente de tracción.

4.4.2 Combinación de movimiento de cabeceo (*pitching*) con oscilación vertical (*heaving*)

Un segundo escenario de interés, es el movimiento combinado de cabeceo con desplazamiento vertical conocido como “*flapping*”, el cual será aplicado a un perfil NACA 0012.

Los parámetros intervinientes en dicho estudio son: el número de Reynolds Re en base a la velocidad de corriente libre U , las frecuencias de cabeceo f_α y de desplazamiento vertical f_h , la frecuencia reducida k , el ángulo máximo de cabeceo alcanzado en grados α_a , el ángulo de fase entre ambos movimientos φ , el número de Strouhal S_t y la amplitud máxima del movimiento vertical h_a . En la Tabla 4.7 se manifiestan los diferentes casos a estudiar.

Los resultados de este trabajo se comparan en la Tabla 4.8 con los obtenidos por Guerrero [47] y Pedro et al. [94]. Dicha comparación se realiza en términos de coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t , del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} y del error incurrido respecto de los datos de las referencias. Se observa una buena paridad en los valores, con un ligero decaimiento a medida que se aumenta la amplitud de cabeceo. Las diferencias pueden ser atribuidas a la

Casos	$f_\alpha = f_h$ [Hz]	h_a	α_a [°]	φ [°]	k	St
F1	0.225	1.0	5	90.0	0.7096	0.45
F2	0.225	1.0	10	90.0	0.7096	0.45
F3	0.225	1.0	15	90.0	0.7096	0.45
F4	0.225	1.0	20	90.0	0.7096	0.45
F5	0.225	1.0	25	90.0	0.7096	0.45

Tabla 4.7: Parámetros cinemáticos para los casos de “flapping” (F1-F5).

Casos	Pedro et al.[94]		Guerrero[47]		Presente Trabajo		Errores en $\bar{c}t$	
	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	<i>err</i> Ped.	<i>err</i> Gue.
F1	0.4324	8.3333	0.4245	8.0828	0.4311	8.2078	0.0030	0.0155
F2	0.6511	7.4834	0.6576	7.1699	0.6556	7.2400	0.0069	0.0030
F3	0.8226	6.6307	0.8360	6.5435	0.8246	6.3904	0.0024	0.0136
F4	0.9337	5.8176	0.9389	6.1133	0.9960	5.5113	0.0667	0.0608
F5	1.0046	5.0558	0.9601	5.6080	1.0900	4.9910	0.0792	0.1353

Tabla 4.8: Coeficiente de tracción promedio y de sustentación máximo para los casos *flapping* analizados con el presente trabajo y las ref. [94] y [47].

pérdida dinámica, la naturaleza irregular del flujo al aumentar el ángulo máximo de cabeceo, etc. No obstante el gráfico de la fig. 4.20 muestra que la tendencia de la curva $\bar{c}t$ vs. α_a del presente trabajo es aceptable.

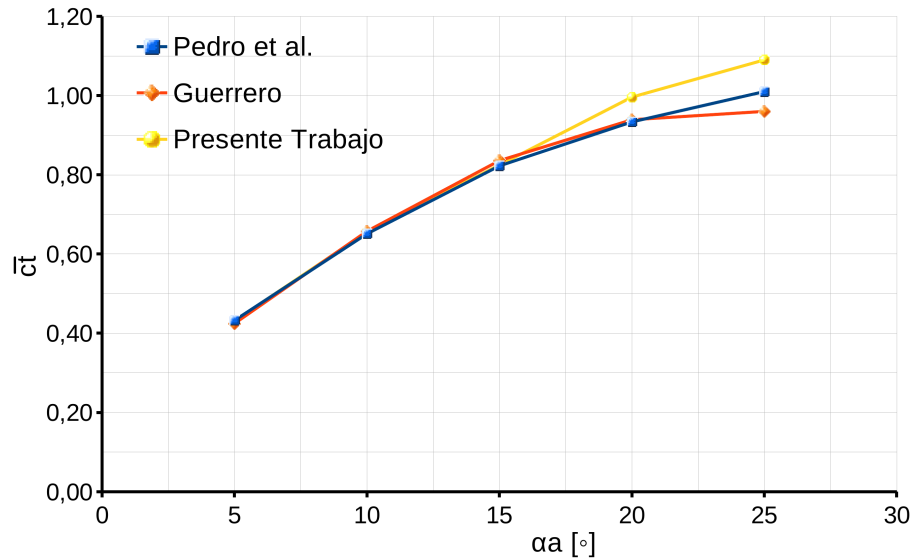


Figura 4.20: Coeficiente de tracción $\bar{c}t$ vs. amplitud angular α_a a $Re = 1100$. Comparación de resultados con los obtenidos en ref. [94] y [47].

4.4.3 Análisis cualitativo

Siempre que se investiga o analiza un determinado fenómeno físico, resulta relevante llevar a cabo un estudio cualitativo del mismo donde, por mera observación del resultado simulado, se determina si condice con la realidad física.

En esta área, es de particular interés el análisis del comportamiento del flujo alrededor del cuerpo, sobre todo en la formación de patrones periódicos que se repiten ante una perturbación, y luego llevar a cabo una comparación con resultados de experimentos.

En un estudio experimental Jones and Platzler [76] utilizaron un túnel de agua en el que analizaron un perfil NACA 0012 a $Re = 20000$ con movimiento vertical periódico sinusoidal (“*heaving*”) para diferentes valores de frecuencia y amplitud. Además, Young [135] en su tesis, realizó un estudio numérico comparativo con dicho estudio experimental. Young plantea un aspecto importante cuando se estudian perfiles bajo flujo inestacionario, que es la utilización de un modelo laminar y un modelo turbulento, a los fines de analizar como cada uno es capaz de capturar los vórtices desprendidos desde el perfil, y comprobar la realidad experimental.

En este trabajo, si bien el flujo a estudiar es para números de Reynolds inferiores a 10000, es de interés realizar una prueba comparativa para aseverar como sería el comportamiento del modelo de elementos finitos laminar a utilizar.

En la fig. 4.21 se comparan datos experimentales con los resultados numéricos. El análisis se realiza para un perfil NACA 0012 a $Re = 20000$, con frecuencia reducida $k = 4$ y una amplitud de movimiento vertical $h = 0,025$. Los resultados experimentales [76] muestran una convección uniforme de la estela, donde ocurre un desprendimiento de dos pares de vórtices por período de oscilación. Para la visualización de los mismos, se emplea una técnica de chorro de tinta, donde el color rojo se inyecta sobre el extradós y el verde sobre el intradós manifestando dos tipos de vórtices por ciclo. Los vórtices se diferencian en que los rojos son de sentido de giro horario y los verdes anti-horarios.

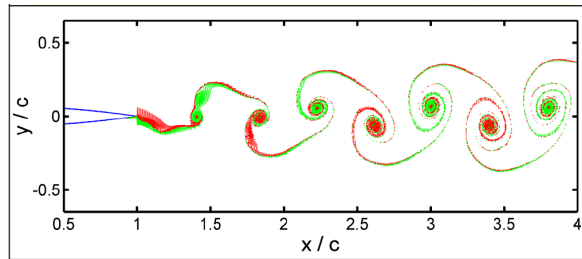
En la simulación numérica hecha por [135] se presentan resultados de los dos esquemas propuestos. El primero (fig. 4.21b), responde a un flujo laminar y el segundo a un modelo turbulento (fig. 4.21c). El segundo no es capaz de reproducir la topología de estela que se detecta en los experimentos, siendo así más favorable lo obtenido por el primer modelo. Según lo expuesto en [135], el algoritmo turbulento es incapaz de reproducir el experimento ya que el desprendimiento producido es puramente laminar.

El software utilizado en el presente trabajo realiza únicamente simulaciones bajo la hipótesis de flujo laminar. El resultado de su aplicación se puede ver en la fig. 4.21d, donde se observa una paridad con los experimentos en el campo de vorticidad.

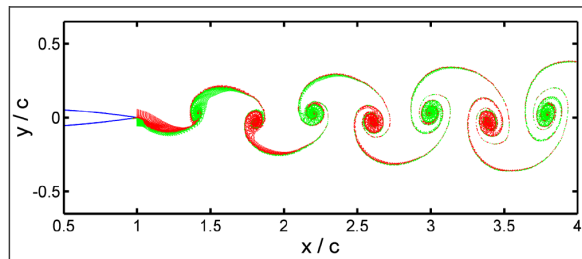
El segundo estudio se presenta en la fig. 4.22, donde nuevamente se comparan datos experimentales con resultados numéricos. El análisis se realiza para un perfil NACA 0012 a $Re = 20000$, con frecuencia reducida $k = 4$ y una amplitud de movimiento vertical $h = 0,05$. Para este caso la topología de estela se caracteriza por un par de vórtices desprendidos por



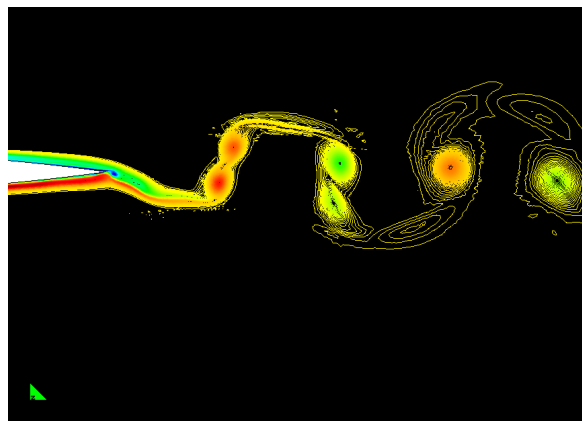
(a)



(b)



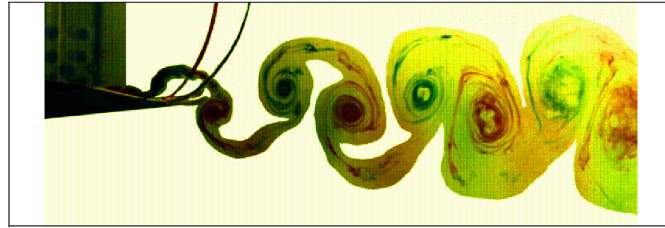
(c)



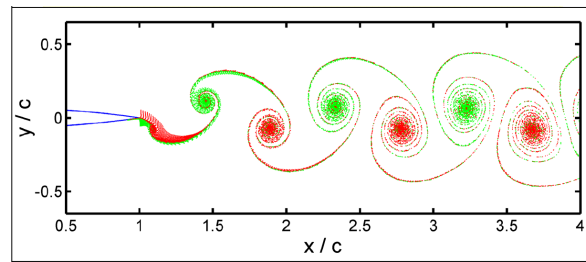
(d)

Figura 4.21: Comparación de topología de estela para $h = 0,025$, $Re = 20000$ y $k = 4$:(a) resultado experimental [76]; (b) resultado numérico laminar [135]; (c) resultado numérico turbulento [135]; (d) resultado numérico del presente trabajo (Líneas de vorticidad).

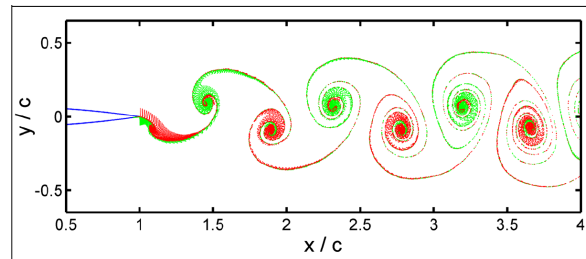
período de oscilación. Al igual que en el caso anterior, la fig. 4.22a corresponde al experimento realizado en [76] y las figs. 4.22b y 4.22c son las simulaciones realizadas por [135], para un



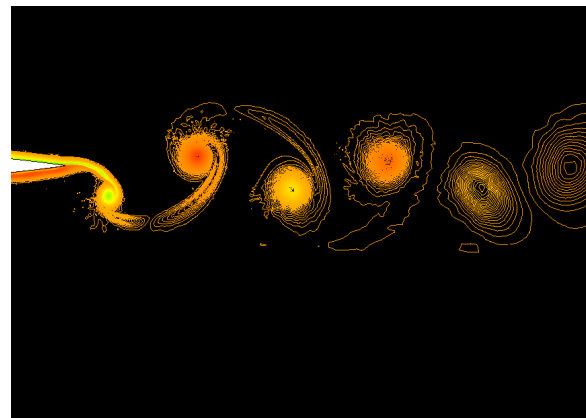
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.22: Comparación de topología de estela para $h = 0,05$, $Re = 20000$ y $k = 4$: (a) resultado experimental [76]; (b) resultado numérico laminar [135]; (c) resultado numérico turbulento [135]; (d) resultado numérico del presente trabajo (Líneas de vorticidad).

modelo laminar y turbulento respectivamente.

El resultado del presente trabajo se observa en la fig. 4.22d, donde se grafica el campo

de vorticidad. La paridad existente con el experimento [76] y los resultados numéricos para flujo laminar [135] permiten afirmar que el código a utilizar es apto para simular este tipo de problemas.

4.5 Análisis de Mallado

Una simulación numérica consistente proporcionará resultados que mejor se aproximan a los reales a medida que la resolución de la malla tiende a cero. Se puede aceptar entonces que las simulaciones de las ecuaciones discretizadas convergen hacia la solución de las ecuaciones del continuo. No obstante, una cuestión importante a resolver es qué tipo de refinamiento de malla es el apropiado para un problema específico, ya que dependerá de las condiciones del flujo, del tipo de análisis, la geometría del dominio, técnicas numéricas, recursos computacionales etc. Se comienza con una resolución determinada, para luego efectuar una serie de mejoras de la malla y evaluar sus efectos. Este proceder se conoce como un estudio o refinamiento de dependencia. En general se trata de un método utilizado para la determinación del error de discretización e implica la realización de simulaciones en dos o más mallas sucesivamente más finas.

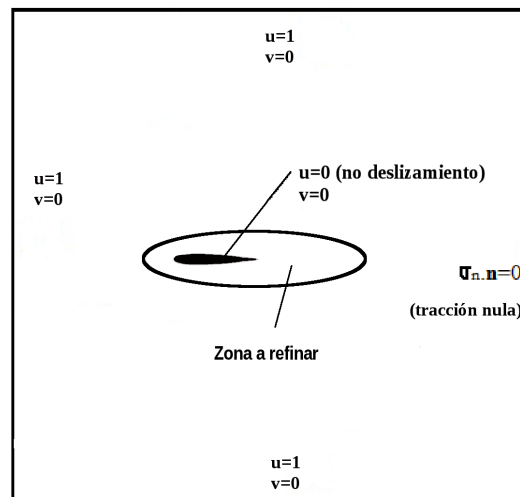


Figura 4.23: Dominio de análisis y detalle de la zona a refinar.

En problemas fluido-dinámicos no es tan simple formular un criterio de refinamiento de la grilla como suele serlo en un problema de estructuras, no obstante siempre existe la posibilidad de llevar a cabo una serie de simulaciones con tal fin.

En este trabajo se toma como caso de análisis la simulación del flujo sobre un perfil que inmerso en una corriente libre, ejecuta un movimiento de *pitching* periódico. La dificultad radica en definir la zona del dominio computacional donde el mallado tiene que hacerse más fino y en base a que criterio lo ha sido.

La zona de refinamiento es la que se indica en la fig. 4.23. Con una longitud de cuerda del

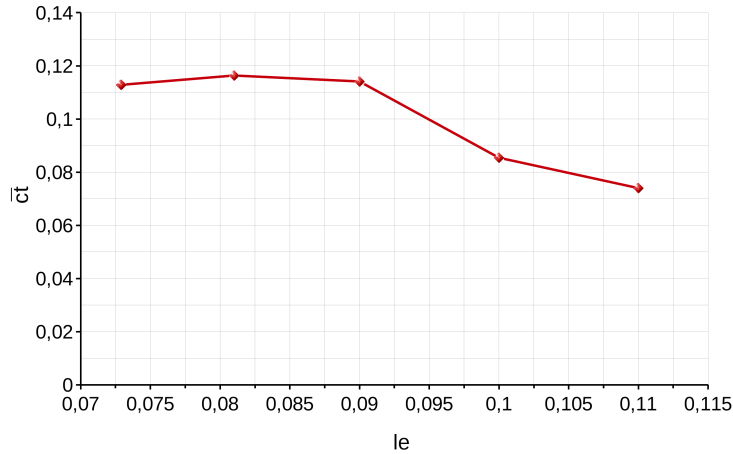


Figura 4.24: Coeficiente de tracción en función del refinamiento de malla. $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$, $k = 8$.

perfil $c = 1$ se varía el tamaño de los elementos de dicha zona en un rango $0,0729 < l_e < 0,111$, con l_e longitud del elemento. El proceso de refinado consiste en iniciar el análisis con el mayor tamaño de elemento y luego reducir en forma proporcional hasta llegar al mínimo valor de estudio. El resultado puede verse en la fig. 4.24, donde para $l_e = 0,09$ se alcanza un valor del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$, que prácticamente no varía si se disminuye el tamaño del elemento. Cabe hacer notar que el mallador y postprocesador utilizado es *GiD*®.

4.6 Verificación del código estructural

En esta sección se verificará el código de simulaciones estructurales aplicadoló a un modelo lineal de viga cantilever. Para ello se somete a dicha viga a un desplazamiento inicial prefijado, y luego se estudian las vibraciones libres resultantes. Las propiedades de la viga son: longitud $L = 1[m]$, sección tubular con un radio interno $r_i = 0,15[m]$ y un radio externo $r_e = 0,16[m]$, el área $A = 0,0097389[m^2]$, el momento de inercia $I = 0,0001171[m^4]$ y la densidad $\rho_s = 7830[kg/m^3]$.

La dinámica de este problema fue resuelta analíticamente por Han et al. [48] utilizando cuatro modelos teóricos diferentes (Euler-Bernoulli, Corte, Rayleigh y Timoshenko), mediante el método de expansión de funciones propias.

El código estructural del presente trabajo es de desarrollo propio, e incorpora un modelo de viga Euler-Bernoulli. La discretización espacial se implementa mediante el método de elementos finitos con funciones de forma hermitianas unidimensionales y la integración temporal se realiza mediante el método de Newmark. Se utilizaron 20 elementos a lo largo de la viga y el desplazamiento inicial responde a la función

$$y(x, 0) = (1,667x^3 - 5x^2)10^{-3} \quad (4.10)$$

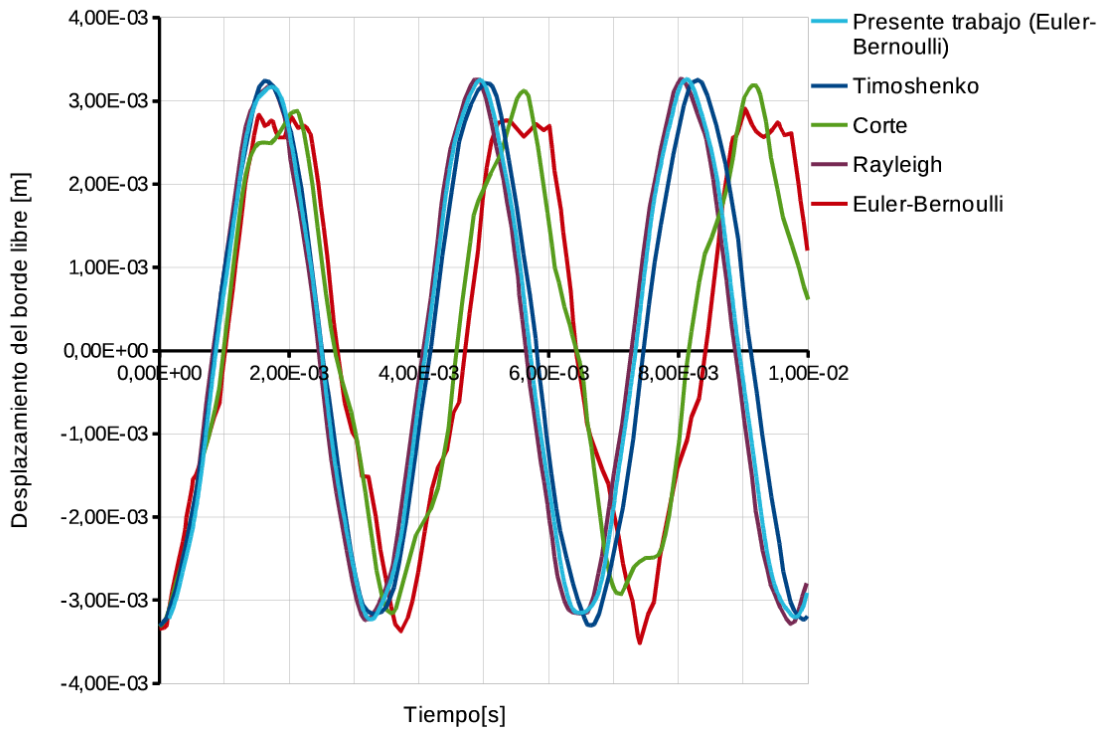


Figura 4.25: Comparación del desplazamiento del borde libre respecto a los casos analizados por Han et al. [48].

Las comparaciones entre desplazamientos del borde libre de la viga pueden observarse en la fig. 4.25. Se observa una buena paridad del resultado obtenido con el código numérico, en correspondencia con el método analítico. En la Tabla 4.9 se presenta un análisis del error obtenido en la frecuencia de las vibraciones transversales y la amplitud máxima para cada caso. El error para la frecuencia se puede calcular como,

$$err_f = \frac{f_{num} - f_{ant}}{f_{ant}} \quad (4.11)$$

donde f_{num} es la frecuencia obtenida por con el código numérico y f_{ant} la obtenida analíticamente. Para la amplitud máxima se procede de manera semejante.

	Presente trabajo	Euler-Bernoulli	Rayleigh	Corte	Timoshenko
Frecuencia [1/s]	310.56	272.10	308.64	275.48	299.40
err_f [%]	-	14.130	0.635	12.760	3.720
Máxima amplitud [m]	3.17e-3	2.77e-3	3.18e-3	3.12e-3	3.25e-3
err_a [%]	-	14.400	0.314	1.600	2.400

Tabla 4.9: Errores en frecuencia y amplitud respecto de los casos analizados por Han et al. [48].

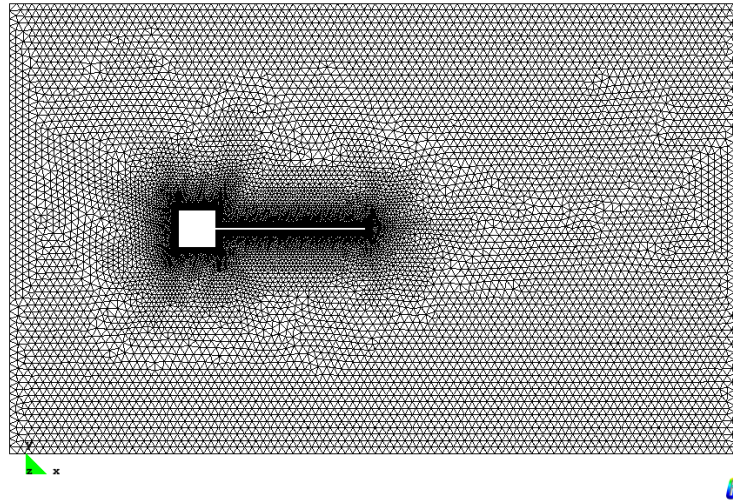


Figura 4.27: Mallado del problema.

densidad del fluido, $\rho_f = 1,18e^{-3}[Kg/m^3]$, viscosidad dinámica $\mu = 1,82e^{-4}[Kg/m.s]$ y velocidad de la corriente libre $U = 51,3[m/s]$. El número de Reynolds resultante es $Re = 333$, con la longitud del lado del cuerpo rígido $L_b = 1m$ como la longitud característica. El problema es de interacción fuerte si se tiene en cuenta que la relación $\rho^* = 84,74$.

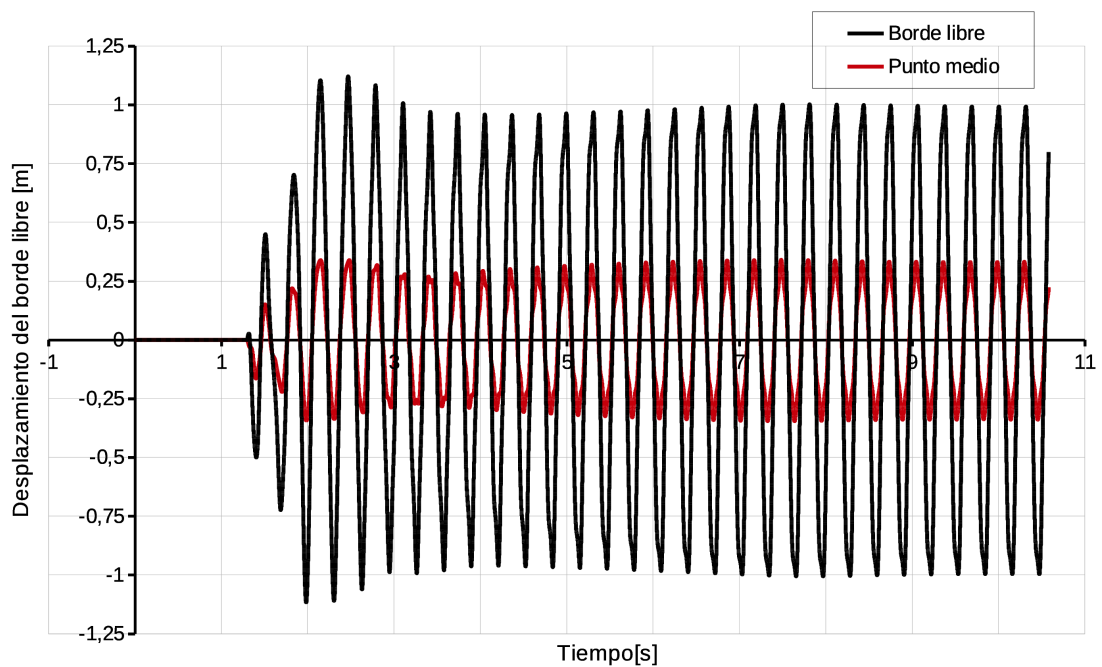


Figura 4.28: Desplazamiento del borde libre obtenido en el presente trabajo.

La simulación comienza con la placa rígida, sin interacción entre el fluido y la estructura

durante los primeros 4000 pasos de tiempo, equivalentes a un tiempo de simulación de 1.3s aproximadamente. El acoplamiento es de tipo *staggered* (Gauss-Seidel), donde el fluido se integra mediante el método de pasos fraccionados y la estructura mediante el método de Newmark amortiguado con $\beta = 0,3025$ y $\gamma = 0,6$. El predictor es de segundo orden y el algoritmo cuenta con relajación de Aitkens sobre el desplazamiento, con factor de tolerancia igual a $\epsilon_0 = 3e^{-6}$ y un promedio de 7 iteraciones por paso de tiempo. El paso de tiempo promedio es común en ambos integradores $\Delta t = 2,8e^{-4}s$ y el tiempo total de simulación es de 20s en todos los casos. La respuesta del desplazamiento del borde libre y un punto medio de la placa pueden verse en la fig. 4.28.

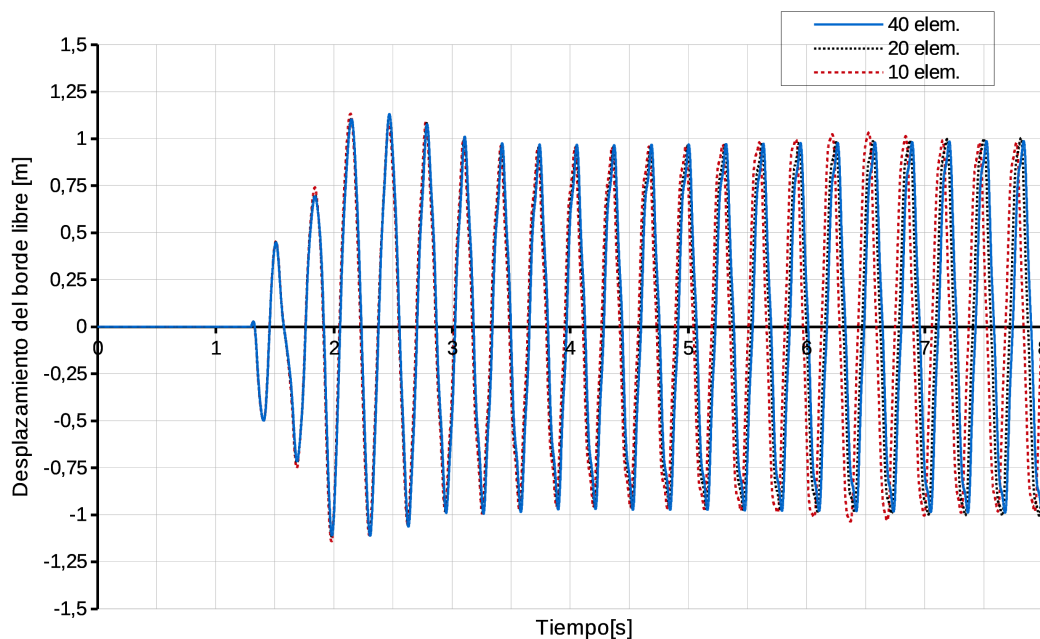


Figura 4.29: Comparación de los desplazamientos del borde libre para tres mallas estructurales. 10, 20 y 40 elementos.

	Presente trabajo	Kassiotis et al.	Valdéz	Wall-Ramm
Frecuencia [1/s]	3.1858	3.1746	3.125	3.0712
err_f [%]	-	0.352	1.94	3.7
Máx. despl. [m]	0.998	1.031	0.997	1.328
err_a [%]	-	3.2	0.1	24.8

Tabla 4.10: Errores en frecuencia y amplitud respecto a los casos analizados por [67], [125] y [128].

Se observa que la estructura oscila principalmente en su primer modo de vibración. Las primeras dos frecuencias naturales de la estructura son iguales a $f_{s1} = 3,03[Hz]$ y $f_{s2} = 18,94[Hz]$, y la frecuencia de convección de vórtices del fluido es igual a $f_{f1} = 5,9796[Hz]$.

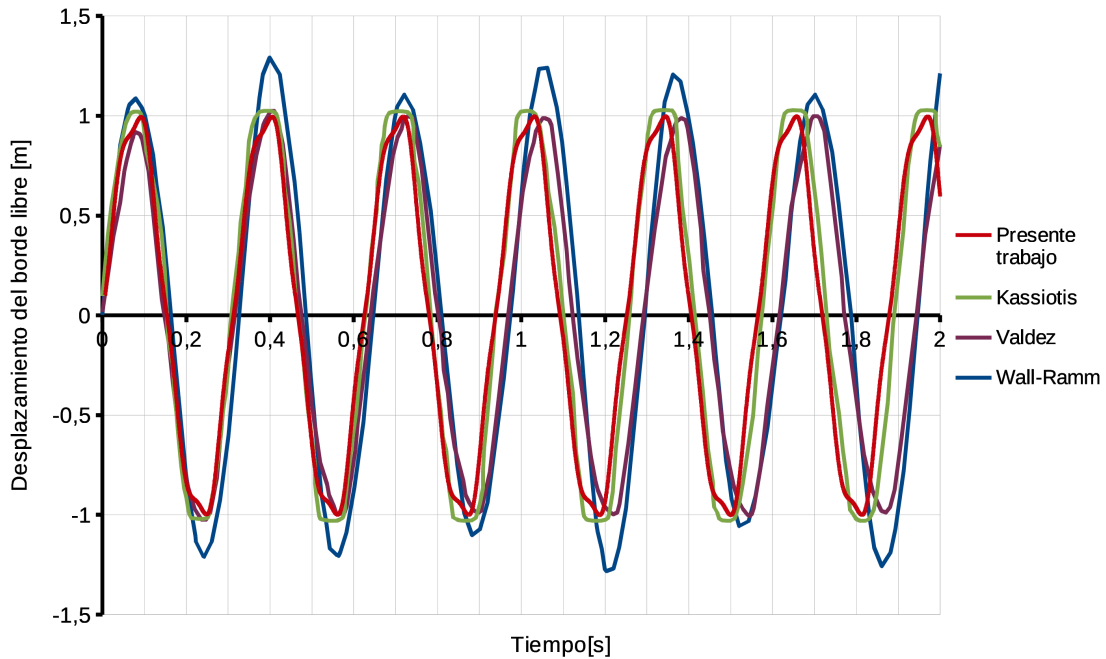


Figura 4.30: Comparación de los desplazamientos del borde libre con [67], [125] y [128].

Se analizaron tres mallados estructurales con: 10, 20 y 40 elementos unidimensionales. En los tres casos el paso de tiempo y el número de iteraciones promedio se mantienen igual a $\Delta t = 2,8e^{-4}s$ y 7 respectivamente. La comparación de las respuestas pueden verse en la fig. 4.29. La diferencia observable se da en la frecuencia de acoplamiento, en la medida que se aumenta el número de elementos, la misma disminuye, por ejemplo desde $f_{fs} = 3,221[Hz]$ para 10 elementos a $f_{fs} = 3,1858[Hz]$ para 40 elementos. Dicha frecuencia apenas es un poco más alta que la primera frecuencia natural de la estructura, lo que indica que la estructura vibra en su primer modo excitada por la presión inducida por el desprendimiento de vórtices.

Posteriormente, se realiza un análisis comparativo entre los resultados obtenidos del presente trabajo para la malla estructural de 40 elementos, con los resultados obtenidos por diferentes autores que se presentan a continuación: Kassiotis et al. [67] utilizaron un método implícito de interacción con algoritmos separados, elementos finitos para el algoritmo estructural y volúmenes finitos para el algoritmo fluido-dinámico. A su vez realizaron una comparación con los resultados obtenidos por Dettmer et al.[31], Matthies et al. [81] y Wall et al. [127]. Wall y Ramm [128], utilizaron un algoritmo particionado para la interacción fluido-estructura y elementos finitos para la discretización de ambos modelos. Valdéz [125], también utilizó un algoritmo particionado para la interacción fluido-estructura y elementos finitos en ambos modelos. Así mismo realizó una comparación con el resultado obtenido por Steindorf [112].

En la fig. 4.30, se observa una comparación de los estados periódicos de cada caso. Dichos estados se asumen una vez transcurrido un tiempo prudencial de simulación para evitar las

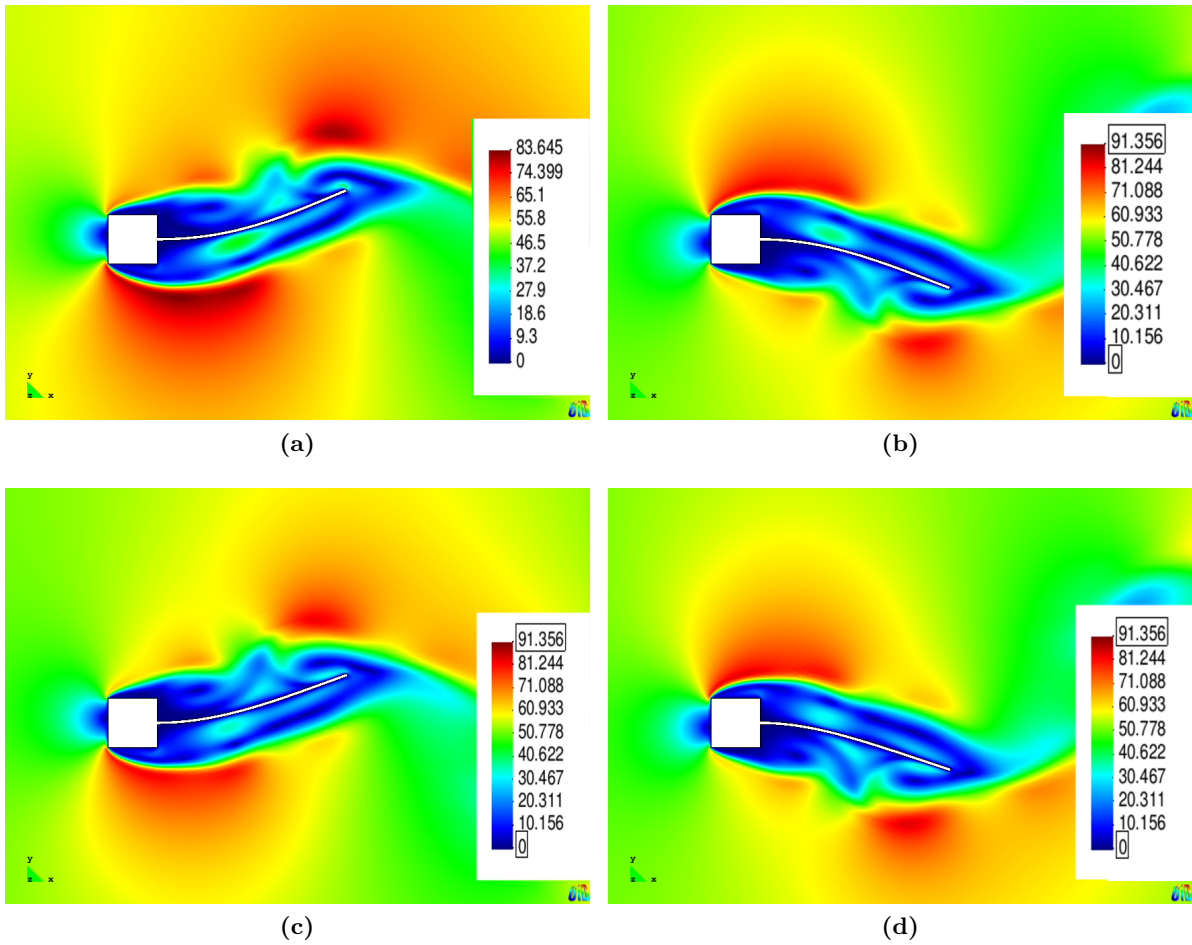


Figura 4.31: Contornos de velocidad del problema.(a) $t = 12,51s$. (b) $t = 12,659s$.(c) $t = 12,812s$.(d) $t = 12,962s$.

perturbaciones del arranque. En el caso del presente trabajo, se toma cuando la diferencia entre amplitudes máximas, no supere un valor de 0.05. Para las referencias, el mismo criterio pudo ser aplicado con lo casos de Kassiotis et al. y Valdez. Para el caso de Wall y Ramm se considera la respuesta estacionaria después de transcurrido un tiempo de 3.5[s].

En la Tabla 4.10 se presentan las frecuencias y los máximos desplazamientos del borde libre con sus respectivos errores, calculados con la ec. 4.11. También se presentan contornos de velocidad en la fig. 4.31 con el objetivo de visualizar la topología del flujo en su estado cuasi-estacionario. Además, se grafica en la fig. 4.32 el coeficiente de sustentación en función del tiempo para la malla estructural de 20 elementos.

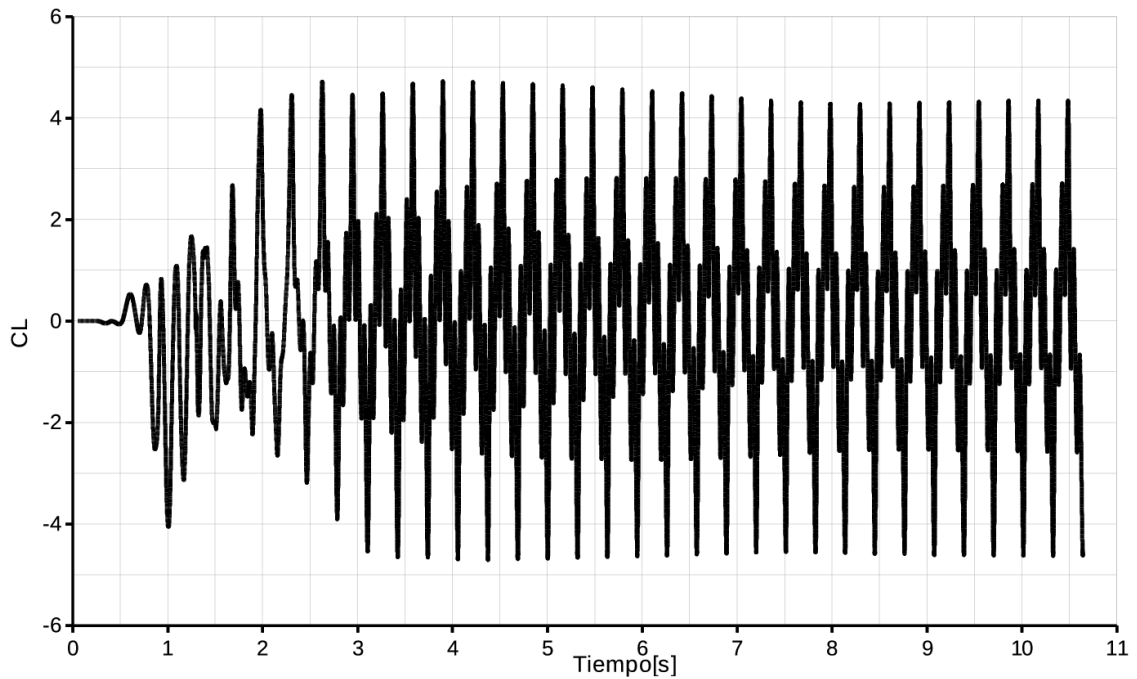


Figura 4.32: Coeficiente de sustentación.

4.7.2 Movimiento *heaving* de una placa plana flexible inmersa en una corriente libre

En esta sección se presenta el estudio de una placa plana flexible bidimensional, sometida a un movimiento oscilatorio *heaving* inmersa en una corriente libre. El problema representa fehacientemente en términos de configuración y de dimensión de la malla, a los casos de perfiles flexibles que se analizarán en capítulos posteriores. Se intenta así, demostrar la capacidad de resolución de problemas FSI aplicados a perfiles batientes, mediante la verificación con los resultados obtenidos por Olivier [91].

El problema consiste en una placa plana de 2% de espesor, con cuerda c y con los bordes redondeados a la que se le impone un movimiento *heaving*, cuyos parámetros adimensionales son: número de Reynolds $Re = 800$, frecuencia reducida $k = 0,25$, máxima amplitud de movimiento vertical $h_a = 1$, flexibilidad $\delta^* = 0,024$ y factor de interacción $\Sigma = 8$. Estos parámetros demuestran que la interacción fluido-estructura es fuerte.

El dominio computacional con las condiciones de borde puede observarse en la fig. 4.33. Es un dominio de considerables dimensiones para poder facilitar el movimiento y suavizado de la malla, sin interferencias. Además, cuenta con un refinado circular situado a varias cuerdas de distancia del cuerpo, con el fin de capturar con mayor precisión los vórtices desprendidos y la estela de dicho cuerpo. Se analizarán diferentes tipos de mallados con dicha topología, fig. 4.44

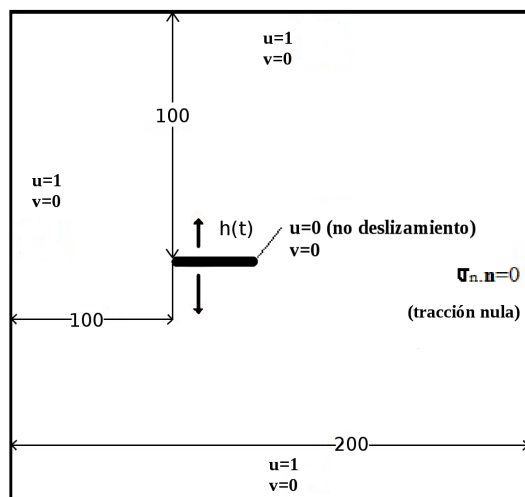


Figura 4.33: Geometría y condiciones de contorno (fuera de escala).

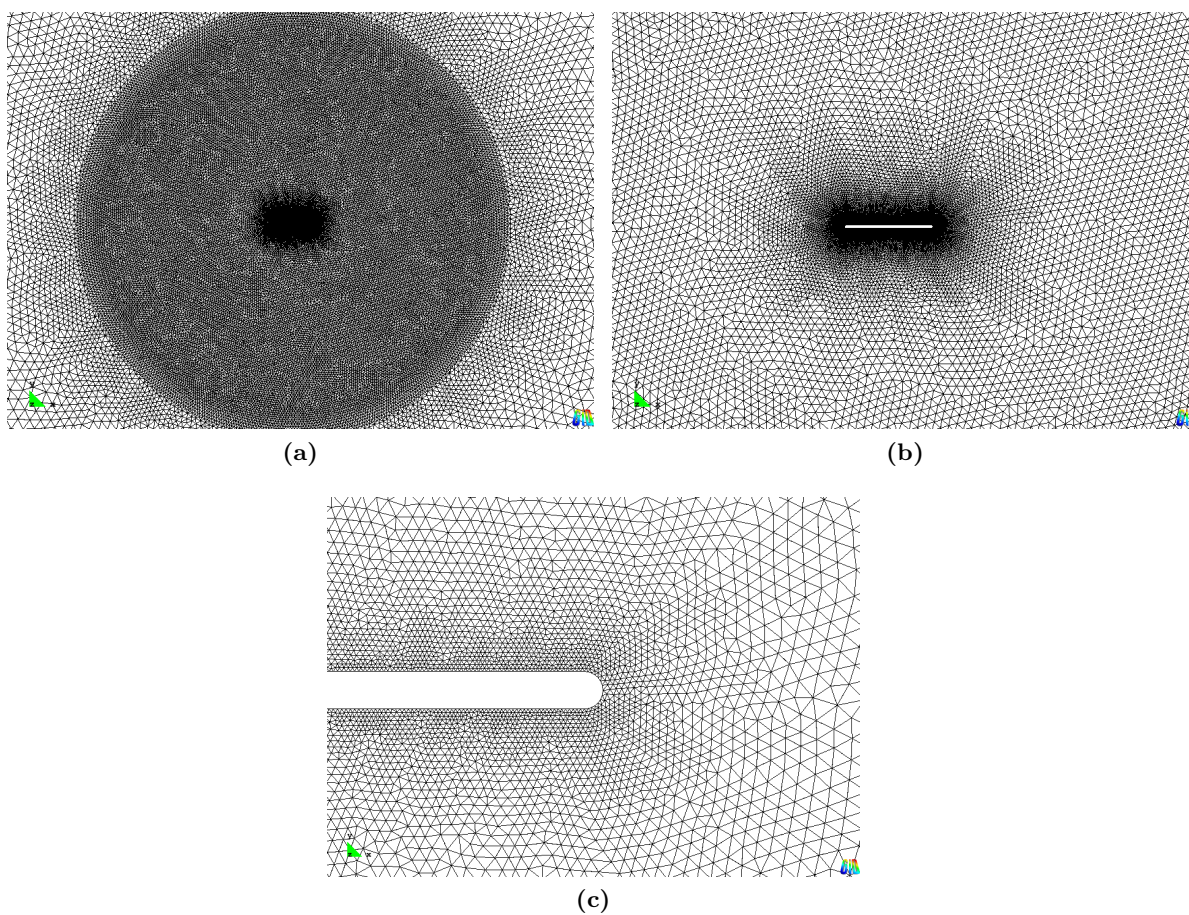


Figura 4.34: Mallado del dominio para la simulación de la placa flexible.

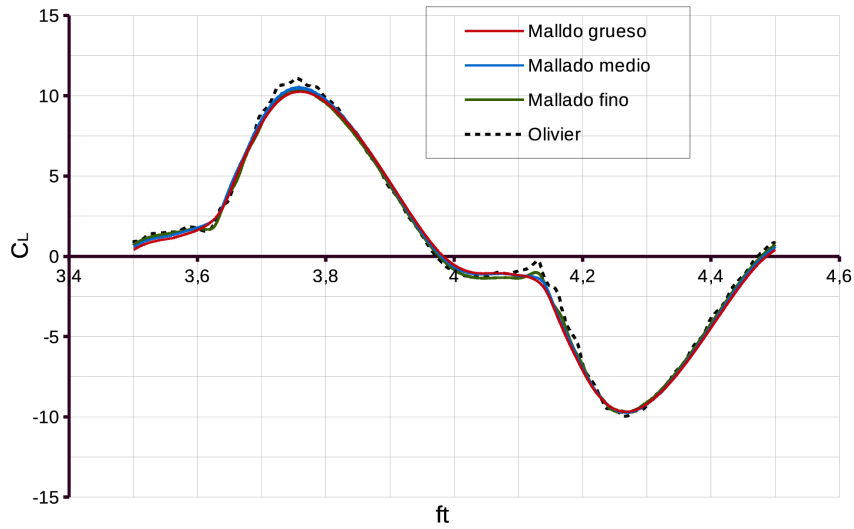


Figura 4.35: Comparación del coeficiente de sustentación para diferentes mallados con el resultado obtenido por Olivier [91].

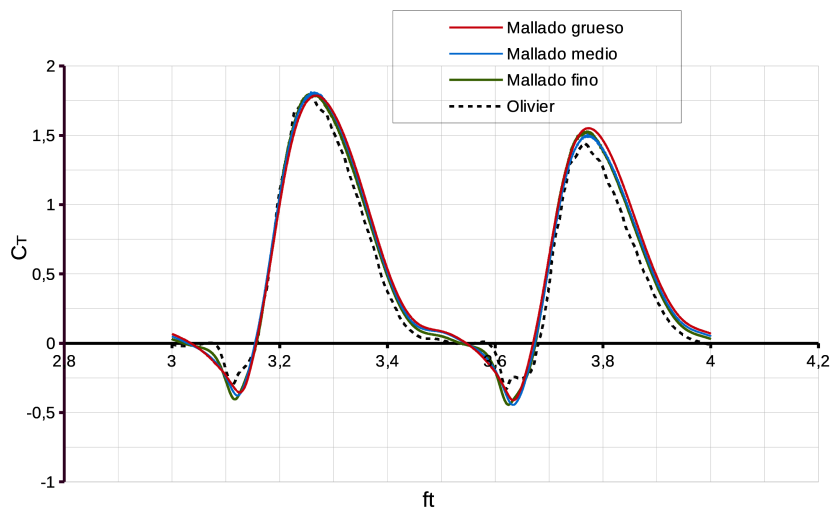


Figura 4.36: Comparación del coeficiente de tracción para diferentes mallados con el resultado obtenido por Olivier [91].

En su trabajo Olivier [91] implementó un algoritmo *staggered* con compresibilidad artificial para resolver la interacción entre el fluido y la estructura, y además, combinó varios métodos para resolver cada uno de ellos. Para la estructura comparó dos métodos, volúmenes finitos y elementos finitos y para el fluido, volúmenes finitos y un modelo barotrópico.

En el presente trabajo el acoplamiento es de tipo *staggered* (Gauss-Seidel), el predictor es

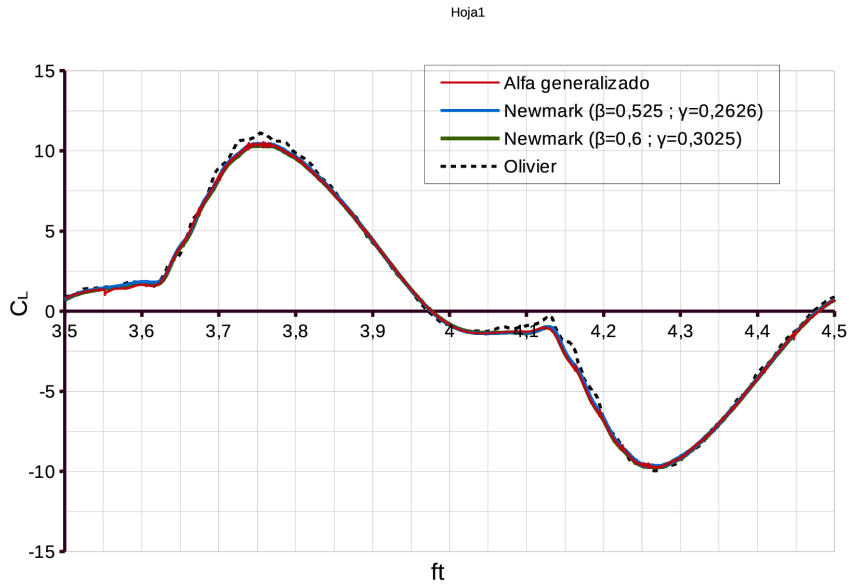


Figura 4.37: Comparación del coeficiente de sustentación para diferentes integradores temporales en el código estructural, con el resultado obtenido por Olivier [91].

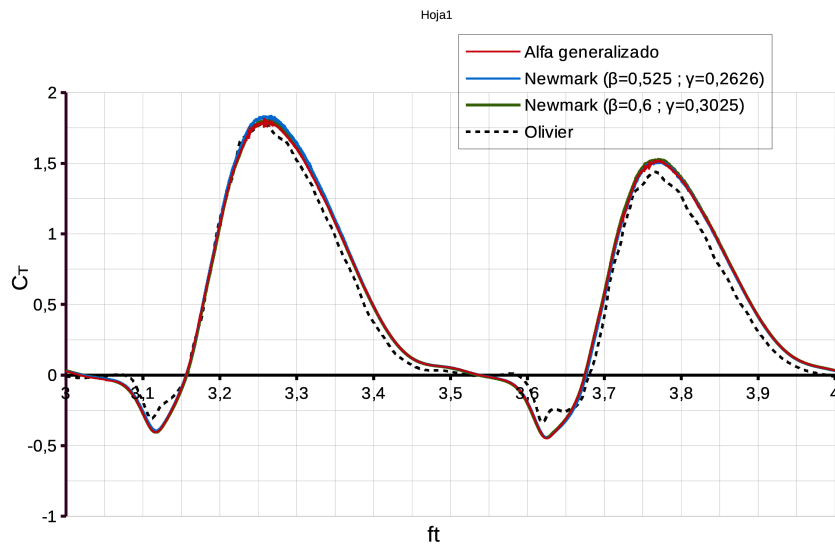


Figura 4.38: Comparación del coeficiente de tracción para diferentes integradores temporales en el código estructural, con el resultado obtenido por Olivier [91].

de segundo orden y el algoritmo cuenta con relajación de Aitkens sobre el desplazamiento, con factor de tolerancia igual a $\epsilon_0 = 5e^{-6}$. El tiempo total de simulación es de 20s en todos los casos. Las soluciones que se comparan con los resultados de Oliver son los coeficientes de sustentación C_L y tracción C_T en función del tiempo. El análisis se realiza sobre tres mallados diferentes, dos integradores temporales y también se incluye el efecto de masa adicionada (*add-mass*).

En las figs. 4.35 y 4.36 se presentan C_L y C_T para tres mallados diferentes (grueso, medio y fino). El mallado fluido-dinámico grueso consta de 29682 elementos, donde el tamaño mínimo sobre la superficie del cuerpo es de $0,01c$, y el mallado estructural es de 10 elementos unidimensionales sobre la longitud de la placa. El mallado medio consta de 71434 elementos, el tamaño mínimo sobre la superficie del cuerpo es de $0,008c$ y el mallado estructural es de 20 elementos unidimensionales sobre la longitud de la placa y el tercer mallado a analizar, consta de 96552 elementos, el tamaño mínimo sobre la superficie del cuerpo es de $0,006c$ mientras que el mallado estructural es de 20 elementos. Además, se realiza una comparación con las respuestas obtenidas por Olivier [91]. El integrador temporal de la parte estructural utilizado en los tres casos, es Newmark con $\beta = 0,3025$ y $\gamma = 0,6$.

Se puede observar una buena paridad con las curvas obtenidas por Olivier y la diferencia entre mallados no es tan significativa, aunque el mallado más grueso tiende a suavizar los picos de las curvas, como puede observarse en las figs. 4.35 y 4.36. La cantidad de iteraciones promedio registradas para cada paso de tiempo es 3 para el mallado grueso, 3.5 para el mallado medio y 4 para el mallado fino. Los pasos de tiempo promedio para cada caso son: $\Delta t = 0,00223s$ para el mallado grueso, $\Delta t = 0,001654s$ para el mallado medio y $\Delta t = 0,000689s$ para el mallado fino.

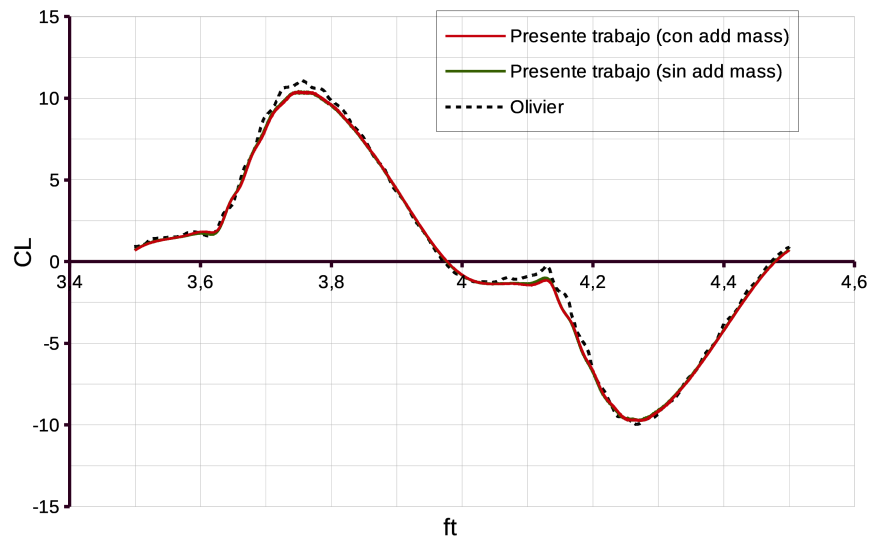


Figura 4.39: Influencia del efecto de masa adicionada sobre el coeficiente de sustentación y comparación con el resultado obtenido por Olivier [91].

El siguiente análisis realizado fue la comparación de diferentes métodos de integración del código estructural. Se estudiaron dos métodos conocidos como son el método Alfa generalizado con parámetros $\rho_\infty = 0,8$ y $\alpha_m^s = -0,8$ y el método de Newmark con dos duplas de parámetros $\beta = 0,3025$, $\gamma = 0,6$ (mayor amortiguamiento numérico) y $\beta = 0,285$ y $\gamma = 0,525$ (menor amortiguamiento numérico). El mallado fluido-dinámico utilizado es el mallado fino analizado

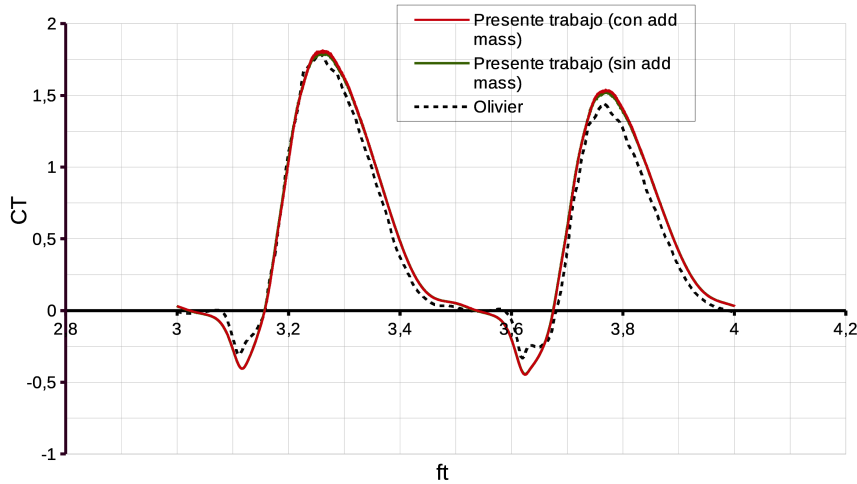


Figura 4.40: Influencia del efecto de masa adicionada sobre el coeficiente de tracción y comparación con el resultado obtenido por Olivier [91].

anteriormente. El objetivo de este análisis es calificar la suavidad de la solución proporcionada por cada uno de los métodos, ya que la utilización de códigos acoplados, es propenso a producir ruidos numéricos en la solución, si los pasos de tiempo de cada uno son muy diferentes.

En las figs. 4.37 y 4.38 se observa que el método de Newmark amortiguado ($\beta = 0,6$, $\gamma = 0,3025$), con $\Delta t = 0,000689s$ y 4 iteraciones por paso de tiempo, produce una solución más suave que el método Alfa generalizado que cuenta con un paso de tiempo promedio $\Delta t = 0,00069s$ y 3.14 iteraciones por cada uno. En el método de Newmark con $\beta = 0,525$, $\gamma = 0,2626$, con un paso promedio igual a $\Delta t = 0,000689s$ y 3 iteraciones de promedio, la solución obtenida es la misma, pero el ruido numérico producido es mayor que en el método de Newmark amortiguado.

Con un tercer análisis se pretende comprobar el efecto de masa adicionada sobre las soluciones de C_L y C_T . Se observa en las figs. 4.39 y 4.40 que si bien el acoplamiento es fuerte, existen leves diferencias si se tiene presente el efecto de la masa adicionada. Cabe señalar que para obtener los resultados presentados en las figs 4.39 y 4.40, se utilizó el método de Newmark amortiguado ($\beta = 0,3025$, $\gamma = 0,6$) y el mallado fino especificado anteriormente. Además, el paso de tiempo promedio es igual a $\Delta t = 0,00069s$ y 4.3 iteraciones por paso de tiempo.

Como complemento al estudio, la fig. 4.41 presenta capturas de los contornos de velocidad para los mallados fino y grueso en diferentes tiempos. Puede observarse que con mallado fino la captura de vórtices tiene mejor definición que con el grueso.

Un análisis interesante que se puede anexar, es estudiar el comportamiento del desplazamiento del borde de fuga en conjunto con el movimiento vertical del perfil, fig. 4.42. Se observa que en los finales de carrera el desplazamiento del perfil muestra un comportamiento de rotación o ángulo de cabeceo pasivo avanzado, esto es porque en dichos puntos la aceleración del movimiento es máxima, lo que deriva en una fuerza inercial máxima. De todos modos, la

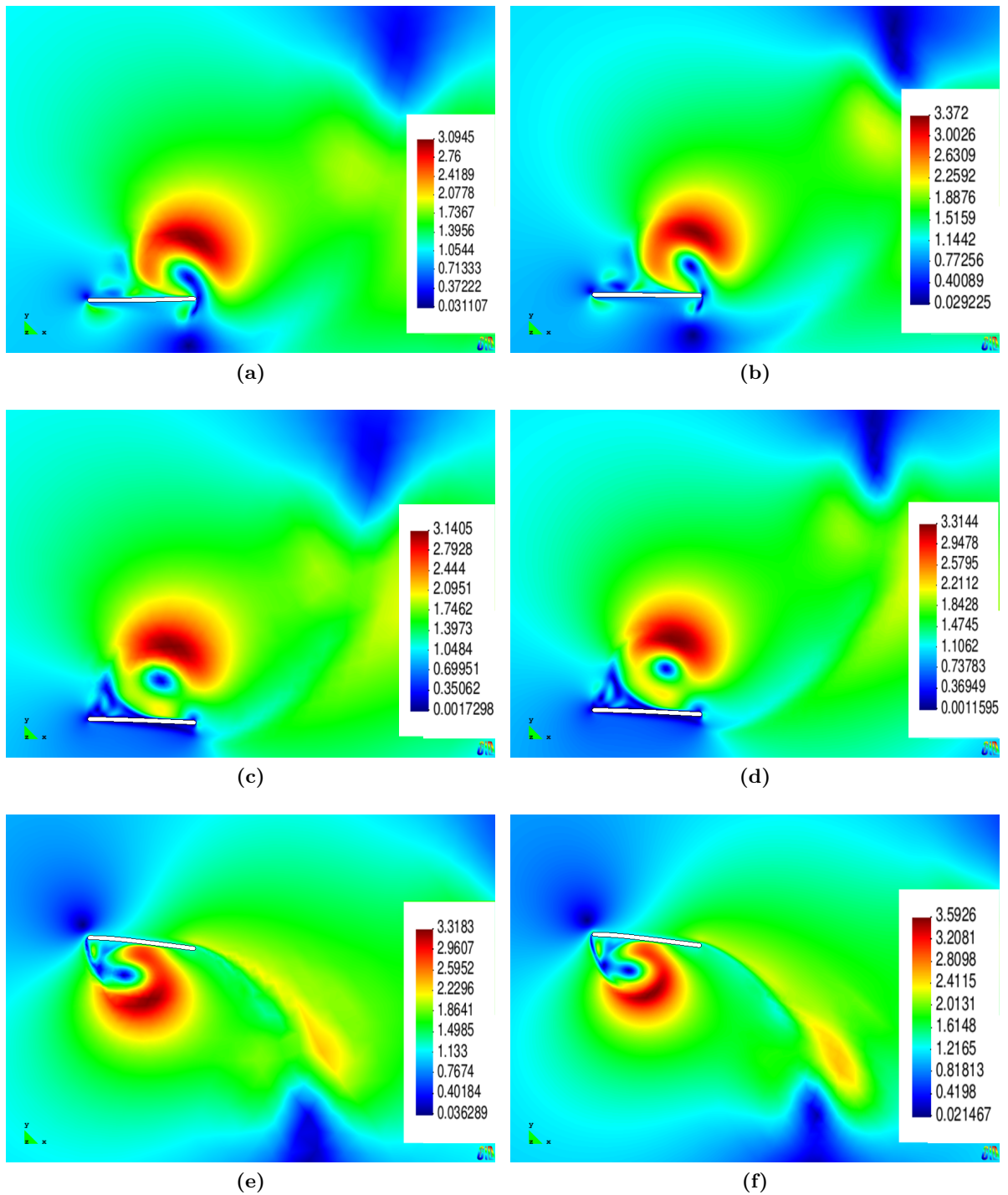


Figura 4.41: Contornos de velocidad para dos mallados diferentes. [a],[c] y [e] mallado grueso. [b], [d] y [f] mallado fino. [a] y [b] $ft = 1,575[s]$. [c] y [d] $ft = 3,5[s]$. [e] y [f] $ft = 3,875[s]$.

amplitud máxima del desplazamiento o rotación pasiva máxima se alcanza en la mitad de la carrera de movimiento, a causa de las fuerzas de presión del fluido. Esta última afirmación,

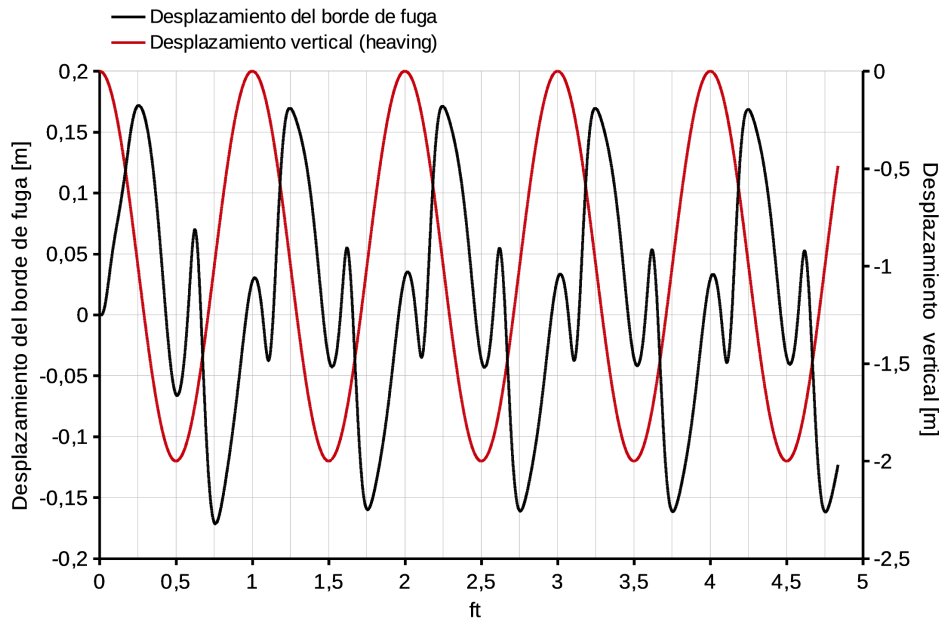


Figura 4.42: Desplazamiento del borde de fuga y desplazamiento vertical de la placa en función del tiempo.

remarca que la interacción entre el fluido y la estructura es fuerte.

4.7.3 Placa plana flexible sometida a un movimiento oscilatorio en un fluido estático

Esta sección, tiene el objetivo de poner a prueba la capacidad de resolución de problemas de vuelo tipo *hovering*. Estos problemas requieren la captura precisa de los parámetros del flujo circundante, que son determinantes en el cálculo de las fuerzas que actúan sobre la estructura de la placa. La disminución del tamaño de los elementos de la malla, disminuye el paso de tiempo y esto puede conducir a problemas de estabilidad en códigos con interacción escalonados, lo cual obliga a trabajar con mayor eficacia para generar una grilla adecuada. Para la verificación de los resultados a obtener, se utilizan algunos de los casos presentados por Kang y Shyy [66].

El problema consiste en someter a una placa plana de 2% de espesor, con cuerda c , empotrada sobre el borde de ataque y con bordes planos, a un movimiento oscilatorio *heaving* sobre un medio fluido estático, cuyos parámetros adimensionales de gobierno son: número de Reynolds $Re = 1000$, que se determina mediante la ec. 2.7, velocidad de referencia $U_{ref} = 2\pi f_h h_a = 1$ y relación de densidades $\rho^* = 7,8$.

Una dificultad que se afronta en este tipo de problemas con flujo estático, es que las condiciones de borde aceptadas por el software y descritas en el capítulo 3, no son las más adecuadas eqs. 3.3. La condición de flujo nulo en todo el dominio, es la condición inicial a establecer y

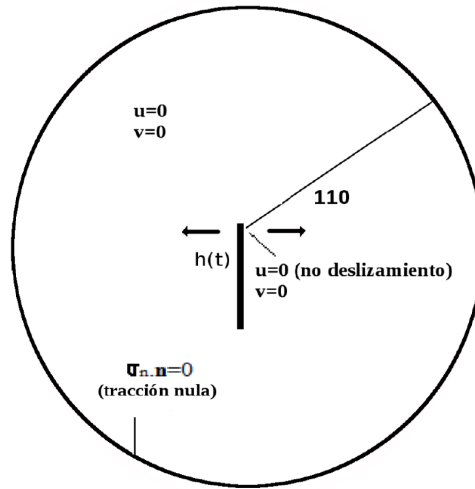


Figura 4.43: Geometría y condiciones de contorno (fuera de escala).

la dificultad radica en la imposición a hacer sobre los contornos de dicho dominio, durante la evolución del cálculo.

Para subsanar esto existen dos caminos, el primero es colocar sobre dichos contornos condiciones *tipo absorbentes* [137], es decir que tienen la capacidad de predecir si una perturbación puede dejar el dominio y también volver a ingresar. El segundo es utilizar un dominio suficientemente amplio para que en el tiempo de simulación, la perturbación no alcance los contornos del mismo y las condiciones allí impuestas no tengan efecto alguno sobre el resultado.

En base a la experiencia adquirida con casos de flujo inestacionario, se podría afirmar que en la mayoría de dichos casos, las perturbaciones del flujo causadas por el cuerpo no alcanzan los contornos del dominio. Por consiguiente, no quedaría otra alternativa que utilizar dimensiones suficientemente grandes en el dominio computacional.

Para los casos a analizar en la presente sección, el dominio de simulación puede verse en la fig. 4.43, y el mallado utilizado en la fig. 4.44.

En su trabajo Kang y Shyy [66] analizaron una placa plana sometida a movimiento *heaving* en un fluido estático, para diferentes flexibilidades δ^* , números de Reynolds Re , relaciones de interacción Σ , frecuencias inducidas k etc. Ellos utilizaron el método de volúmenes finitos para resolver el fluido, y el método de elementos finitos para resolver un modelo de viga lineal Euler-Bernoulli para la estructura. El acoplamiento entre ambos modelos es de tipo escalonado iterativo.

Con el fin de verificar el funcionamiento del código en describir vuelos *hovering* de perfiles flexibles, se comparan resultados de este trabajo con los de Kang y Shyy, Tabla 4.11. El algoritmo utilizado en este trabajo es el mismo que se especificó en las secciones anteriores, con un factor de tolerancia en la relajación del desplazamiento igual a $\epsilon_0 = 4e^{-6}$.

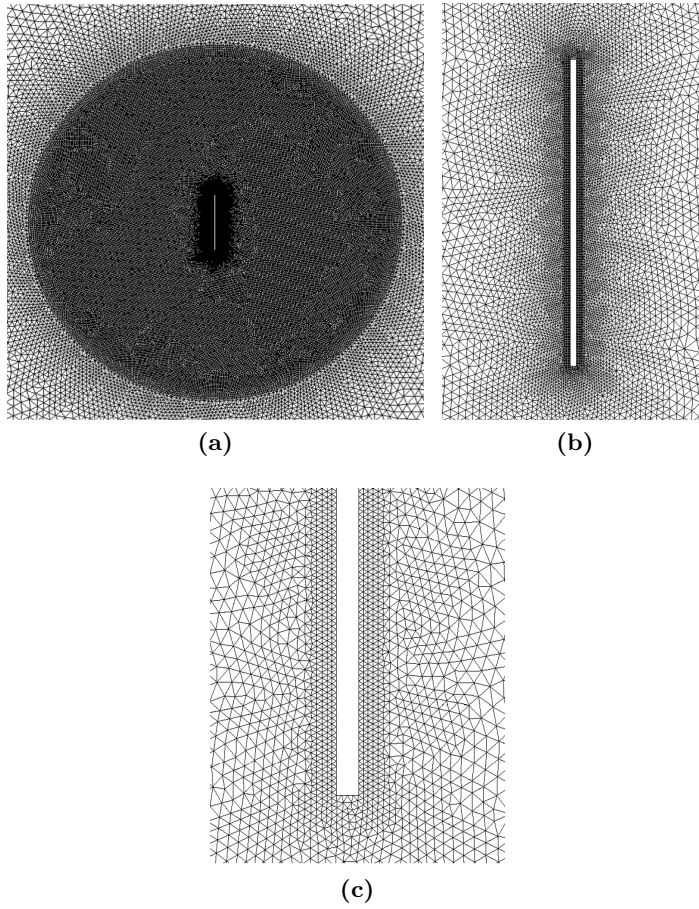


Figura 4.44: Mallado del dominio para la simulación de la placa flexible en flujo estático.

	Caso 1			Caso 2		
Trabajos	\bar{c}_t	\bar{c}_p	η	\bar{c}_t	\bar{c}_p	η
Presente trabajo	1.086	3.199	0.339	2.032	4.679	0.434
Kang y Shyy [66]	1.08	3.06	0.35	2.04	4.65	0.44
Errores [%]	0.55	4.54	3.143	0.387	0.615	1.312

Tabla 4.11: Comparación de los coeficientes de tracción, potencia y eficiencia con los obtenidos por Kang y Shyy [66].

Caso 1 corresponde a los siguientes parámetros: flexibilidad $\delta^* = 0,01796$, relación de interacción $\Sigma = 5,0871$, siendo $h_a = 0,7936$, $f_h = 0,2005$ y $E = 2115000$. Caso 2 corresponde a: flexibilidad $\delta^* = 0,014898$, relación de interacción $\Sigma = 2,6479$, siendo $h_a = 0,4138$, $f_h = 0,3846$, $E = 2550000$. En ambos casos se utilizó una malla con 111228 elementos con un tamaño mínimo sobre la superficie del cuerpo igual a $0,0045c$ para la malla del fluido y 20 elementos unidimensionales a lo largo de la placa para la malla estructural.

Los parámetros que se toman como resultados de comparación son, coeficiente de tracción

promedio, que en este caso resulta igual al coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}_t = \bar{c}_l$, coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p y eficiencia propulsora η . Para ambos casos los resultados con sus respectivos porcentajes de error se presentan en la Tabla 4.11.

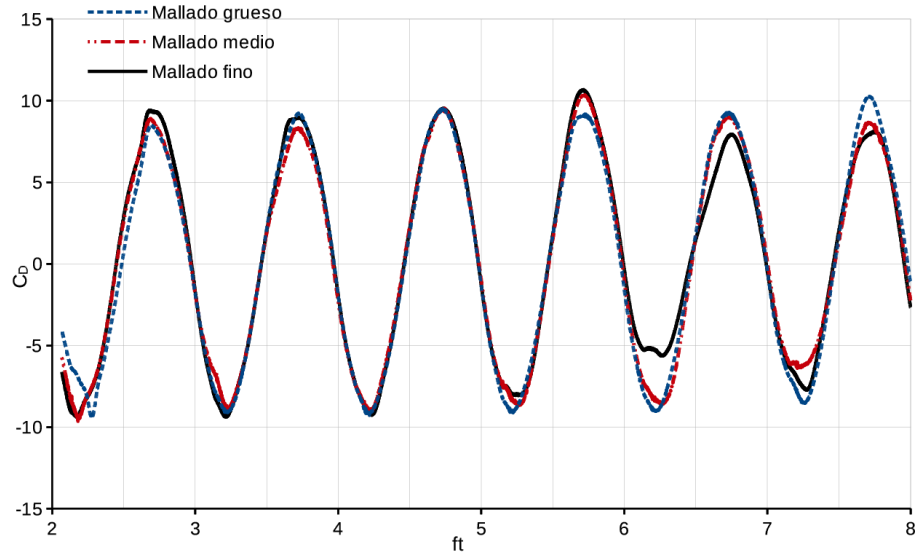


Figura 4.45: Coeficiente de resistencia en función del tiempo para los tres mallados utilizados (Caso 2).

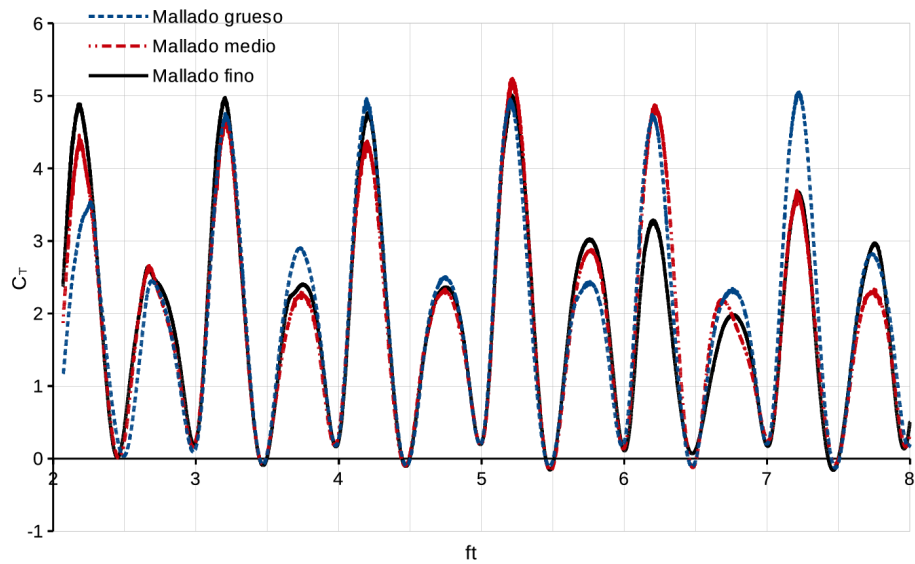


Figura 4.46: Coeficiente de tracción en función del tiempo para los tres mallados utilizados (Caso 2).

Puede observarse una buena paridad de resultados para todos los coeficientes. Dichos resultados son muy susceptibles a la captura y desprendimiento de vórtices generados por el

movimiento del cuerpo, por ello, es de vital importancia el adecuado refinamiento de la malla en zonas circundantes a la placa. Por tal motivo, se realiza a continuación un análisis de mallado sobre el Caso 2.

Los tipos de mallados a analizar son: mallado grueso, que consta de 48810 elementos con un tamaño mínimo sobre la superficie igual a $0,007c$, mallado medio que cuenta con 67974 elementos con un tamaño mínimo igual a $0,005c$ sobre la superficie del cuerpo y el mallado fino, cuyas especificaciones han sido detalladas anteriormente, ya que fue el utilizado en el Caso 2. En los tres casos el mallado estructural consta de 20 elementos unidimensionales. En las figs. 4.45 y 4.46 se presentan el coeficiente de resistencia y tracción, para los tres tipos de mallados utilizados. Es de hacer notar que las mayores diferencias se dan sobre las amplitudes máximas de ambas curvas y no tanto en la frecuencia de las mismas. Esto está estrechamente vinculado a la captura y convección de vórtices, sobre todo en los finales de carrera.

Un aspecto interesante a estudiar surge de comparar el desplazamiento del borde de fuga con el de la placa, fig. 4.47.

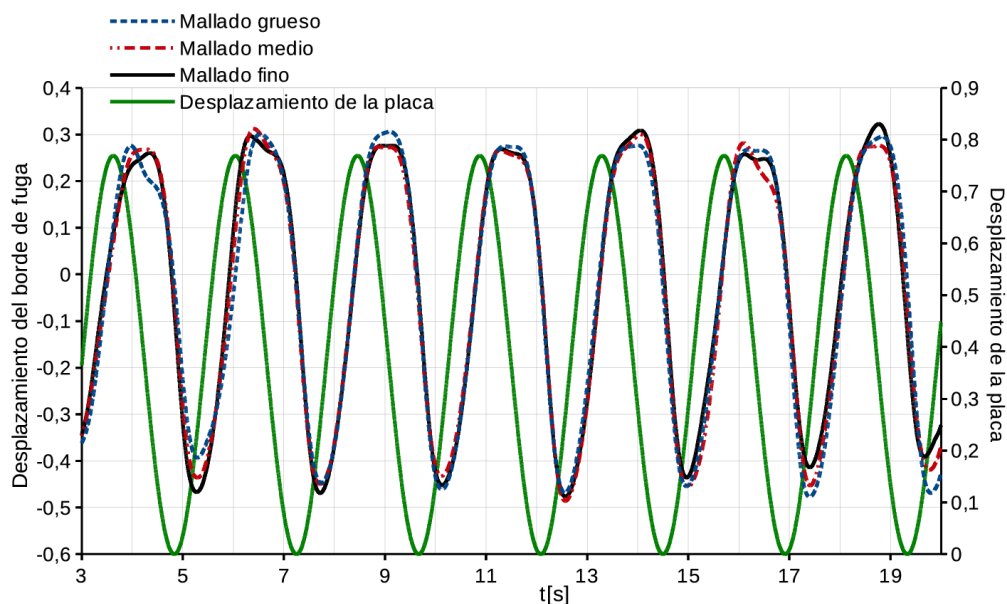


Figura 4.47: Desplazamiento del borde de fuga para los tres mallados analizados sobre el Caso 2, en comparación con el desplazamiento de la placa.

Por un lado, se puede observar como al refinar la malla se tiende a una solución cuando se comparan las amplitudes máximas de los distintos desplazamientos del borde de fuga, y por otro, puede observarse que entre los tres casos la frecuencia no varía. Con respecto al movimiento de la placa, el ángulo de rotación pasivo que toma la placa es avanzado cuando la misma se encuentra sobre un final de la carrera.

Por último, en la fig. 4.48 se presentan los contornos de velocidad para el mallado fino y el mallado grueso en dos posiciones temporales, $t = 7,645s$ y $t = 12,75s$. La diferencia en

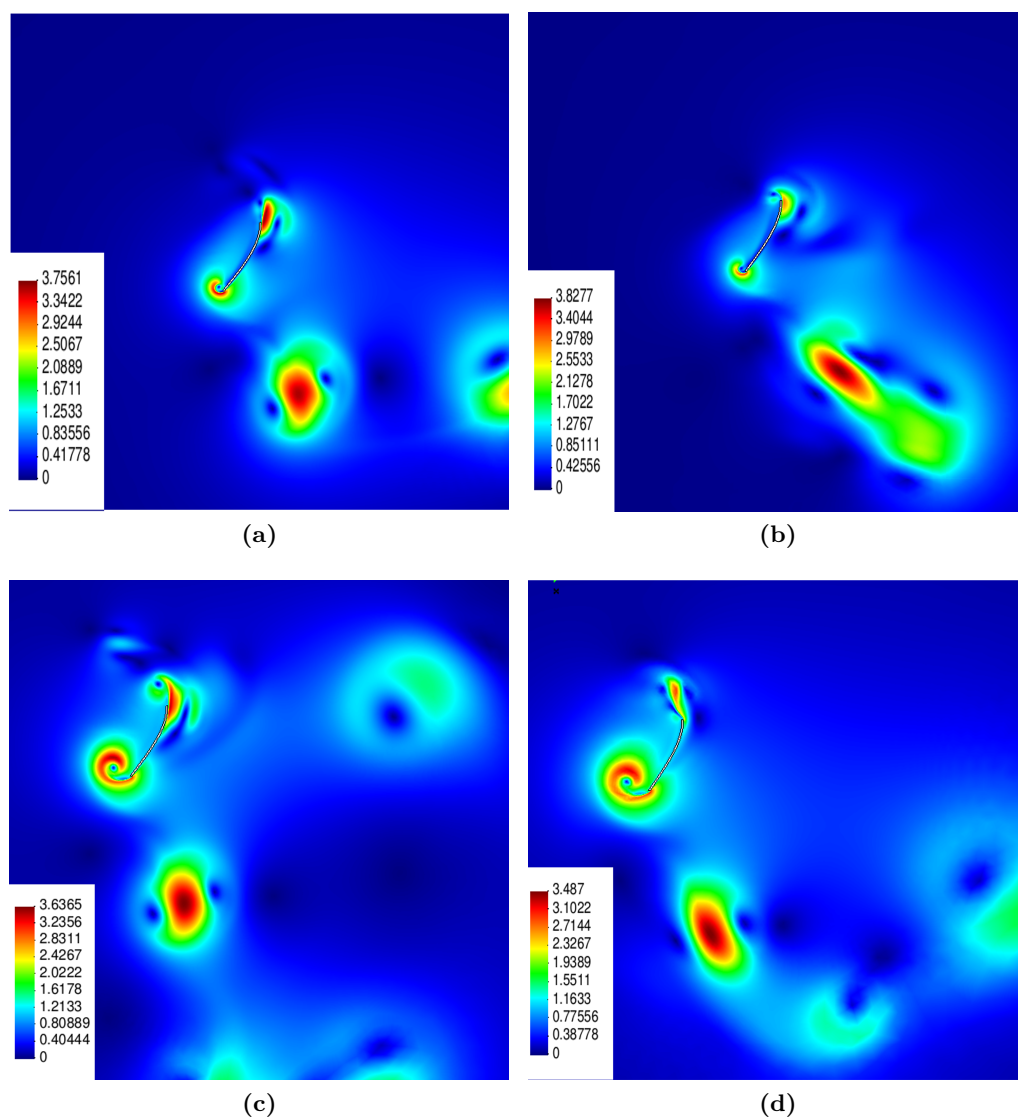


Figura 4.48: Contornos de velocidad del problema [a] y [c] mallado fino, [b] y [d] mallado grueso. [a] y [b] $t = 7,645s$. [c] y [d] $t = 12,75s$.

la captura de vórtices desprendidos y la difusión de los mismos en el tiempo, hacen que los coeficientes de tracción y resistencia varíen sustancialmente entre un mallado y otro. A simple vista pueden observarse las diferentes topologías de la estela que se obtuvieron, lo que acentúa la importancia del mallado en problemas de este tipo.

FLUJO ESTACIONARIO SOBRE PERFILES RÍGIDOS

En el Cap. 2 se trató la importancia y la necesidad de analizar perfiles sumergidos en una corriente libre, sea para vehículos de ala fija o de alas batientes con la posibilidad de realizar vuelos estacionarios.

En este capítulo se presentan estudios básicos para el conocimiento del comportamiento de diferentes geometrías en flujos con números de Reynolds ultra-bajos. Se tendrán en cuenta variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y su posición sobre la cuerda del perfil y el espesor. Además, se estudia el *flujo cercano al cuerpo*, sus dimensiones en función del número de Reynolds, la posición del desprendimiento y como influyen a los parámetros aerodinámicos de mayor importancia.

5.1 Dominio computacional

El dominio de trabajo para las simulaciones de la mayoría de los perfiles aerodinámicos posee las mismas características. En la fig.5.1 se pueden observar las dimensiones de un dominio genérico y las condiciones de contorno utilizadas para un flujo incompresible laminar.

Para la grilla o discretización, los elementos empleados son triángulos lineales de tensión constante y el mallado en todos los casos no es estructurado. El refinamiento de la grilla es particular a cada caso estudiado. Para perfiles gruesos los elementos más pequeños rondan en una longitud de lado de $0,003c$, donde c es la cuerda del perfil y para perfiles delgados alrededor de $0,0005c$. La topología de la grilla para dos perfiles se muestra en la fig. 5.2.

5.2 Efectos generales del número de Reynolds ($Re < 10000$)

Como es sabido, el principal efecto al disminuir el número de Reynolds es el aumento del coeficiente de resistencia. Al no ser recíproco dicho aumento para el coeficiente de sustentación, se provoca una disminución de la relación aerodinámica C_L/C_D . El vuelo a este régimen se caracteriza por tener mucho menor eficiencia que el desarrollado por vehículos de gran porte,

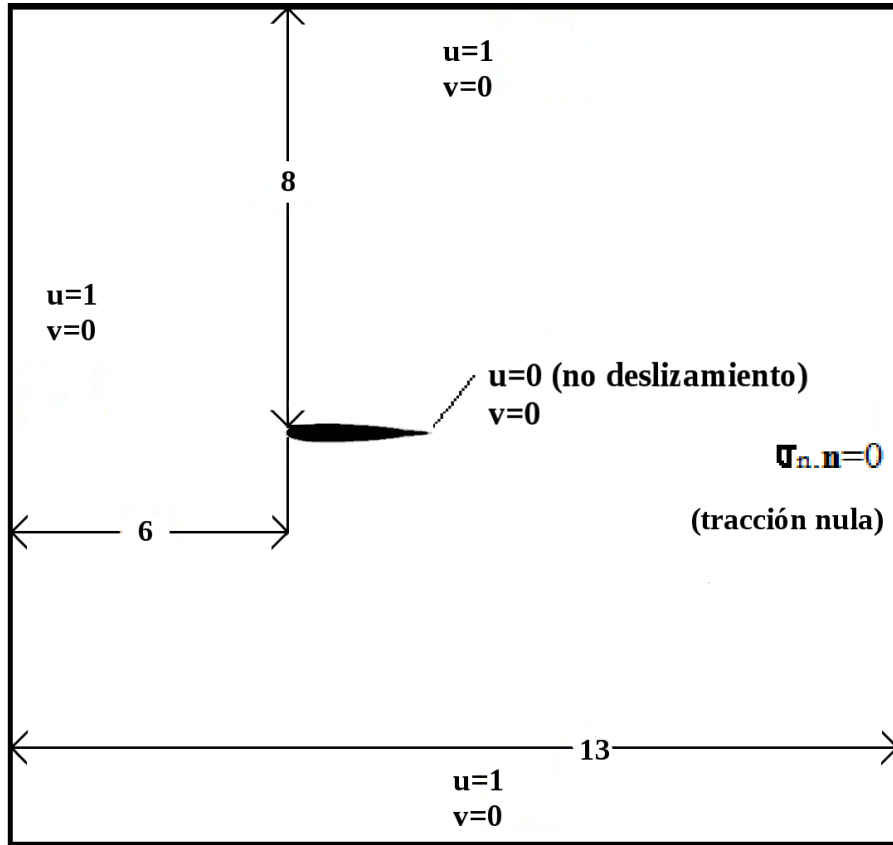


Figura 5.1: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

condicionando significativamente las exigencias de potencia requerida y especialmente cuando se trata de pequeñas escalas [109].

5.2.1 Sobre el concepto de capa límite

Es bien conocido que si se realiza un análisis dimensional de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se toma l como longitud característica del cuerpo sumergido en la corriente libre y δ como el espesor de capa límite, se llega a la relación de proporcionalidad siguiente:

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{Re^{1/2}} \quad (5.1)$$

donde Re es el número de Reynolds. Esto nos indica, que con números de Reynolds bajos los efectos viscosos predominan respecto de los convectivos, tornando al flujo totalmente difusivo y laminar.

Por definición, el espesor de capa límite δ_{99} es la distancia medida a partir de la superficie a la cual se alcanza el 99% de la velocidad de corriente libre. Sobre una placa plana, Blasius

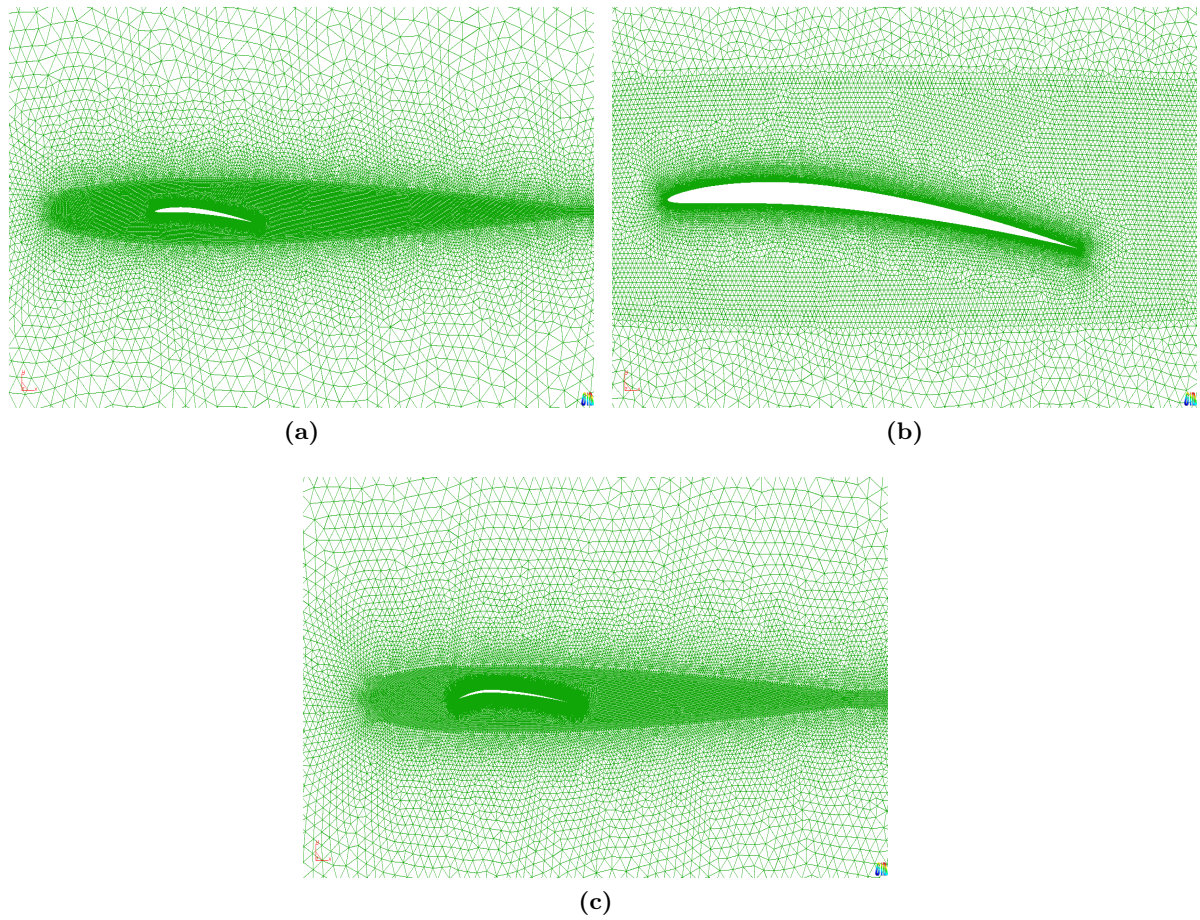


Figura 5.2: Distintas topologías de mallado. (a) NACA 4404. (b) NACA 4404. (c) NACA 6302.

comprobó que era válida la siguiente relación:

$$\frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{R_{ex}^{1/2}} \quad (5.2)$$

donde x es la distancia sobre la placa y R_{ex} el número de Reynolds basado en dicha distancia.

Si se calcula el espesor para diferentes R_{ex} con una longitud de placa unitaria $l = 1$, se consigue:

R_{ex}	δ_{99}
10000	0.05
1000	0.1581
100	0.5

Tabla 5.1: Espesor de capa límite en una placa plana a diferentes números de Reynolds.

El espesor de la zona viscosa es casi el 5% de la longitud de la placa a número de $Re = 10000$

y el 16% a $Re = 1000$ (Tabla 5.1). Esto obliga a replantear el concepto referente a la capa límite delgada respecto de las dimensiones del cuerpo, por una zona de considerable espesor donde predominan los efectos viscosos. Para los fines de este trabajo, se hará referencia a dicha zona como *flujo cercano al cuerpo*. Es conveniente realizar esta distinción, ya que por sus dimensiones alcanzadas puede afectar más allá de lo esperado al campo de flujo libre y a la posición del desprendimiento. Estos efectos causan un aumento de resistencia, afectan la separación del flujo y son cruciales en la definición de una geometría efectiva para una determinada aplicación.

5.2.2 Distribución de presiones

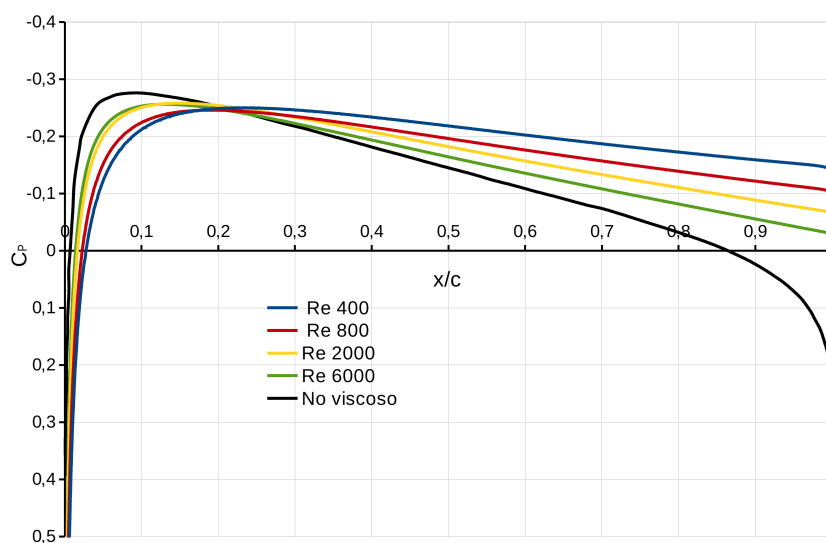


Figura 5.3: Comparación de la distribución de presiones de flujo no viscoso obtenida por [73] y flujo viscoso obtenida en el presente trabajo para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 0^\circ$.

Como primer resultado representativo, se calcula la distribución de presiones sobre un perfil NACA 0008 (fig. 5.3) para números de Reynolds es igual a 400, 800, 2000 y 6000 y con cero ángulo de ataque. Además, como dato comparativo, también se grafica la distribución de presiones para un flujo no viscoso [73]. En todos los casos la corriente permanece adherida a la superficie.

Las diferencias con el flujo no viscoso son evidentes, a menor número de Reynolds el espesor del *flujo cercano al cuerpo* se hace cada vez mayor e impide la recuperación de la presión. Esto hace que la succión de borde de ataque se suavice y el gradiente de presión adverso se reduzca evitando la caída brusca de sustentación, aunque genere una reducción en la eficiencia aerodinámica C_L/C_D por el aumento de resistencia. Para el perfil NACA 0002 (fig. 5.4), se acentúa aún más el efecto de la viscosidad. Tanto es así, que para los casos a Re 400 y 800, el flujo no recupera la presión. En cuanto a lo demás, ocurre lo mismo que para el perfil NACA

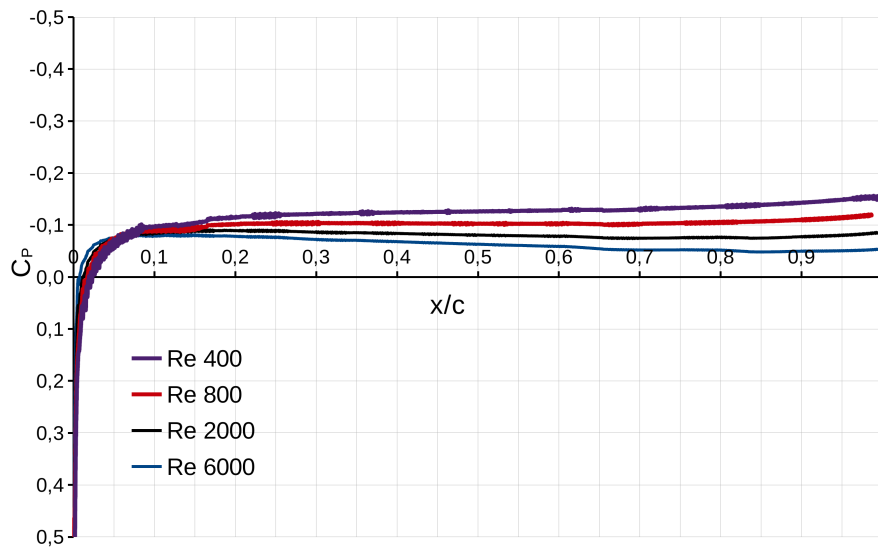


Figura 5.4: Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 0^\circ$.

0008.

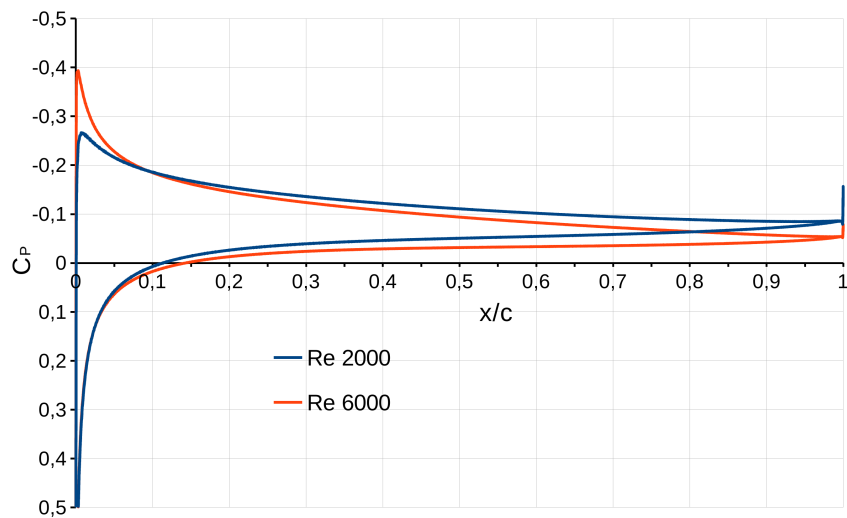


Figura 5.5: Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 1^\circ$ a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

En conclusión, la viscosidad produce un considerable aumento de la resistencia y limita la aparición de gradientes de presión adversos que den lugar a la caída de sustentación, lo cual permite llevar el perfil a ángulos de ataques mayores sin incurrir en transitorios.

La fig. 5.5 muestra las distribuciones de presión para un perfil NACA 0002 a un ángulo de ataque de un grado, para $Re = 2000$ y $Re = 6000$. Se hace notar la diferencia entre los picos de succión de borde de ataque y el desarrollo de la presión a lo largo de la cuerda.

La Tabla 5.2 muestra que para $Re = 6000$ la sustentación es aproximadamente un 5% mayor

NACA 0002 $\alpha = 1^\circ$	C_L	C_D
$Re = 2000$	0,9127	0,06673
$Re = 6000$	0,96	0,0371

Tabla 5.2: Comparación de los coeficientes de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0002 con $\alpha = 1^\circ$, a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

que a $Re = 2000$, mientras que el valor de la resistencia es un 44% menor respectivamente.

5.2.3 Parámetros aerodinámicos

Para conocer con mayor detalle las características del vuelo a este régimen de Re ultrabajos, se analizan específicamente los parámetros aerodinámicos de varios perfiles alares.

En la fig. 5.6, se muestran las curvas del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque para perfiles NACA 0002 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$. Para ambos perfiles se verifica lo que se mencionó anteriormente. Al disminuir el número de Reynolds se retrasa la pérdida y como consecuencia el rango útil de las curvas, se extiende a mayores ángulos de ataque. El efecto que se produce es un cambio de geometría efectiva del perfil, es decir el *flujo cercano al cuerpo* tiene un espesor de magnitud tal que puede hasta generar una especie de combadura negativa, lo que disminuye el coeficiente de sustentación [73].

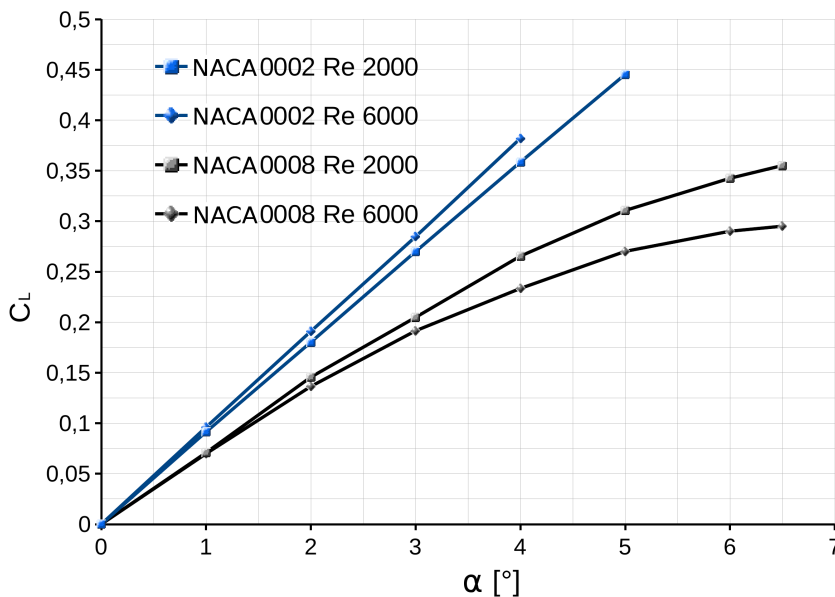


Figura 5.6: Curva $C_L - \alpha$ para perfiles NACA 0002 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

La historia es diferente para la pendiente de sustentación $C_{L\alpha}$. Para el perfil más grueso (NACA 0008) $C_{L\alpha}$ se mantiene casi igual para bajos ángulos de ataque ($\alpha \leq 2^\circ$) a ambos Reynolds, pero al aumentar la incidencia empieza a ser mayor para $Re = 2000$. En cuanto al

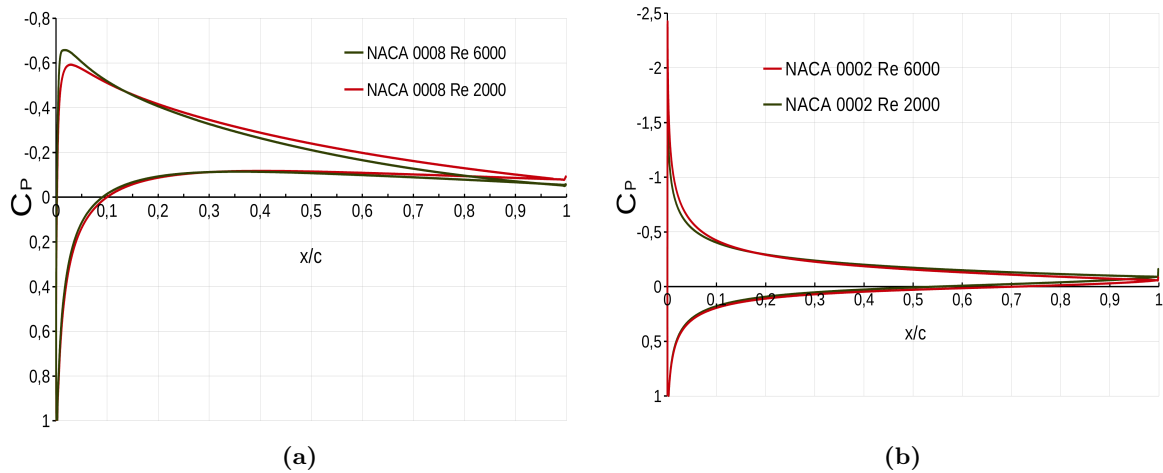


Figura 5.7: Distribución de presiones sobre perfiles a $\alpha = 3^\circ$: (a) NACA 0008. (b) NACA 0002.

perfil NACA 0002, ocurre lo contrario, la pendiente de sustentación se mantiene mayor para el Reynolds más alto ($Re = 6000$). Este efecto interesante, se debe a la geometría de los perfiles y a las particularidades del flujo.

Un ejemplo puntual se presenta en la fig. 5.7 con las distribuciones de presión C_p vs. x/c para ambos perfiles a $\alpha = 3^\circ$ a $Re = 2000$ y $Re = 6000$. El perfil NACA 0008 puede verse en la fig. 5.7a y el perfil NACA 0002 en la fig. 5.7b. Se observan a modo comparativo, las diferencias entre ambos perfiles sobre todo en el pico de succión de borde de ataque y en la recuperación de la presión sobre extradós.

5.2.4 Separación del flujo laminar

La posición del desprendimiento del flujo comienza desde el borde de fuga en el extradós y avanza sobre el mismo hacia el borde de ataque a medida que se aumenta el ángulo de incidencia del perfil. Este fenómeno es altamente dependiente de la geometría y el número de Reynolds y se determina con exactitud mediante la inspección de las tensiones de corte sobre la superficie. En dicho punto el gradiente de velocidad se anula, por ende el módulo del tensor de tensiones también.

Una vez calculadas las velocidades sobre el campo de movimiento, se inspeccionan los elementos de la superficie del cuerpo y se obtiene para cada uno el tensor de tensiones viscosas o de corte.

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.3)$$

donde μ es la viscosidad dinámica y u_i la componente de la velocidad en la dirección i .

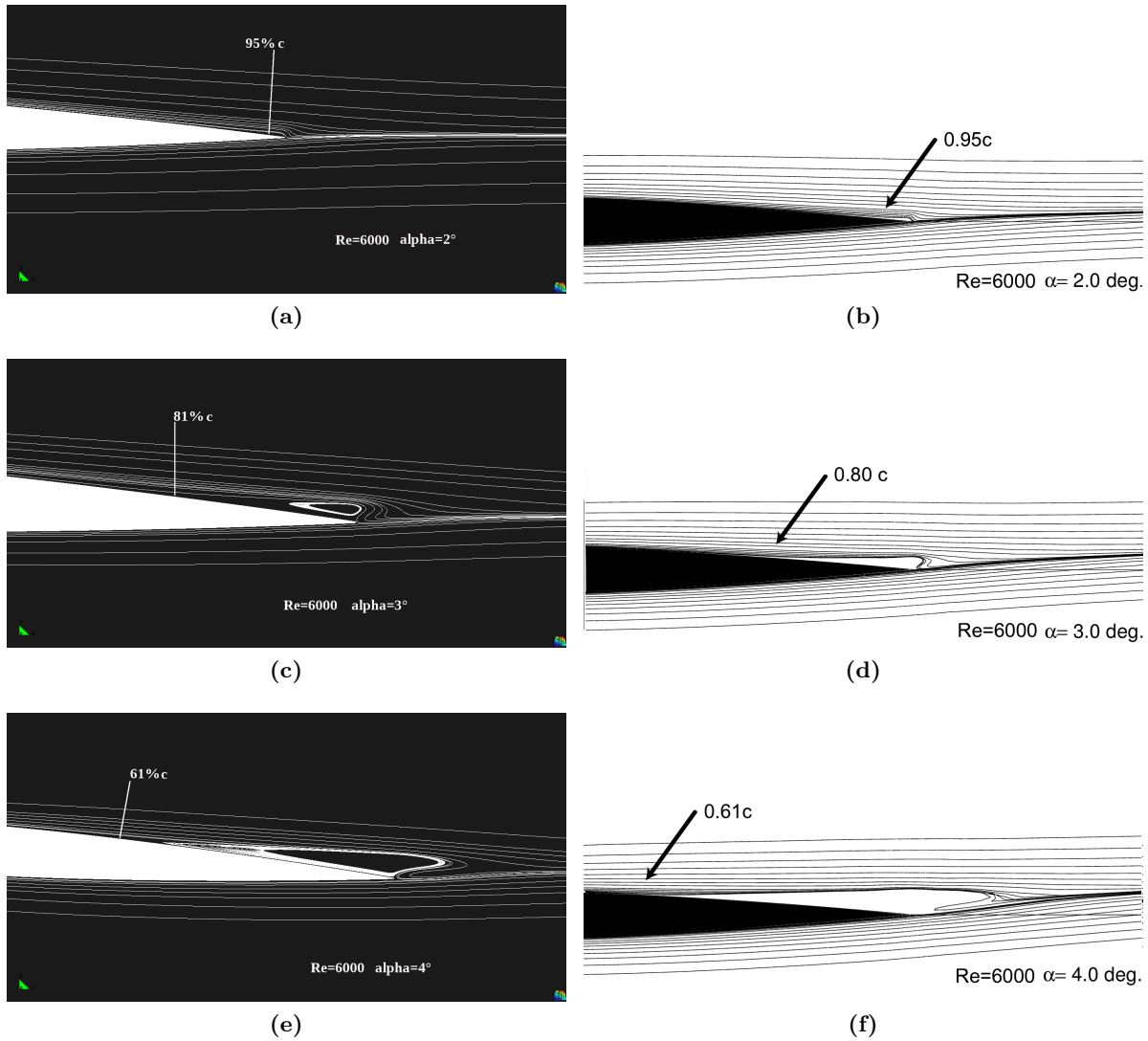


Figura 5.8: Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [73] a $Re = 6000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [73].

Luego, como criterio de separación se toma:

$$\sigma_0 = 0 \quad (5.4)$$

donde σ_0 es la tensión de corte sobre la pared o superficie (*wall shear stress*).

Para poner en práctica dicho criterio, se determina en qué elemento de la malla de superficie, el módulo del tensor de tensiones se iguala a cero. Y para visualizar y corroborar dicho resultado, se grafican líneas de corriente como las que muestran las figs. 5.8 y 5.9 para un perfil NACA 0008 a $Re = 6000$ y $Re = 2000$ respectivamente. Se observan las posiciones del desprendimiento y la formación de burbujas sobre el extradós del perfil y en proximidades

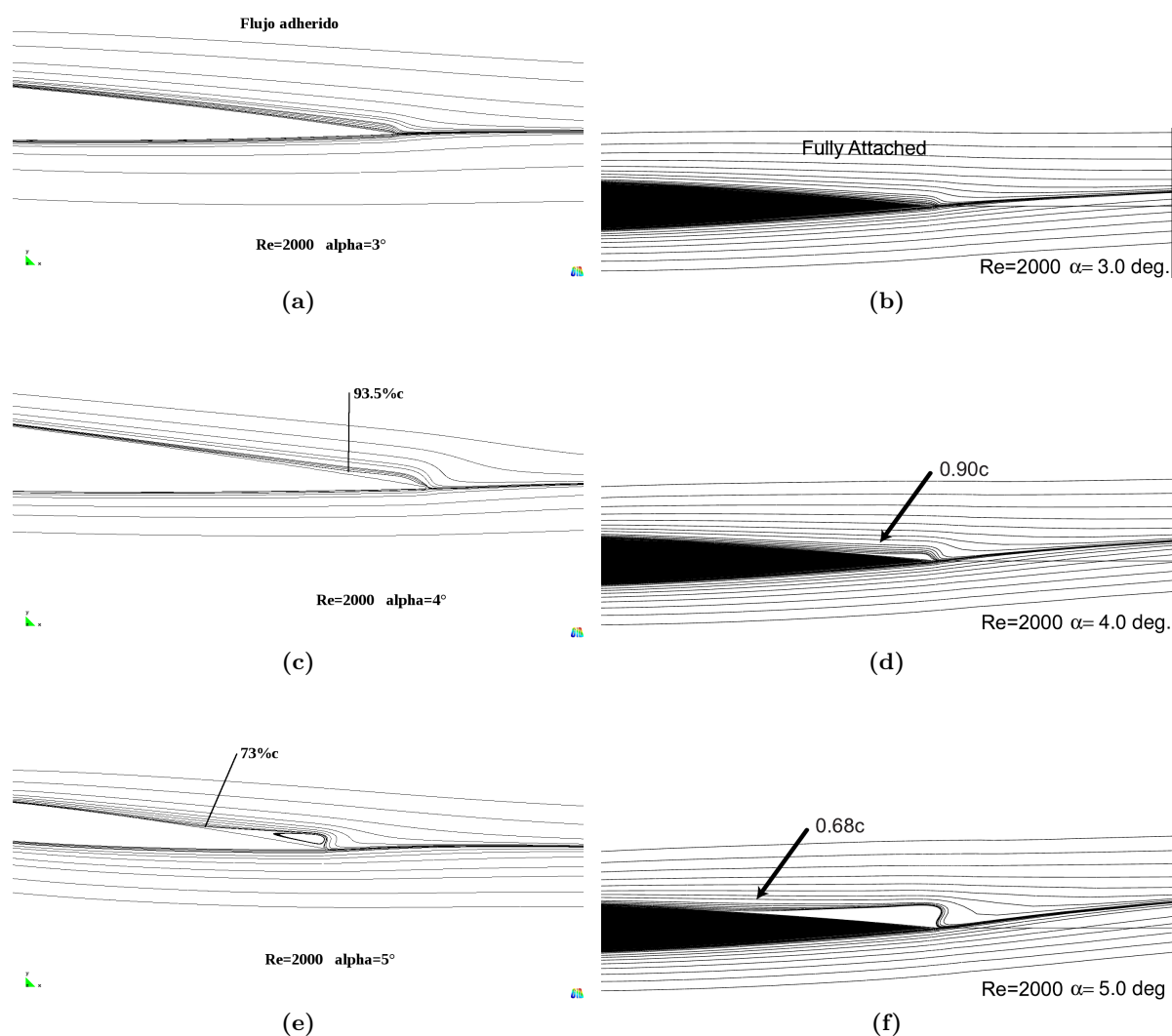


Figura 5.9: Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [73] a $Re = 2000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [73].

del borde de fuga. Además, se realiza una comparación de los resultados con los obtenidos numéricamente en [73].

Como análisis adicional, se muestran algunos perfiles de velocidad a lo largo del extradós de las geometrías estudiadas anteriormente, fig. 5.10. Luego, la definición del espesor del *flujo cercano al cuerpo* es debatible, pero en este trabajo se adopta que es la longitud necesaria para que la velocidad del flujo alcance el 99% de la de corriente libre. Se grafican perfiles a lo largo de la cuerda con el objetivo de comparar, entre dos ángulos de ataque, como es el crecimiento del espesor del *flujo cercano al cuerpo*, el espesor del mismo e identificar la posición del desprendimiento sobre la cuerda. Para $\alpha = 2^\circ$ la separación del flujo se ubica al 95% de la cuerda y el *flujo cercano al cuerpo* alcanza un espesor del 6,5% de c , y para $\alpha = 4^\circ$ la

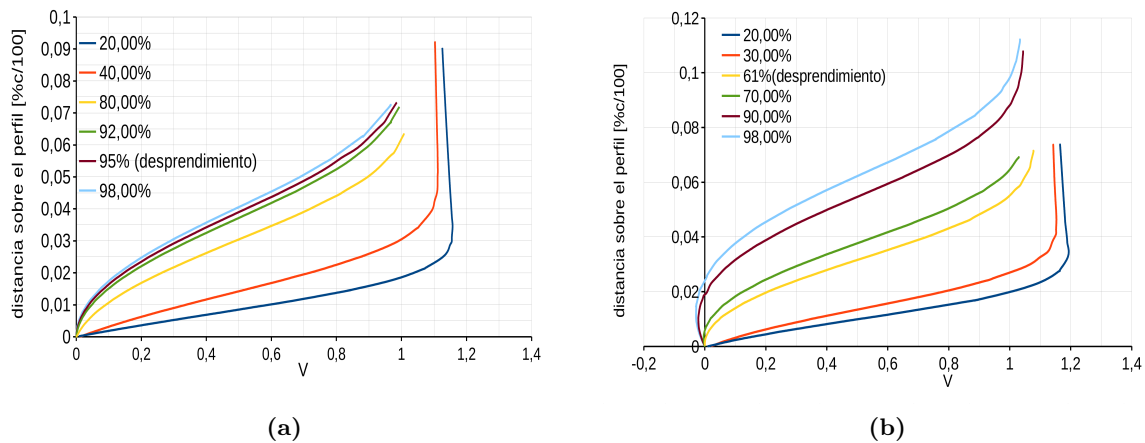


Figura 5.10: Perfiles de velocidad del *flujo cercano al cuerpo* para perfil NACA 0008 a $Re = 6000$. (a) $\alpha = 2^\circ$. (b) $\alpha = 4^\circ$.

separación se ubica al 61 % de c con un espesor de *flujo cercano al cuerpo* de 7,5 % de c .

5.3 Efectos de la relación de espesor

Se estudian los efectos de espesor sobre perfiles simétricos NACA serie 4, más precisamente NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ (fig. 5.11).

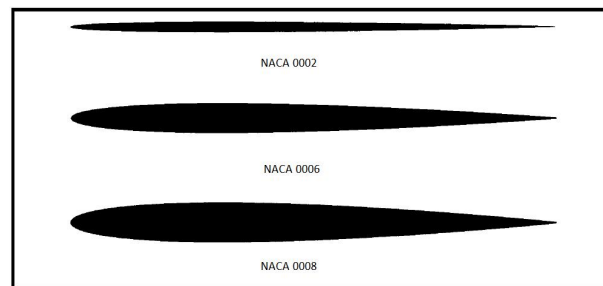


Figura 5.11: Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008, [73].

A modo de comparación, se puede mencionar que a números de Reynolds muy altos, donde las aproximaciones del flujo no viscoso pueden ser aplicadas, el incremento del espesor de los perfiles contribuye a que el comportamiento lineal de la curva $C_L - \alpha$ se prolongue a ángulos de ataque mayores, ubicándose a valores de 5 % \sim 10 % por debajo de la pendiente ideal 2π [73].

Dicha actuación es diferente cuando se trata de números de Re ultra-bajos. La dimensión del *flujo cercano al cuerpo* produce efectos en su mayoría perjudiciales a las performances de los perfiles. La pendiente de sustentación no es ajena a esto y cuando se varía el espesor del perfil, resulta lo que se observa en la fig. 5.12. En el rango cuasi-lineal se dan diferencias en

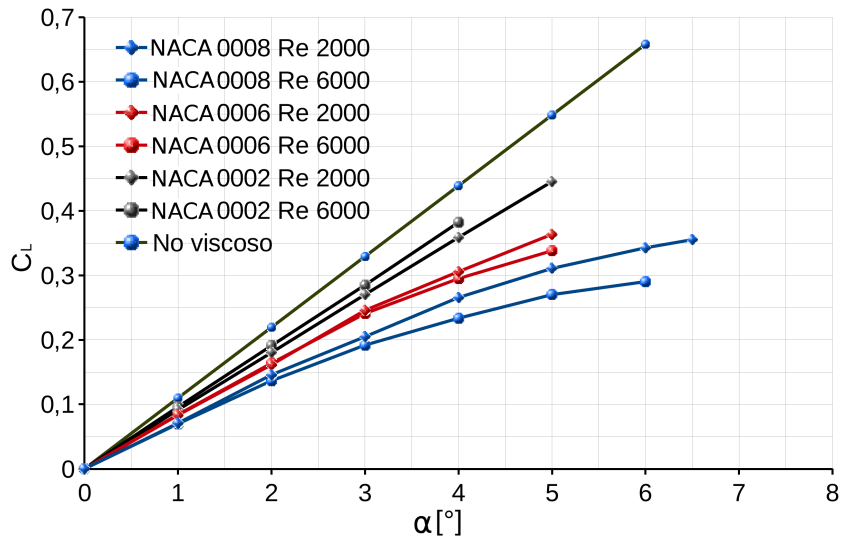


Figura 5.12: Curva de sustentación a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008. Incluye la curva de sustentación para un perfil simétrico en flujo no viscoso.

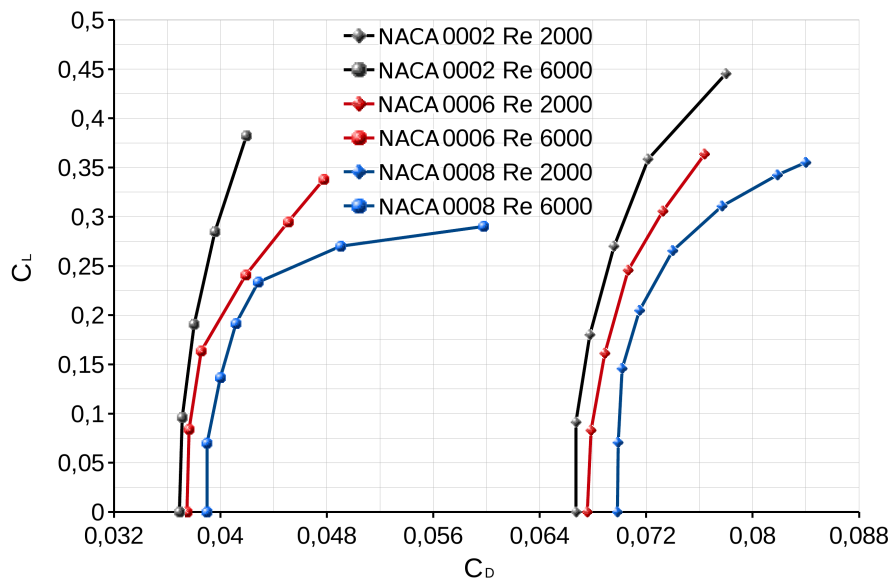


Figura 5.13: Curva polar a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para NACA 0002, 0006 y 0008.

las pendientes de aproximadamente un 13% para NACA 0002, 33% para NACA 0006 y 54% para NACA 0008 respecto a la pendiente de flujo no viscoso. Otro efecto notado al aumentar el espesor, es que se pierde rápidamente la zona lineal operativa del perfil, atribuido esto al desprendimiento del flujo sobre el borde de fuga. Además en la Tabla 5.3 pueden verse los valores numéricos correspondientes a las curvas $C_L - \alpha$.

La variación del coeficiente de resistencia para perfiles simétricos 0002, 0006 y 0008 con

$\alpha [^\circ]$	NACA 0002: C_L		NACA 0006: C_L		NACA 0008: C_L	
	$Re = 2000$	$Re = 6000$	$Re = 2000$	$Re = 6000$	$Re = 2000$	$Re = 6000$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0912	0.0960	0.0830	0.0840	0.0708	0.0697
2	0.1801	0.1908	0.1613	0.1636	0.1456	0.1364
3	0.2698	0.2846	0.2455	0.2407	0.2047	0.1915
4	0.3585	0.3819	0.3055	0.2947	0.2654	0.2334
5	0.4452		0.3635	0.3380	0.3106	0.2700
6					0.3425	0.2900
6.5					0.3551	0.2950

Tabla 5.3: Relación $C_L - (\alpha)$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

flujos a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ puede verse en la fig. 5.13. Como se había adelantado, el coeficiente de resistencia aumenta con la disminución del número de Reynolds. A $Re = 6000$ se observa que con el incremento del espesor aumenta la resistencia, sobre todo a mayores ángulos de ataque. Los perfiles delgados presentan polares con menor curvatura que los de mayor espesor, es decir que la resistencia no experimenta un cambio brusco al aumentar la incidencia, lo cual es favorable para la eficiencia operativa.

Para el caso de $Re = 2000$, aunque el comportamiento es en líneas generales similar al anterior, las curvas polares presentan un incremento más suave del coeficiente C_D , debido a que los efectos viscosos retrasan la aparición de gradientes adversos de presión y por lo tanto los desprendimientos sobre el extradós. No obstante, los valores del coeficiente de resistencia a $Re = 2000$ aumentaron el doble respecto a los de $Re = 6000$. Este fenómeno es de crucial importancia a la hora del diseño de propulsores de microvehículos aéreos (MAV), teniendo en cuenta que la potencia requerida para un vuelo controlado depende directamente de la resistencia aerodinámica.

Los valores de la eficiencia C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ se presentan en la Tabla 5.4.

Está claro que el efecto viscoso sobre la curva de sustentación es dominante y va en aumento junto al incremento de espesor. Esto es consecuencia de que a mayor incidencia, las zonas de flujo muerto donde la presión no se recupera, modifican la geometría efectiva del perfil como se ve en la fig. 5.14. En la misma se grafican los contornos de velocidad para NACA 0002 y NACA 0008 a $Re = 6000$ y $Re = 2000$, a un ángulo de ataque $\alpha = 4^\circ$. Se puede ver como el efecto del *flujo cercano al cuerpo* es mucho mayor sobre el perfil más grueso.

NACA 0002				NACA 0006				NACA 0008			
$Re = 2000$		$Re = 6000$		$Re = 2000$		$Re = 6000$		$Re = 2000$		$Re = 6000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.09	1.37	0.01	2.58	0.08	1.22	0.08	2.23	0.07	1.01	0.07	1.79
0.18	2.66	0.19	5.02	0.16	2.34	0.16	4.24	0.15	2.07	0.14	3.41
0.27	3.88	0.28	7.19	0.24	3.34	0.24	5.74	0.20	2.86	0.19	4.65
0.36	4.97	0.38	9.10	0.30	3.94	0.29	6.53	0.26	3.58	0.23	5.45
0.44	5.71			0.36	4.31	0.34	7.07	0.31	3.99	0.27	5.51
								0.34	4.18	0.29	4.85
								0.35	4.23		

Tabla 5.4: Relación C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

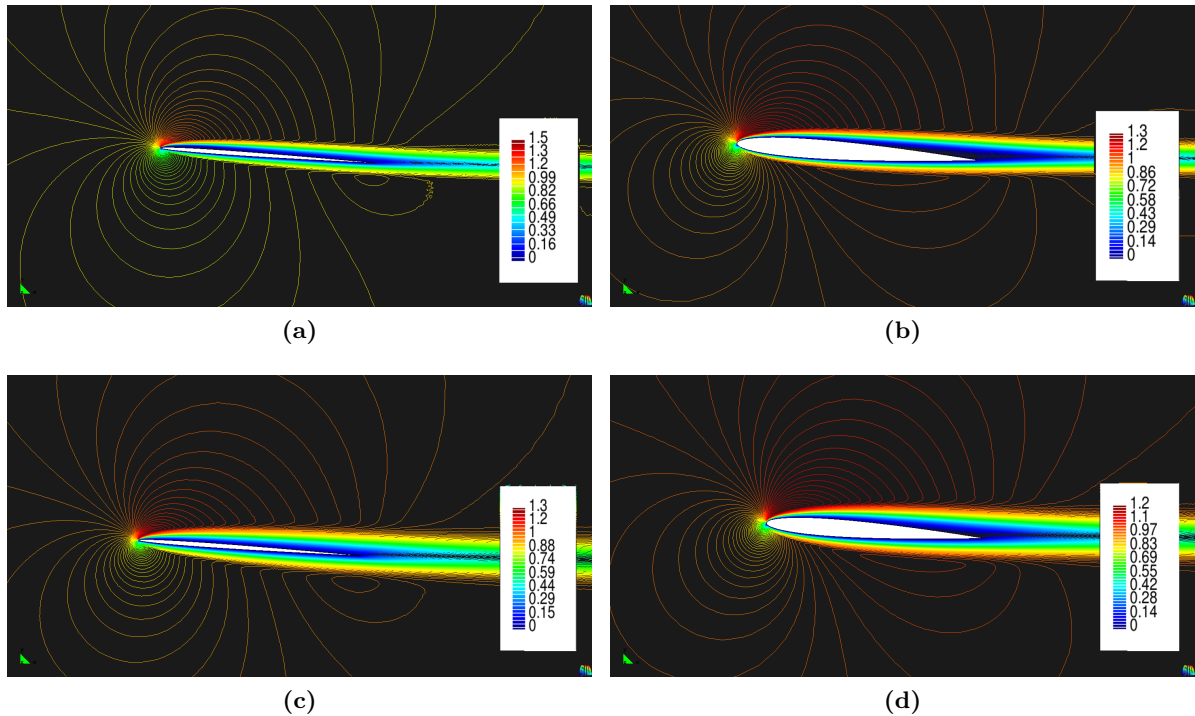


Figura 5.14: Contornos de velocidad para perfiles NACA 0002 y NACA 0008 a $\alpha = 4^\circ$. (a) NACA 0002 $Re = 6000$. (b) NACA 0008 $Re = 6000$. (c) NACA 0002 $Re = 2000$. (d) NACA 0008 $Re = 2000$.

5.4 Efectos de la combadura

Las simulaciones se realizan sobre perfiles de igual espesor con el pretexto de aislar todo efecto que no sea producto de la combadura.

El aumento de combadura es proporcional y se mantiene constante la relación de espesor y su distribución sobre la cuerda. Para ello, se analizan perfiles NACA 2302, NACA 4302 y

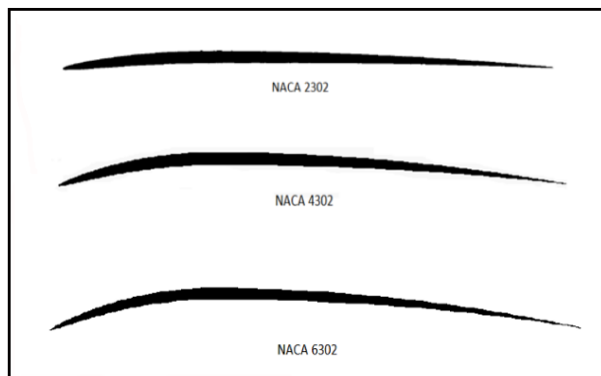


Figura 5.15: Perfiles NACA 2302, 4302 y 6302, [73].

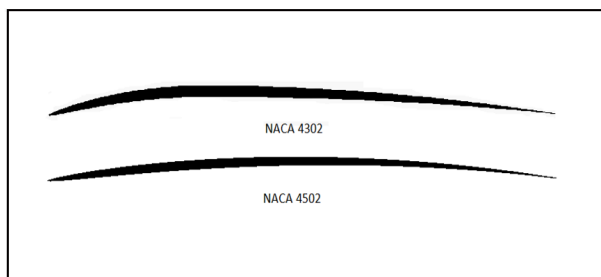


Figura 5.16: Perfiles NACA 4302 y NACA 4502, [73].

6302, fig. 5.15.

La distribución de la combadura a lo largo de la cuerda se realiza a través de los perfiles NACA 4302 y NACA 4502, fig. 5.16.

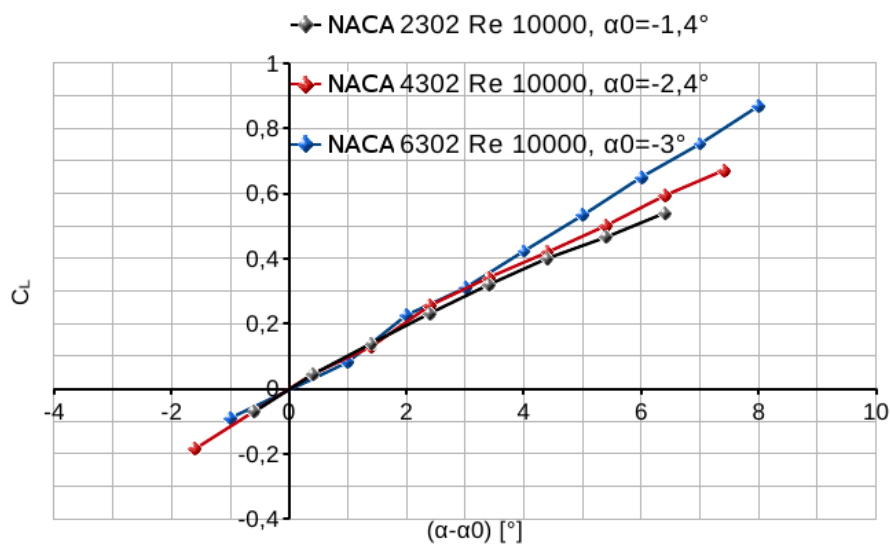


Figura 5.17: Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

NACA 2302		NACA 4302		NACA 6302	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L
		-1.6	-0.185	-1	-0.09
-0.6	-0.071	0.4	0.044	1	0.081
0.4	0.043	1.4	0.129	2	0.226
1.4	0.139	2.4	0.256	3	0.310
2.4	0.232	3.4	0.341	4	0.422
3.4	0.320	4.4	0.419	5	0.533
4.4	0.401	5.4	0.501	6	0.650
5.4	0.466	6.4	0.593	7	0.752
6.4	0.530	7.4	0.671	8	0.869

Tabla 5.5: Relación $(C_L - (\alpha - \alpha_0))$ para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$.

5.4.1 Efecto de la variación proporcional de combadura

En los siguientes casos se comparan diferentes incrementos en la combadura, manteniendo la distribución de la misma y la relación de espesor constante. En base a esto, se utilizaron las geometrías de los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$.

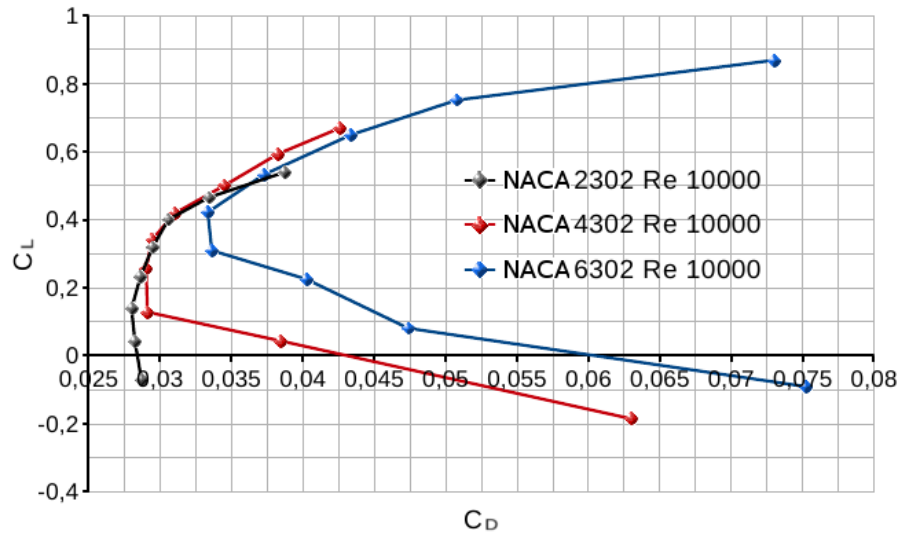


Figura 5.18: Curva $C_L - C_D$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

En dicho régimen, hay un aumento de C_L casi constante con el incremento de combadura para cada ángulo de ataque del perfil 2302 y 4302 teniendo en cuenta sus respectivos ángulos de sustentación nula α_0 . Luego el NACA 6302 presenta una diferencia en la pendiente de sustentación del 30% aproximadamente respecto de las pendientes de los otros dos perfiles,

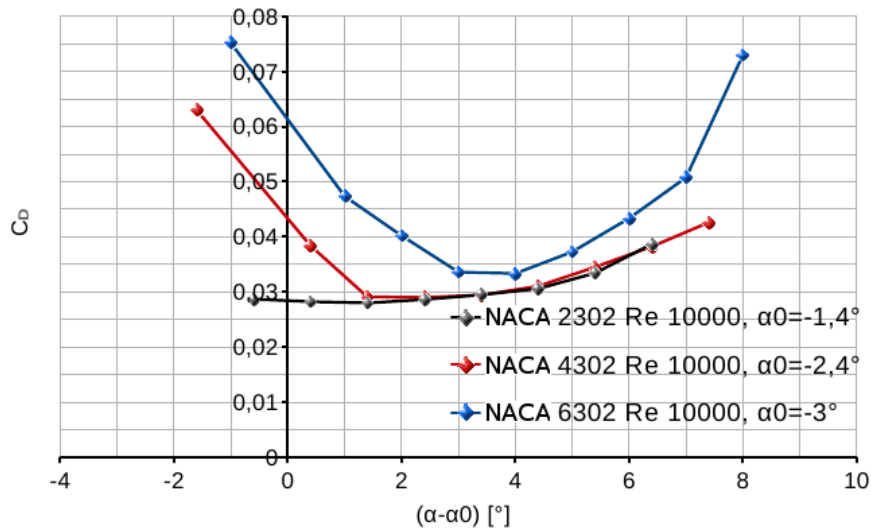


Figura 5.19: Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

NACA 2302		NACA 4302		NACA 6302	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D
		-0.185	-2.935	-0.09	-1.196
-0.071	-2.484	0.044	1.154	0.081	1.714
0.043	1.540	0.129	4.431	0.226	5.618
0.139	4.964	0.256	8.807	0.310	9.215
0.232	8.094	0.341	11.600	0.422	12.674
0.320	10.841	0.419	13.505	0.533	14.298
0.401	13.102	0.501	14.527	0.650	14.985
0.466	13.936	0.593	15.523	0.752	14.816
0.530	13.948	0.671	15.734	0.869	11.907

Tabla 5.6: Eficiencia (C_L/C_D) para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$.

(fig.5.17). Los valores numéricos de C_L se pueden ver en la Tabla 5.5.

Para la visualización del coeficiente de resistencia se presentan las figs. 5.18 y 5.19. La variación del mismo con incidencias o ángulos de ataques positivos en los perfiles NACA 2302 y 4302 crece de forma gradual y de menor manera que en el perfil NACA 6302. Luego, a incidencias negativas el aumento de resistencia es considerable para los perfiles NACA 4302 y 6302 como consecuencia del temprano desprendimiento sobre el borde de ataque.

En la Tabla 5.6 se presentan las relaciones (C_L/C_D) y en la fig. 5.20 se comparan los tres perfiles a un ángulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ (NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$) y a $Re = 10000$ de tal manera de examinar como es el campo de velocidades y como repercute en las presiones intervinientes sobre el cuerpo. La primera

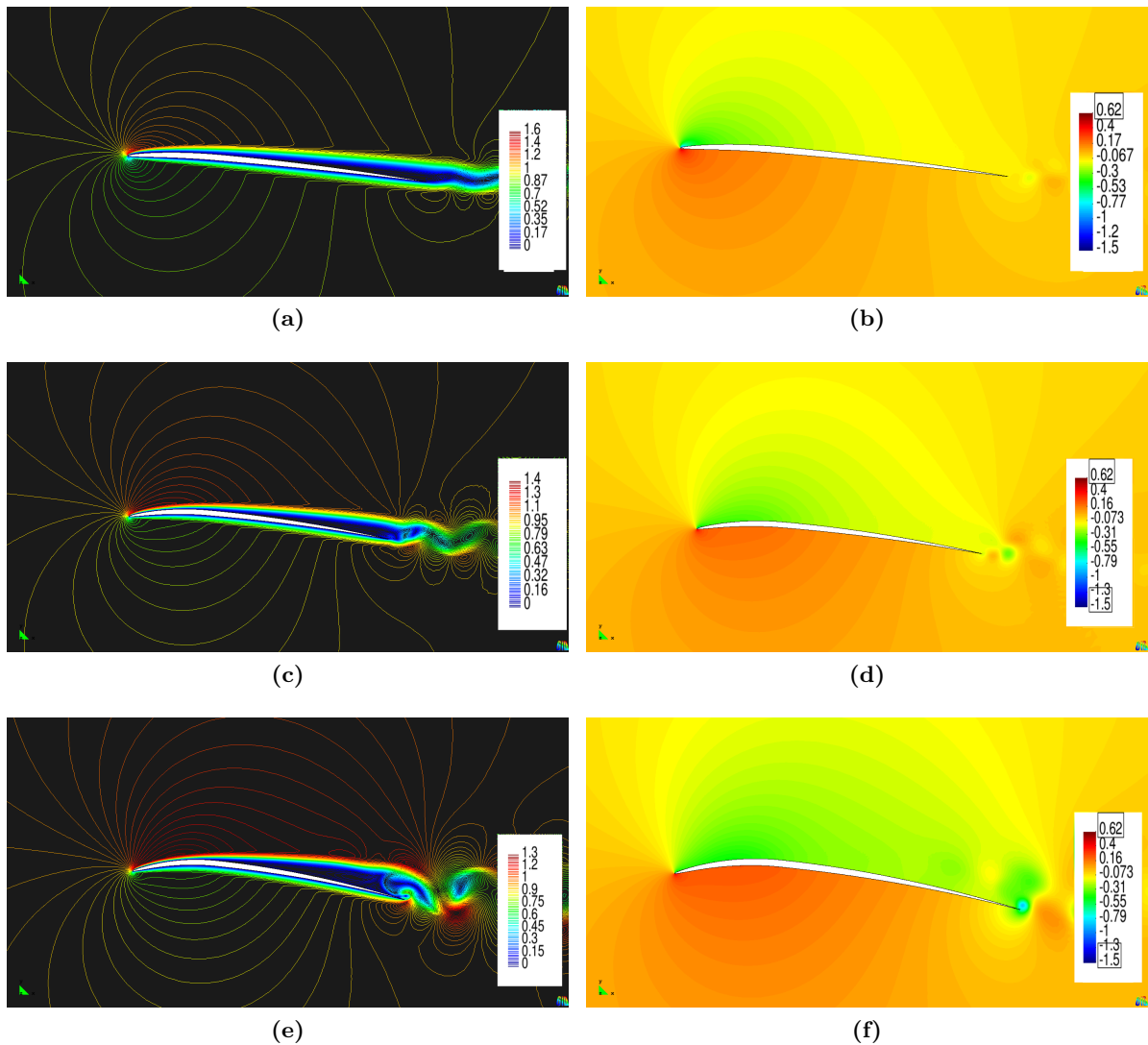


Figura 5.20: Comparación de los contornos de velocidad y de presión para los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $Re = 10000$. (a) y (b) NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, (c) y (d) NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y (e) y (f) NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$.

impresión es que el flujo para este ángulo de ataque pierde el carácter estacionario debido al desprendimiento oscilatorio sobre el borde de fuga. Puede verse además, que la zona de menor presión sobre el extradós del perfil con mayor combadura (NACA 6302), tiene mayor longitud que la de los otros dos, favoreciendo de este modo a la sustentación y como contraparte, la posición del desprendimiento se encuentra más avanzada hacia el borde de ataque, lo que provoca mayor C_D .

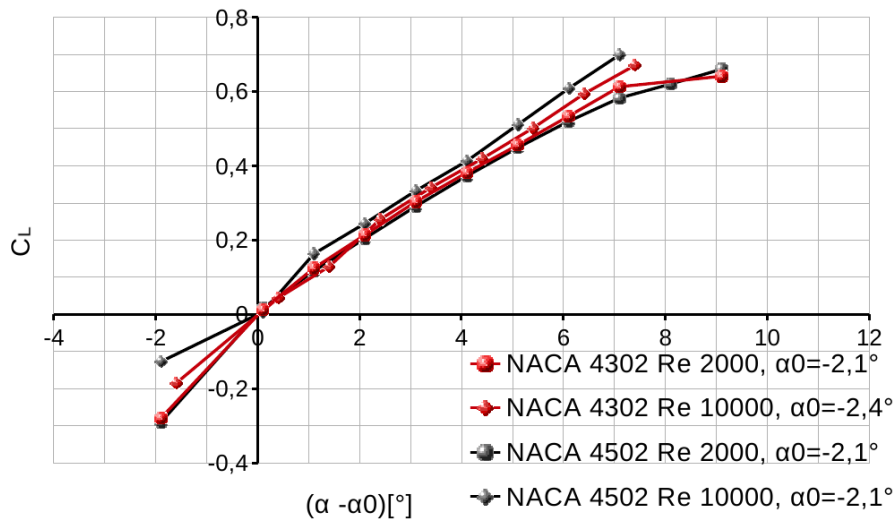


Figura 5.21: Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

5.4.2 Efecto de la posición de la combadura

Para concluir el estudio, se varía la distribución de la combadura a lo largo de la cuerda aunque se mantiene su valor constante junto a la relación de espesor del perfil. Los casos analizados son dos perfiles delgados con un valor de 4% de combadura y su posición se varía desde el 30% de c a 50% de c (perfiles NACA 4302 y 4502) a $Re = 2000$ y $Re = 10000$.

NACA 4302				NACA 4502			
$Re = 2000$		$Re = 10000$		$Re = 2000$		$Re = 10000$	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L
-1.9	-0.279	-1.6	-0.185	-1.9	-0.290	-1.9	-0.127
0.1	0.013	0.4	0.044	0.1	0.017	0.1	0.006
1.1	0.125	1.4	0.129	1.1	0.117	1.1	0.163
2.1	0.214	2.4	0.256	2.1	0.205	2.1	0.245
3.1	0.303	3.4	0.341	3.1	0.291	3.1	0.333
4.1	0.381	4.4	0.419	4.1	0.372	4.1	0.413
5.1	0.456	5.4	0.501	5.1	0.449	5.1	0.510
6.1	0.534	6.4	0.593	6.1	0.520	6.1	0.608
7.1	0.613	7.4	0.670	7.1	0.582	7.1	0.699
8.1				8.1	0.620		
9.1	0.641			9.1	0.660		

Tabla 5.7: Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4302 y 4502 a $Re = 2000$ y $Re = 10000$.

En la fig. 5.21 las curvas de $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ no manifiestan una diferencia notoria como

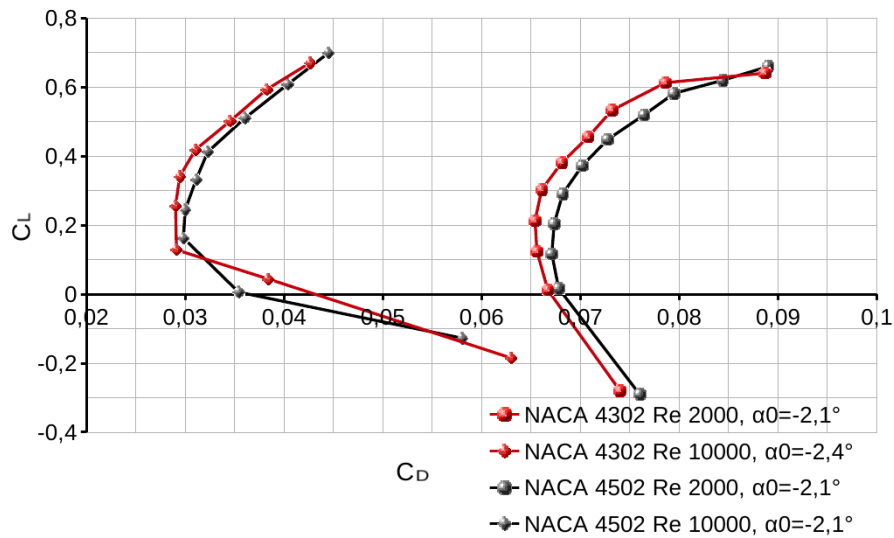


Figura 5.22: Curva $C_L - C_D$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

en los casos anteriores, aunque puede destacarse que el perfil NACA 4302 muestra una ligera diferencia a favor respecto al NACA 4502. Dicha ganancia a bajos ángulos de incidencia se debe a que la succión sobre el borde de ataque es de mayor intensidad. Como contraparte, el desprendimiento del flujo es más abrupto sobre el NACA 4302 abarcando mayor longitud sobre el extradós que en el perfil NACA 4502. De allí la caída de la sustentación del NACA 4302 en los máximos ángulos de ataque estudiados. Los valores de la curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ se presentan en la Tabla 5.7

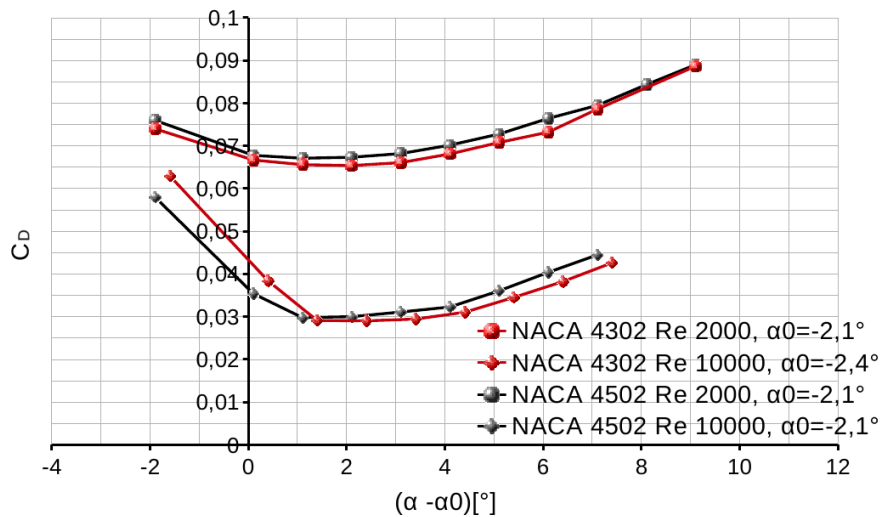


Figura 5.23: Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

El coeficiente de resistencia se grafica en las figs. 5.22 y 5.23. Los valores del NACA 4502

NACA 4302				NACA 4502			
$Re = 2000$		$Re = 10000$		$Re = 2000$		$Re = 10000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
-0.279	-3.77	-0.185	-2.93	-0.290	0.25	-0.127	-2.19
0.013	0.19	0.044	1.15	0.017	1.74	0.006	0.18
0.125	1.90	0.129	4.43	0.117	3.04	0.163	5.48
0.214	3.27	0.256	8.81	0.205	4.27	0.245	8.17
0.303	4.59	0.341	11.60	0.291	5.31	0.333	10.70
0.381	5.56	0.419	13.50	0.372	6.17	0.413	12.79
0.456	6.44	0.501	14.53	0.449	6.80	0.510	14.16
0.534	7.29	0.593	15.52	0.520	7.33	0.608	15.07
0.613	7.79	0.670	14.55	0.582	7.35	0.699	15.71
				0.620	7.42		
0.641	7.23			0.660			

Tabla 5.8: Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4302 y 4502 a $Re = 2000$ y $Re = 10000$.

están por encima del NACA 4302 y el efecto mencionado anteriormente para la sustentación, se ve reflejado en las curvas de C_D . Los valores de eficiencia C_L/C_D se presentan en la Tabla 5.8. Además se observa que a incidencias negativas la posición más adelantada de la combadura incide significativamente sobre la curva de resistencia.

La fig. 5.24 compara los contornos de velocidad de ambos perfiles a $Re = 2000$ a diferentes ángulos de ataque. En las figs. 5.24a y 5.24c, puede verse que el perfil NACA 4302 posee una zona de flujo “muerto” o desprendido sobre el borde de fuga menor a la que puede observarse en el perfil NACA 4502 (figs. 5.24b y 5.24d). En cambio, en las fig. 5.24e, la zona desprendida sobre el extradós del perfil NACA 4302 crece con mayor graduación respecto a lo que se observa en el perfil con la posición más atrasada (NACA 4502) fig. 5.24f.

5.5 Consideraciones para la combinación y posterior elección de una geometría apropiada

En base a los datos presentados, se pueden considerar algunas pautas sobre la elección de una geometría apropiada para su utilización en una aplicación en flujos con Reynolds ultrabajos.

Los análisis realizados indican que al disminuir el número de Reynolds, la resistencia aumenta debido a que los efectos viscosos adquieren gran relevancia, limitan la capacidad de recuperación de la presión y se producen importantes caídas de la pendiente de sustentación.

Si se comparan las relaciones de espesor, se constata que las mejores prestaciones se dan con

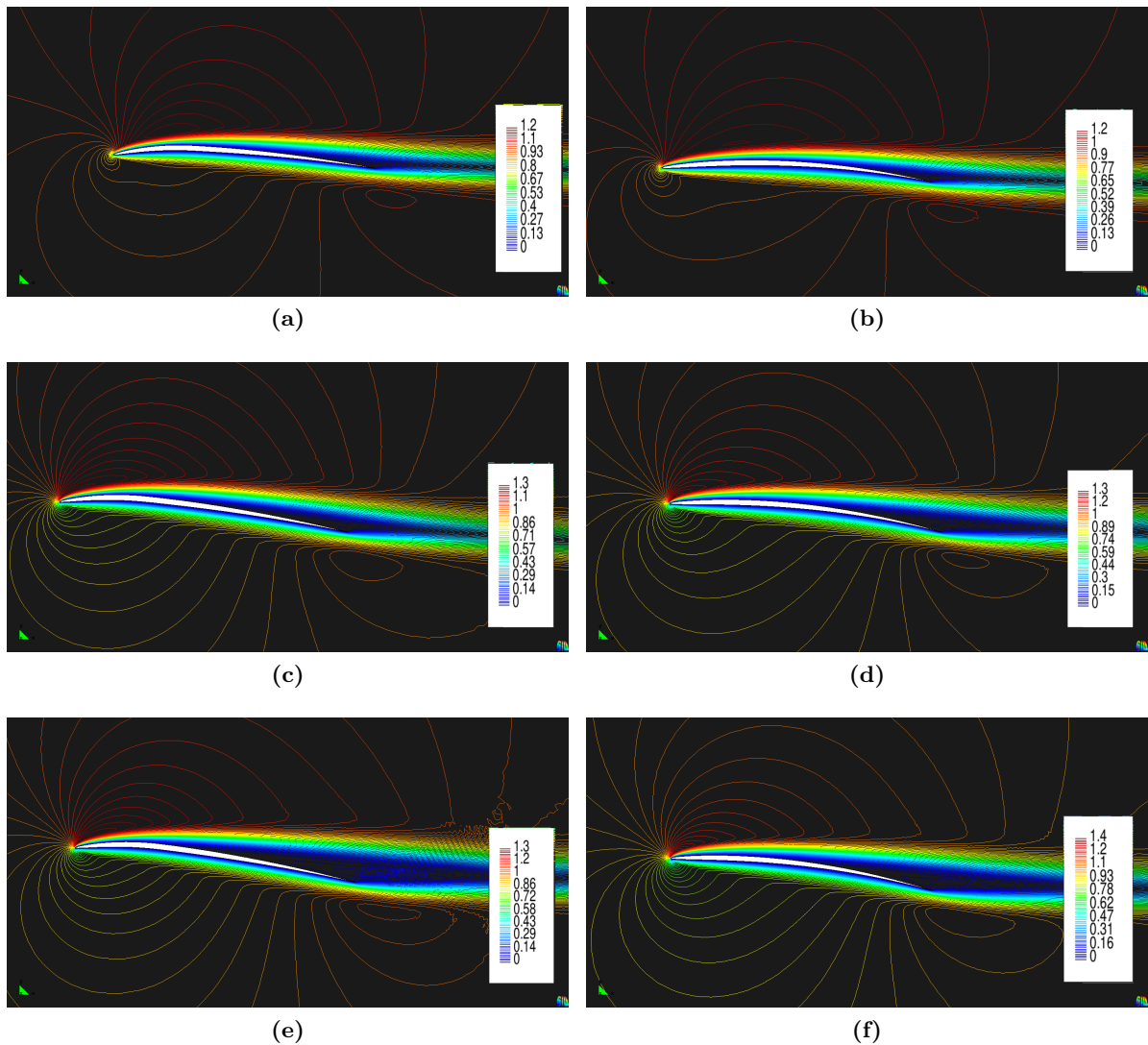


Figura 5.24: Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 4302 y NACA 4502 a $Re = 2000$ y $\alpha = 3^\circ$, $\alpha = 6^\circ$ y $\alpha = 7^\circ$. (a) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 5,1^\circ$ (b) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 5,4^\circ$, (c) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 8,1^\circ$ y (d) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 8,4^\circ$ y (e) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 9,1^\circ$ y (f) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 9,4^\circ$.

los perfiles delgados. Claramente las pendientes de sustentación son considerablemente mayores en los perfiles delgados y ofrecen un amplio rango de operabilidad. En la polares de resistencia también se encuentra que los perfiles de menor espesor presentan las mejores prestaciones, lo cual mejora mucho la eficiencia aerodinámica.

El segundo factor de importancia es la combadura. Es evidente que mejora notablemente las características aerodinámicas de los perfiles, tanto en C_L como en la prolongación del rango de operabilidad lineal. No obstante produce un aumento de resistencia debido al desprendimiento prematuro del flujo, la ganancia neta de eficiencia es satisfactoria. Otro punto de interés a tener en cuenta es la ubicación de la combadura. Se observa que con ubicaciones adelantadas se

consigue mejor comportamiento a bajos ángulos de ataque, es decir el perfil puede ser utilizado en aplicaciones donde dichos ángulos permanezcan cuasi-constantemente con valores mínimos.

FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES RÍGIDOS

En capítulos anteriores se explicitaron varios conceptos y fenómenos importantes que van a ser de utilidad en flujos inestacionarios. Entre ellos están la estructura y topología de la estela y su relación con las fuerzas sobre el cuerpo, los tipos y posiciones de desprendimiento, cinemáticas de vuelo a ultra-bajo Reynolds, etc.

En el presente capítulo se analiza en detalle la actuación de un perfil alar rígido, sometido a movimientos oscilatorios en un medio fluido y se proporciona información valiosa para un eventual diseño. En este contexto se estudiarán las influencias de los parámetros antes mencionados en actuaciones definidas como *heaving*, *pitching*, *flapping* y para diferentes geometrías de perfiles NACA de cuatro dígitos. Además se incluirán casos de vuelo *hovering* simétrico y asimétrico. En la fig. 6.1 se presenta la matriz de análisis realizado.

Análisis inestacionario de perfiles rígidos					
Heaving		Pitching		Flapping	
$0,1 < St < 0,5; f=1$	relación de espesor combadura	$2 < k < 18$	relación de espesor combadura	$2,5^\circ < \alpha < 14,5^\circ$	relación de espesor combadura
$0,1 < St < 0,5; f=2$	relación de espesor combadura	$2,5^\circ < \alpha < 14,5^\circ$	relación de espesor combadura	$0,025 < ha < 0,5$	relación de espesor combadura
				$0,5 < f < 6$	relación de espesor
				St= cte con <i>ha</i> y <i>f</i> variables	relación de espesor

Figura 6.1: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

6.1 Dominio de simulación

El dominio de trabajo para las simulaciones de la mayoría de los perfiles aerodinámicos posee las características de la fig. 6.2. En comparación con el flujo estacionario, las dimensiones del dominio son considerablemente mayores debido a que con el movimiento de la malla, debe ser suavizado de la manera más regular posible (Cap. 3, Sec. 3.7). La grilla no estructurada está

compuesta por triángulos lineales de tensión constante y el refinamiento es particular a cada caso estudiado. Para perfiles gruesos los elementos más pequeños poseen una longitud de lado cercana a $0,0015c$, donde $c = 1$ es la cuerda del perfil y para perfiles delgados, aproximadamente de $0,0007c$.

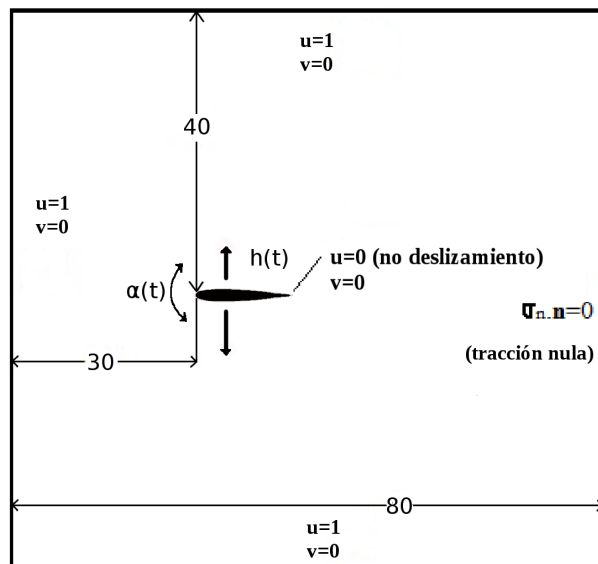


Figura 6.2: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

La topología de la malla se puede ver en la fig. 6.3.

6.2 Desplazamiento vertical (*heaving*)

En esta sección se hará un análisis de varias geometrías de perfiles NACA de cuatro dígitos, con el fin de determinar sus prestaciones en flujo inestacionario y movimiento vertical. La cinemática $h(t)$ responde a la primera de las ecs. 2.22 y un ejemplo representativo es graficado en la fig. 6.4.

6.2.1 Efecto de la relación de espesor

En el Cap. 2 se comentó en detalle un parámetro fundamental de gobierno como es el número de Strouhal St y su importancia en el estudio del flujo inestacionario. Por ello, el parámetro de referencia para el presente estudio será dicho número.

La elección de un rango de variación para el número de St no es de manera aleatoria, si no que en base a estudios anteriores, como el realizado por Taylor *et al.* [114], se determina que en función de la velocidad de crucero, la frecuencia y la amplitud de batimiento de las alas en animales como pájaros, murciélagos e insectos, el mismo se encuentra en el rango $0,19 < St < 0,41$ para el 75% de dichas especies. Otro estudio interesante realizado por

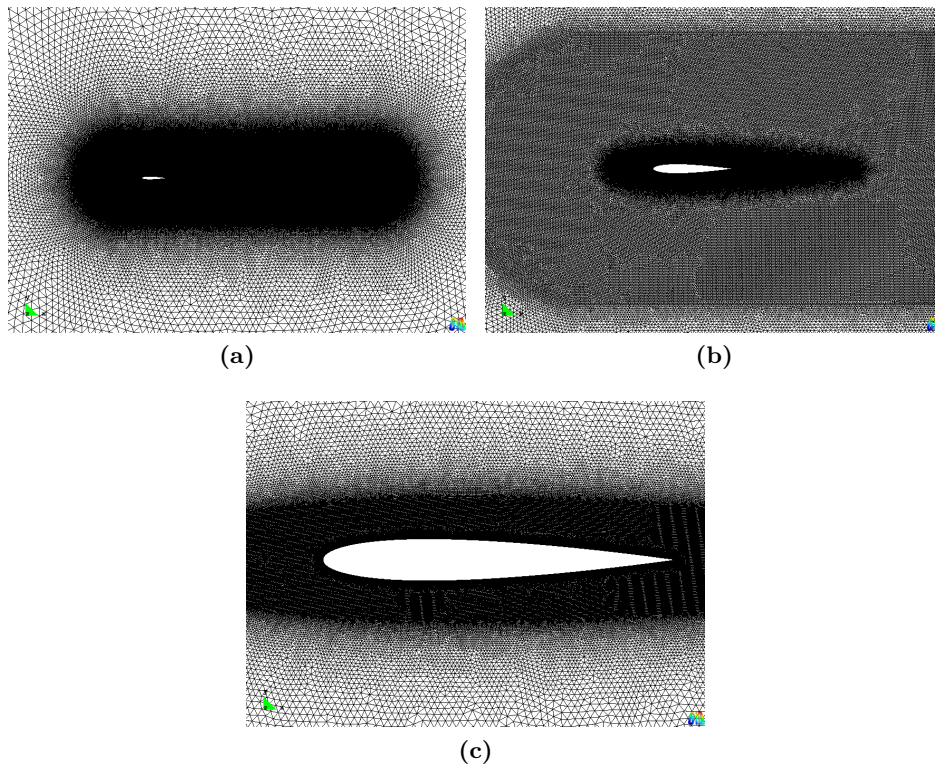


Figura 6.3: Mallado genérico de cuerpo y estela.

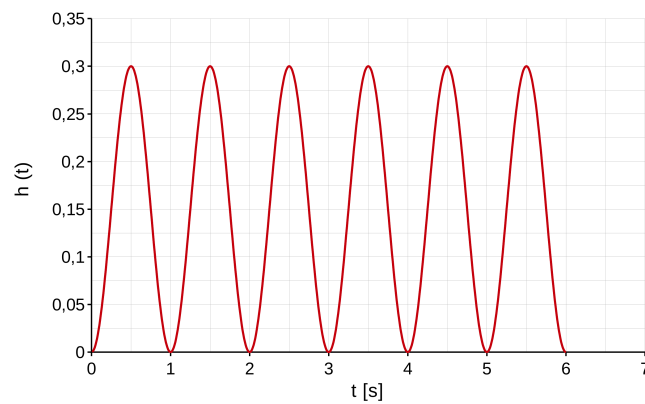


Figura 6.4: Movimiento vertical $h(t)$ ejemplo, con $f_h = 1$ y $h_a = 0,15$.

Triantafyllou *et al.* [117], estableció que el rango para animales acuáticos como peces o cetáceos es aproximadamente $0,25 < St < 0,35$. Además, Nudds *et al.* [90] demostraron que el rango de Strouhal para la máxima eficiencia propulsora (η) para aves es estrecho y reducido a $0,2 < St < 0,4$ [47].

Como primer análisis se presentará la variación en el intervalo $0,1 < St < 0,5$, de tres perfiles NACA simétricos con diferentes relaciones de espesor (NACA 0004, 0006 y 0012), en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , con la frecuencia del movimiento inducido

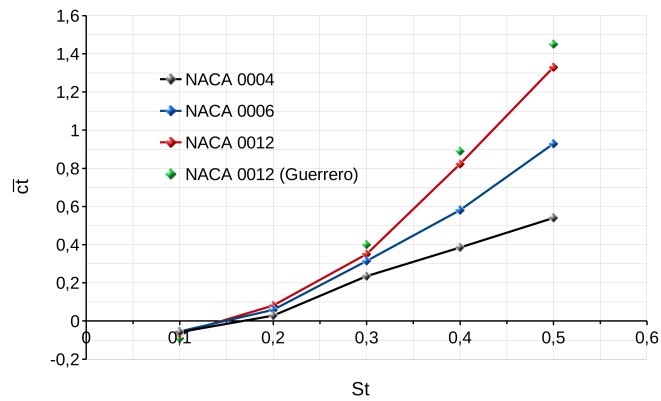


Figura 6.5: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

$f_h = 1$ fija y a número de $Re = 1100$. El número de Re se define con la ec. 2.1 con la cuerda c como longitud de referencia. Además se anexan algunos datos obtenidos por Guerrero [47] en un perfil de 12% de espesor.

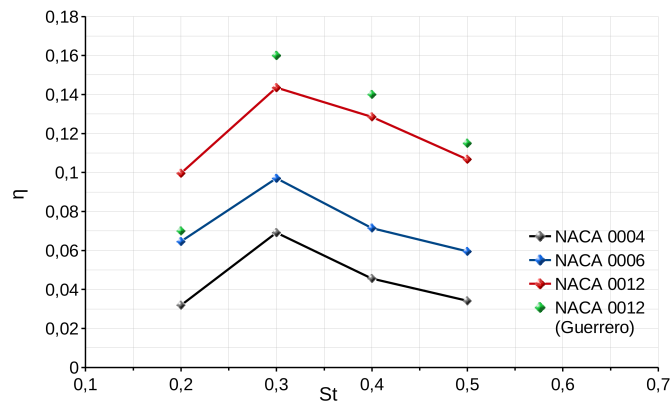


Figura 6.6: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

En la fig. 6.5 el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t dado por las ecs. 2.15 y 2.20, aumenta con el número de St para cada perfil debido al aumento de la amplitud del movimiento h_a . Se puede observar que existe una zona donde no hay tracción, pero sí resistencia. Esto se da aproximadamente para: NACA 0004 a $St < 0,18$, NACA 0006 a $St < 0,16$ y NACA 0012 a $St < 0,15$. Luego para los tres perfiles existe una zona de transición, de producción de resistencia a producción de empuje y dicha zona puede generalizarse para los tres casos en el rango $0,15 < St < 0,2$. Después, los tres perfiles proveen un aumento no lineal de tracción y como puede verse, es mayor mientras mayor es la relación de espesor.

En la fig. 6.7, se pueden diferenciar dos tipos de topologías de estela para dos casos del presente análisis. Uno produce resistencia y otro produce propulsión. La diferencia está en la

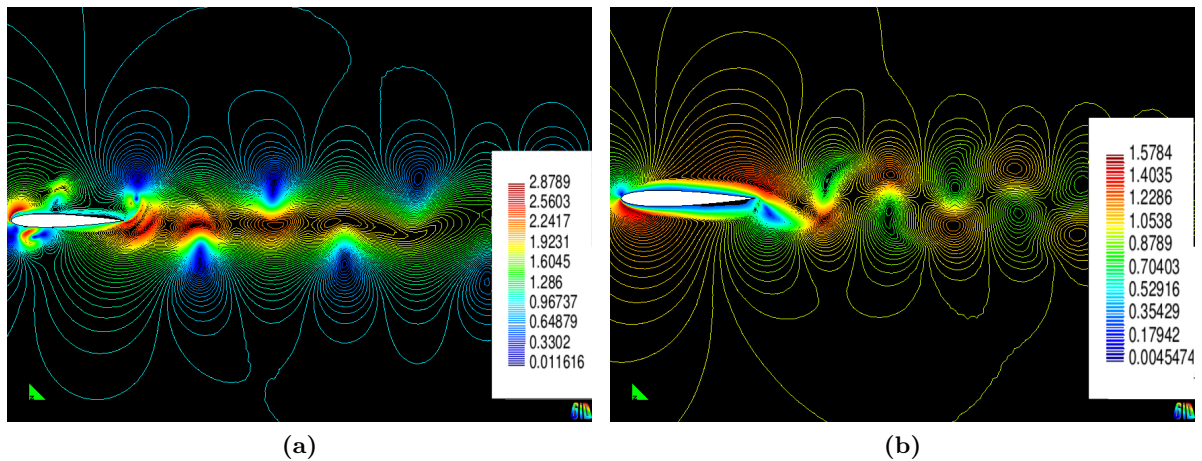


Figura 6.7: Contornos de velocidad y topología de la estela para un caso con resistencia y un caso con propulsión. (a) Perfil NACA 0012. $St = 0,3$ $f_h = 1$, $h_a = 0,15$ y $Re = 1100$ (propulsión). (b) Perfil NACA 0012. $St = 0,1$ $f_h = 1$, $h_a = 0,05$ y $Re = 1100$ (resistencia).

velocidad media que tiene la estela respecto de la corriente libre.

Por otra parte, es importante determinar la eficiencia η de la propulsión entregada por dichos perfiles. La misma puede calcularse mediante la ec. 2.21 (fig. 6.6). El máximo ocurre para $St = 0,3$ para todos los perfiles analizados. La mayor eficiencia propulsora se da para el perfil con la mayor relación de espesor (NACA 0012) y cae al disminuir la misma.

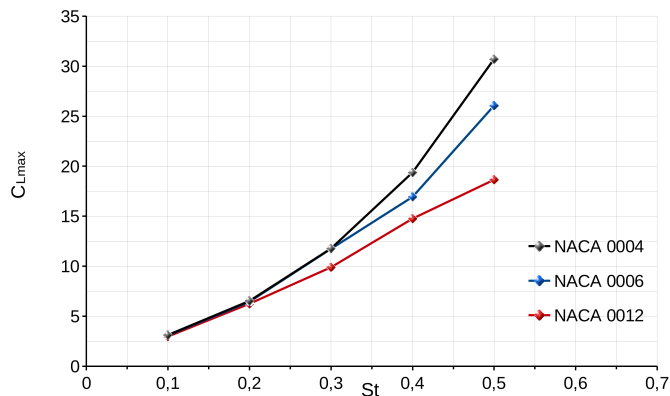


Figura 6.8: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

Otro factor aerodinámico de interés, es el C_{Lmax} obtenido en el ciclo de movimiento para cada perfil y cuyas curvas se presentan en la fig. 6.8. Al contrario de lo que ocurre con el coeficiente de tracción, el coeficiente C_{Lmax} aumenta en la medida que se disminuye la relación de espesor. Como puede verse en dichas curvas, el comportamiento entre los perfiles cambia a partir de un valor de $St = 0,2$, donde la presencia e intensidad del vórtice desprendido de

borde de ataque (LEV), comienza a cobrar mayor importancia en los perfiles más delgados. El efecto del LEV se verá más en detalle a continuación.

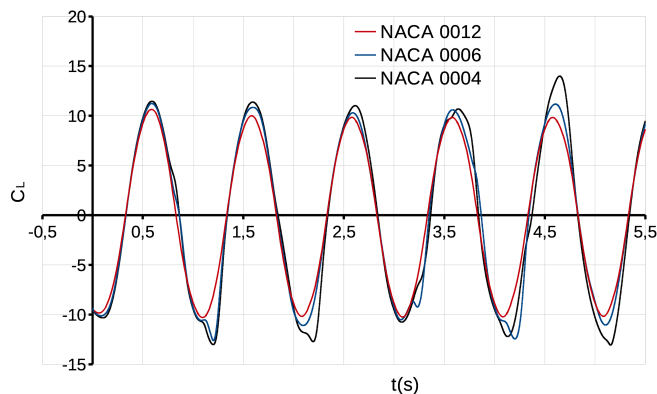


Figura 6.9: Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$.

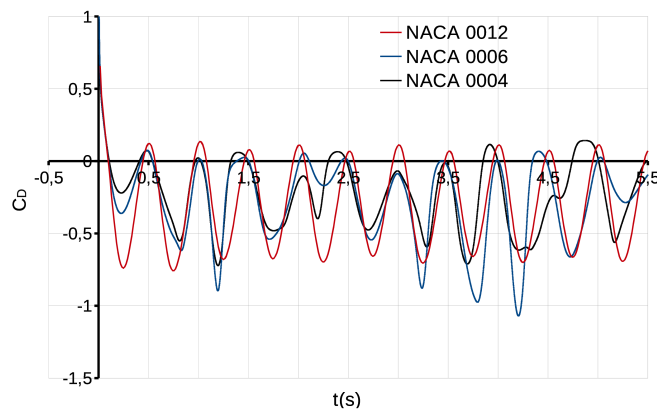


Figura 6.10: Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$.

En las figs. 6.9 y 6.10 puede observarse la variación de los coeficientes $C_L(t)$ y $C_D(t)$ de los perfiles respectivamente, para $St = 0,3$, $f_h = 1$ y $h_a = 0,15$. En la curva de sustentación del perfil NACA 0012 no se detectan alteraciones causadas por el LEV, como sí ocurre en los perfiles NACA 0004 y NACA 0006. Además de provocar picos de sustentación mayores durante el ciclo, las curvas presentan un carácter asimétrico y acíclico. Este efecto repercute en la curva de tracción, distorsionando el período y afectando el valor medio utilizado luego en cálculos. Para completar con una idea cuantitativa, se grafican perfiles de velocidad horizontal sobre una posición de la estela para cada perfil listado en la fig. 6.11 y se determina la velocidad media que lleva el flujo en dicha posición.

Dicho análisis se realiza en el instante de tiempo igual a $4s$, a una distancia de $1c$ del borde de fuga del perfil. Se obtiene como resultado que las velocidades medias son: NACA 0012

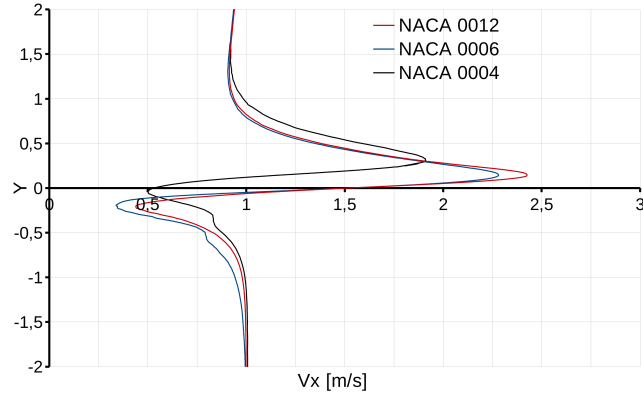


Figura 6.11: Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $1c$ desde el borde de fuga, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 1$, $St = 0,3$ y $t = 4s$.

$V_x = 1,43[m/s]$, NACA 0006 $V_x = 1,315[m/s]$ y NACA 0004 $V_x = 1,195[m/s]$. Se recuerda que la velocidad media de la estela está estrechamente vinculada al empuje que entrega el cuerpo.

Como se mencionó anteriormente, el efecto del vórtice desprendido desde el borde de ataque juega un rol importante en los coeficientes aerodinámicos. El comportamiento observado para cada perfil será expuesto a continuación. Para el análisis, se elige el valor de $St = 0,3$, valor con mayor eficiencia propulsora. Además se compara el perfil de mayor espesor (NACA 0012) con el más delgado (NACA 0004) para una mayor claridad del fenómeno.

La fig. 6.12 muestra la evolución temporal del movimiento del perfil NACA 0012. La caracterización del flujo se realiza mediante los contornos de velocidad sobre el dominio. Para una mayor comprensión del movimiento, remitirse a la fig. 6.4.

En la fig. 6.12a se observa la carrera de *upstroke* con la formación del vórtice de borde de ataque (LEV) sobre el intradós del perfil. Luego en la fig. 6.12b la carrera *downstroke* provoca la formación del siguiente LEV sobre el extradós y puede verse que el vórtice generado en la carrera anterior permanece inmóvil en su posición. En la fig. 6.12c, carrera hacia arriba, el vórtice sobre el intradós se desplaza aguas abajo y el vórtice sobre el extradós permanece fijo en su posición. Además existe la formación de un nuevo vórtice sobre el b.a.(borde de ataque). Luego, en la fig. 6.12d (*downstroke*), el primer vórtice desprendido en la sección inferior llega al final del cuerpo, se acopla con el vórtice del borde fuga y luego con la estela en un tiempo de $1,64s$. Finalmente, en las figs. 6.12e y 6.12f ocurre lo mismo con el vórtice sobre extradós e intradós respectivamente.

La fig. 6.13 presenta la evolución temporal del movimiento del perfil NACA 0004. La caracterización del flujo también se realiza mediante los contornos de velocidad sobre el dominio. Al igual que en el caso anterior, en la primera carrera de *upstroke*, fig. 6.13a, se forma un vórtice sobre el intradós del perfil a través del borde de ataque. Luego en la carrera de *downstroke*, fig. 6.13b, el vórtice formado anteriormente sobre el intradós se traslada hacia el extradós para

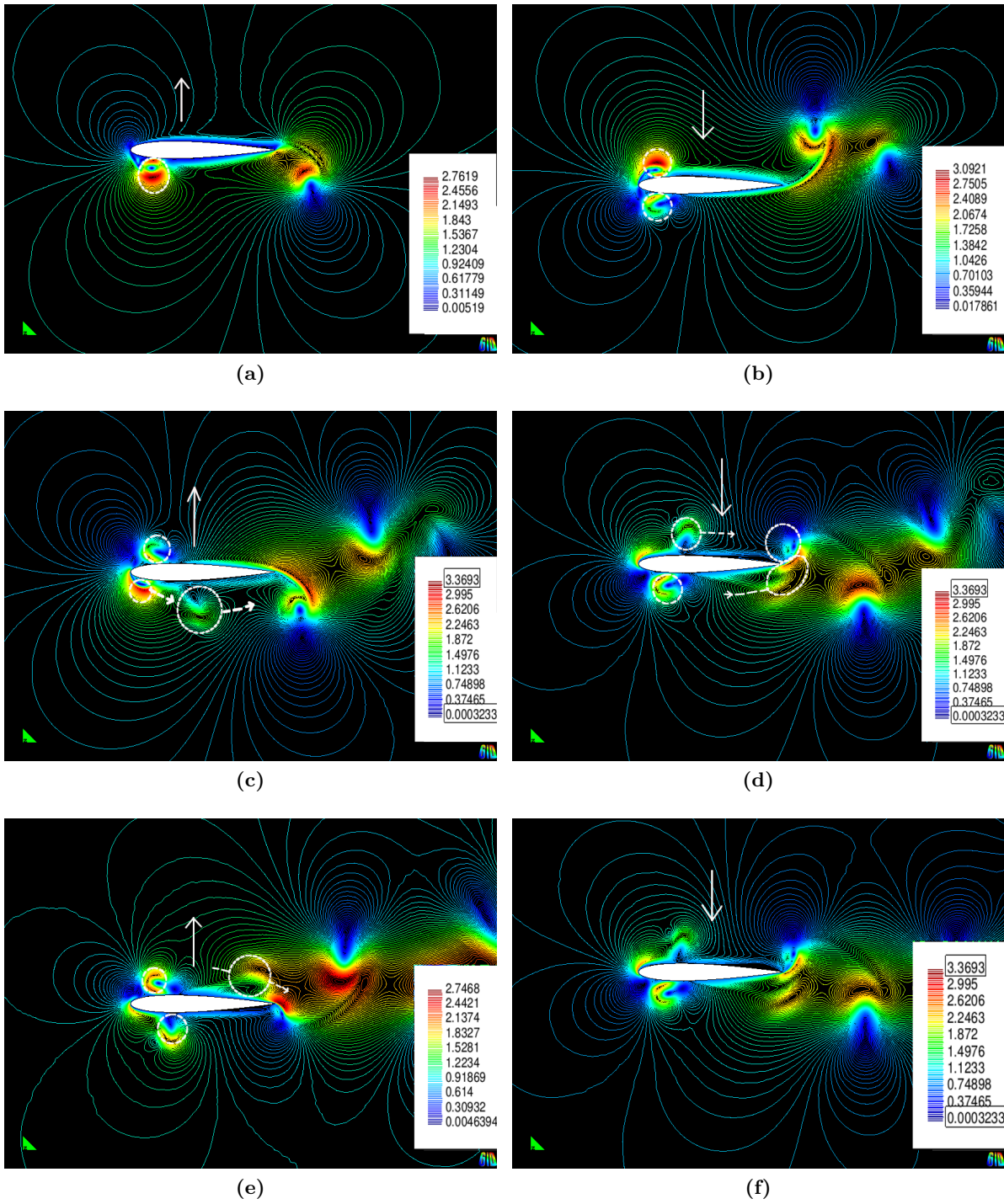


Figura 6.12: Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0012. Condición de máxima eficiencia propulsora ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$.(b) $t = 0,86[s]$.(c) $t = 1,29[s]$.
(d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,08[s]$.(f) $t = 2,65[s]$.

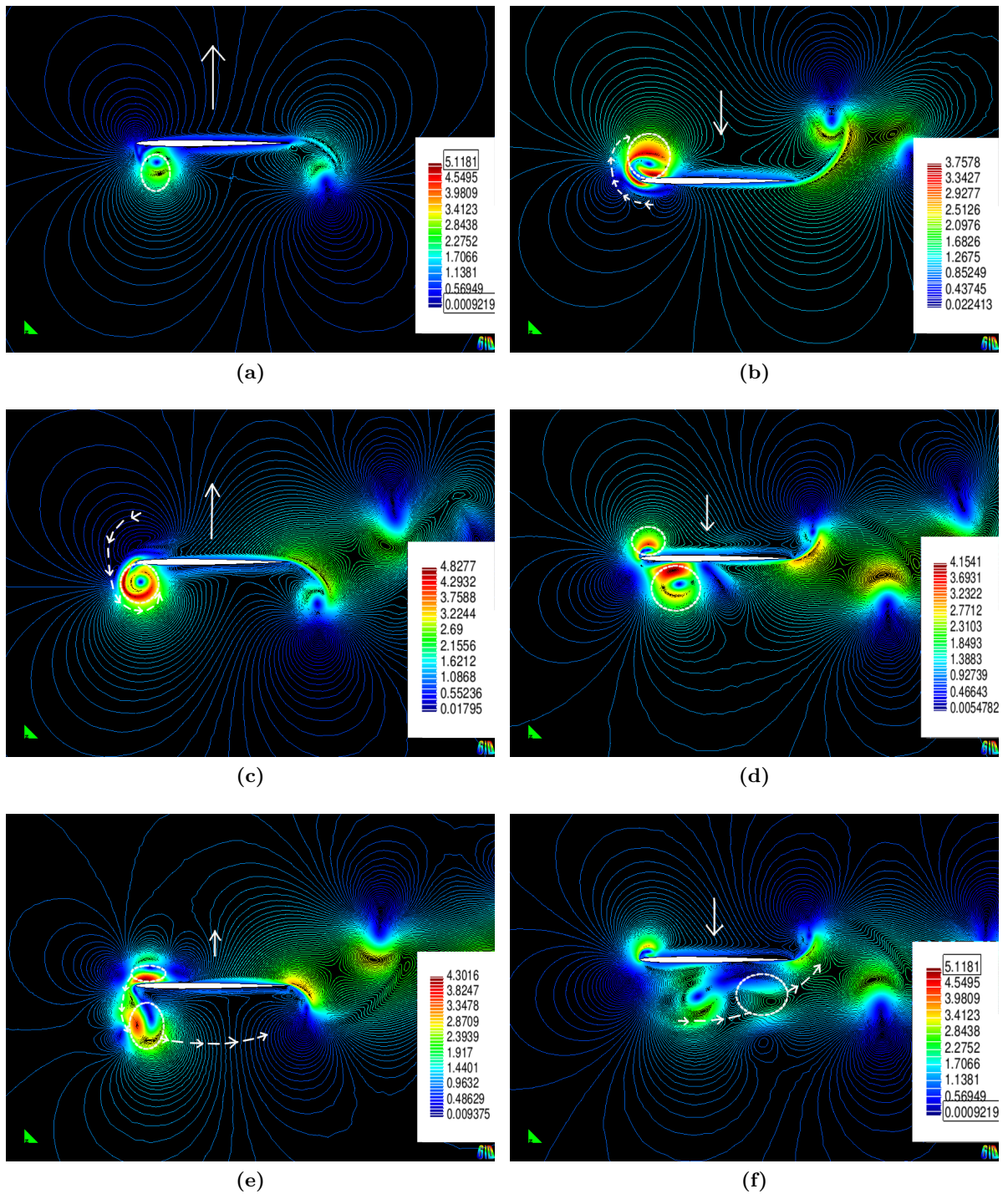


Figura 6.13: Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0004. Condición de máxima eficiencia propulsora ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$. (b) $t = 0,86[s]$. (c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$. (e) $t = 2,08[s]$. (f) $t = 2,65[s]$.

interactuar con el nuevo vórtice formado sobre el extradós en dicha carrera. En la fig. 6.13c, carrera nuevamente hacia arriba a un tiempo de 1,29s, la interacción entre los vórtices que estaban sobre el extradós se traslada hacia el intradós. Debido a la agudeza del perfil, existe una depresión considerable sobre el b.a., lo que causa el traslado del LEV de una sección a otra. En la fig. 6.13d(*downstroke*), el LEV se encuentra un poco más alejado de la sección, el traslado hacia el extradós no ocurre y el vórtice generado comienza a desplazarse aguas abajo como puede verse en la fig. 6.13e. Todo esto es a un tiempo de 2,08s y dos ciclos de movimiento cumplidos. Luego en la fig. 6.13f y a un tiempo de 2,65s, se produce el acople del LEV con el vórtice de borde de fuga y luego con la estela. Estas interacciones entre vórtices desprendidos se repiten cíclicamente en el tiempo.

Lo hasta aquí planteado permite identificar las razones de las diferencias encontradas en las performances aerodinámicas entre los perfiles de diferente espesor. La permanencia de mayor tiempo del LEV sobre la región de la nariz del perfil más delgado, además de la baja presión que el mismo acarrea, influye en la convección del mismo hacia la estela y con ello la disminución de la propulsión con respecto a la entregada por el NACA 0012. Dicho efecto se ve reflejado sobre las curvas de sustentación y resistencia.

La separación y convección del LEV, es crucial a la hora de evaluar los coeficientes aerodinámicos del perfil en movimiento *heaving*.

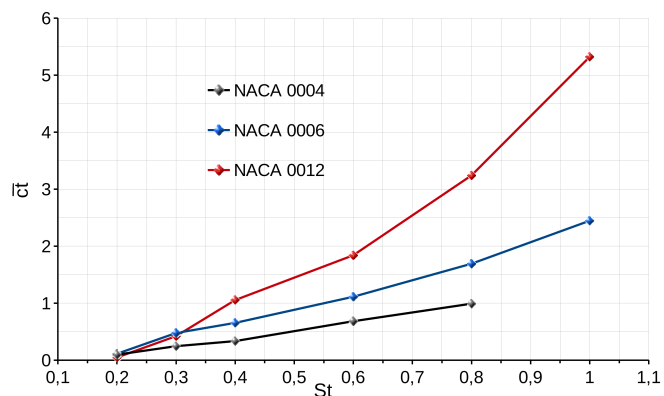


Figura 6.14: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

Lo que se ha hecho hasta aquí, es observar el comportamiento de las performances aerodinámicas en función de la relación de espesor, con la variación del número de Strouhal mediante la amplitud del movimiento de *heaving* h_a , y con la frecuencia f_h o frecuencia reducida k constante. El siguiente análisis se realiza a una frecuencia de movimiento constante igual a $f_h = 2$, con el objeto de extender el estudio de los parámetros aerodinámicos más relevantes. En la fig. 6.14 el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t aumenta de manera no lineal en los tres perfiles. Dicho coeficiente lleva un mayor crecimiento para el perfil con mayor relación de espesor y

decrece en la medida que esta se reduce.

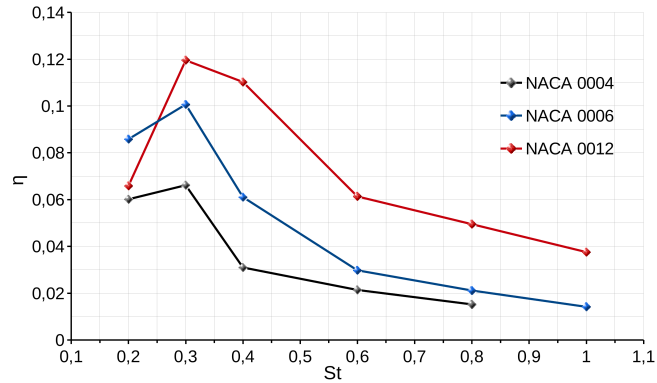


Figura 6.15: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

Además la transición de la generación de resistencia a propulsión, ocurre aproximadamente a $St = 0,2$ al igual que en el caso anterior. Luego el perfil NACA 0012 posee la mayor tracción como consecuencia del efecto causado por el vórtice desprendido del borde de ataque (LEV).

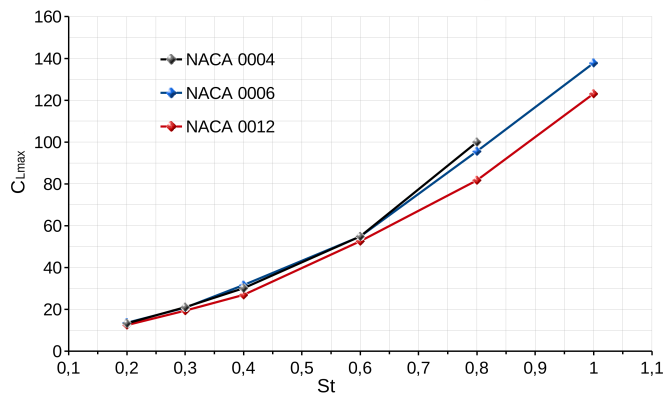


Figura 6.16: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

Posteriormente, la eficiencia propulsora η se estudia en la fig. 6.15, donde el mayor valor es a $St = 0,3$ para los tres casos. Nuevamente ocurre que el perfil de mayor espesor posee la mayor eficiencia propulsora η . También puede observarse que al aumentar el valor de St , es decir la amplitud de movimiento h_a , la relación cae debido a que el coeficiente de sustentación se incrementa provocando que la tasa de potencia necesaria para producir el movimiento sea mayor que la tasa de potencia propulsora entregada por el perfil. Con referencia al coeficiente de sustentación, en la fig. 6.16 se grafica el C_{Lmax} obtenido en cada ciclo de movimiento para los perfiles estudiados.

El coeficiente de resistencia para la condición de mayor eficiencia se ve reflejado en la fig.

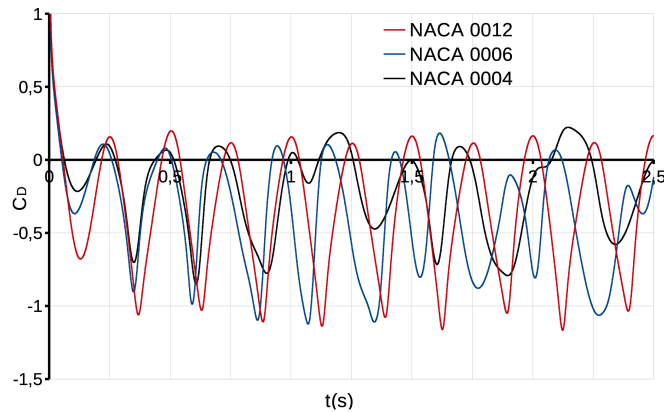


Figura 6.17: Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 2$.

6.17. La pérdida de simetría en la curva de resistencia a causa del LEV, ocasiona que el valor promedio del coeficiente de tracción \bar{c}_t sea menor.

Los valores promedio de los parámetros se determinan dentro de un intervalo de tiempo lo más extenso posible y luego de un tiempo prudencial de simulación, con el fin de realizar los cálculos sobre un comportamiento cuasi estacionario, donde cada caso ha sido de estudio particular. Así mismo, en varios de dichos casos no se encontró un comportamiento cuasi estacionario y donde el flujo se presenta de manera completamente irregular.

6.2.2 Efecto de la combadura

El primer análisis que se presenta es la variación del número de Strouhal St en un rango de $0,1 < St < 0,5$ (a través de la variación de la amplitud del movimiento vertical h_a) para dos perfiles NACA con diferentes combaduras (NACA 0004 y 4404), con la frecuencia del movimiento igual a $f_h = 1$. El número de Reynolds es igual a $Re = 1100$.

En la fig. 6.18 se observa que el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t aumenta de manera no lineal con el número de Strouhal St para ambos perfiles. No obstante la adición de combadura no produce un gran cambio en lo que respecta a dicho coeficiente.

La eficiencia propulsora η presenta una paridad entre ambos perfiles, fig. 6.19, al igual que \bar{c}_t . Nuevamente el máximo ocurre para $St = 0,3$ y en ambos casos tiene aproximadamente el mismo valor $\eta = 0,069$. Para valores de Strouhal más altos, permanece ligeramente mayor para el perfil combado, aunque las diferencias no son de gran significancia.

El coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St se grafica en la fig.6.20. Los valores máximos obtenidos se mantienen similares hasta $St = 0,3$ y son mayores para el perfil NACA 0004. El efecto causado por la combadura se ve ocultado por el LEV y por la cinemática de movimiento a diferencia de los resultados obtenidos en flujo estacionario, donde el agregado de combadura incrementa las prestaciones del perfil. Debido a que el perfil

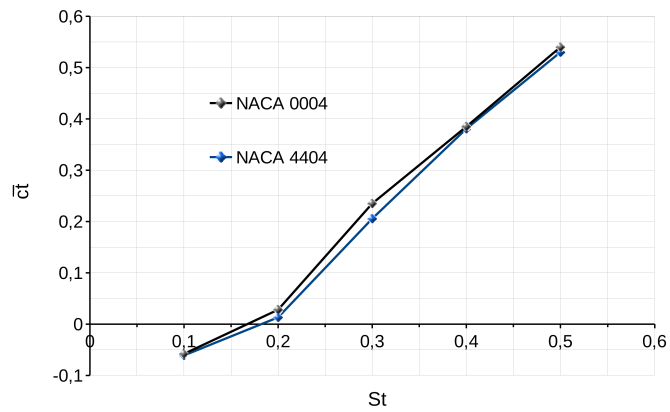


Figura 6.18: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

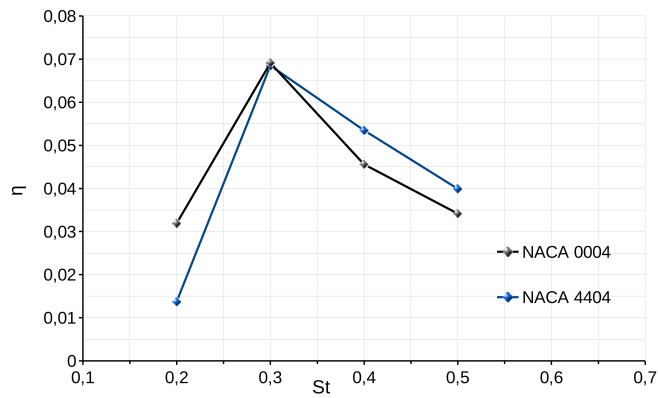


Figura 6.19: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

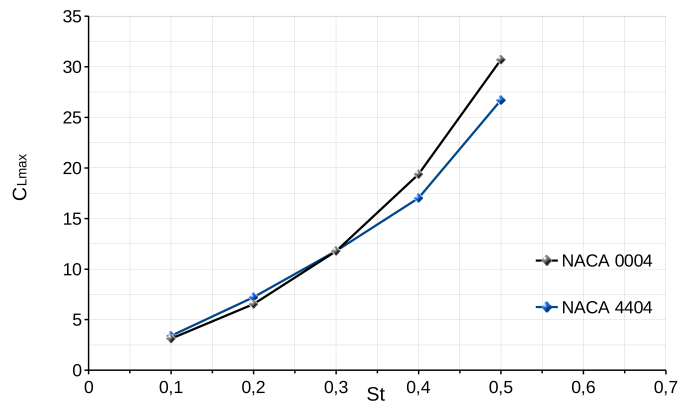


Figura 6.20: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 4404, a $Re = 1100$, $f_h = 1$.

analizado es delgado, la succión en el b.a es alta, lo que causa que el vórtice desprendido permanezca varios ciclos de movimiento adherido al mismo sin ser convectado hacia la estela.

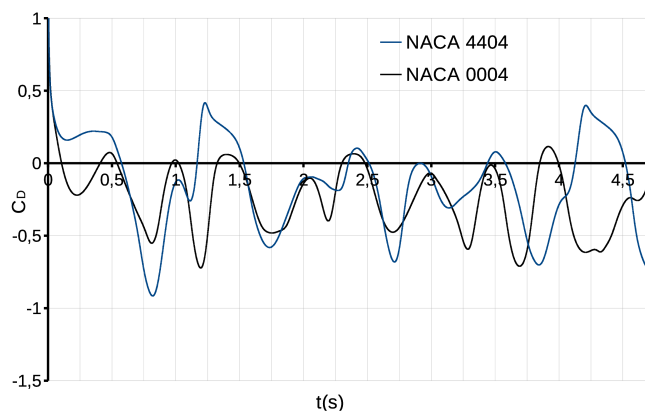


Figura 6.21: Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 4404, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f_h = 1$.

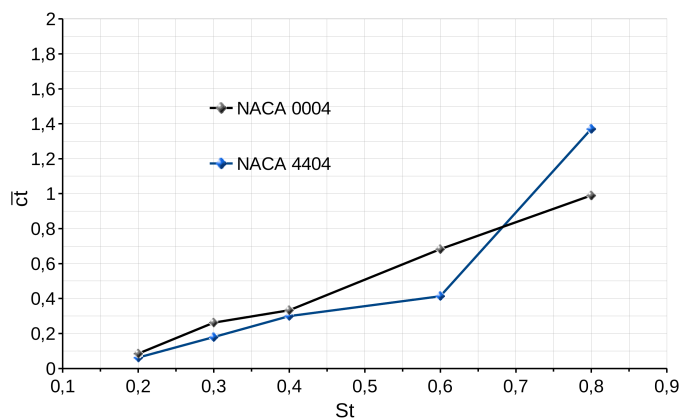


Figura 6.22: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

Para el caso con mayor eficiencia propulsora obtenida, se grafica el coeficiente de resistencia en función del tiempo, fig.6.21. La irregularidad que presenta la curva de resistencia del NACA 4404 es mayor respecto a la del perfil simétrico. Como se mencionó anteriormente se debe a la presencia e intensidad del LEV y a su forma de acoplarse a la estela.

El análisis se completa considerando nuevamente al número de Strouhal St como variable (controlada por la amplitud de movimiento h_a) en un rango $0,2 < St < 0,8$ y a una frecuencia de oscilación $f_h = 2$.

En este caso, la diferencia entre ambos perfiles es más notoria que el anterior pero con mejores prestaciones propulsoras para el perfil simétrico, fig. 6.22. Al igual que antes, la transición de resistencia a propulsión generada por el perfil ocurre en el rango $0,15 < St < 0,2$,

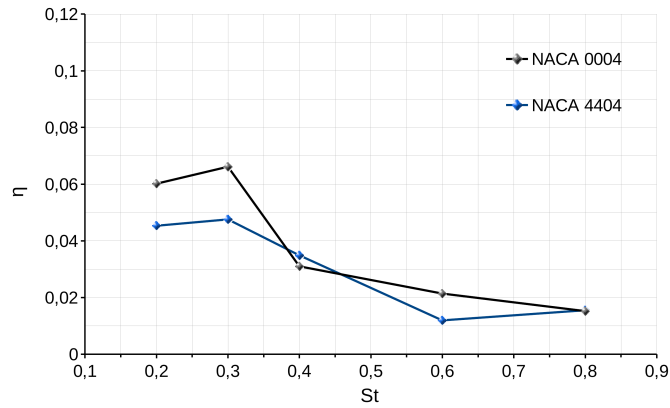


Figura 6.23: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Strouhal St , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

luego el $\bar{c}t$ aumenta con la amplitud de movimiento h_a .

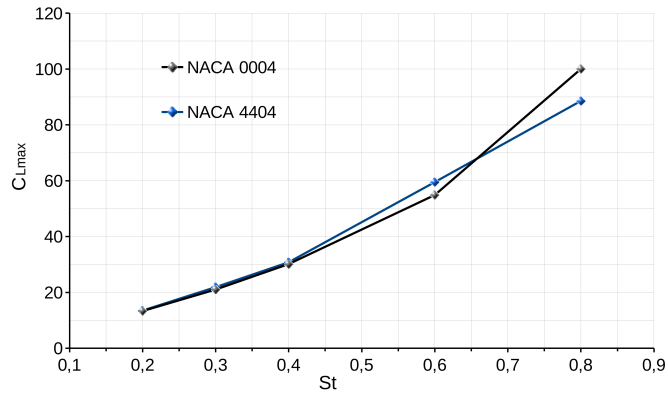


Figura 6.24: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal St , para NACA 0004, 4404, a $Re = 1100$, $f_h = 2$.

La eficiencia propulsora fig. 6.23, decae para el perfil con combadura en función del aumento de la frecuencia de movimiento. Los resultados presentados hasta aquí (movimiento *heaving*), muestran que no le sienta bien un valor positivo de combadura a las prestaciones propulsoras generadas por el perfil. Para el perfil simétrico (NACA 0004) el valor máximo de η se mantiene respecto de $f_h = 1$ y ha aumentado para $St = 0,2$, mejorando el valor obtenido en el caso anterior. En ambos casos el máximo ocurre sobre $St = 0,3$ y decae para mayores valores.

El coeficiente de sustentación máximo de cada ciclo de movimiento se mantiene similar en ambos perfiles (fig. 6.24).

6.3 Movimiento de cabeceo (*pitching*)

En esta sección se hará un análisis de varias geometrías de perfiles NACA serie 4, con el fin de determinar sus prestaciones y comportamiento en flujo inestacionario con movimiento de cabeceo o *pitching*. El movimiento inducido $\alpha(t)$ responde a la segunda de las ec. 2.22, Sec. 2.2.4.3, (fig. 6.25).

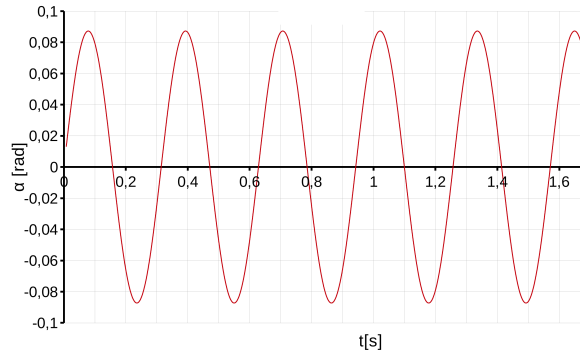


Figura 6.25: Movimiento de cabeceo $\alpha(t)$ ejemplo con $k = 10$ y $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$.

Los parámetros variables a considerar son la frecuencia reducida k y la amplitud angular α_a . El valor de frecuencia reducida k se obtiene mediante la ec. 2.9, Sec.2.2.4.3. El punto de pivot del perfil se ubica al 25 % de la cuerda.

6.3.1 Efecto de la relación de espesor

Como primer análisis se presentarán los efectos de la variación de frecuencia reducida en un rango $2 < k < 18$, sobre dos perfiles NACA simétricos con diferentes relaciones de espesor (NACA 0002 y 0012), con la amplitud angular igual a $\alpha_a = 5^\circ$ y a un Re igual a 1100.

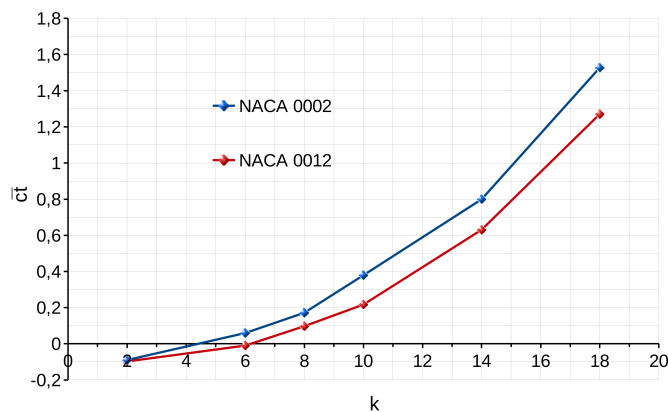


Figura 6.26: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

De la fig. 6.26 se deduce que el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t aumenta de manera exponencial con k para ambos perfiles y la zona de transición de producción de resistencia a producción de tracción ocurre aproximadamente a $k = 4,5$ y a $k = 6,2$ para NACA 0002 y NACA 0012 respectivamente. Es de hacer notar que la producción de tracción es mayor para el perfil más delgado, contrariamente a lo que ocurre en *heaving*.

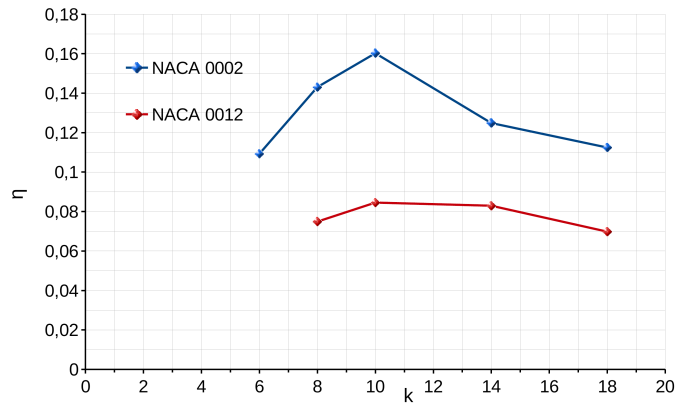


Figura 6.27: Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

La eficiencia propulsora η para las dos geometrías en función de la frecuencia reducida se grafica en la fig. 6.27. La misma se calcula mediante la ec. 2.21. La curva del perfil NACA 0002 posee un pico en $k = 10$ superior al que se logra con el perfil NACA 0012. Este último si bien tiene menor eficiencia, el decrecimiento de la misma no es tan abrupto como la del perfil delgado. Puede inferirse con seguridad que los valores de dichas curvas seguirán decayendo si se prolonga la frecuencia, más allá del rango estudiado.

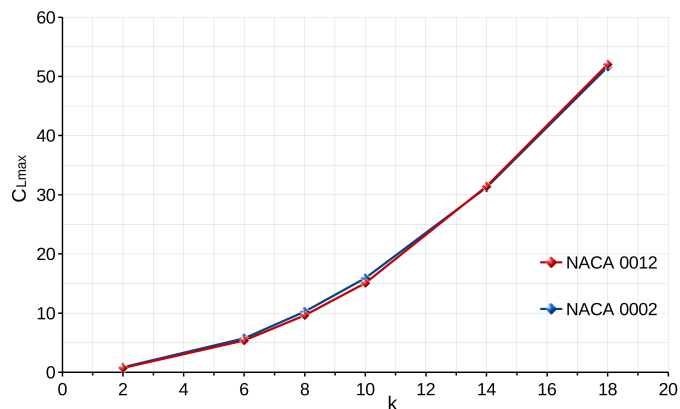


Figura 6.28: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

El coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo de *pitching* es similar en ambos perfiles al variar la frecuencia, fig. 6.28 y aumenta de manera no lineal, más bien exponencial.

Para la condición de mayor eficiencia se pueden comparar los parámetros aerodinámicos de relevancia. A diferencia de *heaving* no existe desprendimiento de flujo desde el borde de ataque, por ende no existe la gran influencia del LEV manifestada anteriormente. Luego, los picos de C_L son similares en ambos perfiles por lo que no se incluye el gráfico correspondiente.

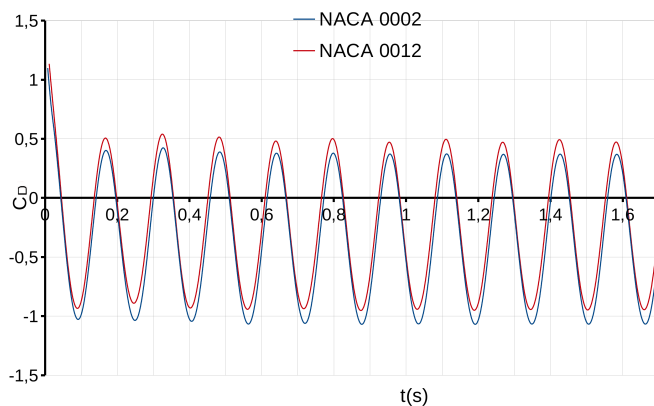


Figura 6.29: Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

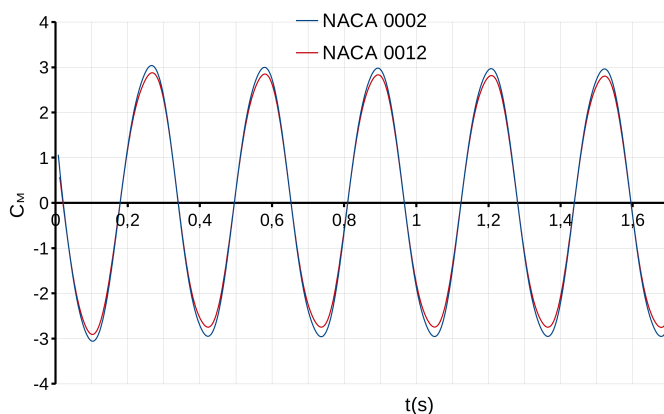


Figura 6.30: Comparación del coeficiente de momento en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

El comportamiento de la curva de C_D muestra que el valor medio más negativo (equivalente a la mayor propulsión), corresponde al perfil más delgado fig. 6.29. Además el coeficiente de momento puede verse en la fig. 6.30.

Los contornos de velocidad para el caso $k = 14$ y en un tiempo $t = 1,03s$ pueden verse en la fig. 6.31. Dicho valor de frecuencia es relativamente alto, ya que responde a una frecuencia $f_h = 4,5[1/s]$ y aún así puede observarse la ausencia de vórtices desprendidos desde el borde de ataque. En gran parte esto responde a que el número de Reynolds es muy bajo y mantiene el flujo adherido incluso hasta en perfiles delgados, permitiendo una convección “limpia” de

vórtices desde borde de fuga (TEV) hacia la estela, lo cual genera mejores valores de eficiencia.

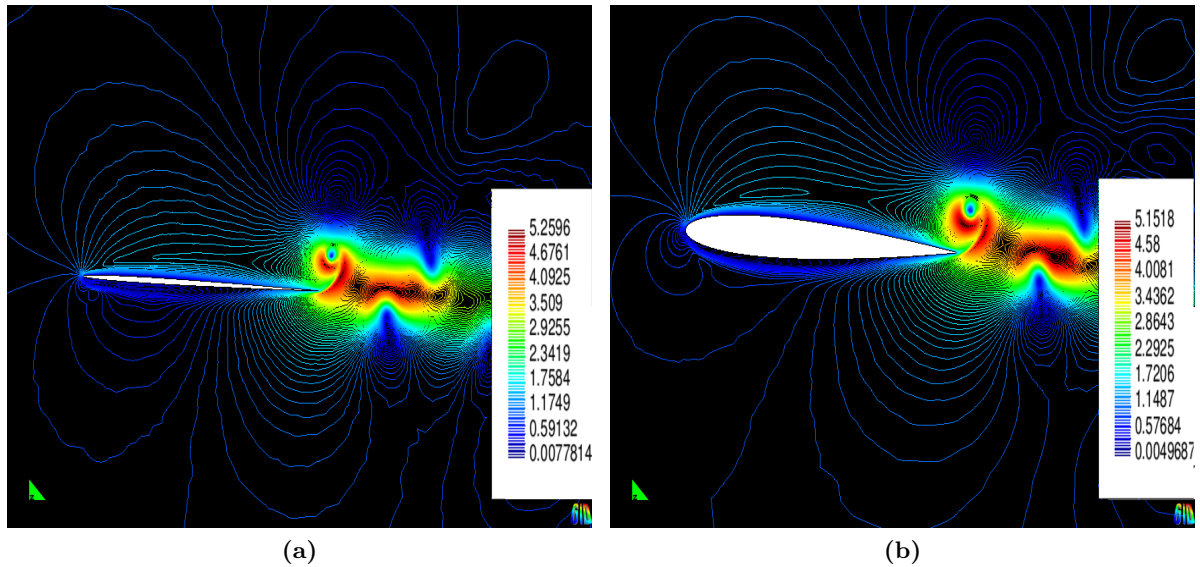


Figura 6.31: Contornos de velocidad y topología de la estela para perfiles NACA 0012 y NACA 0002 a $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $Re = 1100$ y $t = 1,03s$. (a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 0012.

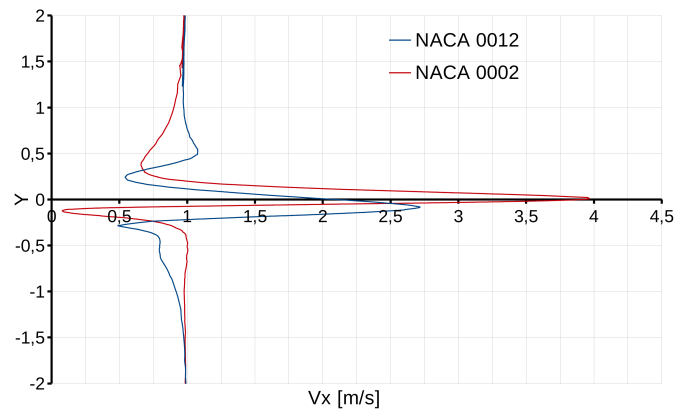


Figura 6.32: Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $0,5c$ desde el borde de fuga, para NACA 0002, 0012, a $Re = 1100$, $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $t = 1,03s$.

Perfiles de velocidad horizontal V_x sobre una posición de la estela son de utilidad para ratificar los resultados obtenidos, fig. 6.32. En el capítulo 2 se vió como es la topología de estela al inducir resistencia o propulsión por parte de un cuerpo sometido a movimiento inestacionario. En este caso se grafican los perfiles sobre una posición $0,5c$ detrás del borde de fuga para $k = 14$. Se puede observar que existe una diferencia considerable entre ambos perfiles, además de presentar las siguientes velocidades medias: para NACA 0002 $\bar{V}_x = 1,99[m/s]$ y NACA 0012 $\bar{V}_x = 1,625[m/s]$. Esta diferencia confirma que la propulsión que se obtiene con el perfil delgado

es mayor.

Otro escenario a plantear para ampliar el espectro de estudio, es observar que sucede si se toma un valor fijo de frecuencia reducida k y se varía la amplitud angular de movimiento α_a .

Se puede ver fig. 6.33, que si se disminuye la amplitud del ángulo de cabeceo, la producción de propulsión se transforma en resistencia. La transición a propulsión ocurre aproximadamente a una amplitud $\alpha_a = 2,9^\circ$ en ambos casos y luego el \bar{c}_t crece de manera exponencial.

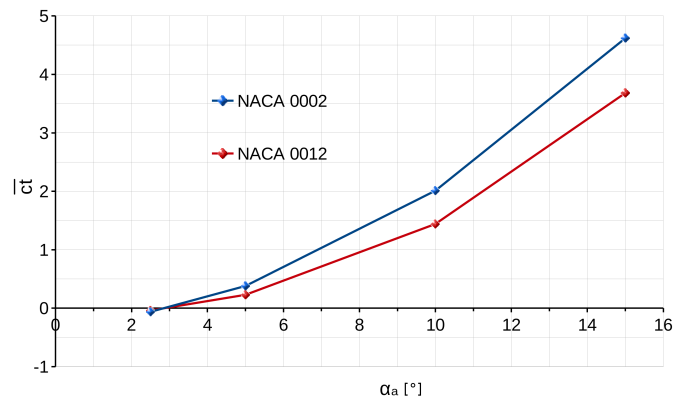


Figura 6.33: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$.

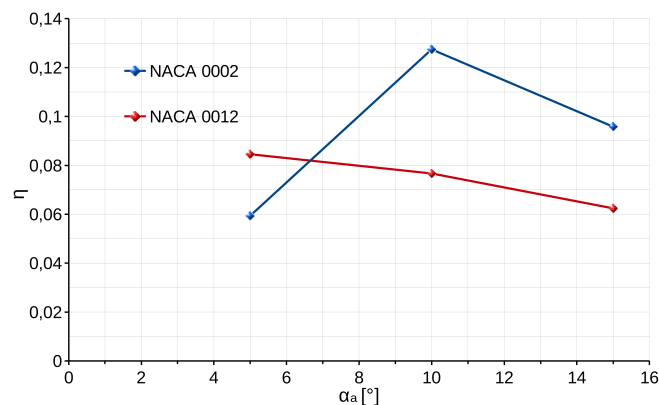


Figura 6.34: Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$.

La eficiencia propulsora η se muestra en la fig. 6.34. El mayor valor ocurre para una amplitud angular $\alpha_a = 10^\circ$ en el perfil más delgado. Para el perfil NACA 0012, la eficiencia conserva su máximo en $\alpha_a = 5^\circ$, al igual que en el caso anterior (fig. 6.27) y decae menos que en el perfil delgado.

En el coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} no se producen mayores diferencias entre ambos perfiles y su variación es exponencial con la amplitud angular de movimiento, fig. 6.35.

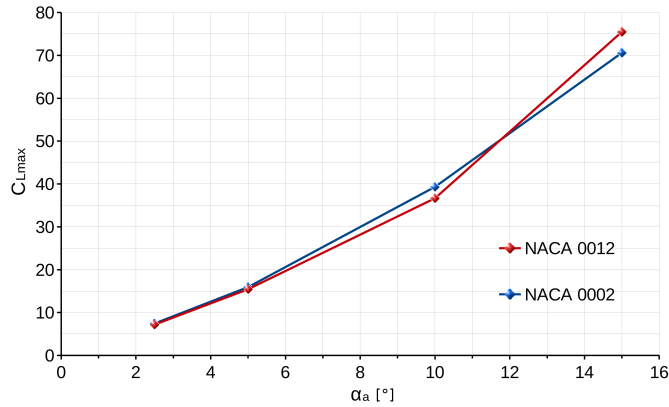


Figura 6.35: Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $Re = 1100$ y $k = 10$.

6.3.2 Efecto de la combadura

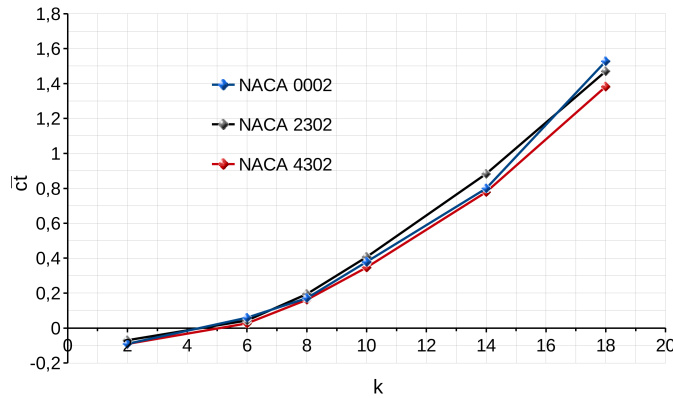


Figura 6.36: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$.

Se estudiará la influencia de la frecuencia reducida en el rango $2 < k < 18$, sobre tres perfiles NACA, con diferentes valores de combadura ubicadas al 30% de la cuerda (NACA 0002, 2302 y 4302), con la amplitud del movimiento de cabeceo igual a $\alpha_a = 5^\circ$ y a $Re = 1100$.

Nuevamente, el coeficiente de tracción \bar{c}_t aumenta de manera exponencial en los tres casos, fig. 6.36. La transición de resistencia a propulsión ocurre en $k = 4,5$ aproximadamente para NACA 0002 y 2302. Luego para el NACA 4302 en $k = 5$ aproximadamente. De todos modos no existe una gran diferencia entre el perfil NACA 0002 y el 2302. Los valores del perfil con mayor combadura NACA 4302 quedan ligeramente por debajo.

Los valores de eficiencia propulsora η son menores para el perfil NACA 4302 respecto al 2302 y este último es menor respecto al 0002, fig. 6.37. Puede afirmarse que el agregado de combadura empeora de alguna manera el factor η , pero no en gran medida como lo hace con la relación de espesor.

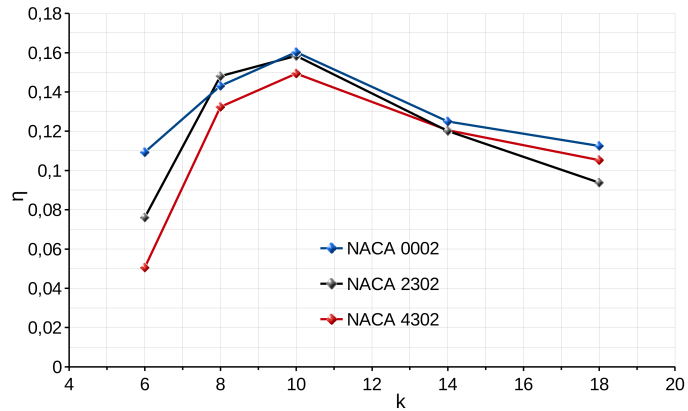


Figura 6.37: Comparación de eficiencias propulsoras η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$.

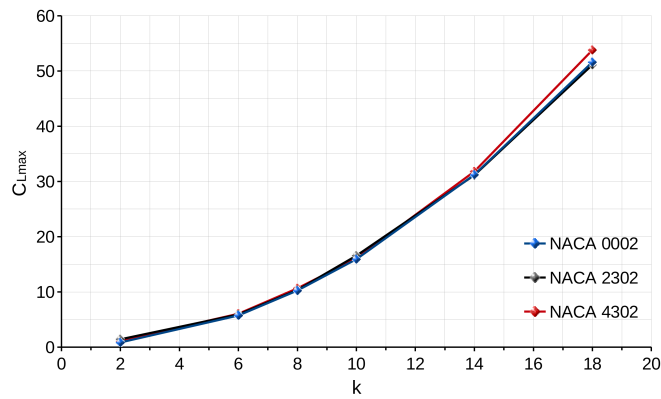


Figura 6.38: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$.

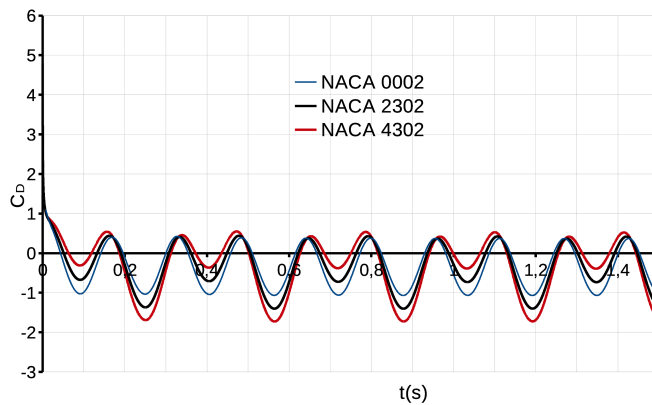


Figura 6.39: Comparación del coeficiente de resistencia C_D en función del tiempo, para NACA 0002, 2302 y 4302 a $k = 10$, $Re = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

En el coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} para cada ciclo de movimiento, prácticamente no existe diferencia alguna entre los perfiles, fig. 6.38.

La combadura influye sobre coeficiente de tracción eliminando la simetría, como puede verse en la fig. 6.39. Los perfiles combados muestran un pico más negativo y otro menos negativo separados por un ciclo de movimiento. El primer pico corresponde al fin de carrera a *cabrear*, donde el vórtice desprendido de borde de fuga (TEV) es más intenso, lo que provoca que se alcancen valores de mayor tracción o menor resistencia. El segundo pico corresponde al fin de carrera a *picar*, donde dicho vórtice es de menor intensidad, dejando como resultado una menor tracción o menor resistencia.

6.4 Movimiento vertical y de cabeceo combinado (*flapping*)

El siguiente escenario de interés, es producto del acoplamiento de los dos movimientos estudiados en las secciones previas. Se puede afirmar, que el *flapping* es el más representativo de alas batientes sumergidas en una corriente fluida.

Las principales variables involucradas son la frecuencia de cabeceo y de desplazamiento f_α y f_h , las amplitudes máximas α_a y h_a y el ángulo de fase existente entre ambos movimientos, φ . Por lo tanto las ecuaciones a las cuales responde esta sección son las ecs. 2.22, Sec. 2.2.5, (fig. 6.40).

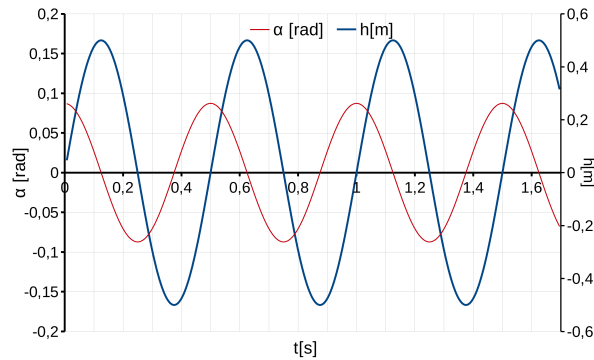


Figura 6.40: Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $\alpha_a = 0,08726[\text{rad}]$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 0,5[\text{m}]$.

El punto de pivot de los perfiles a analizar, se ubica al 25% de la cuerda.

6.4.1 Efecto de la amplitud de cabeceo o *pitching*

El primer análisis consiste en observar que ocurre con dos perfiles simétricos NACA 0004 y 0012 al variar la amplitud de cabeceo α_a en el rango $5^\circ < \alpha_a < 25^\circ$. Los parámetros de movimiento que se mantienen constantes son $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[\text{m}]$ y el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$. Además el número de Strouhal correspondiente a todo el estudio es $St = 0,3$ (Strouhal correspondiente a la mayor eficiencia propulsora obtenida en el movimiento *heaving*).

El coeficiente de tracción se mantiene positivo en todos los casos simulados, es decir generan-

do propulsión y no resistencia. En el perfil NACA 0012 el coeficiente de tracción $\bar{c}t$ crece hasta tener un máximo $\bar{c}t = 0,429$ a una amplitud de $\alpha_a = 15^\circ$ y luego decae. En el perfil más delgado se alcanza un máximo $\bar{c}t = 0,455$ a $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.41.

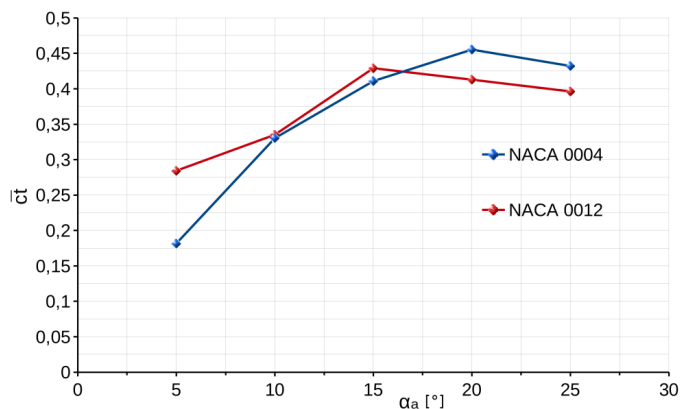


Figura 6.41: Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

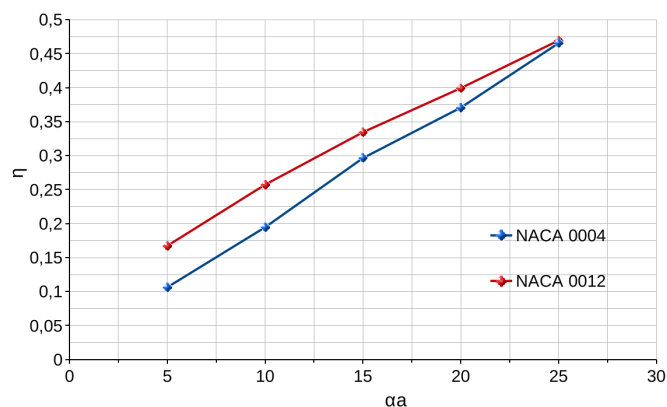


Figura 6.42: Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

La eficiencia propulsora η aumenta con la amplitud angular en todo el rango estudiado, fig. 6.42, debido a que aumenta el coeficiente de tracción y disminuye el coeficiente de sustentación, lo que implica una menor potencia a suministrar. Los valores de eficiencia obtenidos son significativamente mayores a los obtenidos en movimiento vertical o *heaving* para el caso de $St = 0,3$, donde se encontraba el máximo de los dos perfiles estudiados, fig. 6.6. Si se comparan las dos geometrías analizadas en esta sección, el NACA 0012 posee una mayor eficiencia en la producción de tracción que el NACA 0004. Además para ángulos mayores que $\alpha_a = 25^\circ$ se entiende que se produce una caída en dichos valores, [47].

El coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} de cada ciclo de movimiento decrece con el

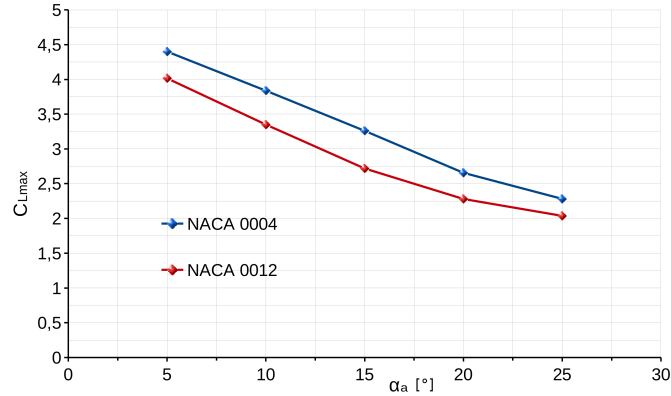


Figura 6.43: Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} para cada ciclo, en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

aumento de la amplitud de cabeceo debido que al mantener fija la amplitud y frecuencia del movimiento vertical, el ángulo de ataque relativo que ve el perfil respecto de la corriente libre disminuye con la amplitud de cabeceo (fig. 6.43). De la comparación entre ambos perfiles, se deduce que el perfil más delgado NACA 0004 tiene mayores picos de sustentación que el perfil más grueso NACA 0012.

En la fig. 6.44 se presenta una comparación interesante utilizando los contornos de velocidad horizontal V_x , las topologías de estela y *flujo cercano al cuerpo* con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$ a un tiempo $t = 9,03[s]$ de simulación. Dicha comparación convalida un poco lo que se decía antes sobre la influencia de la amplitud angular y su aporte al efecto propulsivo. La distancia de separación vertical de la calle de vórtices da una idea de este efecto y se ve como en las figs. 6.44b y 6.44d dicha distancia permanece mayor que en las figs. 6.44a y 6.44c.

El segundo escenario a plantear, es realizar el mismo análisis con dos perfiles NACA serie 4 con diferente valor de combadura, a efectos de caracterizar la influencia de la misma en función de la variable de estudio.

El coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t presenta una leve mejoría con el agregado de combadura y el máximo se ubica en la misma posición que el perfil simétrico $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.45. La eficiencia propulsora η también produce un aumento respecto al perfil sin combadura como puede verse en la fig.6.46. El coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en cada ciclo de movimiento permanece casi idéntico en ambos perfiles, de modo que no vale la pena entrar en mayores detalles. Sí es relevante mencionar, que el efecto de la combadura se ve opacado por la cinemática del flujo sobre el perfil y por el LEV desprendido y sobre todo cuanto mayor son las amplitudes del movimiento.

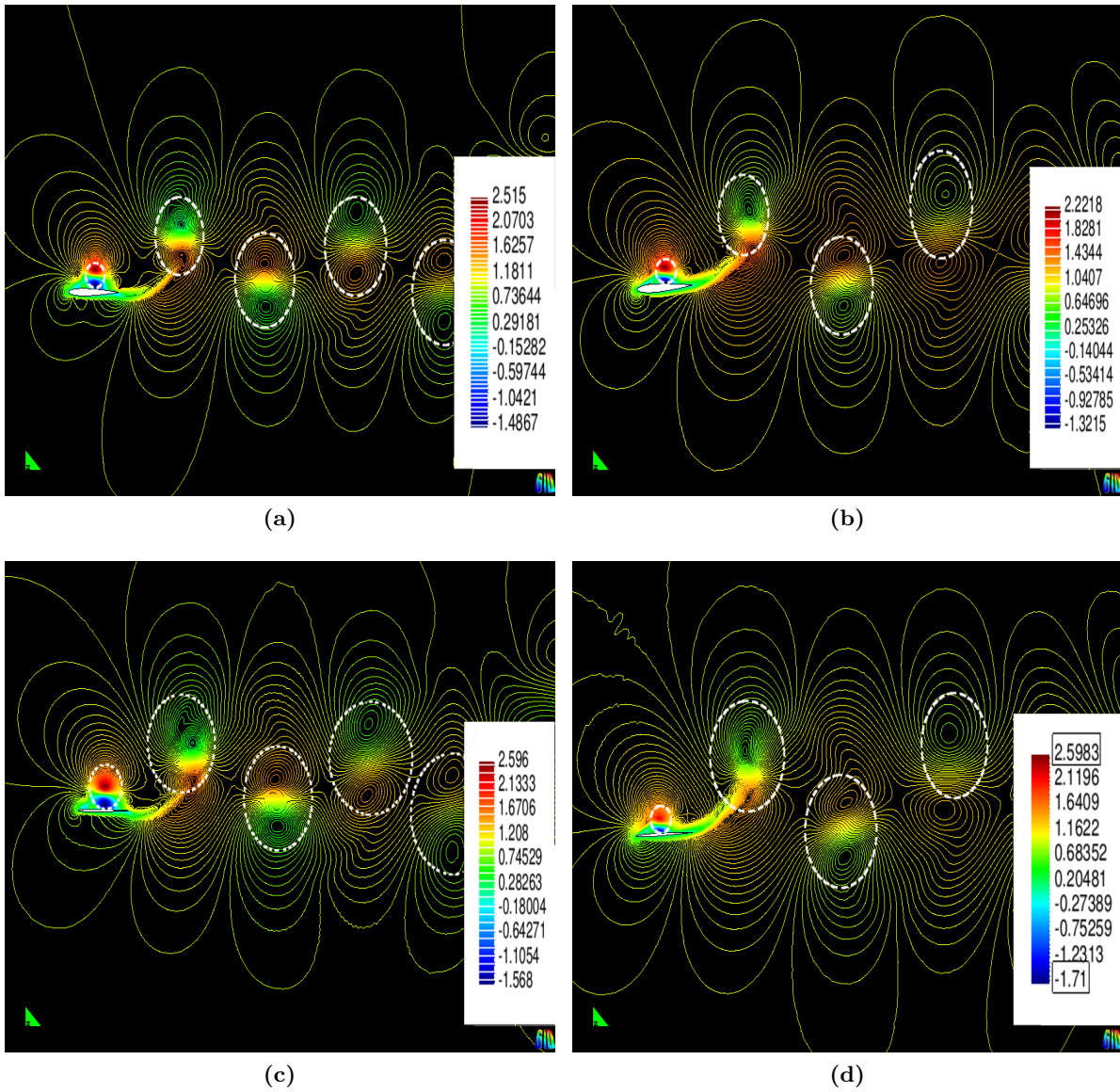


Figura 6.44: Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 5^\circ$, (b) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 15^\circ$.(c) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 5^\circ$.(d) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 20^\circ$.

6.4.2 Efecto de la amplitud de desplazamiento vertical o *heaving*

Otra variante que se puede estudiar, es observar que ocurre si se varía la amplitud del movimiento vertical h_a con los demás parámetros constantes. El rango de variación es $0,025 < h_a < 0,5$ con $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$. Además, dicho rango de estudio es equivalente a $0,05 < St < 1$ si se describe en función del número de Strouhal.

El coeficiente de tracción \bar{c}_t varía en forma exponencial respecto a la amplitud h_a y en todos los casos de la región de estudio, existe propulsión. El NACA 0004 se encuentra por

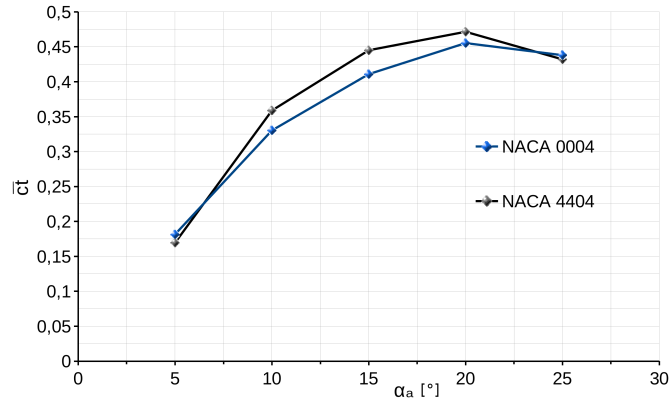


Figura 6.45: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

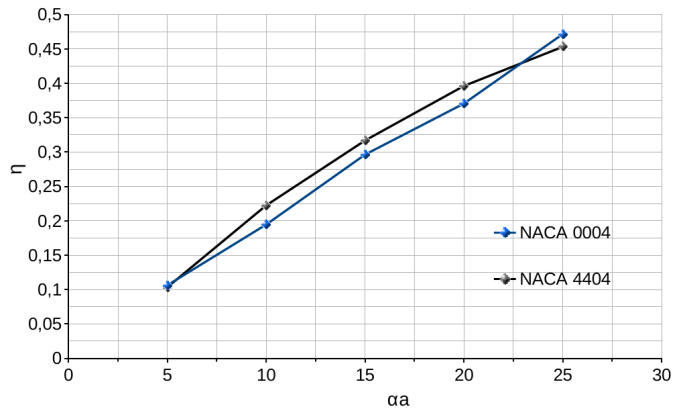


Figura 6.46: Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

encima del NACA 0012 pero no con diferencias de notoriedad, fig. 6.47.

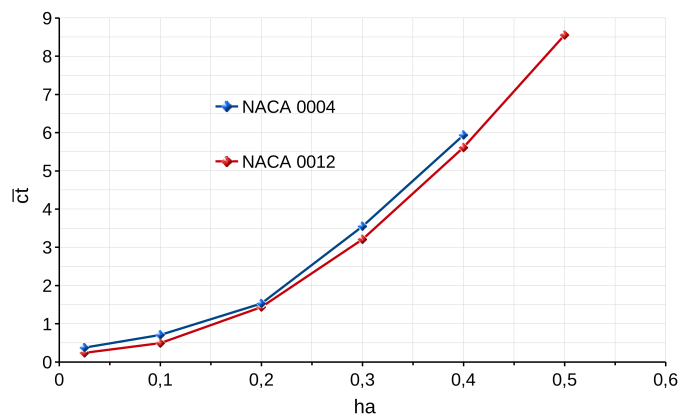


Figura 6.47: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

La eficiencia propulsora presenta un máximo $\eta = 0,33$ en $h_a = 0,1$ para el NACA 0004 y un máximo $\eta = 0,23$ en $h_a = 0,2$ para el NACA 0012. Luego decrecen con un gradiente mayor en el perfil más delgado, fig. 6.48. El número de Strouhal correspondiente a dichos máximos es $St = 0,2$ y $St = 0,4$ respectivamente.

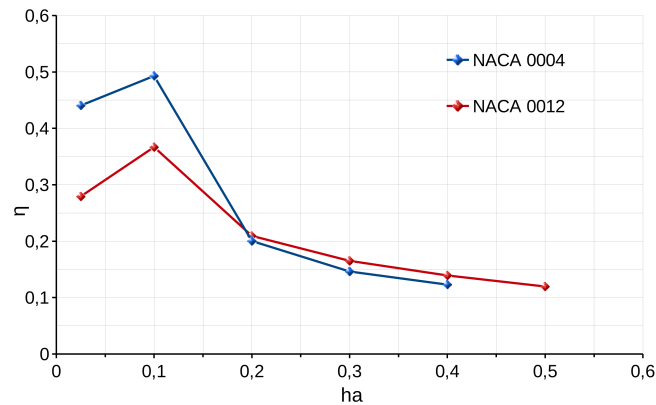


Figura 6.48: Comparación de las eficiencias propulsoras η en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

El coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en cada ciclo de movimiento crece de manera exponencial con la amplitud h_a . Además, existe una leve caída en el mismo de $h_a = 0,025$ a $h_a = 0,1$, fig 6.49.

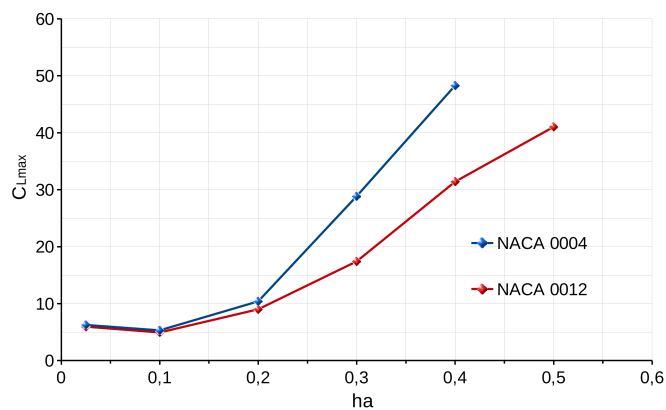


Figura 6.49: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

También se analizaron algunos casos de un perfil con valor positivo de combadura y los resultados se muestran a continuación.

Los valores del coeficiente de tracción $\bar{c}t$ del perfil NACA 4404 permanecen por debajo de los valores del perfil NACA 0004, fig. 6.50. La eficiencia propulsora, fig. 6.51 también es mayor sobre el perfil simétrico y se encuentra en $h_a = 0,1$. El coeficiente de sustentación máximo

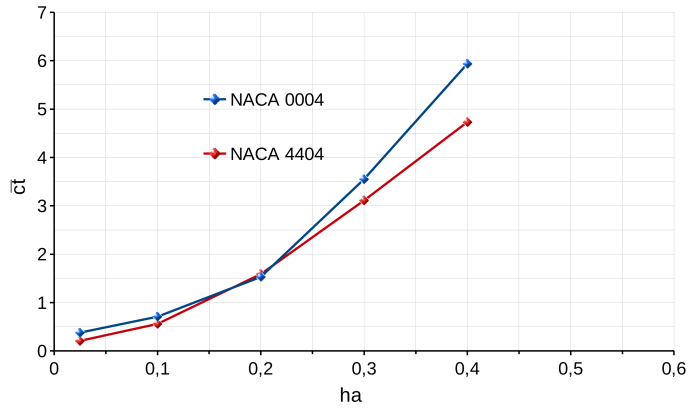


Figura 6.50: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

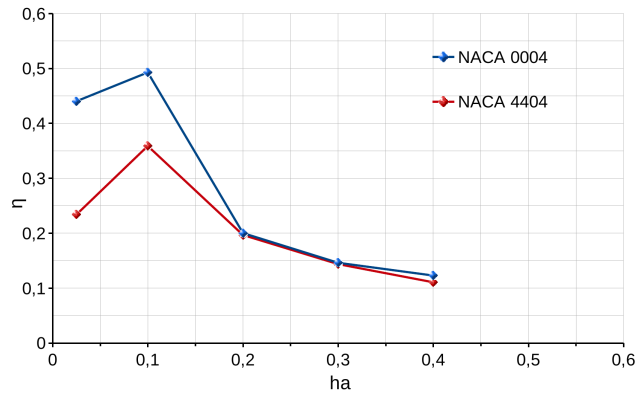


Figura 6.51: Comparación de eficiencias propulsoras en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

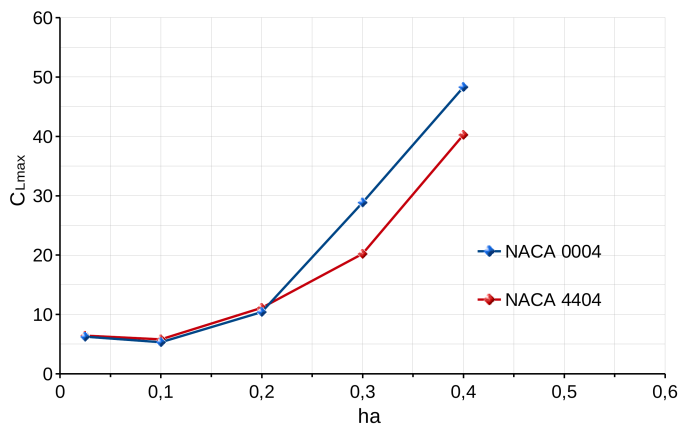


Figura 6.52: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

C_{Lmax} en cada ciclo de movimiento, fig. 6.52 permanece similar en ambos perfiles a bajas amplitudes de movimiento y luego aumenta para el perfil NACA 0004.

6.4.3 Efecto de la frecuencia

En esta sección se analiza la variación de la frecuencia de movimiento vertical y de cabeceo $f_h; f_\alpha$ con amplitudes de movimiento (h_a, α_a) y ángulo de fase fijos. El objetivo es observar los efectos presentes a altas frecuencias de movimiento, aunque se presupone que los resultados a obtener, pueden llegar a ser imprecisos debido a la complejidad del flujo que se desarrolla sobre los contornos del cuerpo. Cuando se trabaja con frecuencias de gran magnitud, los desprendimientos desde ambos bordes del perfil, se transforman en fenómenos con comportamientos de difícil captura. Por ende con los recursos disponibles para este trabajo, cabe esperar algunas limitaciones.

Se presenta el efecto de la variación de la frecuencia en un rango de $0,5 < f_h = f_\alpha < 6$, que equivale a un rango de frecuencia reducida $1,570 < k < 18,849$, con la amplitud angular igual a $\alpha_a = 20^\circ$ y la amplitud de desplazamiento vertical igual a $h_a = 0,5[m]$ sobre dos perfiles NACA simétricos (0004 y 0012). Además la fase entre el movimiento vertical y el movimiento de cabeceo es igual a $\varphi = \pi/2$. El análisis se realiza a un número de Reynolds $Re = 1100$.

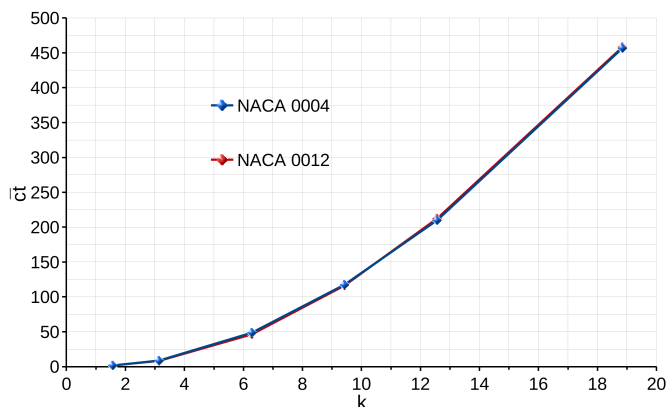


Figura 6.53: Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

La fig. 6.53 muestra que no se presentan diferencias significativas entre ambos perfiles en el coeficiente de tracción $\bar{c}t$ y su variación con la frecuencia reducida k no es lineal.

Dentro del rango estudiado, sólo existe la generación de propulsión y los mayores valores calculados se encuentran en las menores frecuencias, más precisamente a $k = 1,57$ ($St = 0,5$). Si se comparan ambos perfiles, se aprecia una mayor eficiencia en el NACA 0012, al menos hasta una frecuencia $k = 9,42$, fig. 6.54.

El coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en cada ciclo de movimiento tiene un comportamiento no lineal en ambas geometrías, tal como ocurre con el coeficiente de tracción $\bar{c}t$,

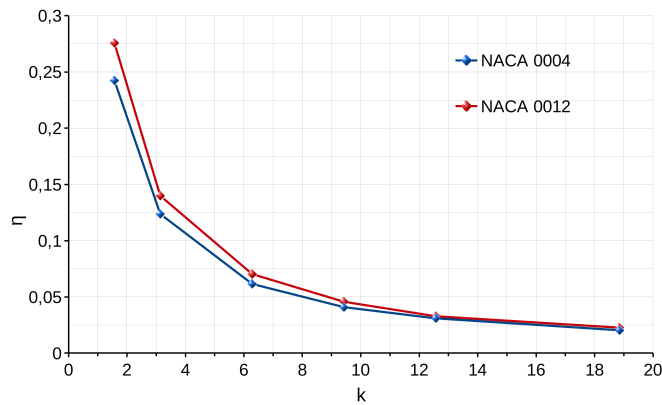


Figura 6.54: Comparación de eficiencias propulsoras en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

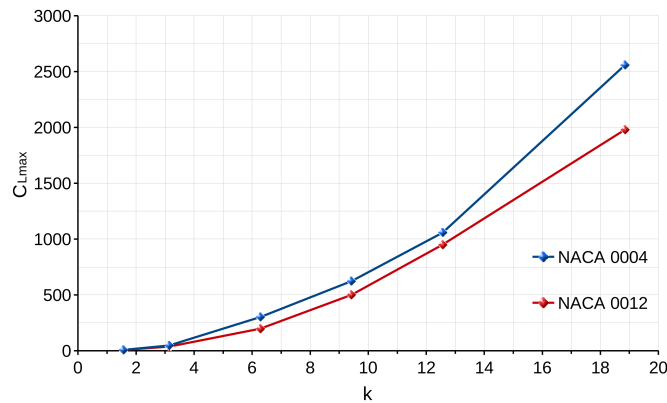


Figura 6.55: Comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $Re = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

fig. 6.55. Se reitera que para las frecuencias más altas, no se puede saber a ciencia cierta si el mayor coeficiente obtenido es un máximo, ya que por las irregularidades presentes en el flujo, el tiempo de cómputo es tan elevado que resulta impracticable lograr un estado cuasi estacionario. No obstante se puede observar que los mayores valores se encuentran en el perfil más delgado NACA 0004.

Otro fenómeno que está presente, es el vórtice de borde de ataque (LEV) cuyo efecto no sería tan impactante como en el movimiento *heaving*. La inclusión del ángulo de incidencia en el movimiento, hace que la convección del LEV hacia la estela se realice con mayor facilidad permitiendo alcanzar mejores prestaciones propulsoras, sobre todo en las frecuencias más bajas. Luego en las frecuencias más altas, el LEV permanece más tiempo próximo a la nariz del perfil, impidiendo el desarrollo limpio del flujo hacia el borde de fuga, lo cual tiende a perjudicar la eficiencia. De todos modos, los bajos valores de η no sólo se deben a las frecuencias altas, si no que también influyen los considerables valores de C_L que se obtienen y que de alguna manera,

la potencia suministrada debe compensar.

6.4.4 Variación de la amplitud de desplazamiento vertical o *heaving* y su frecuencia con el número de Strouhal constante ($St = 0,3$)

Un caso complementario a los dos anteriores es variar ambos parámetros (frecuencia y amplitud de movimiento vertical) simultáneamente, de tal manera que el número de Strouhal se mantenga constante $St = 0,3$ (ec. 2.8). El rango de variación para la frecuencia es $0,1666 < f_h = f_\alpha < 1,5$ y para la amplitud vertical $0,1 < h_a < 0,9$. Luego los parámetros que se mantienen fijos son $\varphi = \pi/2$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $Re = 1100$.

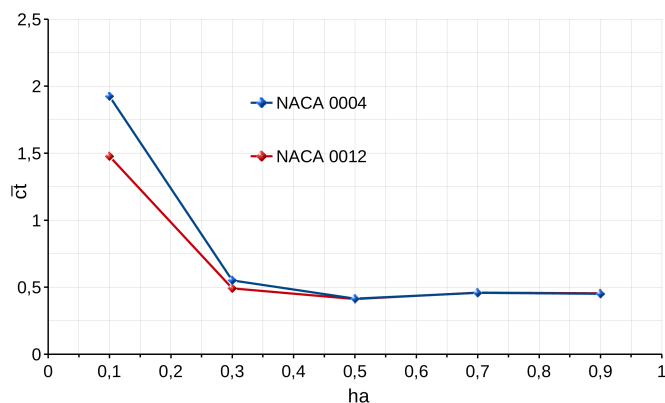


Figura 6.56: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical con $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

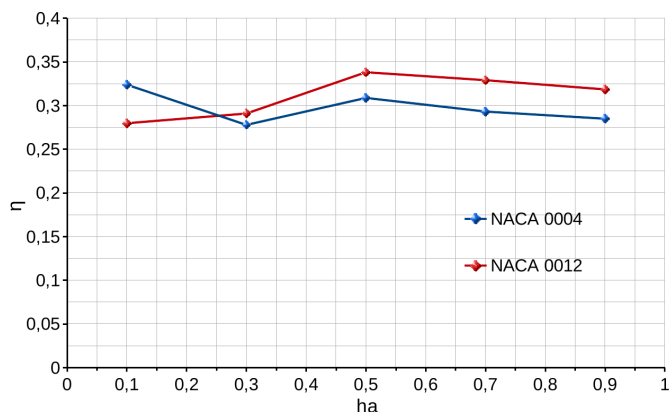


Figura 6.57: Comparación de la eficiencia propulsora η en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical con $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

El coeficiente de tracción \bar{c}_t presenta el máximo a bajas amplitudes de movimiento vertical y no existe en el rango estudiado algún caso donde se produzca resistencia. Lo interesante es

la caída abrupta de propulsión entre $0,1 < h_a < 0,3$ ó $0,5 < f_h < 1,5$, para luego mantenerse aproximadamente constante, fig. 6.56.

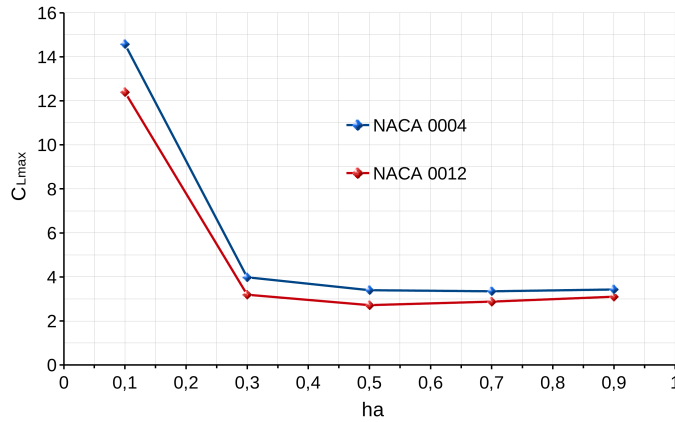


Figura 6.58: Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud h_a y frecuencia f_h vertical para NACA 0004 y 0012 con $St = 0,3$, $f_\alpha = f_h$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

La eficiencia propulsora η presenta el valor máximo en $h_a = 0,5$ en el perfil NACA 0012. No existe demasiada diferencia con respecto a los demás valores, permaneciendo más bien constantes a partir de dicho máximo, fig. 6.57. Para el caso del perfil NACA 0004, los valores de eficiencia también permanecen aproximadamente constantes iguales a $\eta = 0,3$.

La curva del coeficiente de sustentación máximo C_{Lmax} para cada ciclo, fig. 6.58, tiene un comportamiento similar a la del coeficiente de tracción, donde se manifiestan grandes diferencias a bajas amplitudes de movimiento vertical.

Con el objetivo de profundizar un poco más sobre los resultados, es interesante observar que ocurre con el flujo en algunos casos, fig. 6.59. Para ello se comparan a ambos perfiles con amplitudes $h_a = 0,1$ y $h_a = 0,5$. En los casos de mayor frecuencia y menor amplitud, (figs. 6.59a y 6.59c), la velocidad presente en la estela es mayor, lo que indica mayor propulsión. Además, en dichos casos casi no existe desprendimiento de flujo desde el borde de ataque (LEV), al contrario de lo que ocurre con el caso de amplitud $h_a = 0,5$ (figs. 6.59b y 6.59d), donde la intensidad de dicho vórtice es mucho mayor.

6.5 Movimiento vertical y de cabeceo combinado sin la presencia de corriente libre (*hovering*)

En el Cap. 2 se detallaron las características de este tipo de vuelo desarrollado por insectos y distintas aves. Además es factible de reproducir en microvehículos aéreos.

Como ya se mencionara, en la naturaleza se encuentran dos tipos de vuelos *hovering*, el que permite mantener al cuerpo del animal suspendido en una posición, o bien aquel que permite

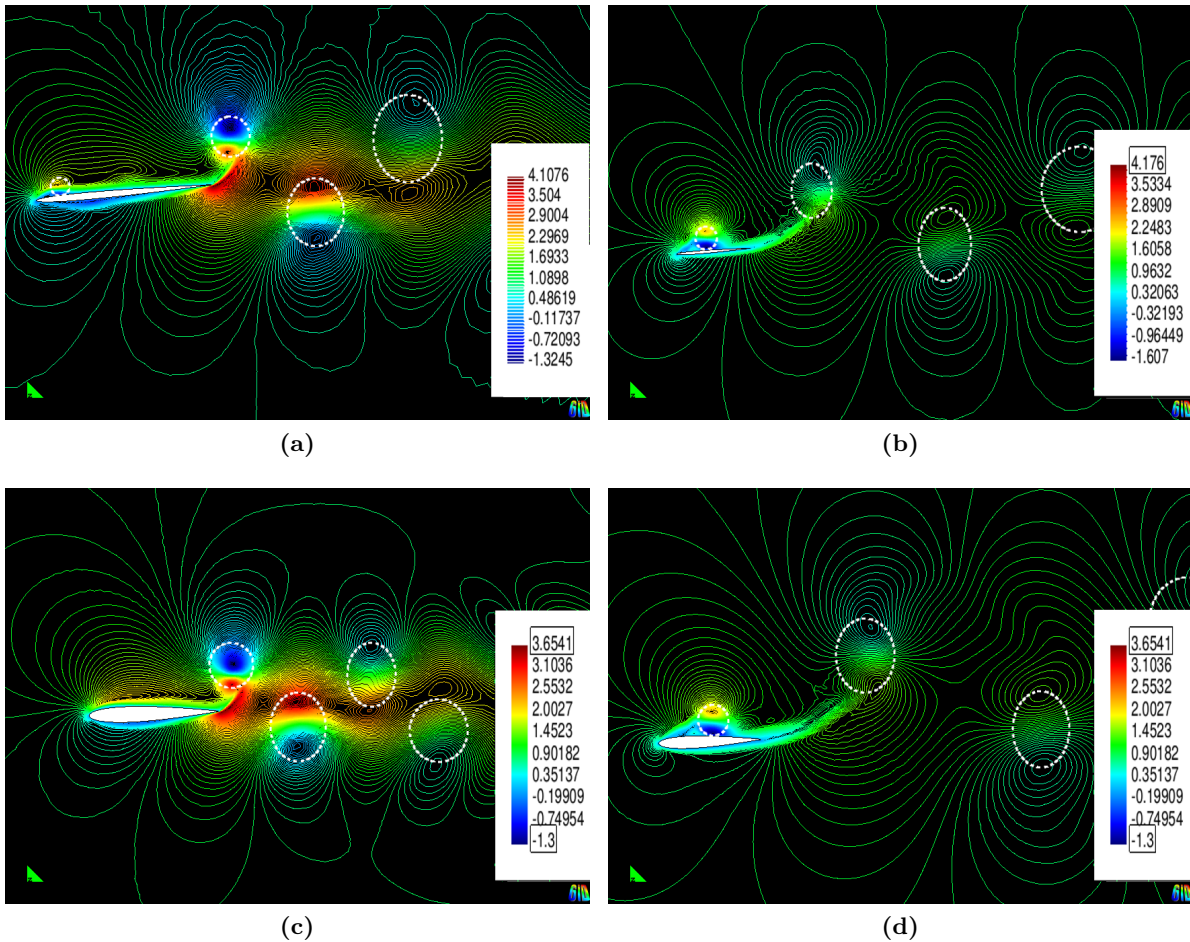


Figura 6.59: Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $St = 0,3$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_h = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$ (b) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.(c) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_h = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$.(d) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.

realizar una maniobra a partir de dicha posición. Entre ellos cabe señalar el vuelo *hovering* simétrico, específico de insectos y aves pequeñas¹ y el vuelo *hovering* asimétrico encontrado en insectos de dimensiones considerables y en aves de mediano y gran tamaño.

Los mecanismos de mayor relevancia que se detectan al intentar analizar el vuelo *hovering* son:

- El aprovechamiento de la pérdida dinámica y la subsecuente generación de sustentación adicional.
- La captura de la estela de la carrera anterior, es el mecanismo por el cual se puede lograr un incremento de la sustentación media. Los vórtices desprendidos antes de difundirse con

¹El colibrí es el ave por excelencia capaz de ejercer el vuelo *hovering* simétrico, con el fin de mantener su cuerpo suspendido en una posición fija en el espacio por un tiempo considerable.

el tiempo, pueden ser capturados por el borde de ataque del perfil y generar un cambio de geometría efectiva. Este efecto no es tan simple de realizar, ya que debe tener una sincronización adecuada entre la captura y desprendimiento de vórtices y el movimiento inducido en la geometría.

- El giro del perfil durante los finales de carrera (*upstroke* y *downstroke*) también induce un incremento de sustentación. Puede interpretarse como un efecto magnus sobre un cilindro giratorio en una corriente fluida.

El dominio de análisis y las condiciones de borde utilizadas son similares a las utilizadas en la Sec. 4.7.3.

6.5.1 *Hovering* simétrico

Este tipo de vuelo es desarrollado por insectos y aves pequeñas con el sólo fin de generar sustentación sin desplazamiento. La potencia que demanda mantener este tipo de vuelo en relación al tamaño y masa del cuerpo, no permite que aves de gran tamaño sean capaces de sostener dicho vuelo por un tiempo muy prolongado.

El dominio representativo del problema puede verse en la fig. 6.60, con $c = 1$ como la cuerda del perfil.

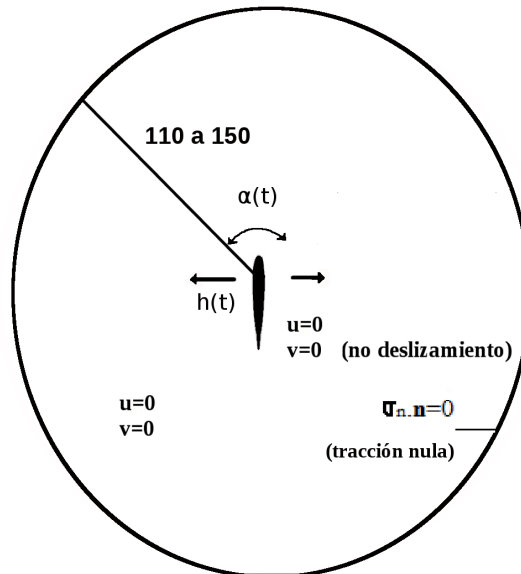


Figura 6.60: Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo *hovering* simétrico.

El primer estudio radica en determinar el comportamiento del flujo y los coeficientes aerodinámicos tomando como variable el número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 con una cinemática sinusoidal similar a la que manifiesta la fig. 6.40. El rango variable de número de Reynolds es $100 < Re < 1000$, el cual se determina mediante la ec. 2.7, siendo el parámetro

variable la viscosidad dinámica μ . Además se fija el valor de frecuencia reducida $k = 1/2$ (ec. 2.11), el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$ y las frecuencias $f_\alpha = 0,75$ y $f_h = 0,75$. El punto de pivot para la rotación de los perfiles a analizar se ubica al 25 % de la cuerda.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds para dos amplitudes angulares $\alpha_a = 10^\circ$ y $\alpha_a = 20^\circ$ se presenta en la fig. 6.61.

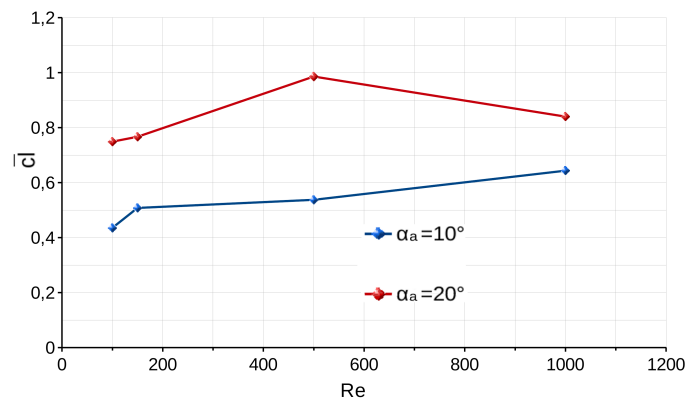


Figura 6.61: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática sinusoidal.

Si se compara la variación de cada ángulo con el número de Reynolds Re , se observa que no presentan un cambio importante del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l , más bien permanecen dentro de un rango estrecho. Luego, con el aumento de la amplitud desde $\alpha_a = 10^\circ$ a $\alpha_a = 20^\circ$, se consigue un considerable aumento de \bar{c}_l .

En definitiva, el efecto propulsivo que se tenía en los casos anteriores con presencia de corriente libre, es el mismo que se presenta en esta cinemática, sólo que se transforma en sustentación ya que es el objetivo del vuelo *hovering*. La convección del flujo hacia la estela se torna ahora más compleja, ya que no se cuenta con la corriente libre que lo facilite. Este fenómeno se tratará más adelante.

La eficiencia propulsora η (en este caso de sustentación) se presenta en la fig. 6.62, en la que se mantiene aproximadamente constante, además con $\alpha_a = 20^\circ$ se consiguen mayores valores que con $\alpha_a = 10^\circ$.

Para una mejor comprensión del vuelo *hovering*, se grafica una secuencia en el tiempo, de la simulación realizada a número de Reynolds $Re = 150$ y $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.63. Este análisis puntual también puede ser complementado con la fig. 6.64, donde cada pico de la curva de sustentación a partir del tiempo $t = 0,6[s]$ hasta $t = 3,34[s]$, se corresponde con la secuencia de la fig. 6.63.

En la fig. 6.63a se observa que el perfil se encuentra en la carrera hacia la izquierda luego de haber partido de una posición central y haber recorrido media carrera hacia la derecha y media carrera hacia la izquierda. El tiempo correspondiente a dicha figura es $t = 0,6[s]$ donde el perfil

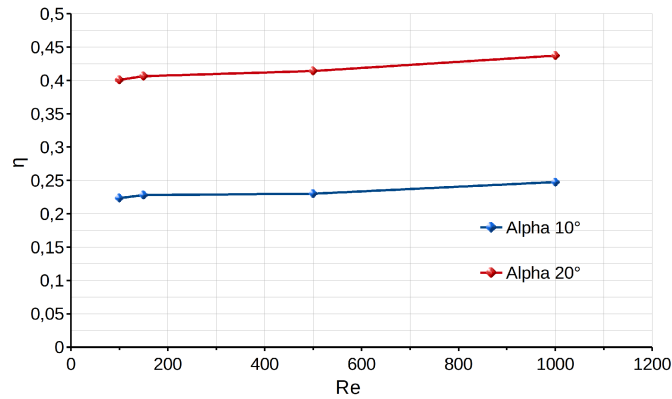


Figura 6.62: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática sinusoidal.

alcanza un pico de sustentación. En el flujo pueden verse los dos vórtices desprendidos desde el borde de fuga y desde el borde de ataque. Es de hacer notar, que los vórtices de arranque ya han sido capturados por el flujo circundante al cuerpo y trasladados a la estela, en la zona derecha de la figura. Posteriormente, el perfil llega al final de la carrera (fig. 6.63b, $t = 0,92[s]$). Dos vórtices son desprendidos desde el cuerpo y quedan suspendidos en el medio fluido. A esta posición le corresponde el pico negativo del coeficiente de sustentación C_L .

En la siguiente carrera hacia la derecha $t = 1,20[s]$, fig. 6.63c, el perfil captura primero el vórtice desprendido de borde de ataque (LEV_C) y posteriormente captura al vórtice desprendido de borde de fuga (TEV_C), de la carrera anterior. A su vez genera otro vórtice (LEV_N) desprendido desde el borde de fuga. Al presente instante le corresponde un pico positivo de sustentación.

La carrera hacia la derecha llega a su final en un tiempo $t = 1,64[s]$, fig. 6.63d. Se captura el de la estela y a su vez se generan dos grandes vórtices a la izquierda de la geometría del perfil. En esta posición, el pico de sustentación es negativo.

Nuevamente se emprende la carrera hacia la izquierda, $t = 2,00[s]$, fig. 6.63e, en la que los vórtices o estela creada en movimientos pasados se convectan hacia el borde de fuga del perfil, dejando una zona favorable sobre el intradós temporal para que se genere una zona de alta presión. Además, de manera simultánea se genera un vórtice LEV que permite obtener bajos valores de presión sobre el extradós momentáneo, lo que resulta en un pico mayor al que se obtenía en la carrera hacia la derecha, fig. 6.64. Al final de esta carrera y en la siguiente hacia la derecha figs. 6.63f y 6.63g ya existe una estela fuera del plano de movimiento que se difunde en el medio fluido y por ende el perfil encuentra un flujo sin alteraciones, que resulta en un menor pico de sustentación a $t = 2,58[s]$.

Por último, en la carrera hacia la izquierda $t = 3,34[s]$, fig. 6.63h, existe un nuevo convectado de vórtices LEV y TEV, que generan un nuevo pico máximo de sustentación.

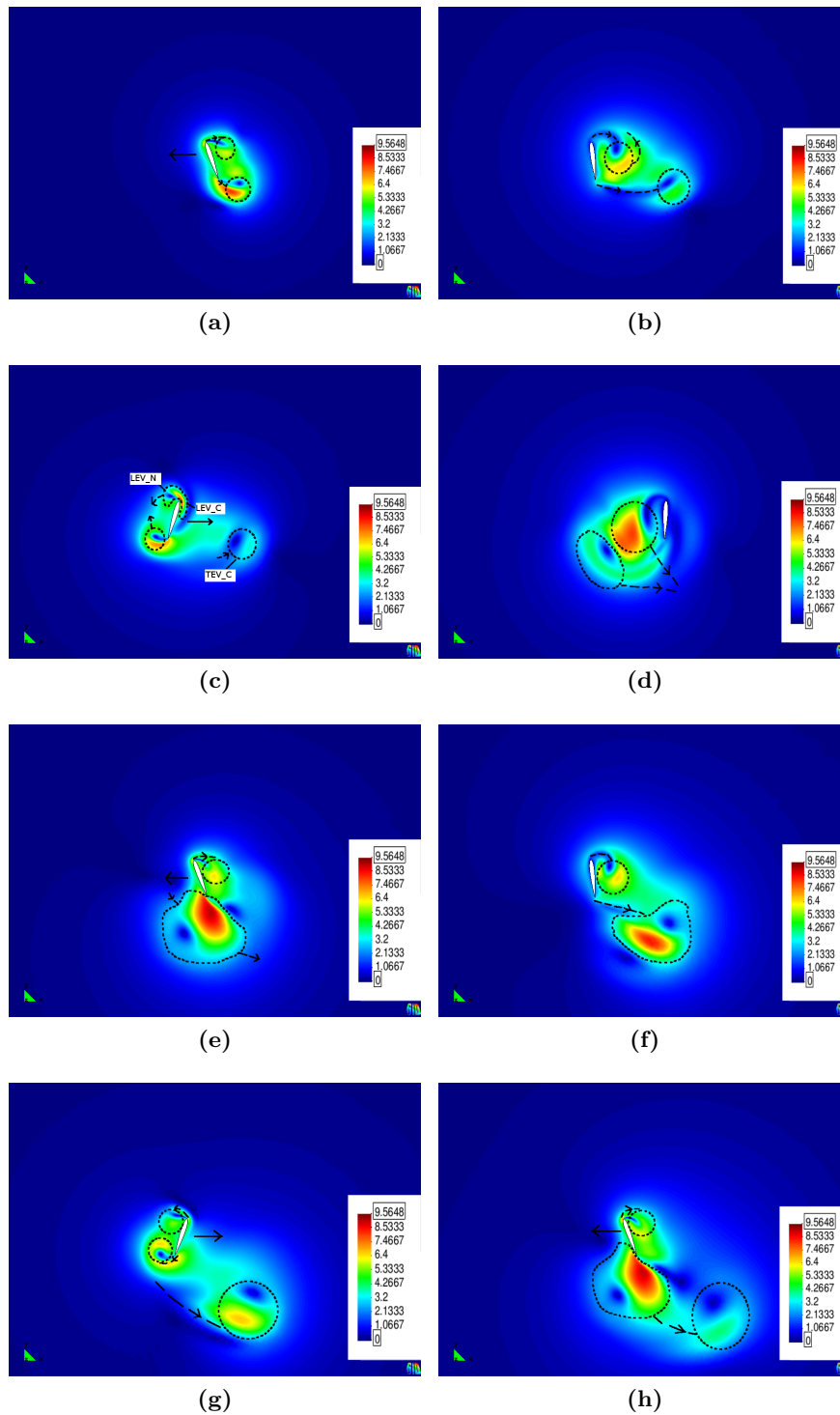


Figura 6.63: Contornos de velocidad para la visualización de topología de estela en NACA 0012 con $\alpha_a = 20^\circ$, $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 150$. (a) $t = 0,60[s]$. (b) $t = 0,92[s]$. (c) $t = 1,20[s]$. (d) $t = 1,64[s]$. (e) $t = 2,00[s]$. (f) $t = 2,26[s]$. (g) $t = 2,58[s]$. (h) $t = 3,34[s]$.

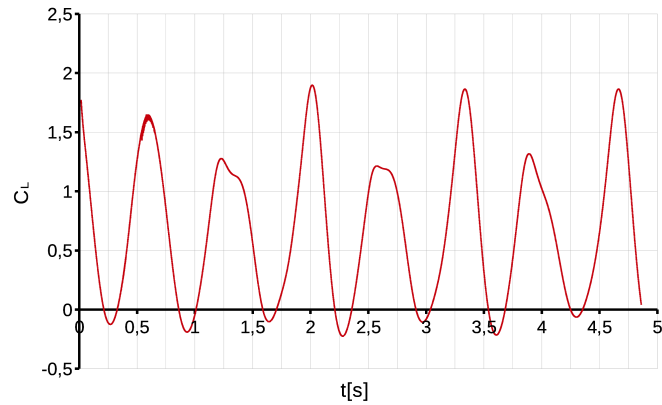


Figura 6.64: Coeficiente de sustentación C_L en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $k = 1/2$ y cinemática sinusoidal.

El comportamiento del flujo para números de $Re = 100$ y $Re = 500$, es similar al caso planteado. Para $Re = 1000$ existe una pequeña diferencia en la topología debido a la difusión más lenta de vórtices y estela, con un comportamiento de manera más irregular.

En el vuelo de insectos se encuentran cinemáticas diferentes a las planteadas anteriormente [7], [113],[77] por lo cual, es de interés realizar un análisis con una combinación diferente de movimientos periódicos. En este trabajo se estudia una cinemática que responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$ y una onda de tipo escalón para el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$, fig. 6.65. Las ecuaciones correspondientes a dichas curvas se escriben a continuación y se las denominará como cinemática alternativa:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{h_a}{\sin^{-1}(0,8)} \sin^{-1} (0,8 \sin(2\pi f_h t)) \\ \alpha(t) &= \frac{\alpha_a}{\tanh^{-1}(3)} \tanh^{-1} (3 \sin(2\pi f_\alpha t + \varphi)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para la amplitud $\alpha_a = 10^\circ$ tiene un comportamiento similar a la cinemática sinusoidal. En la amplitud $\alpha_a = 20^\circ$, \bar{c}_l se mantiene constante aproximadamente igual a $\bar{c}_l = 0,78$, fig. 6.66.

La eficiencia propulsora η (fig. 6.67) se incrementa respecto a los valores obtenidos en la cinemática sinusoidal en función del número de Reynolds. Esto indica que se necesita suministrar menos potencia para conseguir el mismo coeficiente de sustentación respecto de una cinemática sinusoidal.

Finalmente, se comparan las curvas de sustentación correspondientes a las dos cinemáticas estudiadas para el caso de $\alpha_a = 20^\circ$ y $Re = 150$, fig. 6.68.

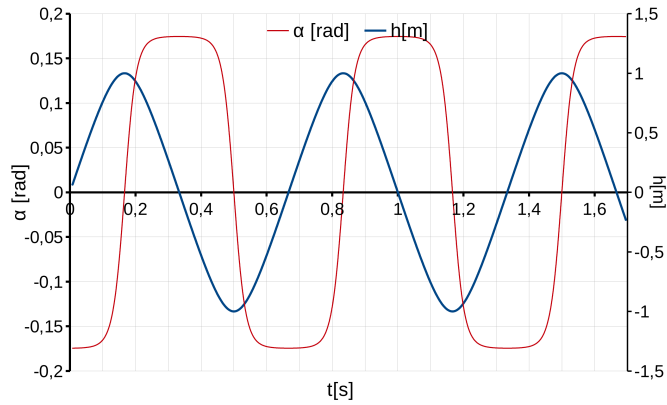


Figura 6.65: Movimiento combinado alternativo. Con $f_\alpha = 0,75$, $f_h = 0,75$, $\alpha_a = 0,1745[rad] = 10^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 1[m]$.

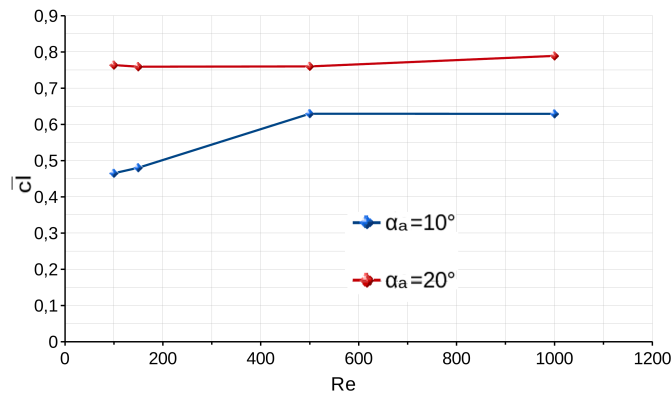


Figura 6.66: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática alternativa.

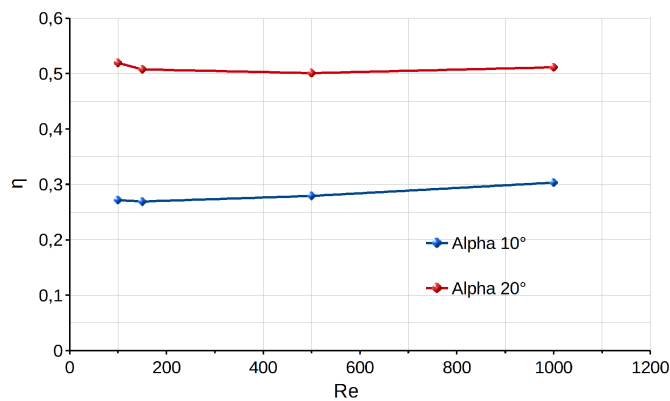


Figura 6.67: Comparación de la eficiencia propulsora η en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y cinemática alternativa.

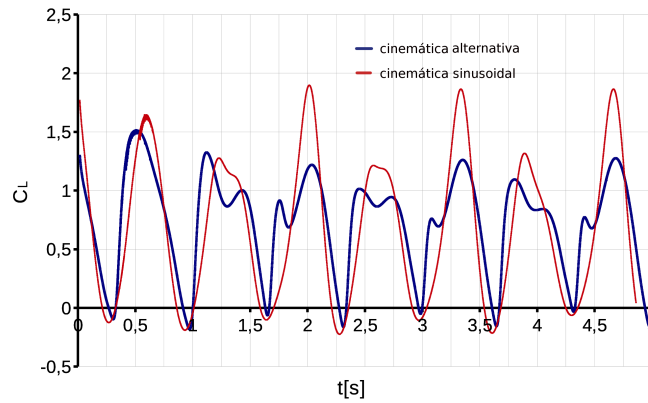


Figura 6.68: Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico para dos cinemáticas (sinusoidal y alternativa) a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$.

6.5.2 *Hovering* asimétrico

Este tipo de vuelo se observa comunmente en aves al realizar una aproximación a la superficie donde va a posarse. El objetivo es mantener el vuelo suspendido en una posición por unos segundos, para luego asentarse de manera suave.

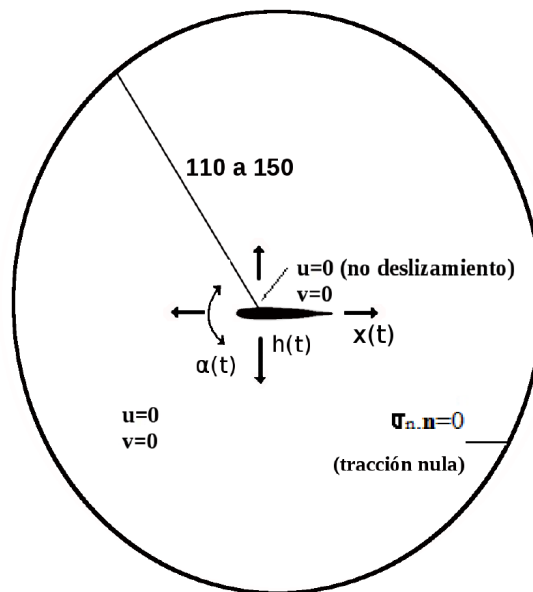


Figura 6.69: Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo *hovering* asimétrico.

El desarrollo completo de este fenómeno se da en tres dimensiones como se vio en el Cap. 2. De todos modos resulta interesante el planteo bidimensional, puesto que permite observar el movimiento del flujo de manera simple.

El dominio representativo del problema puede verse en la fig. 6.69, con $c = 1$ como la cuerda

del perfil.

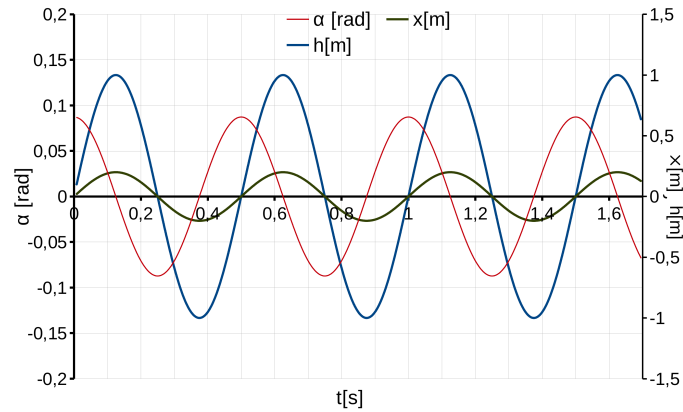


Figura 6.70: Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $f_x = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $h_a = 0,5[m]$ y $h_x = 0,2[m]$.

Al igual que para vuelo suspendido simétrico, el estudio radica en determinar el comportamiento del flujo y los coeficientes aerodinámicos tomando como variable el número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 con una cinemática sinusoidal similar a la que se presenta en la fig. 6.70. El rango variable de Reynolds es $150 < Re < 5000$ y se determina mediante la ec. 2.7, ya que no existe velocidad de corriente libre, siendo el parámetro variable la viscosidad. Además se fija el valor de frecuencia reducida $k = 1/2$ (ec. 2.11), el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$ y las frecuencias $f_\alpha = f_h = f_x = 0,75$. El punto de pivot de los perfiles se ubica al 25 % de la cuerda.

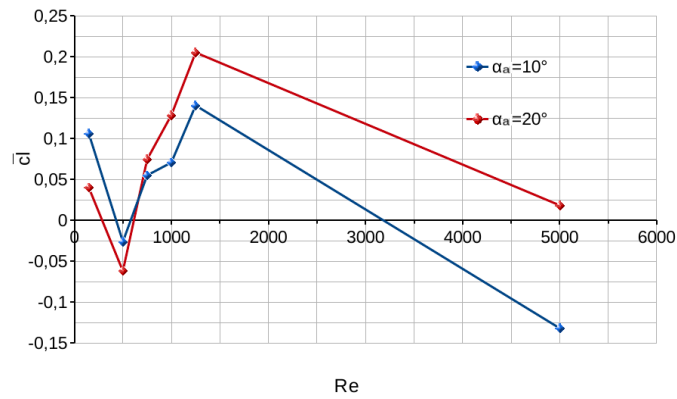


Figura 6.71: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para cada número de Reynolds tiene un comportamiento como el presentado en la fig. 6.71. A $Re = 150$ es mayor para una amplitud de cabeceo $\alpha_a = 10^\circ$ y luego a partir de $Re = 500$ decae a valores negativos. Para la amplitud $\alpha_a = 20^\circ$ se observa un comportamiento similar. Se presenta un máximo valor de sustentación

para $Re = 1250$ y luego decae para $Re = 5000$. Es de hacer notar que el análisis es realizado a un sólo valor común de frecuencia en los tres casos, lo cual no garantiza un panorama completo del fenómeno.

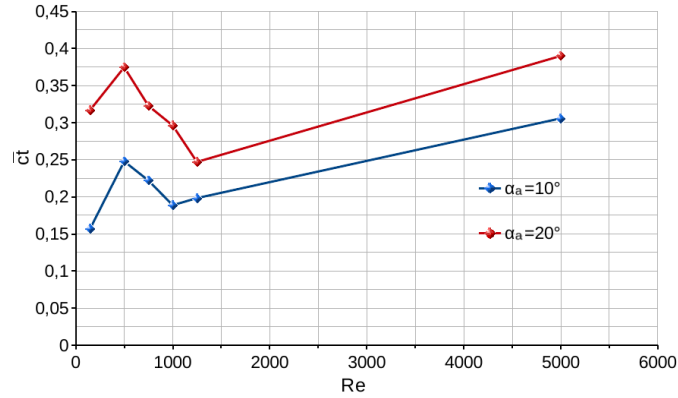


Figura 6.72: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

En este tipo de vuelo se encontró que existe propulsión generada por el cuerpo en todos los casos. Las curvas del coeficiente de tracción promedio pueden verse en la fig. 6.72. Para la amplitud $\alpha_a = 20^\circ$ se encuentran los mayores valores de \bar{c}_t y puede observarse que el comportamiento de las curvas es inverso al obtenido en la curvas de sustentación.

FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES FLEXIBLES

Los resultados obtenidos sobre perfiles alares sobre flujo inestacionario, brindan información sobre el comportamiento de parámetros fundamentales como propulsión y eficiencia, la influencia de la topología del flujo y los parámetros de gobierno.

En el presente capítulo se estudian los efectos que causa la flexibilidad y el factor de intensidad de interacción sobre los coeficientes aerodinámicos más importantes en vuelo *heaving*, *flapping* y *hovering*. En la fig. 7.1 se presenta la matriz de análisis realizado.

Análisis inestacionario de perfiles flexibles						
Heaving		Flapping		Hovering		
$8,707^{-6} < \delta < 8,707^{-3}$ $0,217 < \Sigma < 1,783$	relación de espesor	$8,707^{-6} < \delta < 8,707^{-3}$ $0,217 < \Sigma < 1,783$	relación de espesor cinem. sinusoidal cinem. alternativa	simétrico		asimétrico
				con mov. de cabeceo	sin mov. de cabeceo	
$0,001 < \delta < 0,01678$ $0,415 < \Sigma < 3,332$	Hawkmoth			sin mov. vertical	con mov. vertical	
$0,001 < \delta < 0,0158$ $0,57861 < \Sigma < 4,166$	Honeybee	$0,001 < \delta < 0,01678$ $0,415 < \Sigma < 3,332$	Hawkmoth	Hawkmoth		
		$0,001 < \delta < 0,0158$ $0,57861 < \Sigma < 4,166$	Honeybee	Honeybee		

Figura 7.1: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

7.1 Dominio de simulación y detalles numéricos

El dominio de cómputo para las simulaciones a realizar con la mayoría de los perfiles aerodinámicos posee las características de la fig. 7.2(a). Las dimensiones de dicho dominio son de tamaño considerable a los efectos de facilitar el movimiento de la malla inducido por las

perturbaciones introducidas por el movimiento del cuerpo y su posterior suavizado.

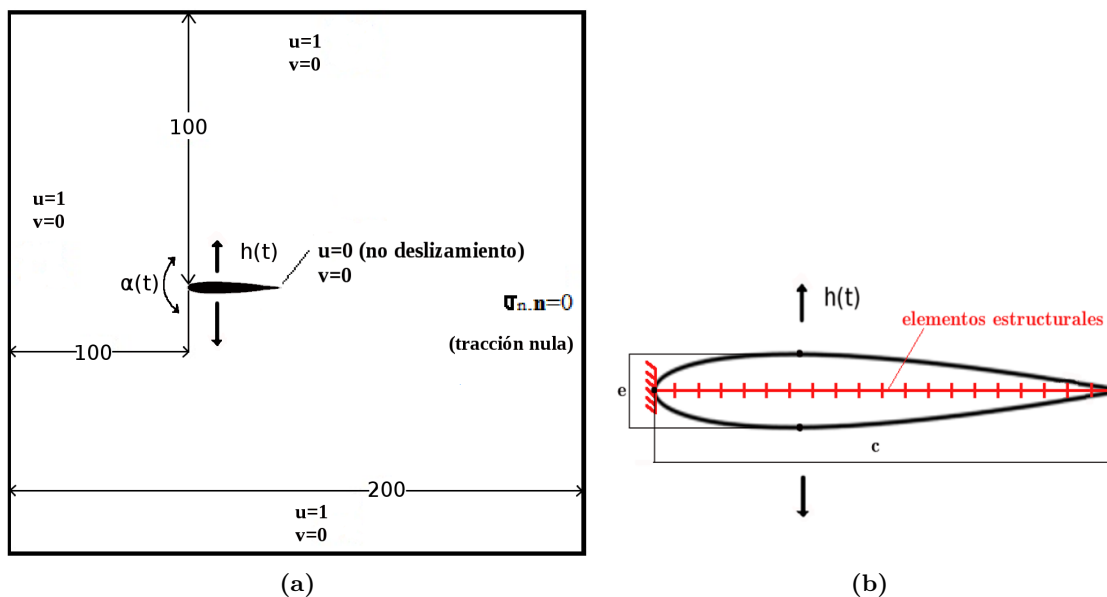


Figura 7.2: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

La malla para el problema fluido-dinámico no es estructurada y está compuesta por triángulos lineales de tensión constante cuyo refinamiento es propio de cada caso estudiado. Para perfiles de mayor espesor los elementos más pequeños poseen una longitud de lado cercana a $0,002c$ (donde $c = 1$ es la cuerda del perfil) y para perfiles delgados, aproximadamente de $0,001c$. Los mallados genéricos aplicables al perfil y a la estela, se presentan en la fig. 7.3

La componente estructural se modela mediante una viga unidimensional empotrada en el borde de ataque, se extiende sobre la línea media del perfil y es discretizada por 20 elementos unidimensionales dispuestos como se indica en la fig. 7.2(b).

El acoplamiento numérico es de tipo *staggered* (Gauss-Seidel) con predictor de segundo orden y el algoritmo cuenta con relajación de Aitkens sobre el desplazamiento, con un factor de tolerancia $\epsilon_0 = 1e^{-5}$ impuesto.

7.2 Efecto de la flexibilidad en movimiento vertical (*heaving*)

En esta sección se realiza un análisis sobre perfiles con movimiento vertical *heaving*, con el fin de determinar los efectos de la flexibilidad sobre los parámetros aerodinámicos del perfil y del flujo que lo rodea.

En el Cap. 6 se sostuvo que la elección de la amplitud de variación para el número de St no era aleatoria, sino que en base a estudios anteriores [114], [117], [90], [47] se determinó que en función de la velocidad de crucero, la frecuencia y la amplitud de batimiento de las alas, se ubicaba entre $0,19 < St < 0,41$ aproximadamente. Luego en el análisis del movimiento *heaving*

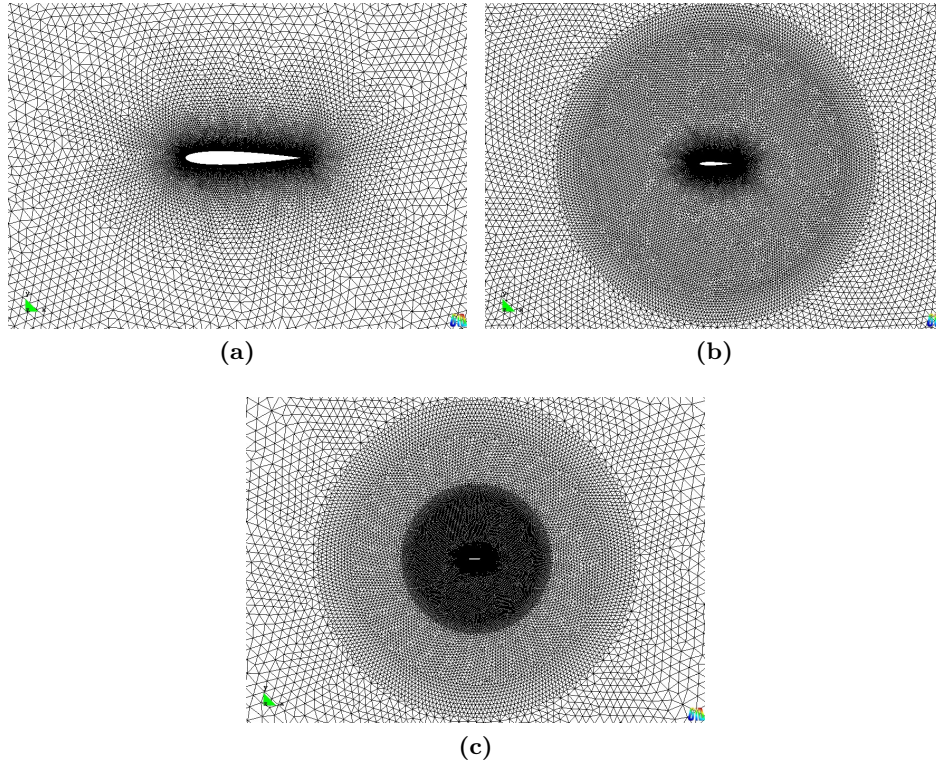


Figura 7.3: Mallado genérico de cuerpo y estela.

sobre perfiles rígidos realizado en el presente trabajo (Sec. 6.2), se verifica que las mayores eficiencias propulsoras se obtienen para $St = 0,3$. Como consecuencia, se decide tomar dicho valor como base para realizar un análisis que contemple la flexibilidad de diferentes geometrías.

El análisis fija una cinemática de vuelo sinusoidal que responde a la ecs. 2.22, tal que se cumplen las siguientes condiciones $St = 0,3$, $Re = 1100$, con $h_a = 0,15$ y $f_h = 1$. Los perfiles a analizar son NACA 0004 y 0012 y los parámetros variables son la flexibilidad δ^* y el factor de intensidad de interacción Σ , a través del módulo de elasticidad E y la densidad de la estructura ρ_s , respectivamente.

El primer análisis se realiza sobre el perfil NACA 0012, donde se toman como variables de estudio la flexibilidad que varía entre $8,707e^{-6} < \delta^* < 8,707e^{-3}$ y el factor de intensidad de interacción FSI entre $0,2168 < \Sigma < 1,7826$. En las figs. 7.4(a) y 7.4(b) se presentan el coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η . Para las estructuras con menor flexibilidad la variación de Σ no presenta gran influencia sobre los coeficientes, que se asemejan bastante a los obtenidos para el perfil rígido. Además, el perfil presenta poca deformación elástica, como puede verse en la fig. 7.5(a). Luego, en la medida que se aumenta la flexibilidad a valores mayores a $1e^{-3}$, el coeficiente de tracción crece hasta un máximo en todos los casos, y aumenta con mayor gradiente para el caso con menor Σ , es decir para el perfil con mayor densidad. También se produce un aumento en la eficiencia propulsora debido al aumento de

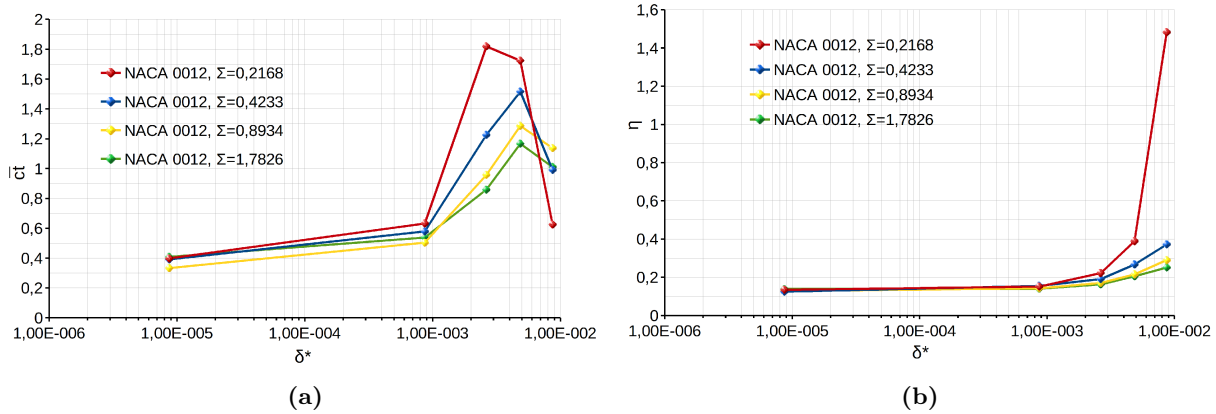


Figura 7.4: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0012 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

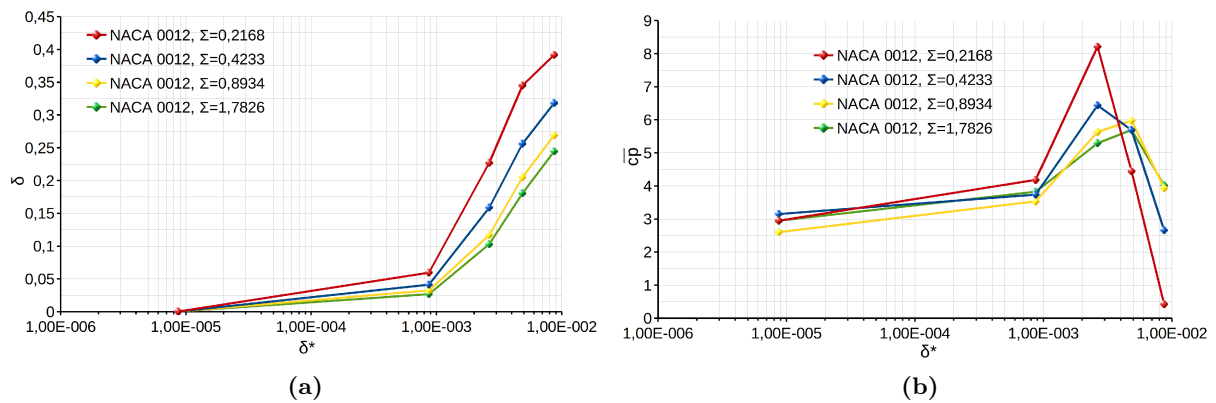


Figura 7.5: Desplazamiento del borde de fuga δ y coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p para el perfil NACA 0012 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

tracción. El desplazamiento del borde de fuga crece con el aumento de flexibilidad y en mayor medida para el perfil más denso.

El coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p se grafica en la fig. 7.5(b), donde las curvas presentan un comportamiento similar al coeficiente de tracción, pero con una caída abrupta para los casos con mayor flexibilidad.

La primera frecuencia natural de oscilación f_1 , es un parámetro de referencia interesante para tener en cuenta. En la naturaleza se encuentra que la mayoría de las especies, vuelan con frecuencias de movimiento que aproximadamente satisfacen la amplitud $0,04 < f/f_1 < 0,8$ [101]. Esto representa un punto de referencia sobre el cual llevar a cabo un análisis y explorar diferentes alternativas.

En las figs. 7.6(a) y 7.6(b), se grafican el coeficiente de tracción \bar{c}_t y la eficiencia propulsora η , en función de la relación de frecuencias f/f_1 . El comportamiento de las curvas es similar al

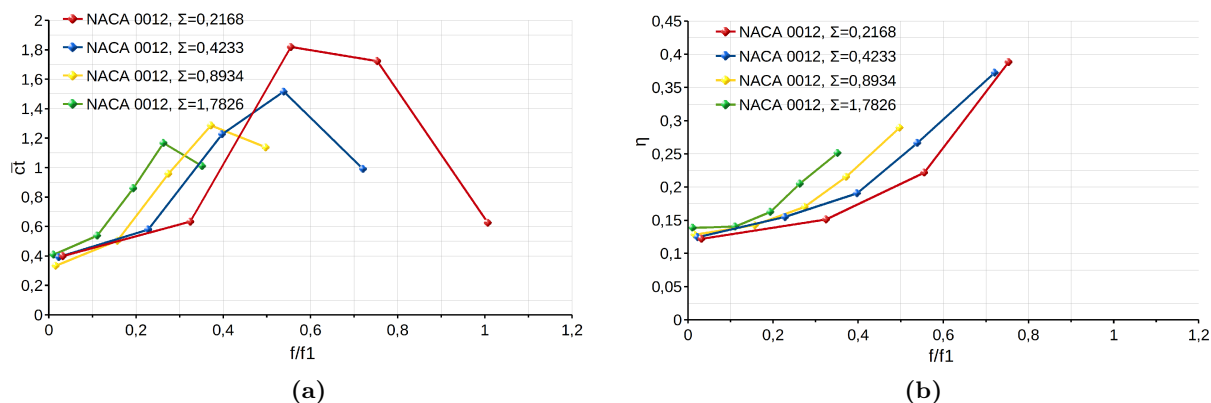


Figura 7.6: Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0012 en función de las relaciones de frecuencia a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

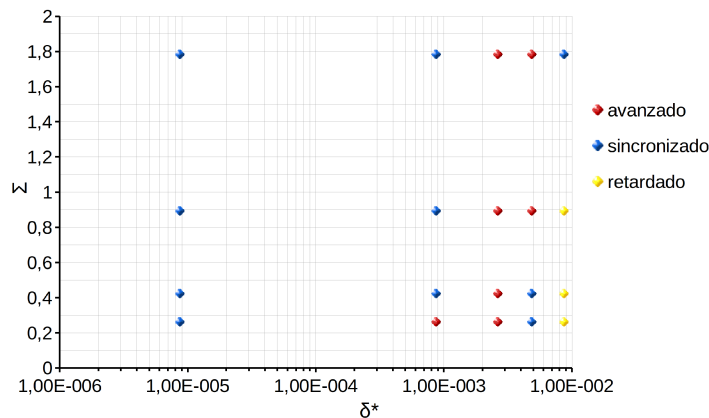


Figura 7.7: Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012.

explicado anteriormente, aunque se observa un desfase entre los máximos de los valores que toman la tracción y la eficiencia propulsora para cada una de las curvas. Para el perfil más denso (menor Σ) la máxima tracción se encuentra en una frecuencia de movimiento f/f_1 entre 0,6 y 0,8 y para el perfil menos denso (mayor Σ), entre 0,2 y 0,3. Esto quiere decir que para perfiles con mayor densidad estructural, las frecuencias de movimiento cercanas a la frecuencia de resonancia producen más propulsión, mientras que para perfiles con menor densidad estructural, frecuencias de movimiento mucho más bajas que la frecuencia de resonancia producen mayor propulsión.

En la eficiencia propulsora, ocurre algo similar al coeficiente de tracción $\bar{c}t$. Para perfiles más densos, se obtienen mayores valores de η con frecuencias de movimiento cercanas a la frecuencia natural y para perfiles menos densos con frecuencias más lejanas de la frecuencia natural.

Como puede verse, estos parámetros de suma importancia en el diseño de MAV, depen-

den de variables como la frecuencia de movimiento y la frecuencia natural, que pueden ser controladas de manera relativamente sencilla y así obtener performances determinadas.

En el espacio de variables Σ vs. δ^* es interesante observar los modos de rotación del perfil, fig. 7.7. Es decir, cual es el ángulo de cabeceo pasivo que toma el perfil al final de cada carrera. En los casos con menor flexibilidad, se observa un ángulo de rotación sincrónico ya que el desplazamiento del borde de fuga es pequeño y cae dentro del rango del criterio adoptado previamente ($-0,05c < \delta < 0,05c$) (Sec. 2.3.2). Luego sobre valores mayores a $\delta^* = 1e^{-3}$, los modos de rotación son adelantados, en coincidencia con los casos que presentan los máximos coeficientes de tracción. Por último, los modos de rotación retardados se dan sobre los casos con mayor flexibilidad, donde el borde de fuga del perfil alcanza un gran desplazamiento, de tal manera que cuando alcanza el final de la carrera no recupera su posición original. Se observa además, que el aumento de Σ provoca que los modos adelantados ocurran a mayores flexibilidades. Es válido aclarar que para el espacio de variables estudiado tanto estructurales

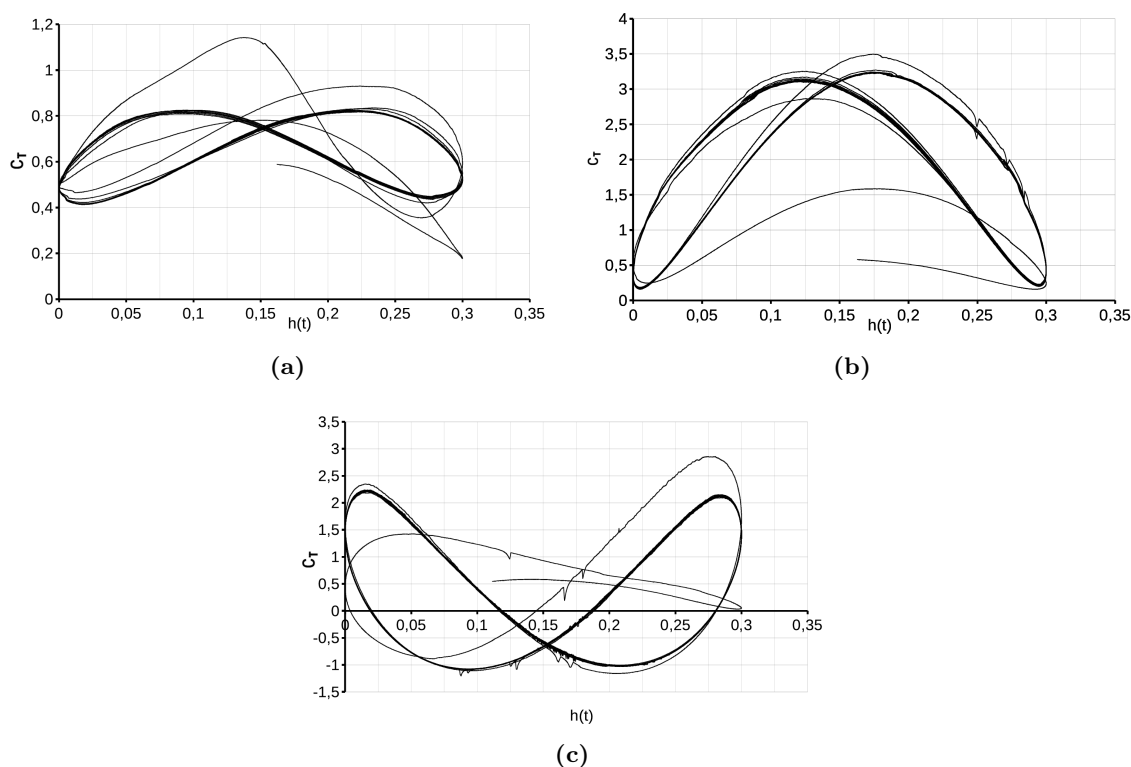


Figura 7.8: Coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ para un perfil NACA 0012 para $\Sigma = 0,2168$. (a) $\delta^* = 8,71e^{-4}$. (b) $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (c) $\delta^* = 8,71e^{-3}$

como fluido-dinámicas, en combinación con la cinemática impuesta, en mayor o menor medida las fuerzas obtenidas sobre el perfil son gobernadas por la inercia.

En la fig. 7.8 se presenta el coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ para un perfil NACA 0012 a $\Sigma = 0,2168$ y tres flexibilidades diferentes. Para el caso

7.8(b) que corresponde a una flexibilidad $\delta^* = 2,64e^{-3}$ (correspondiente al máximo $\bar{c}t$ obtenido para dicho perfil) se observa que C_T tiene valores positivos sobre toda la carrera (*upstroke* y *downstroke*). Para el caso más flexible $\delta^* = 8,71e^{-3}$ 7.8(c), se observa que $\bar{c}t$ toma valores negativos (de resistencia) sobre gran parte de la carrera.

Con el objetivo de extender el análisis, se realiza el mismo estudio sobre un perfil NACA 0004 para el mismo espacio de variables, y de esta manera, observar el comportamiento de los coeficientes aerodinámicos con una relación de espesor diferente.

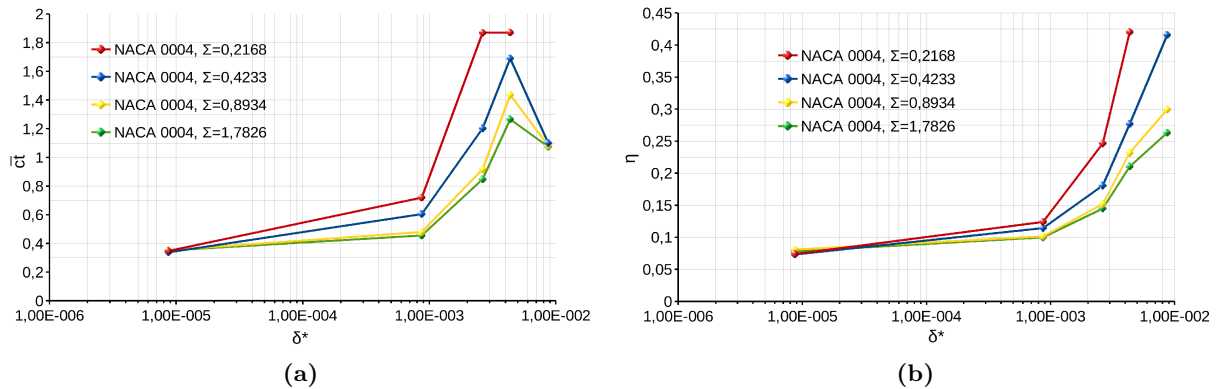


Figura 7.9: Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0004 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

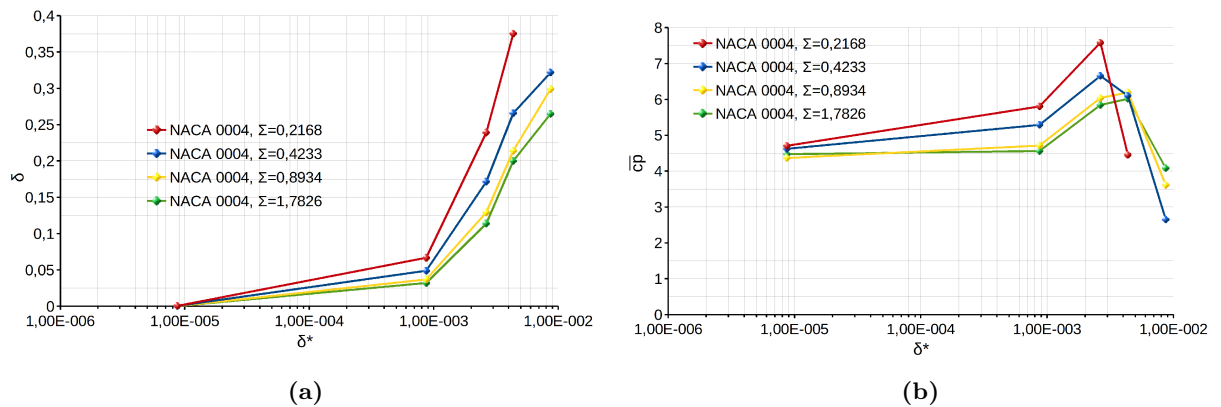


Figura 7.10: Desplazamiento del borde de fuga δ y coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p$ para el perfil NACA 0004 a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

En las fig. 7.9(a) y 7.9(b) se observan el coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η . Al igual que en el caso anterior, en los perfiles con menor flexibilidad la variación de Σ no presenta gran influencia sobre los coeficientes de tracción y eficiencia que se asemejan bastante a los obtenidos para el perfil rígido. Luego, en la medida que se aumenta δ^* las curvas de tracción presentan un comportamiento similar a las obtenidas en el NACA 0012.

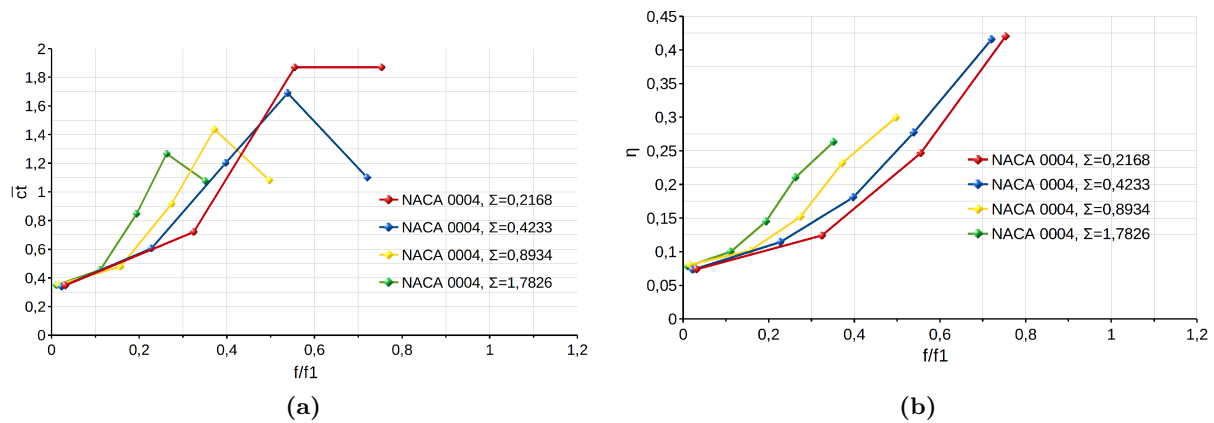


Figura 7.11: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para el perfil NACA 0004 en función de las relaciones de frecuencia a $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

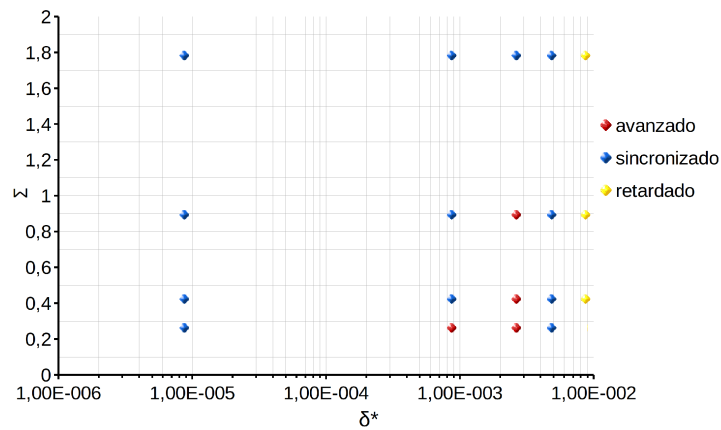


Figura 7.12: Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0004.

La eficiencia propulsora se mantiene en valores similares a lo obtenido en el perfil NACA 0012 y cabe destacar que para el caso $(\Sigma, \delta^*) = (1,7826, 8,707e^{-3})$, se tuvieron dificultades para obtener un resultado aceptable, debido a que los grandes desplazamientos del perfil en sucesivos ciclos de movimiento terminan dañando la malla.

Los desplazamientos del borde de fuga para cada caso, pueden observarse en la fig. 7.10(a), en la cual se manifiesta una ligera diferencia para los casos con mayor inercia respecto al perfil NACA 0012.

El coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p se grafica en la fig. 7.10(b), donde las curvas presentan un comportamiento similar a las obtenidas para el NACA 0012.

También se grafican para este caso, el coeficiente de tracción promedio y la eficiencia en función de las relaciones de frecuencias f/f_1 , (figs.7.11(a) y 7.11(b)).

Al igual que en el caso anterior, también se grafican los modos de rotación del perfil en

el espacio de variables Σ vs. δ^* . En la fig. 7.12, se observa algo similar a lo obtenido con el perfil NACA 0012. Para valores bajos de flexibilidad los casos son sincrónicos con bajo desplazamiento de borde de fuga. Luego, los resultados presentan un ángulo pasivo avanzado sobre casos con flexibilidad entre $1e^{-3} < \delta^* < 6e^{-3}$, donde coinciden con los máximos valores de coeficiente de tracción promedio. Por último, los casos con modos de rotación retardados se dan sobre los casos con flexibilidades más bajas. Además, el efecto que produce Σ es el mismo que se determinó sobre el perfil NACA 0012.

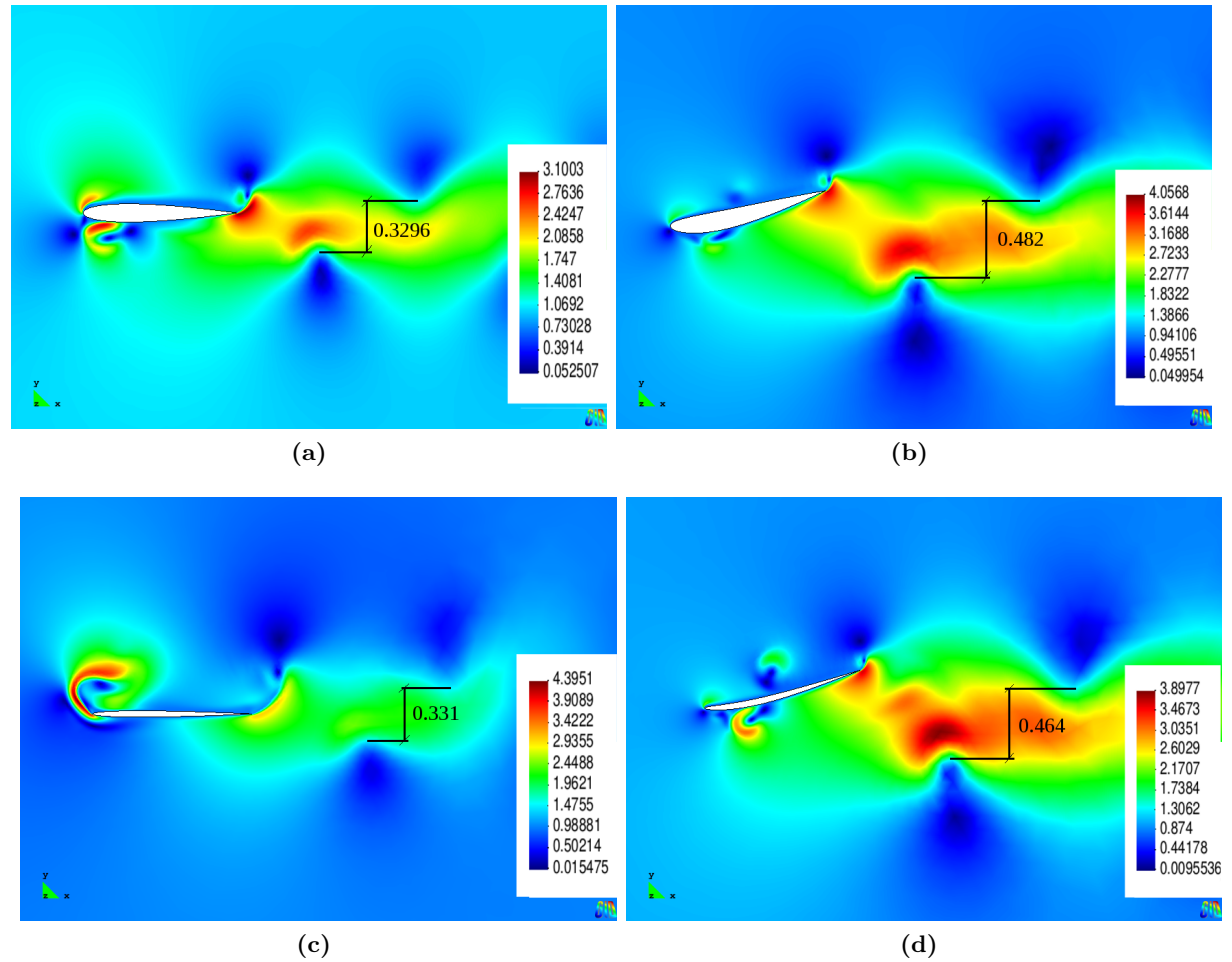


Figura 7.13: Contornos de velocidad sobre los perfiles NACA 0004 y 0012 a $\Sigma = 0,2168$ y $t = 4,67[s]$. (a) y (c) con $\delta^* = 8,71e^{-6}$. (b) y (d) con $\delta^* = 2,64e^{-3}$.

Los contornos de velocidad de la fig. 7.13 muestran una comparación entre los perfiles NACA 0004 y NACA 0012 con $\Sigma = 0,2168$, $t = 4,67[s]$ y dos flexibilidades diferentes $\delta^* = 8,71e^{-6}$ y $\delta^* = 2,64e^{-3}$. Se observa que en los casos fig. 7.13 (b) y (d), la separación entre vórtices de la estela es mayor que en los casos más rígidos, lo que verifica la diferencia entre los coeficientes de tracción obtenidos. Además, se aprecian el ángulo de ataque pasivo y el desplazamiento alcanzado por el borde de fuga, en los casos con mayor flexibilidad.

Finalmente, se puede mencionar que en el conjunto de variables estudiado, las mayores performances propulsoras obtenidas en ambos casos (NACA 0004 y 0012), se dan para perfiles con mayor densidad o menor Σ , donde las fuerzas de inercia producen un desplazamiento en el borde de fuga que favorece a la propulsión. El ángulo pasivo adquirido por el perfil, intensifica los vórtices desprendidos del borde de fuga (TEV) y además agiliza la convección y por ende, el acoplamiento con la estela del vórtice desprendido desde el borde de ataque (LEV). Tal como se observó, este fenómeno favorable se da para algunos valores de flexibilidad.

7.3 Efecto de la flexibilidad en movimiento vertical y de cabeceo combinado (*flapping*)

En esta sección se realiza un análisis de perfiles de movimiento combinado vertical y de cabeceo, *flapping* sobre diferentes perfiles, con el fin de determinar los efectos de la flexibilidad sobre los parámetros aerodinámicos de perfil y del flujo que lo rodea.

En capítulos anteriores se estudió este tipo de movimiento con perfiles rígidos y con variación de diferentes parámetros para diferentes parámetros, como la geometría, las frecuencias, el número de Strouhal y el ángulo de incidencia, y se observó como influían sobre el coeficiente de tracción $\bar{c}t$ y la eficiencia η . En el siguiente análisis, se determinan la influencia de la flexibilidad δ^* y el factor de interacción Σ sobre dichos coeficientes y se estudian dos tipos de cinemáticas para el movimiento.

7.3.1 Cinemática sinusoidal

La cinemática sinusoidal responde a las ecs. 2.22 cuyos parámetros de control son: $St = 0,3$, $Re = 1100$, con $h_a = 0,15$, $f_h = f_\alpha = 1$ y $\alpha_a = 10^\circ$. Los perfiles a analizar son NACA 0004 y 0012. La flexibilidad δ^* se varía mediante el módulo de elasticidad E y la estimación de la intensidad de interacción Σ , a través de la densidad de la estructura ρ_s . El punto de pivot para la rotación de los perfiles a analizar se ubica al 0% de la cuerda. Como se observa, los parámetros cinemáticos son los mismos que se utilizaron en el movimiento vertical *heaving*, con el agregado del ángulo de ataque variable en el tiempo.

En la fig. 7.14 se presentan los coeficientes de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η para los perfiles NACA 0012 y NACA 0004.

De la comparación entre ambos perfiles, se observa que se obtuvieron resultados similares en $\bar{c}t$ y η para los valores de flexibilidad más bajos ya que las deformaciones de las geometrías son pequeñas. Luego, al incrementar δ^* por sobre un valor de $1e^{-3}$, se observa que los mayores valores de $\bar{c}t$ se dan en el perfil NACA 0004 y específicamente para perfiles más densos ($\Sigma = 0,2148$ y $\Sigma = 0,4233$). En cuanto a η , los valores permanecen similares, salvo para la curva de $\Sigma = 0,2148$, donde para el NACA 0004 se observa un aumento con mayor gradiente respecto a la del NACA 0012. La fig. 7.15 muestra cierta paridad en el coeficiente de potencia promedio

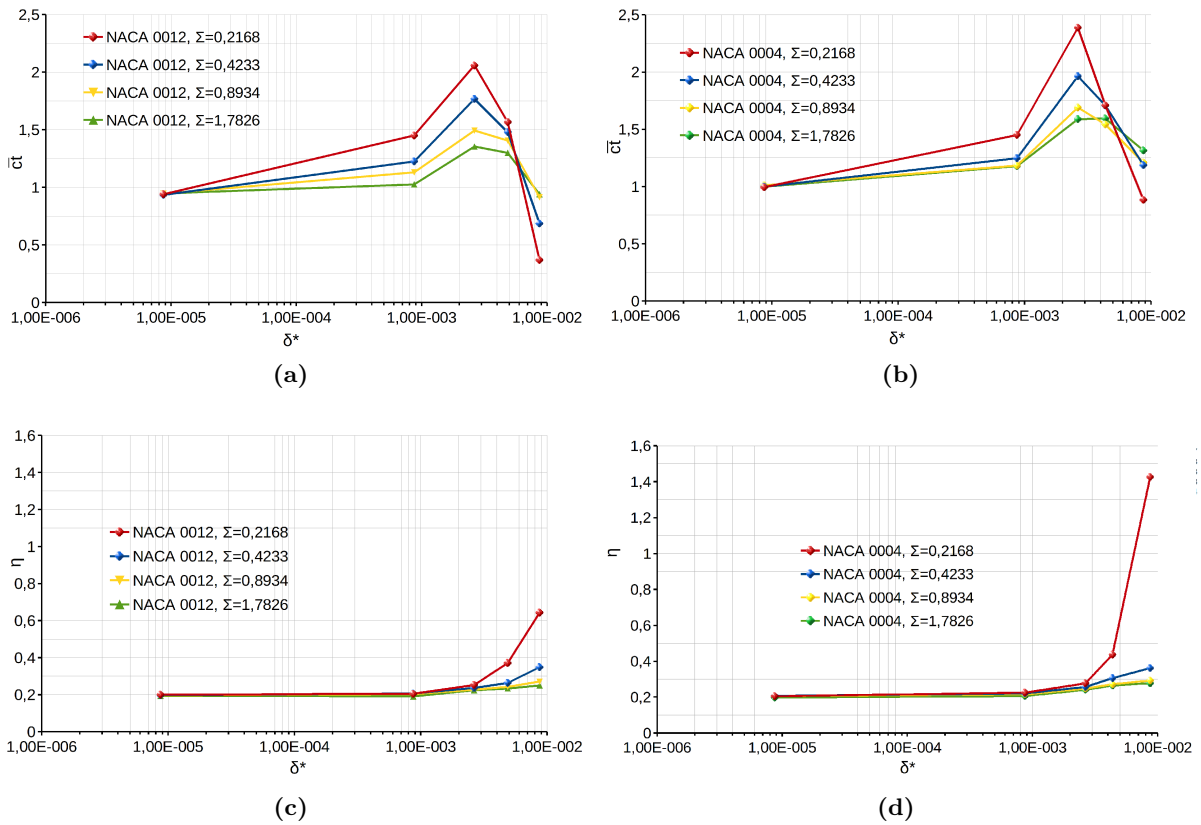


Figura 7.14: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η en función de la flexibilidad δ^* para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y para el NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

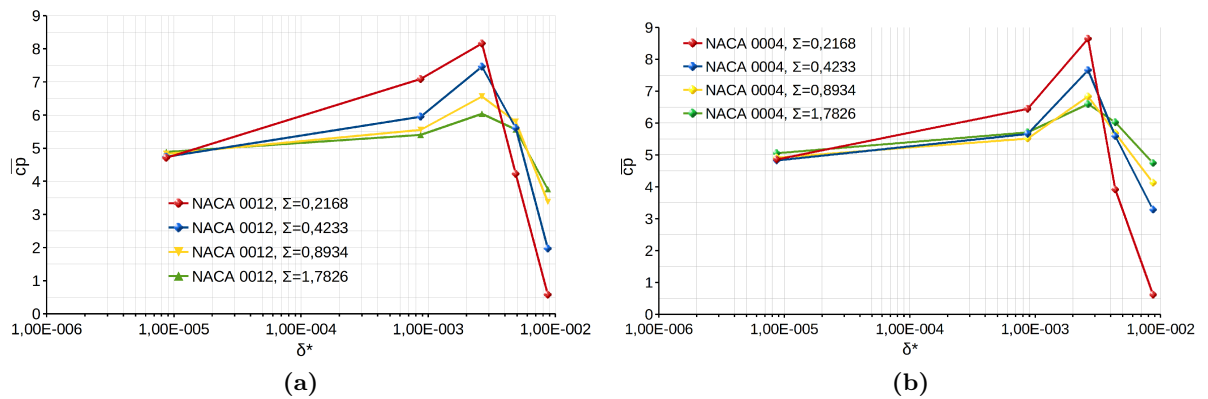


Figura 7.15: Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

\bar{c}_p entre ambos perfiles. El desplazamiento del borde de fuga se grafica en la fig. 7.16. Si se compara con los casos analizados en el movimiento vertical *heaving*, se observa que no existe gran impacto por la introducción del ángulo de ataque variable sobre los desplazamientos del

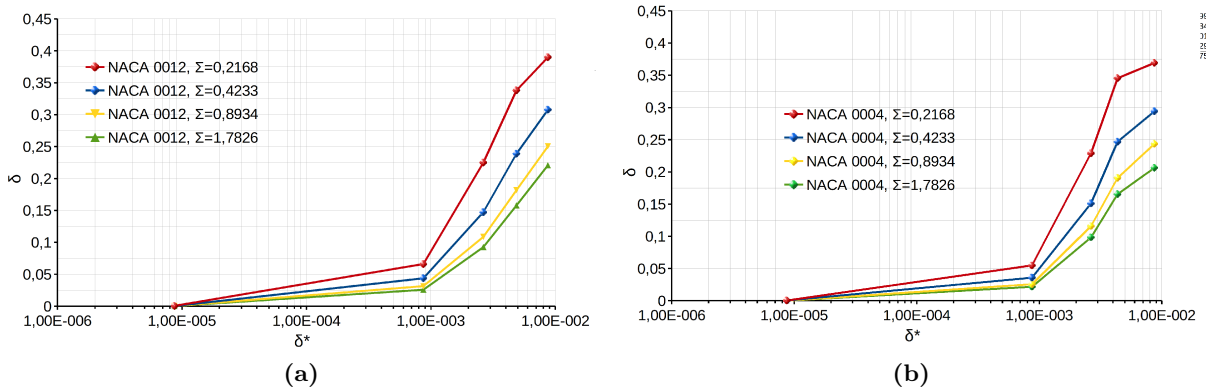


Figura 7.16: Desplazamiento del borde de fuga δ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

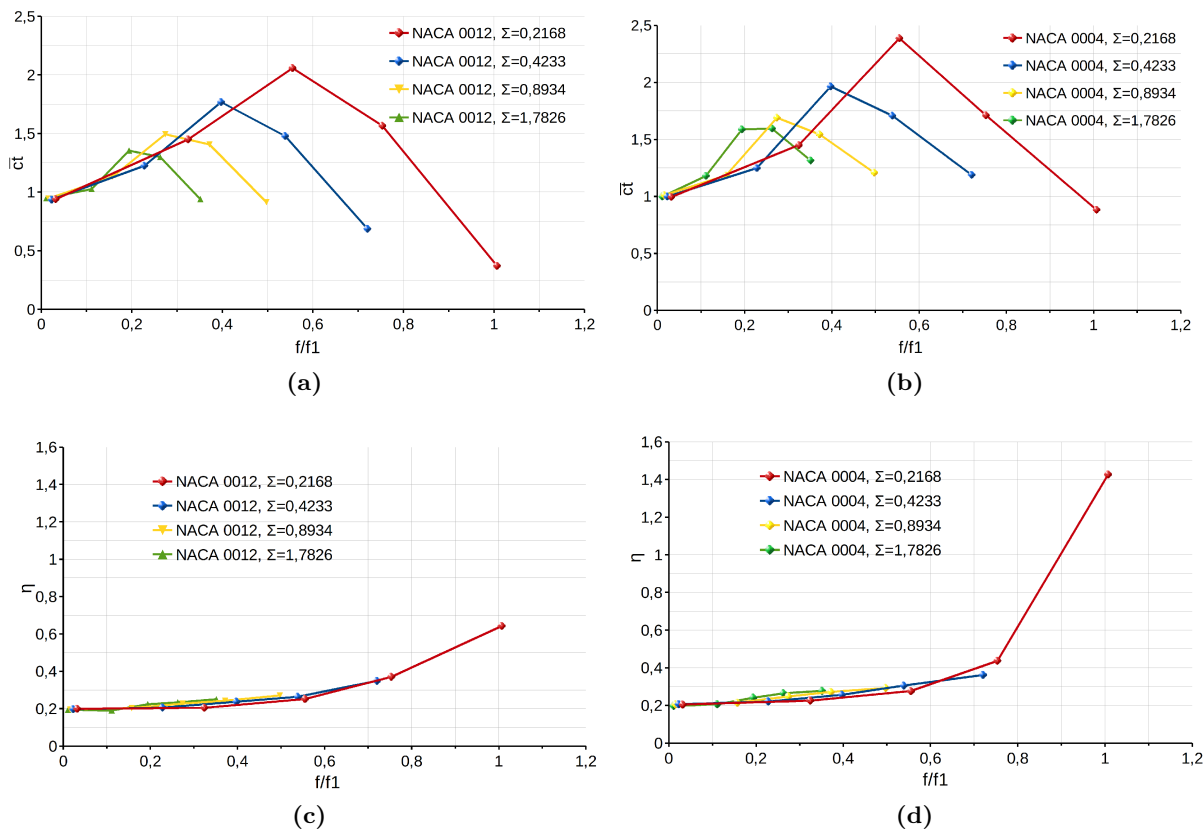


Figura 7.17: Coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y eficiencia propulsora η en función de la relación de frecuencias f/f_1 para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

borde de fuga.

En la fig. 7.17 se presentan el coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η en función de las relaciones de frecuencias f/f_1 . Se observa que los máximos valores de $\bar{c}t$

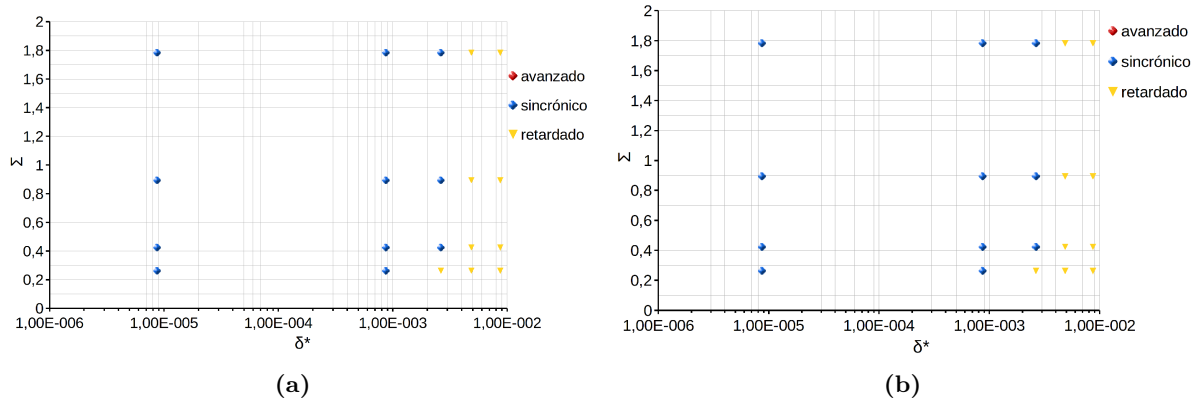


Figura 7.18: Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b).

para los perfiles más densos, se corresponden con una frecuencia de movimiento cercana a la frecuencia natural, y para los perfiles menos densos a frecuencias lejanas a la frecuencia natural. En cuanto a η , las mayores eficiencias tienden a una frecuencia de movimiento cercana a la frecuencia natural y presentan un comportamiento similar al obtenido en movimiento *heaving*.

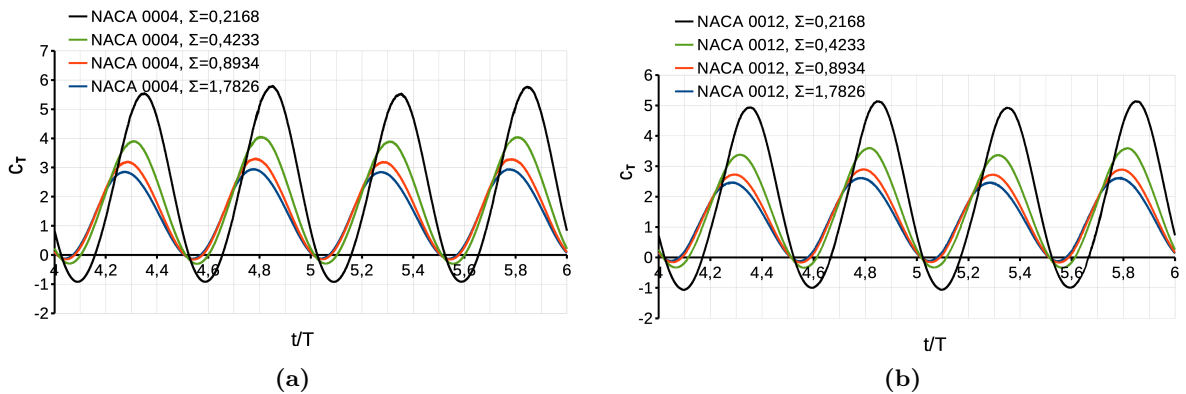


Figura 7.19: Coeficiente de tracción en cinemática sinusoidal para los perfiles NACA 0004 y 0012 con $\delta^* = 2,64e^{-3}$.

En el espacio de variables Σ vs. δ^* se grafican los modos de rotación de los perfiles, fig. 7.18. Se observa que para valores de flexibilidad $\delta^* < 1e^{-3}$, los modos de rotación son sincrónicos. Para casos con $\delta^* \approx 4,83e^{-3}$, los modos de rotación también son sincrónicos en ambos perfiles pero con desplazamientos de borde de fuga más grandes, en coincidencia con los máximos coeficientes de tracción promediadas $\bar{c}t$. Para $\delta^* > 4,83e^{-3}$, los modos de rotación son retardados en donde existe una caída de $\bar{c}t$.

En la fig. 7.19 se presenta una comparación entre las respuestas instantáneas de los coefi-

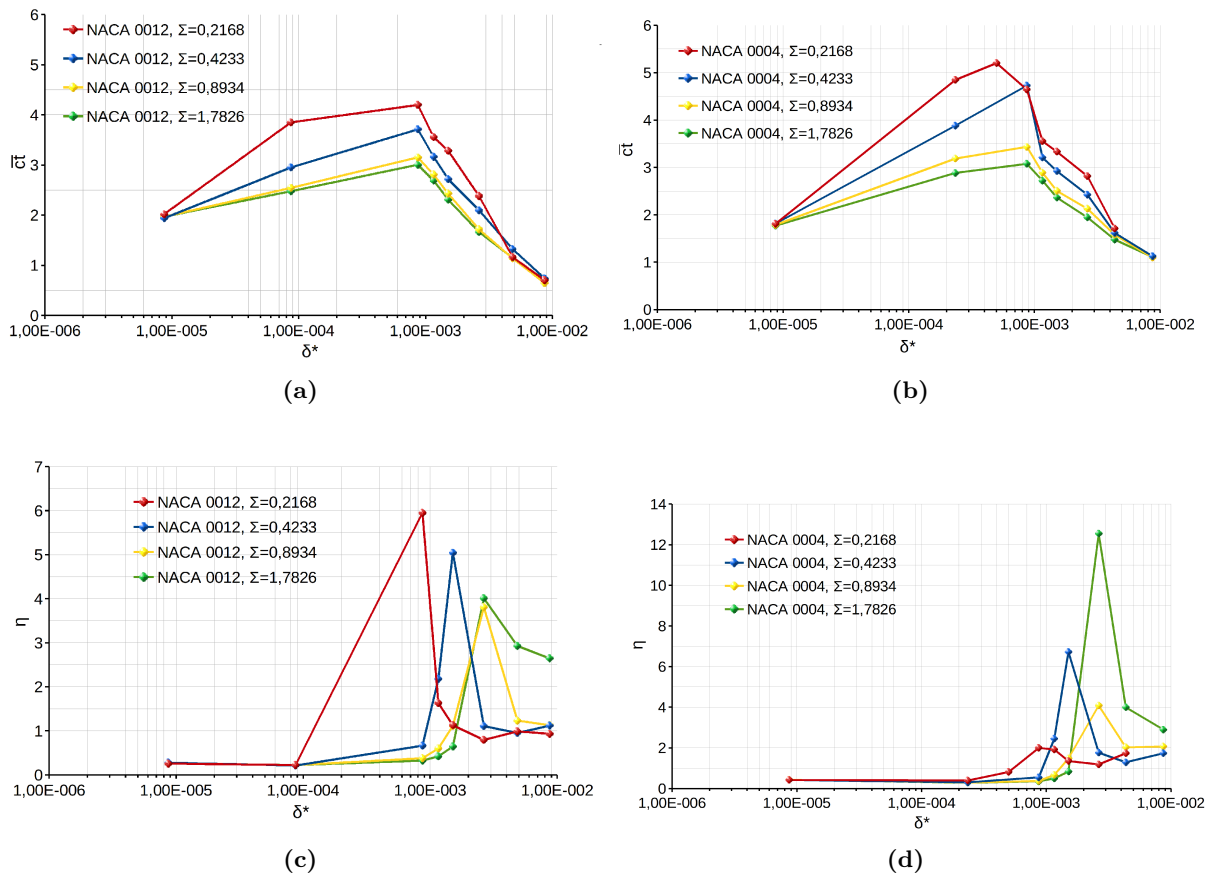


Figura 7.20: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_T y eficiencia propulsora η en función de la flexibilidad δ^* para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y para el NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

cientos de tracción para $\delta^* = 2,64e^{-3}$ y de ambos perfiles. Se observa que los perfiles con menor Σ o más densos producen mayores amplitudes que los menos densos así como valores negativos de C_T . El perfil NACA 0004 produce mayores valores de tracción que el NACA 0012 para los casos analizados.

7.3.2 Cinemática alternativa

En la siguiente sección se realiza un análisis similar de vuelo *flapping* con una cinemática de vuelo alternativa. Se mantienen las amplitudes y frecuencias utilizadas en el movimiento sinusoidal $h_a = 0,15$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 10^\circ$ y $\varphi = \pi/2$, con la diferencia de que esta cinemática responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$ y una onda de tipo escalón, para el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$, fig. 6.65. El punto de pivot para la rotación de los perfiles a analizar se ubica al 0% de la cuerda. Las ecuaciones correspondientes a dichas

curvas se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{h_a}{\sin^{-1}(0,8)} \sin^{-1} (0,8 \sin(2\pi f_h t)) \\
 \alpha(t) &= \frac{\alpha_a}{\tanh^{-1}(3)} \tanh^{-1} (3 \sin(2\pi f_\alpha t + \varphi))
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

En la fig.7.20 se presenta el coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η para los dos perfiles estudiados. En ambas geometrías, el cambio de cinemática incrementa $\bar{c}t$ a casi el doble respecto a la cinemática sinusoidal y la mayor propulsión se observa en el perfil NACA 0004. Además, se observa que valores altos de $\bar{c}t$, se encuentran en un rango más amplio de flexibilidad δ^* en comparación con la cinemática sinusoidal y crecen con la disminución de Σ .

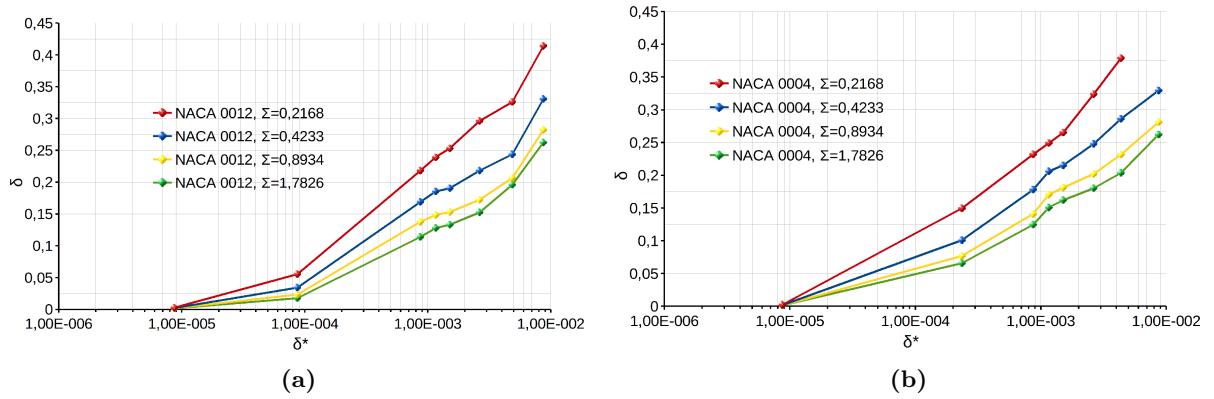


Figura 7.21: Desplazamiento del borde de fuga δ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

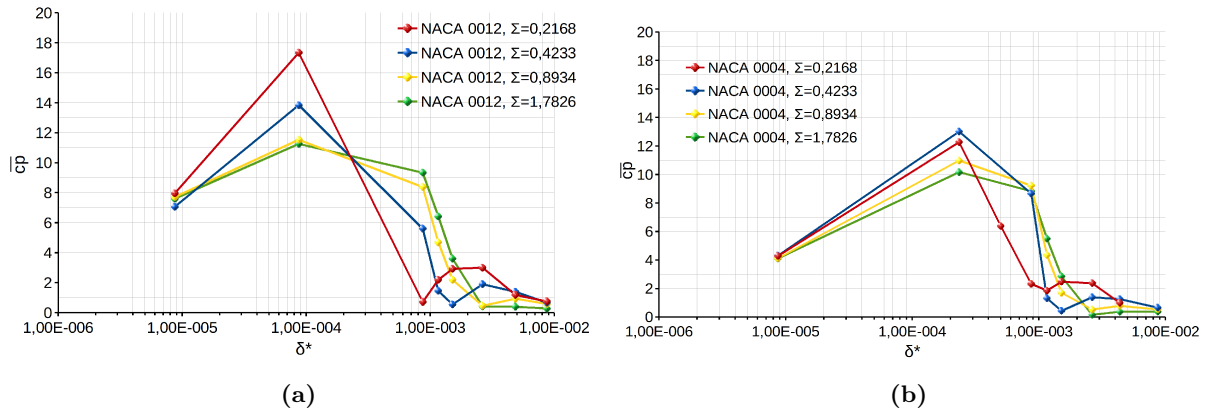


Figura 7.22: Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p$ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

Además, se puede destacar que con la cinemática alternativa el ángulo de ataque permanece

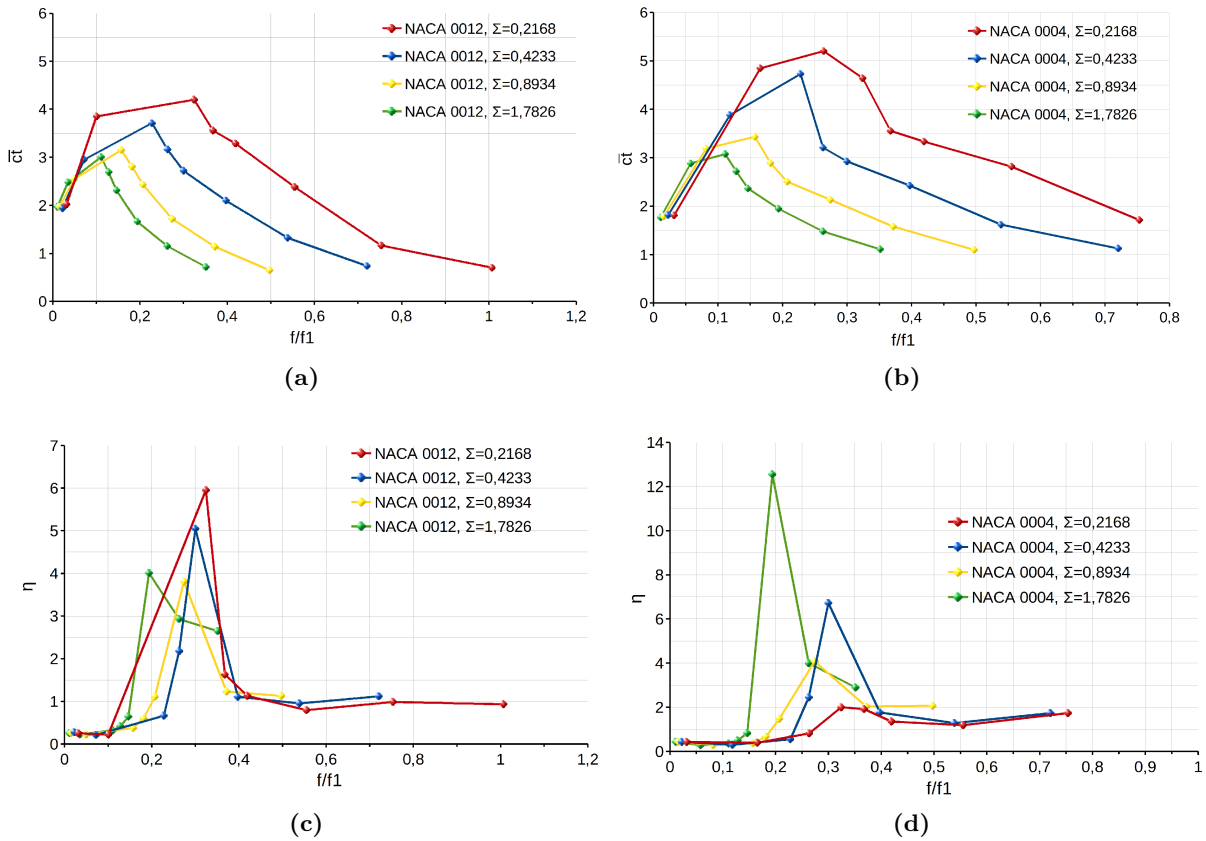


Figura 7.23: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η en función de la relación de frecuencias f/f_1 para el perfil NACA 0012 (a) y (c) y NACA 0004 (b) y (d) con $St = 0,3$ y $Re = 1100$.

en su posición de máxima amplitud durante mayor tiempo de la carrera, debido a su onda tipo escalón. Esto implica que los vórtices generados en el borde de fuga sean de mayor intensidad. Además en el borde de ataque existe mayor succión que permite que la convección del vórtice generado en dicho borde hacia la estela, sea de manera más rápida.

La eficiencia propulsora η presenta un comportamiento diferente al obtenido anteriormente, donde se observa que los valores máximos se encuentran entre $1e^{-3} < \delta^* < 1e^{-2}$ y surgen como consecuencia de la caída del coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p , fig. 7.22.

El desplazamiento del borde de fuga δ , muestra un mayor incremento que en la cinemática sinusoidal para flexibilidades bajas, y para flexibilidades altas los valores tienden a ser similares fig. 7.21. Además, como es de esperarse los mayores desplazamientos se dan para los perfiles con mayor masa $\Sigma = 0,2168$.

El coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y la eficiencia propulsora η en función de las relaciones de frecuencias, se grafican en la fig. 7.23. Los máximos valores de tracción se encuentran en un rango entre $0,1 < f/f_1 < 0,4$ en ambos perfiles, a diferencia de lo obtenido en la cinemática sinusoidal, cuyo rango estaba entre $0,2 < f/f_1 < 0,7$. Se observa claramente que la tracción

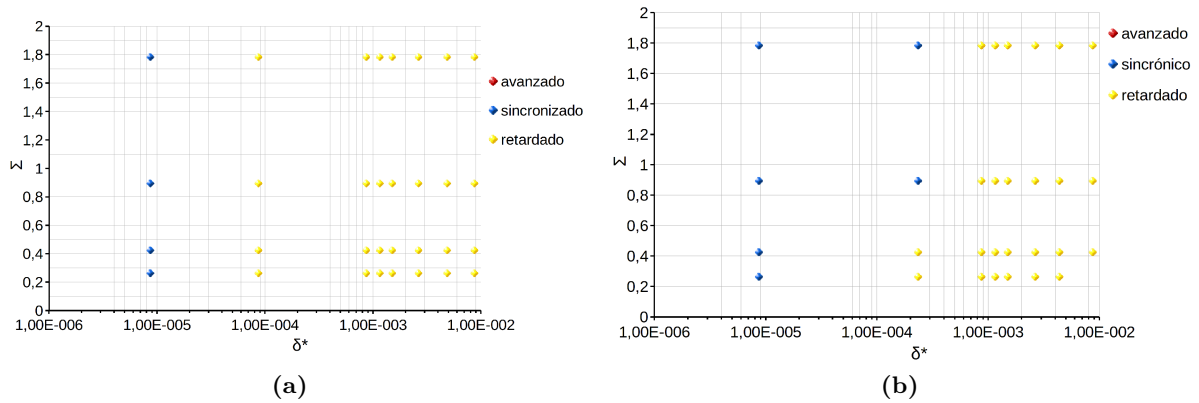


Figura 7.24: Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para el perfil NACA 0012 (a) y NACA 0004 (b).

depende de la cinemática de movimiento, siendo que se utilizan los mismos valores de frecuencia de movimiento y frecuencias naturales que la cinemática sinusoidal.

La eficiencia propulsora η presenta los máximos en el mismo rango que el coeficiente de tracción promedio ($0,1 < f/f_1 < 0,4$) en ambos perfiles.

En la fig. 7.24 se grafican los modos de rotación de ambos perfiles. Para valores de flexibilidad $\delta^* < 2,35e^{-4}$ los modos de rotación son sincrónicos y de desplazamientos pequeños sobre borde de fuga. Luego los máximos valores de propulsión se encuentran entre $1e^{-4} < \delta^* < 1e^{-3}$ y los modos de rotación transicionan de sincrónicos a retardados. Para valores $\delta^* > 1e^{-3}$ los modos de rotación son retardados y el coeficiente de tracción disminuye en todos los casos.

La fig. 7.25 muestra los contornos de velocidad con el objetivo de comparar los casos con *máximo* coeficiente de propulsión promedio \bar{c}_t . Las fig. 7.25(a) y 7.25(c) responden a los casos con cinemática sinusoidal con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 2,64e^{-3}$ y $t = 4,67[s]$ para los perfiles NACA 0012 y NACA 0004 respectivamente. Las fig. 7.25(b) y 7.25(d) responden a los casos con cinemática alternativa con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 8,71e^{-4}$ y $t = 4,67[s]$ para los perfiles NACA 0012 y NACA 0004 respectivamente.

Se observa que las distancias entre vórtices en la estela de los casos de la cinemática alternativa, son mayores a las de las distancias de los vórtices de los casos con cinemática sinusoidal. Esto verifica los resultados obtenidos sobre los coeficientes de propulsión promedio. Además, los desplazamientos máximos del borde de fuga de los casos analizados en la fig. 7.25 son aproximadamente $\delta = 0,25$ en ambas cinemáticas, lo que indica que a pesar de tener diferentes flexibilidades, el tipo de cinemática influye significativamente en la deformación de la geometría y por ende en los coeficientes aerodinámicos.

En la fig. 7.26 se presenta una comparación entre ambos perfiles del coeficiente de tracción obtenido para una flexibilidad $\delta^* = 8,71e^{-4}$. Se observa una asimetría en las curvas obtenidas y además los mayores valores de C_T se dan para los perfiles con mayor densidad. Si se compara

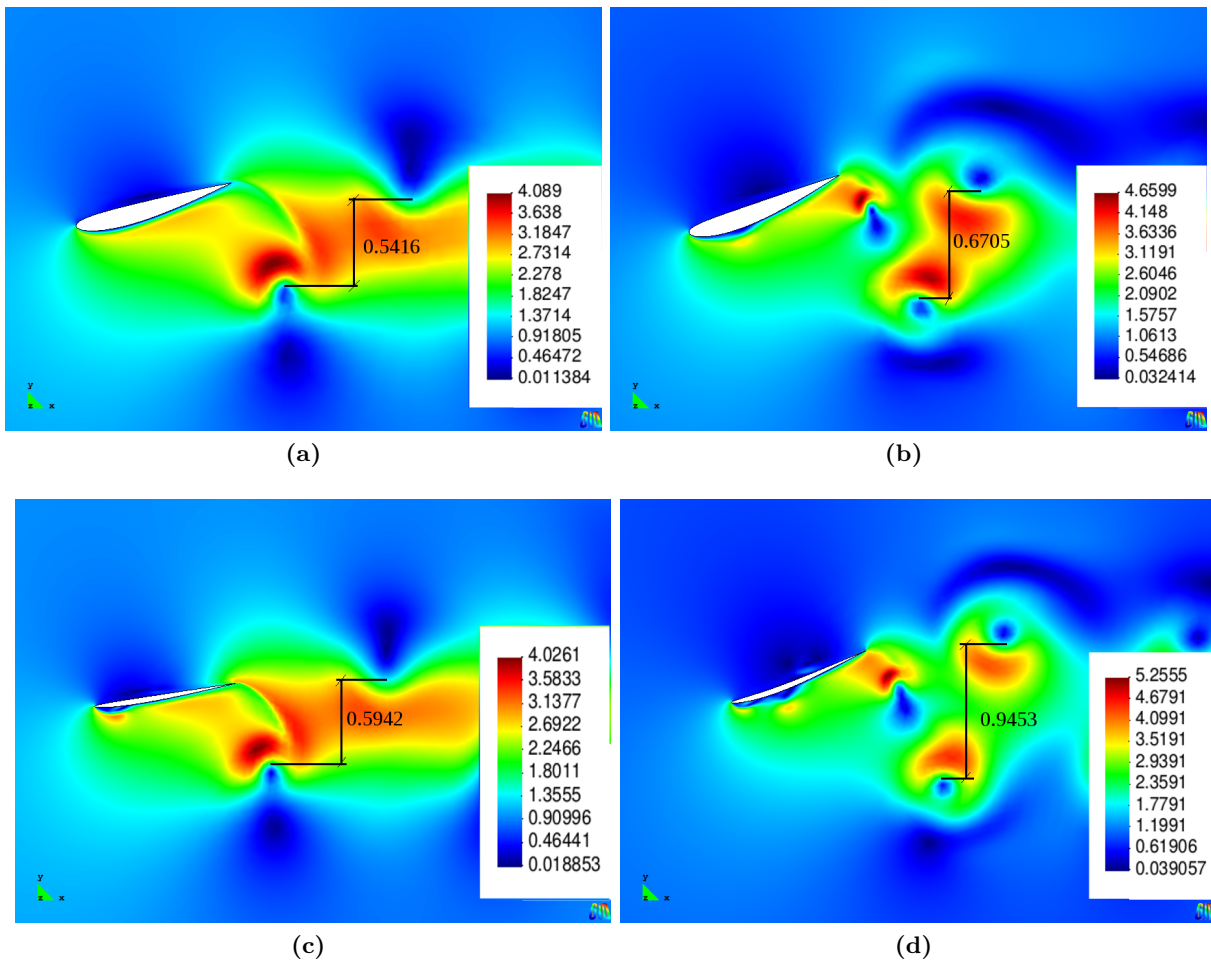


Figura 7.25: Contornos de velocidad sobre los perfiles NACA 0004 y 0012 a $t = 4,67[s]$. (a) y (c) cinemática sinusoidal con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (b) y (d) cinemática alternativa con $\Sigma = 0,2168$, $\delta^* = 8,71e^{-4}$.

con la cinemática sinusoidal, se encuentra que los picos de tracción obtenidos en la cinemática alternativa son mayores, lo que se ve reflejado en los resultados obtenidos para \bar{c}_T .

En la fig. 7.27 se presenta el coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ y el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$ para un perfil NACA 0012 con $\Sigma = 0,2168$. Los gráficos corresponden a los casos de máxima tracción de las cinemática sinusoidal y alternativa. Para los casos que se toma $h(t)$ como variable, se observa que en la cinemática sinusoidal la máxima tracción se alcanza en las cercanías de los finales de carrera (aproximadamente a $1/6$ y a $5/6$ de la amplitud máxima). En cambio, en la cinemática alternativa, se observa que la máxima tracción se presenta sobre la mitad de la amplitud máxima sobre ambas carreras (*upstroke* y *downstroke*). En los gráficos donde $\alpha(t)$ es la variable, se observa que la respuesta de C_T para la cinemática sinusoidal presenta una forma más armónica de la que se obtiene en la cinemática alternativa. Esta última presenta dos picos de C_T sobre los máximos ángulos de

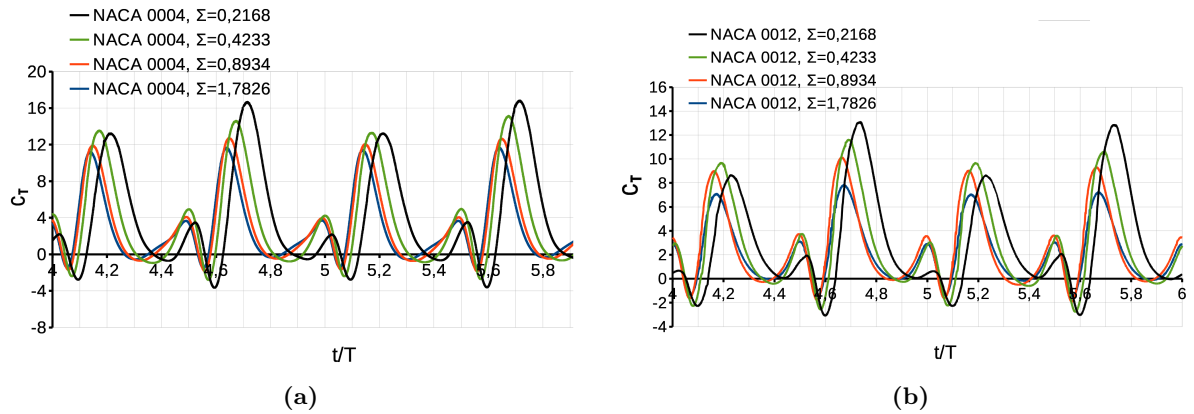


Figura 7.26: Coeficiente de tracción en la cinemática alternativa para los perfiles NACA 0004 y 0012 con $\delta^* = 8,71e^{-4}$.

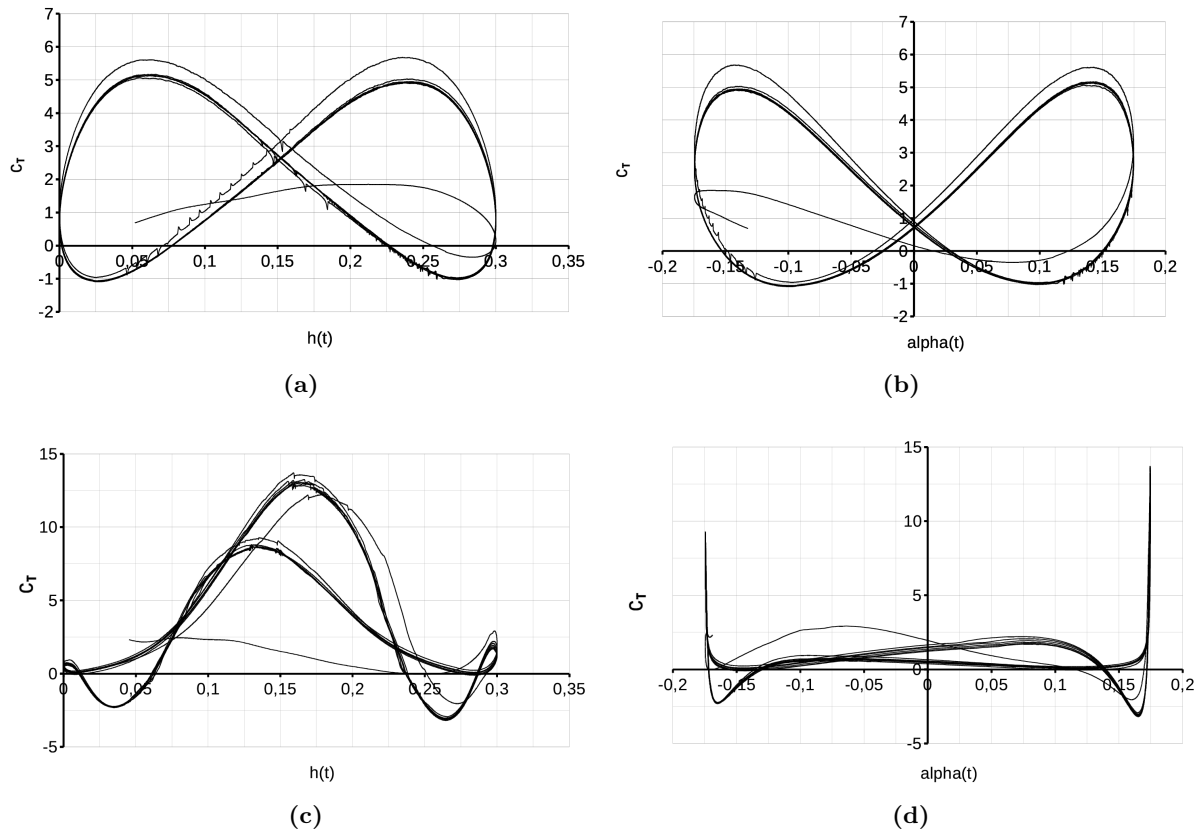


Figura 7.27: Coeficiente de tracción C_T en función del desplazamiento vertical $h(t)$ y el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$ para un perfil NACA 0012 con $\Sigma = 0,2168$. (a) y (b) cinemática sinusoidal y $\delta^* = 2,64e^{-3}$. (c) y (d) cinemática alternativa y $\delta^* = 8,71e^{-4}$.

ataque alcanzados. Es de hacer notar, que de acuerdo a la cinemática alternativa de $\alpha(t)$, dicho ángulo de ataque permanece un tiempo prolongado de la carrera sobre las posiciones máximas.

Insecto	Hawkmoth	Honeybee	Fruit Fly
c [m]	0.018	0.0043	0.0015
f [Hz]	27.3	190-250	200-340
ρ_s [kg/m ³]	2000	1800	1100
Re	4200	1900	130
h_a [m]	0.0299	0.00897	0.00357
Σ	0.4165	1.157	3.606

Tabla 7.1: Parámetros de vuelo y másicos de algunas especies de insectos.

7.4 Efecto de la flexibilidad en el movimiento sin corriente libre (*hovering*)

En capítulos anteriores se adelantaron algunos conceptos importantes también presentes en este tipo de vuelo. Generalmente se dividen en dos tipos diferentes de acuerdo a lo que se encuentra en la naturaleza: *hovering* asimétrico propio de aves e insectos de gran tamaño y *hovering* simétrico propio de aves e insectos de tamaño pequeño.

Una característica observada en aves e insectos y también en ciertos peces, es que durante el movimiento, sus alas y aletas no sólo presentan una determinada cinemática que permite un correcto desempeño fluido-dinámico, sino que también existe una deformación de la geometría que contribuye a dicho desempeño. A los mecanismos de captura de estela, de rápido giro de cabeceo y aprovechamiento de la pérdida dinámica, debe sumarse un nuevo efecto denominado cabeceo pasivo (descrito en el Capítulo 2). Este último está estrechamente vinculado con la relación entre la frecuencia de movimiento y la frecuencia natural de la estructura.

7.4.1 *Hovering* simétrico

El análisis a realizar sobre este tipo de vuelo, utiliza parámetros geométricos, dinámicos y aerodinámicos semejantes a los que se presentan en pequeñas aves, insectos o micro-vehículos. En la Tabla 7.1 se presentan valores de dichos parámetros en tres tipos diferentes de insectos, [133], [42], [65], [91].

La geometría utilizada para los casos a analizar, es representativa de una sección de ala de insecto como se muestra en la fig. 7.28. El espesor en el borde de ataque es 2% y decae linealmente con la cuerda hacia el borde de fuga. El mallado fluido-dinámico consta de elementos con un tamaño mínimo de 0.003c. El mallado estructural es similar al que se presenta en la fig. 7.2(b).

7.4.1.1 *Hovering* simétrico con movimiento de cabeceo

En el vuelo *hovering* simétrico con movimiento de cabeceo de perfiles rígidos, se genera propulsión debido a la convección de vórtices desde el borde de ataque y el borde de fuga en

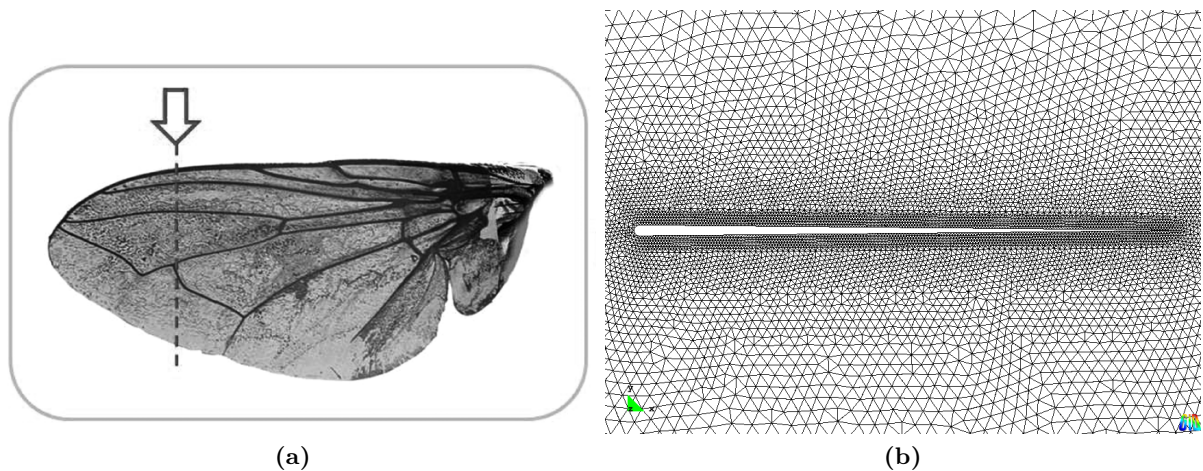


Figura 7.28: Geometría representativa de la sección del ala de un insecto utilizada para los análisis. (Imágen (a) tomada de [42]).

dirección paralela a la cuerda. Si se considera un perfil flexible, las fuerzas inerciales y de presión inducen una deformación que cambia la geometría efectiva del perfil, lo cual puede generar un cambio en la convección de dichos vórtices y obtener algún valor de tracción adicional.

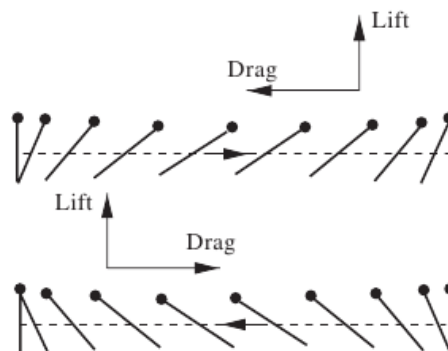


Figura 7.29: *Hovering* simétrico con movimiento de cabeceo.

Para el presente análisis, se toman los parámetros de vuelo y dinámicos de una especie de mariposa denominada *Hawkmoth* (*Macroglossum stellatarum*) que es una especie de lepidóptero ditrisio de la familia Sphingidae, y una especie de abeja, denominada *Honeybee* (*Apis*), que es un género de himenópteros ápidos (valores dados en la Tabla 7.1). Ambas especies son capaces de ejercer el tipo de vuelo *hovering* simétrico (fig. 7.29) con gran eficacia, además que presentan alas con una flexibilidad influyente en la aerodinámica. La especie *Hawkmoth* presenta la particularidad de tener grandes dimensiones comparadas con los demás insectos, lo que hace que el número de Reynolds de su vuelo sea elevado. Además, cuenta con la particularidad de volar de una manera similar a la que ejerce un colibrí, lo que causa que muchas veces sea confundido con el mismo.

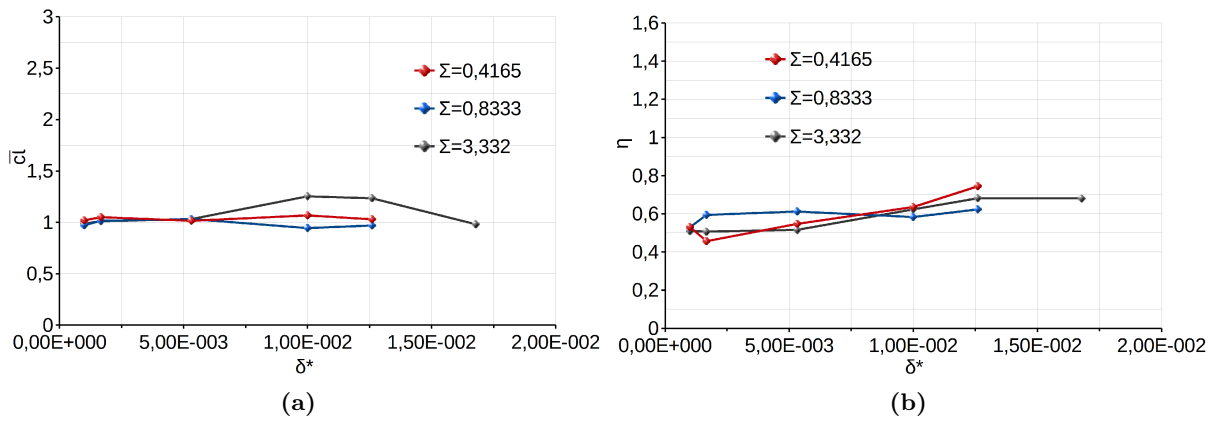


Figura 7.30: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l (a) y eficiencia propulsora o de sustentación η (b) para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* a $Re = 4200$.

El primer análisis que se presenta, es la simulación representativa de la especie *Hawkmoth* donde se toman como variables de estudio la flexibilidad δ^* en un rango $0,001 < \delta^* < 0,01678$ y el factor de intensidad de interacción Σ como variable paramétrica, en un rango $0,4165 < \Sigma < 3,332$. Se presentan como parámetros cinemáticos la amplitud media del movimiento vertical $h_a = 1,666$, la amplitud media del movimiento de cabeceo $\alpha_a = 30^\circ$, la frecuencia de ambos movimientos $f_h = f_\alpha = 0,49159[1/s]$ y el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$. El punto de pivot para la rotación de los perfiles a analizar se ubica al 0% de la cuerda. El coeficiente de potencia utilizado es C_{P_s} y su promedio \bar{c}_{p_s} , definido en la ec. 2.19, [134], y por ende se tiene en cuenta la potencia necesaria para contrarrestar las fuerzas de inercia.

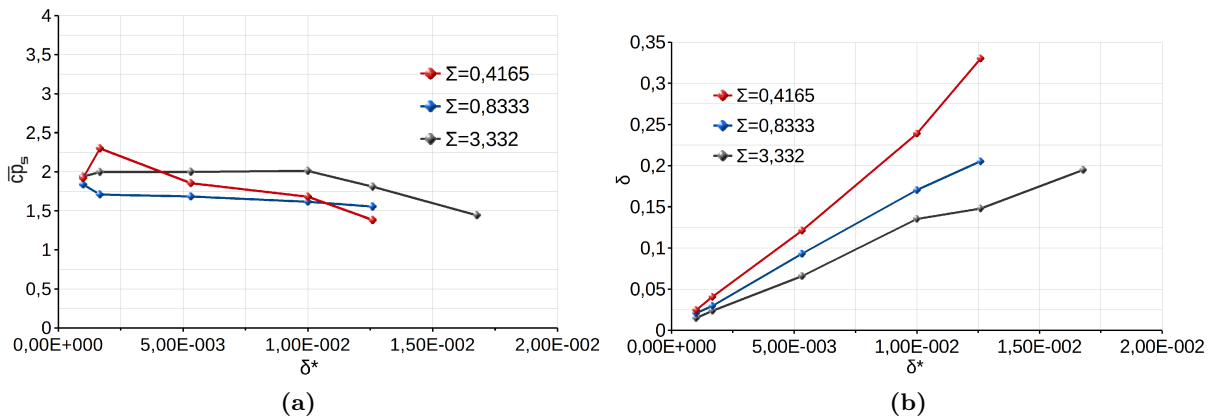


Figura 7.31: Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_{p_s} (a) y desplazamiento del borde de fuga δ (b), para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* a $Re = 4200$.

En la fig. 7.30 (a) y (b) se presentan el coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l y la eficiencia propulsora o de sustentación η respectivamente. Se observa que no existe una variación pronunciada de \bar{c}_l con la flexibilidad pero si un ligero aumento para $\Sigma = 3,332$. En cuanto a la

eficiencia η se puede decir que permanece prácticamente invariable y aproximadamente igual a 0,5 y 0,6 en todos los casos.

En la fig. 7.31 (a) se presenta el coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ con un ligero decrecimiento en función de la flexibilidad en los tres casos analizados. El desplazamiento del borde de fuga δ se grafica en la fig. 7.31 (b). El máximo desplazamiento se obtiene para el caso con mayor densidad estructural (factor $\Sigma = 0,4165$) como consecuencia de la presencia de mayores fuerzas inerciales. En la fig. 7.32(b), se observan los modos de rotación de la estructura que confirman que las fuerzas que gobiernan el problema son inerciales. En todos los casos el aumento de la flexibilidad δ^* produce que los modos de rotación se transformen de sincrónicos en avanzados.

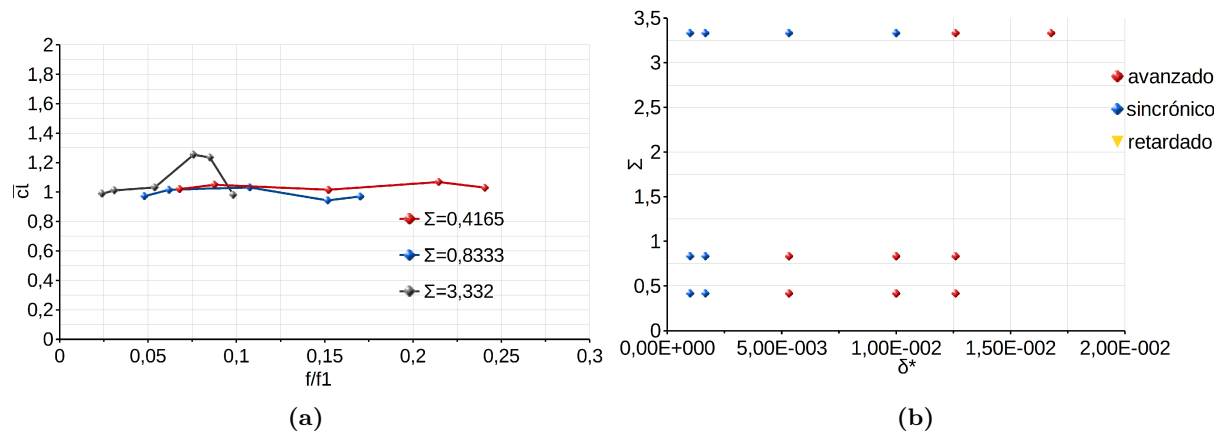


Figura 7.32: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función de la relación de frecuencias f/f_1 (a) y modos de rotación en función de las variables δ^* y Σ (b), para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* a $Re = 4200$.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l presenta una variación constante en los casos $\Sigma = 0,4165$ y $\Sigma = 0,8333$, en función de la relación f/f_1 , fig. 7.32(a). Para el valor de $\Sigma = 3,332$ existe un ligero incremento de \bar{c}_l sobre $f/f_1 = 0,07585$.

El siguiente caso analizado es la simulación representativa de la especie *Honeybee* donde se toman como variables de estudio la flexibilidad δ^* en un rango $0,001 < \delta^* < 0,0158$ y el factor de intensidad de interacción Σ como variable paramétrica, en un rango $0,57861 < \Sigma < 4,1666$. Se presentan como parámetros cinemáticos la amplitud del movimiento vertical $h_a = 2,083$, la amplitud del movimiento de cabeceo $\alpha_a = 30^\circ$, las frecuencias de ambos movimientos son iguales a $f_h = f_\alpha = 1,032[1/s]$ y el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l se presenta en la fig. 7.33(a). Para los casos $\Sigma = 0,57861$ y $\Sigma = 1,1572$, \bar{c}_l se mantiene cuasi-constante con el incremento de flexibilidad. Para el caso con $\Sigma = 4,1666$, \bar{c}_l decrece hasta un mínimo en $\delta^* = 0,01$ y luego se incrementa a $\bar{c}_l = 1,169$ en $\delta^* = 0,0158$. La eficiencia propulsora η fig. 7.33(b) presenta un incremento con δ^* en los tres casos estudiados debido a que el coeficiente de potencia alternativa promedio $\bar{c}p_s$

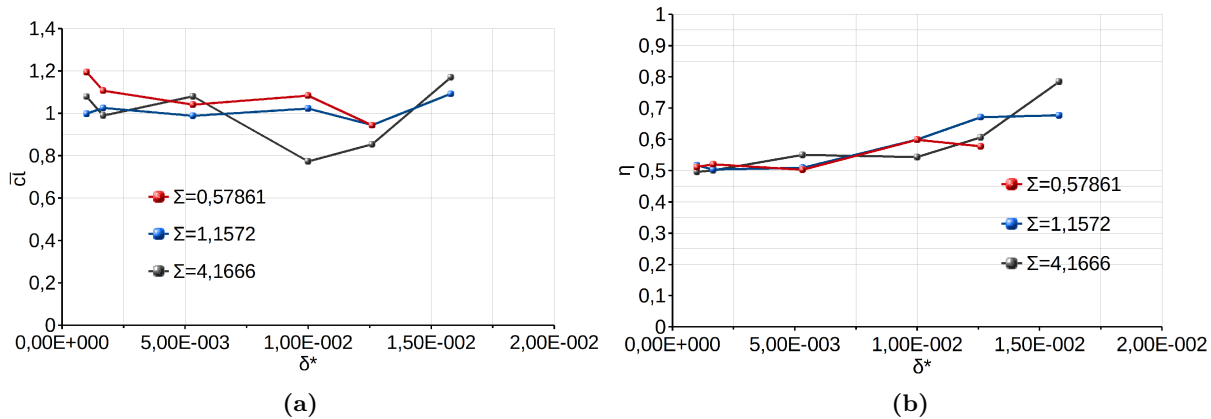


Figura 7.33: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l (a) y eficiencia propulsora o de sustentación η (b) para una simulación representativa de la especie *Honeybee* a $Re = 1800$.

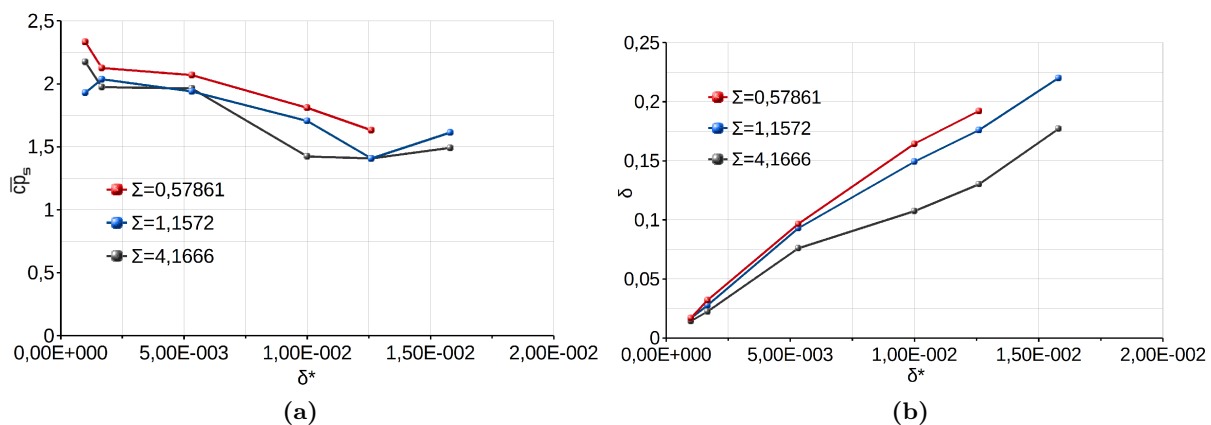


Figura 7.34: Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_{p_s} (a) y desplazamiento del borde de fuga δ (b) para una simulación representativa de la especie *Honeybee* a $Re = 1800$.

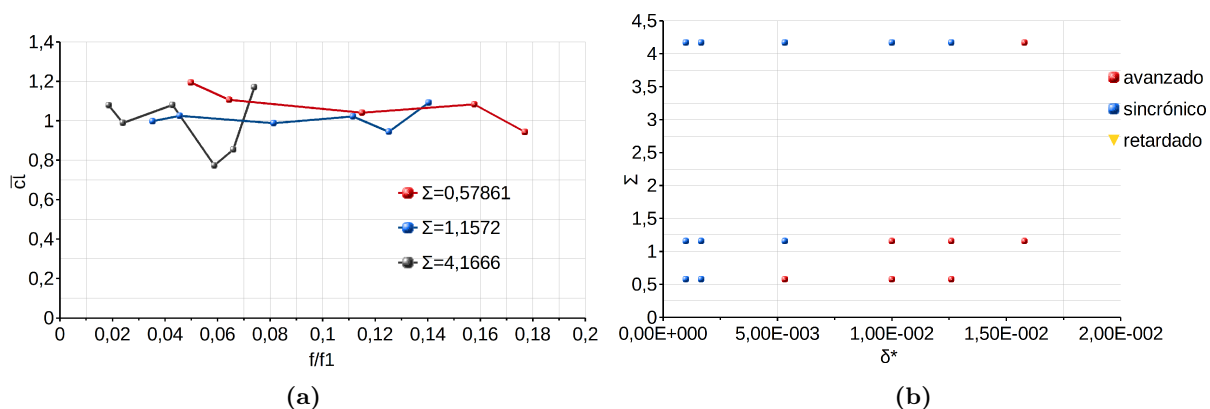


Figura 7.35: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l (a) y modos de rotación en función de las variables δ^* y Σ (b) para una simulación representativa de la especie *Honeybee* a $Re = 1800$.

fig. 7.34(a) disminuye con dicha variable.

El desplazamiento del borde de fuga δ se presenta en la fig. 7.34(b). El máximo desplazamiento obtenido se alcanza en la estructura con mayor densidad estructural $\Sigma = 0,57861$. En la fig. 7.35(b) se grafican los modos de rotación de la estructura. Las fuerzas que gobiernan el problema son inerciales, debido a que dichos modos se transforman de sincrónicos en avanzados con el aumento de la flexibilidad.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función de la relación de frecuencias f/f_1 se presenta en la fig. 7.35(a). El coeficiente \bar{c}_l presenta un mínimo en $0,04 < f/f_1 < 0,065$ para $\Sigma = 4,1666$. Para los casos $\Sigma = 0,57861$ y $\Sigma = 1,1572$ el valor de \bar{c}_l se mantiene cuasi-constante.

7.4.1.2 *Hovering* simétrico sin movimiento de cabeceo

En el vuelo *hovering* simétrico sin movimiento de cabeceo de perfiles rígidos (fig. 7.36), no se genera propulsión debido a la convección simétrica y en dirección contraria de vórtices desde el borde de ataque y el borde de fuga. Por otro lado, si se considera un perfil con flexibilidad, las fuerzas inerciales y de presión producen una deformación que cambia la geometría efectiva del perfil, lo cual puede generar un cambio en la convección de vórtices y obtener algún valor de tracción.

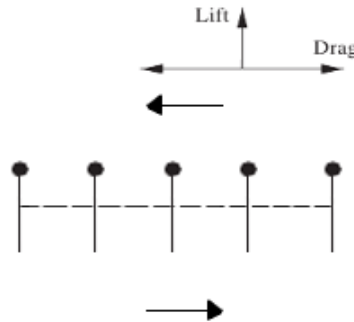


Figura 7.36: *Hovering* simétrico sin movimiento de cabeceo.

Para este análisis, también se toman los parámetros de vuelo y dinámicos de la especie de mariposa *Hawkmoth* y de la especie de abeja, *Honeybee*(*Apis*).

El primer análisis que se presenta, es la simulación representativa de la especie *Hawkmoth* donde se toman como variables de estudio la flexibilidad δ^* en un rango $0,001 < \delta^* < 0,01678$ y el factor de intensidad de interacción Σ como variable paramétrica, en un rango $0,4165 < \Sigma < 3,332$. Además se analizan dos tipos de cinemáticas diferentes: la primera es de tipo sinusoidal y la segunda responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$, (fig. 6.65). Ambas presentan como parámetros la amplitud $h_a = 1,666$ y la frecuencia $f_h = 0,49159[1/s]$.

En los siguientes casos a analizar, sólo se utiliza la parte positiva de los términos que conforman la potencia demandada, y por ende se tiene en cuenta la potencia necesaria para contrarrestar las fuerzas de inercia.

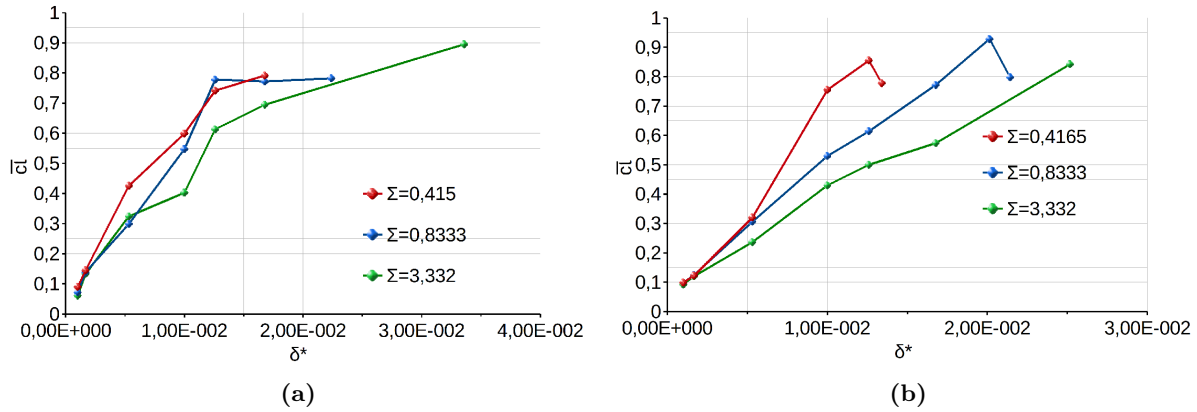


Figura 7.37: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

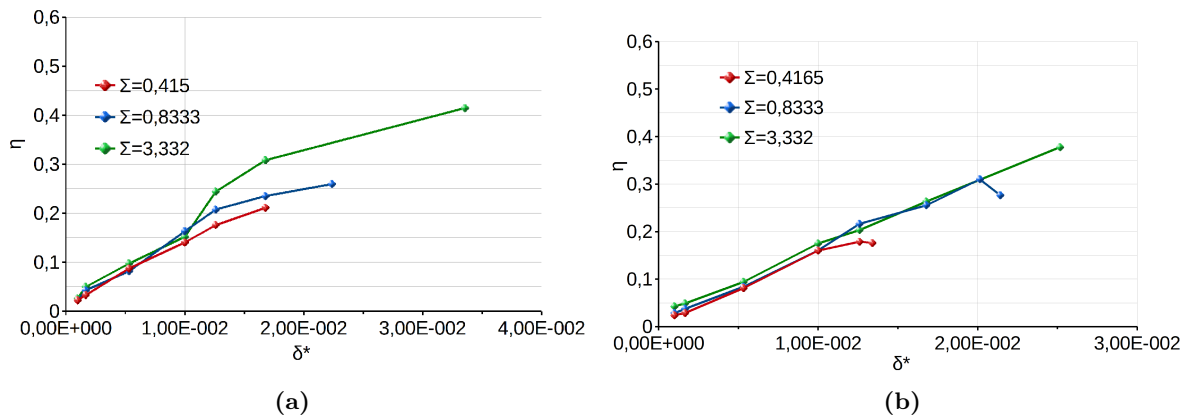


Figura 7.38: Coeficiente de eficiencia η para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

El coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}_l = \bar{c}_t$ (equivalente al coeficiente de tracción promedio), obtenido por ambas cinemáticas estudiadas se presenta en la fig. 7.37. Se observa que el coeficiente \bar{c}_l se incrementa con el aumento de flexibilidad δ^* , debido a que la deformación del perfil hace que los vórtices generados en el borde de ataque LEV se convecten hacia el borde de fuga y que la intensidad de los vórtices generados en el borde de fuga sea mayor que en perfiles rígidos. Los perfiles con menor Σ presentan mayor gradiente de crecimiento de \bar{c}_l con el aumento de flexibilidad. Esto se debe que que las fuerzas inerciales producen mayor velocidad de deformación y como consecuencia mayor intensidad en los vórtices del borde de fuga TEV. A su vez, se observa que al aumentar el valor de Σ , los máximos valores de cada curva se pre-

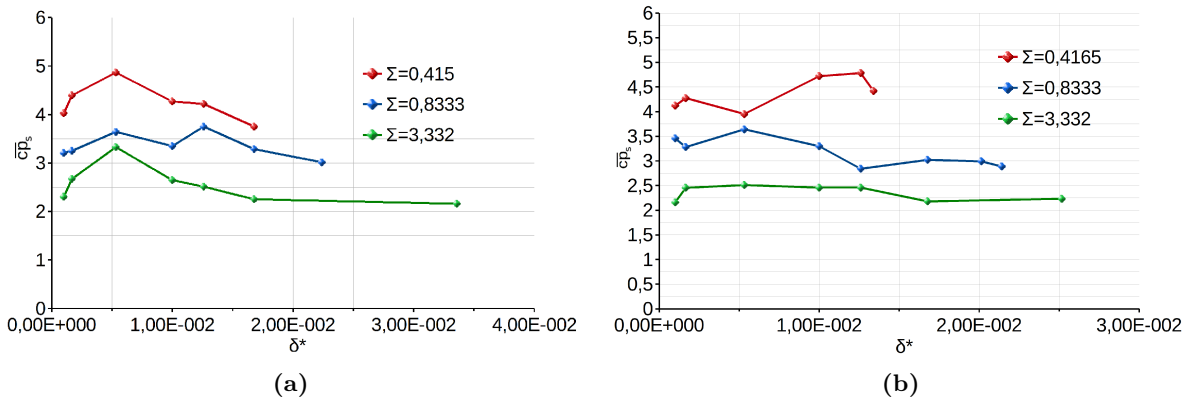


Figura 7.39: Coeficiente de potencia alternativa promedio $\bar{c}p_s$ para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

sentan para mayores valores de flexibilidad. De la comparación entre ambas cinemáticas, surge que para $\Sigma = 0,415$, el gradiente de crecimiento de sustentación es mayor en la cinemática alternativa y para $\Sigma = 0,8333$ y $\Sigma = 3,332$ en la cinemática sinusoidal.

La eficiencia propulsora se presenta en la fig. 7.38. Se observa que en ambas cinemáticas los valores de η permanecen similares hasta un valor de flexibilidad aproximadamente de $\delta^* = 1e^{-2}$ en los tres casos de Σ estudiados. Luego la curva de eficiencia se prolonga para $\Sigma = 3,332$ a medida que se incrementa la flexibilidad. Es decir que para perfiles con menor densidad estructural se obtienen mayores valores de eficiencia. η es función del coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ que se presenta en la fig. 7.39. Los mayores valores de $\bar{c}p_s$ se presentan sobre perfiles con mayor densidad ρ_s (menores valores de Σ).

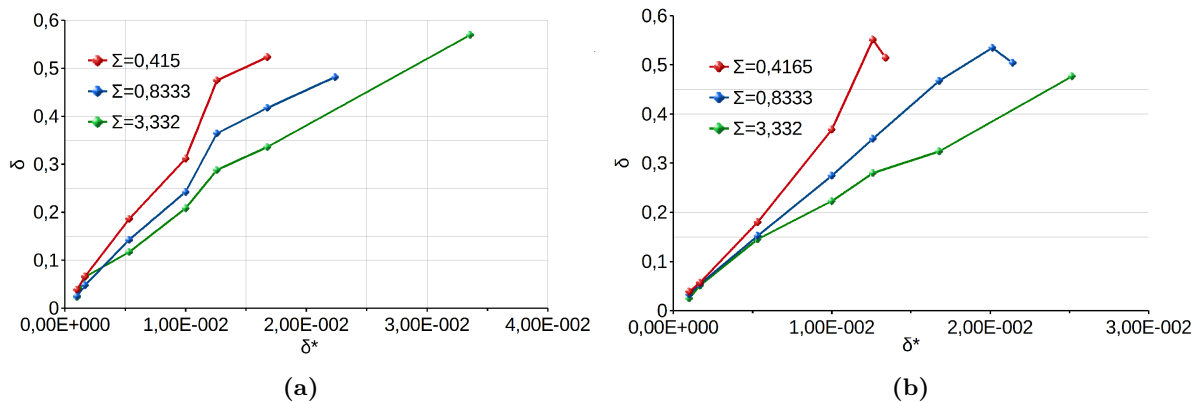


Figura 7.40: Máximo desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

En la fig. 7.40 se presenta el desplazamiento máximo alcanzado por el borde de fuga durante la simulación, en función de la flexibilidad. Se observa la variación que existe entre los gradientes

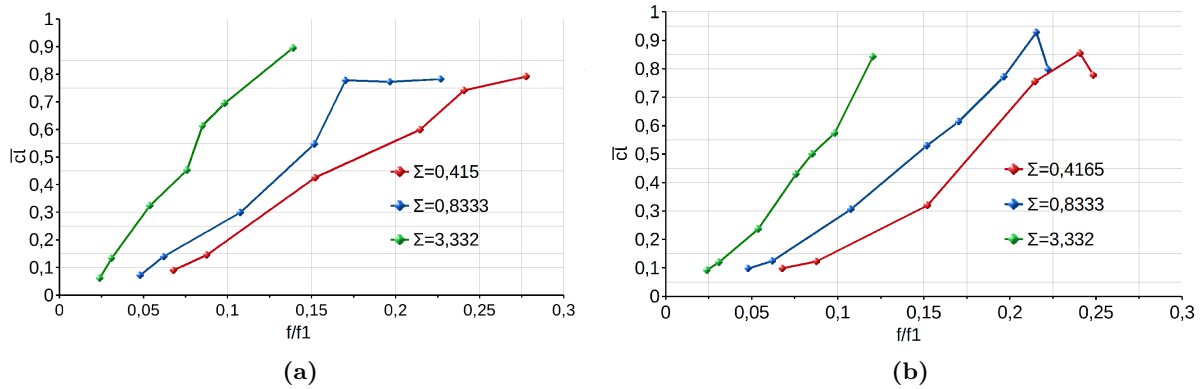


Figura 7.41: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* en función de la relación de frecuencias f/f_1 a $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

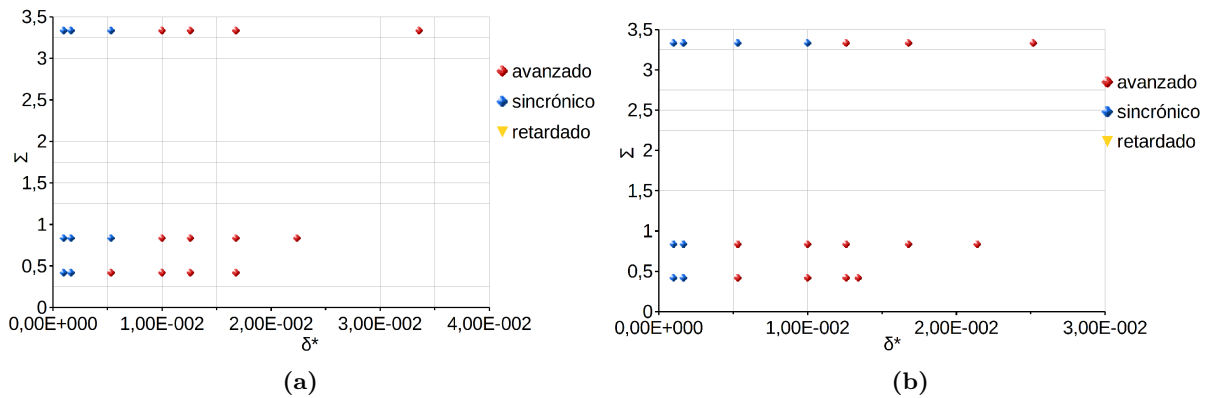


Figura 7.42: Distribución de los modos de rotación avanzado, sincrónico y retardado en función de las variables δ^* y Σ para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* a $Re = 4200$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

para las diferentes curvas de Σ sobre ambas cinemáticas. Los mayores gradientes se obtienen para los menores valores de Σ estudiados en ambas cinemáticas, que se corresponden con los perfiles con mayor densidad estructural.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función de la relación de frecuencias f/f_1 se presenta en la fig. 7.41. El coeficiente \bar{c}_l se incrementa con el aumento de f/f_1 . Los valores máximos obtenidos en el análisis, corresponden a frecuencias de movimiento significativamente menores a las frecuencias naturales del perfil. Las fuerzas inerciales y fluido-dinámicas intervinientes en la cinemática estudiada, provocan deformaciones considerables de la estructura, con poco aumento de la flexibilidad. En la fig. 7.42 se observan los modos de rotación para los casos analizados. A valores bajos de δ^* , los modos son sincrónicos y al disminuir δ^* los modos tienden a ser avanzados. En ambas cinemáticas estudiadas se observa el mismo comportamiento.

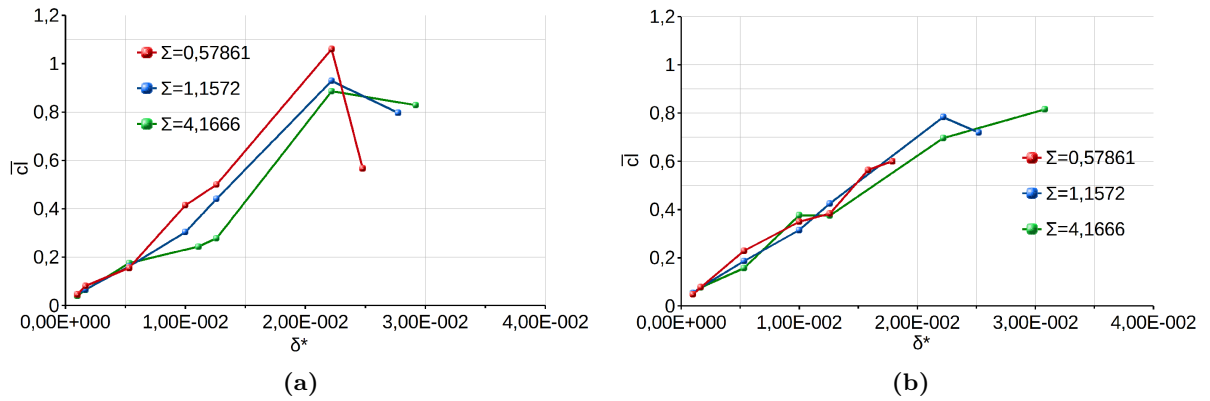


Figura 7.43: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

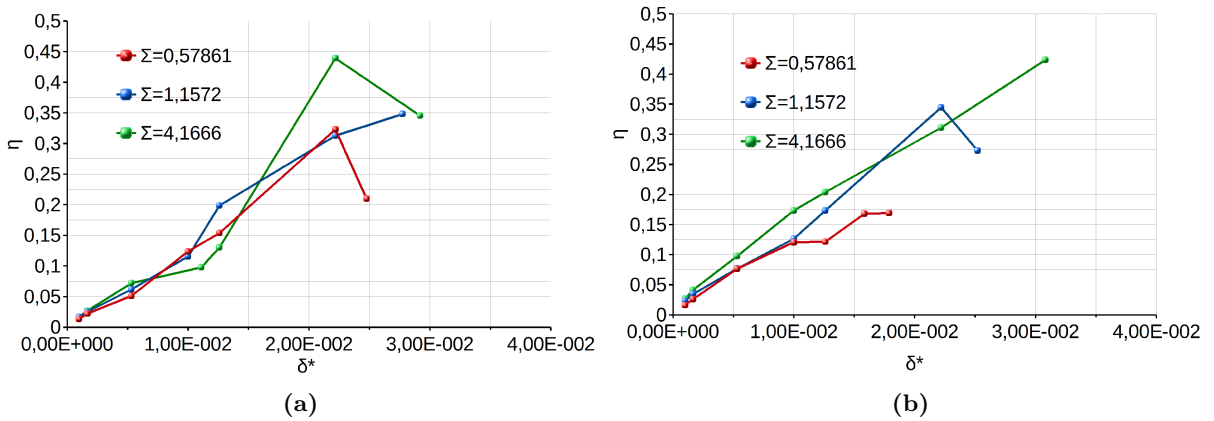


Figura 7.44: Coeficiente de eficiencia η para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

El segundo estudio que se realiza, es la simulación representativa de la especie *Honeybee*, donde se toman como variables de estudio la flexibilidad δ^* en un rango $0,001 < \delta^* < 0,02219$ y el factor de intensidad de interacción Σ como variable paramétrica, en un rango $0,5786 < \Sigma < 4,1666$. Además se analizan dos tipos de cinemáticas diferentes: la primera es de tipo sinusoidal y la segunda responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$, (fig. 6.65). Ambas presentan como parámetros constitutivos la amplitud $h_a = 2,083$ y la frecuencia $f_h = 1,032$.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l se presenta en la fig. 7.43. En todos los casos el coeficiente de sustentación aumenta con la flexibilidad del perfil. La cinemática sinusoidal presenta mayores gradientes de crecimiento para los tres valores de Σ estudiados. En ambas cinemáticas no se presentan diferencias significativas entre los valores de \bar{c}_l para bajos valores de δ^* debido a la poca deformación de la geometría. Al incrementar δ^* , los mayores de valores

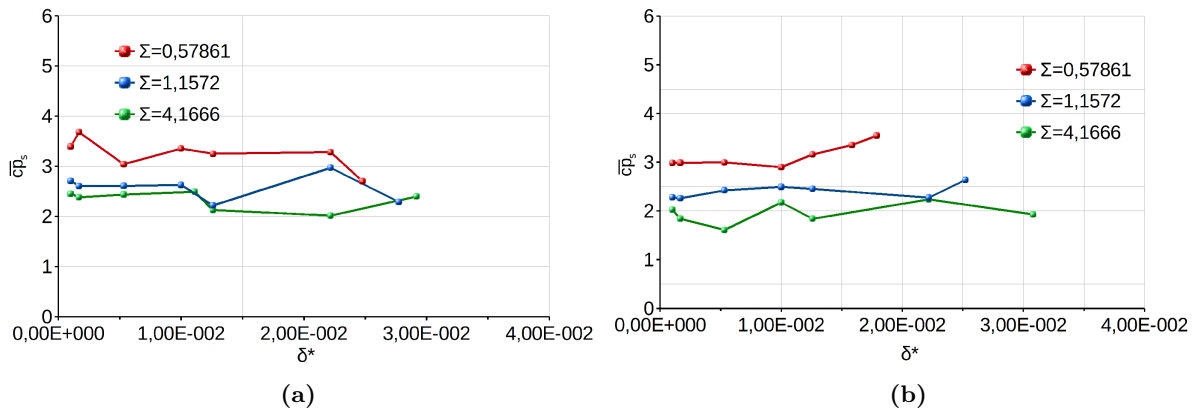


Figura 7.45: Coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

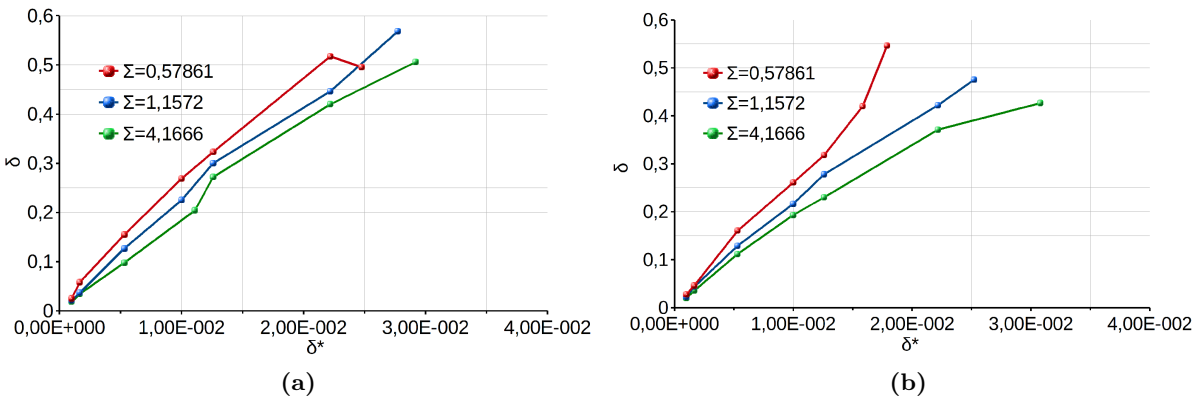


Figura 7.46: Máximo desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

de sustentación se obtienen con la cinemática sinusoidal para los perfiles con menor valor de Σ . En la cinemática alternativa los valores de $\bar{c}l$ no presentan una variación significativa con Σ .

La eficiencia propulsora o de sustentación se presenta en la fig. 7.44. Al igual que la sustentación, la eficiencia η aumenta con la flexibilidad. El máximo valor alcanzado se obtiene en la cinemática sinusoidal para un valor de $\Sigma = 4,1666$. En ambas cinemáticas se observa que la eficiencia propulsora es menor para perfiles con mayor densidad ρ_s debido a que el coeficiente de potencia promedio $\bar{c}p_s$ es superior en estas geometrías. Dicho valor de $\bar{c}p_s$ no es afectado significativamente por la flexibilidad δ^* como se observa en la fig. 7.45.

El desplazamiento máximo alcanzado por el borde de fuga se presenta en la fig. 7.46. Los máximos valores obtenidos se dan para los casos de menor Σ (mayor densidad estructural del perfil) en ambas cinemáticas.

El coeficiente de sustentación promedio $\bar{c}l$ en función de la relación de frecuencias f/f_1 se

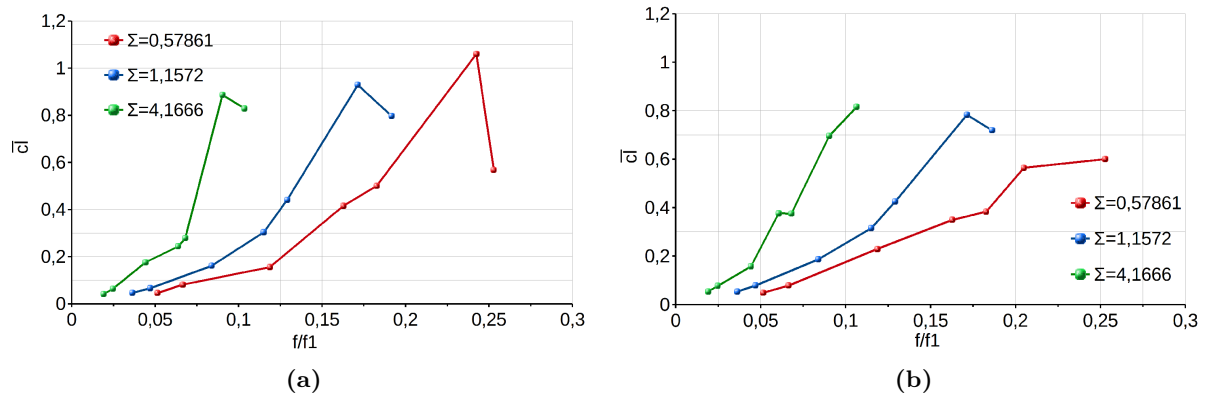


Figura 7.47: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para una simulación representativa de la especie *Honeybee* en función de la relación de frecuencias f/f_1 a $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

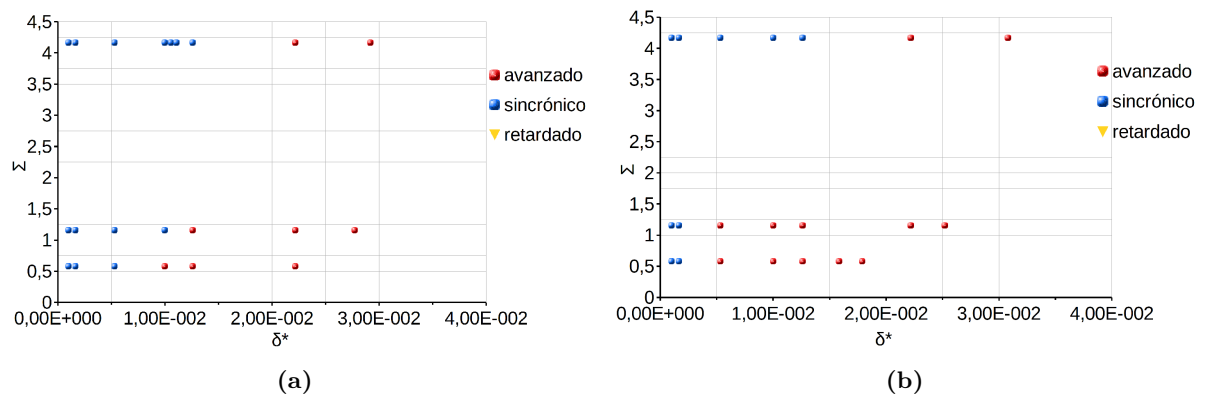


Figura 7.48: Distribución de los modos de rotación avanzados, sincrónicos y retardados en función de las variables δ^* y Σ para una simulación representativa de la especie *Honeybee* a $Re = 1800$. (a) Cinemática sinusoidal. (b) Cinemática alternativa.

presenta en la fig. 7.47. Se encuentra que el coeficiente de sustentación es sensible a la variación de f/f_1 . Los valores máximos de \bar{c}_l se obtienen para frecuencias de movimiento inferiores a la frecuencia natural de la estructura. Con el incremento de la densidad ρ_s , el gradiente de \bar{c}_l cae con la relación f/f_1 .

Los modos de rotación se presentan en la fig. 7.48. Se observa que para bajas flexibilidades los modos se mantienen sincrónicos, y conforme esta aumenta, las fuerzas de inercia provocan que dichos modos se transformen en avanzados. En la cinemática alternativa se presentan mayores aceleraciones inerciales, por ende los modos de rotación avanzados se manifiestan para menores valores de flexibilidad respecto a la cinemática sinusoidal.

7.4.1.3 *Hovering* simétrico sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical

El presente análisis es una variante del movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo, y con la introducción de un movimiento vertical (fig 7.49). Tanto el movimiento horizontal como el vertical responden a una cinemática sinusoidal. Se implementan los mismos parámetros de vuelo y dinámicos de la especie *Hawkmoth* y la especie *Honeybee* que se estudiaron anteriormente.

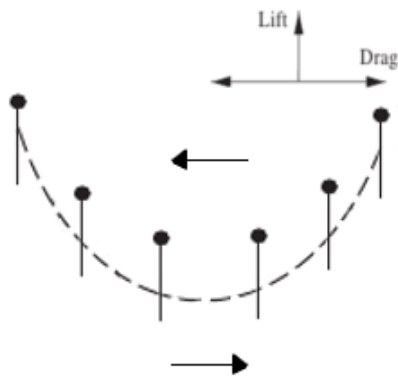


Figura 7.49: *Hovering* simétrico sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

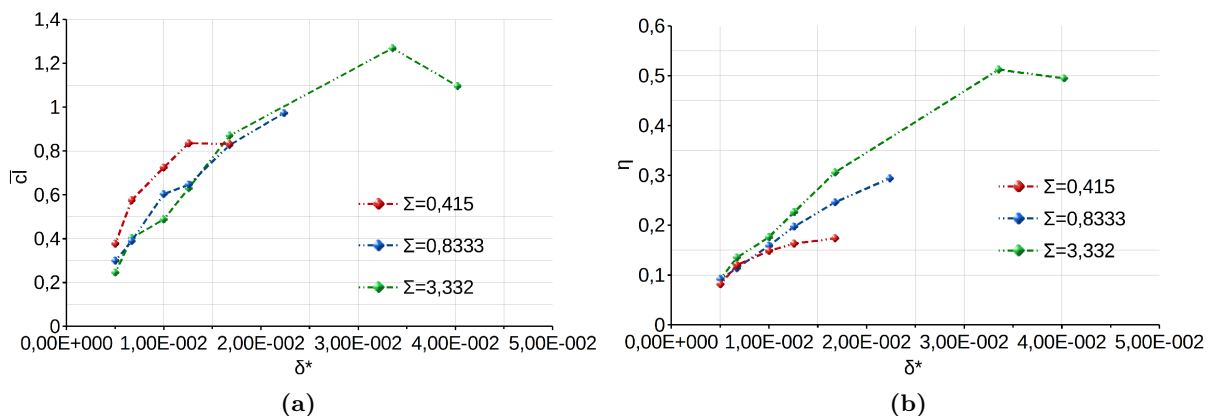


Figura 7.50: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l y eficiencia propulsora η para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

El primer análisis responde a la cinemática correspondiente a la especie *Hawkmoth*. Los parámetros de vuelo son la amplitud de movimiento $h_a = 1,666$ y la frecuencia $f_h = 0,49159[1/s]$. El movimiento vertical introducido responde a una cinemática sinusoidal con una amplitud $h_v = 0,25$ y una frecuencia igual a $f_v = 0,49159[1/s]$. El parámetro variable es la flexibilidad $0,005 < \delta^* < 0,04024$ y la variable paramétrica el factor FSI $0,415 < \Sigma < 3,332$. En las figs. 7.50 (a) y (b) se presenta el coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l y la eficiencia propulsora

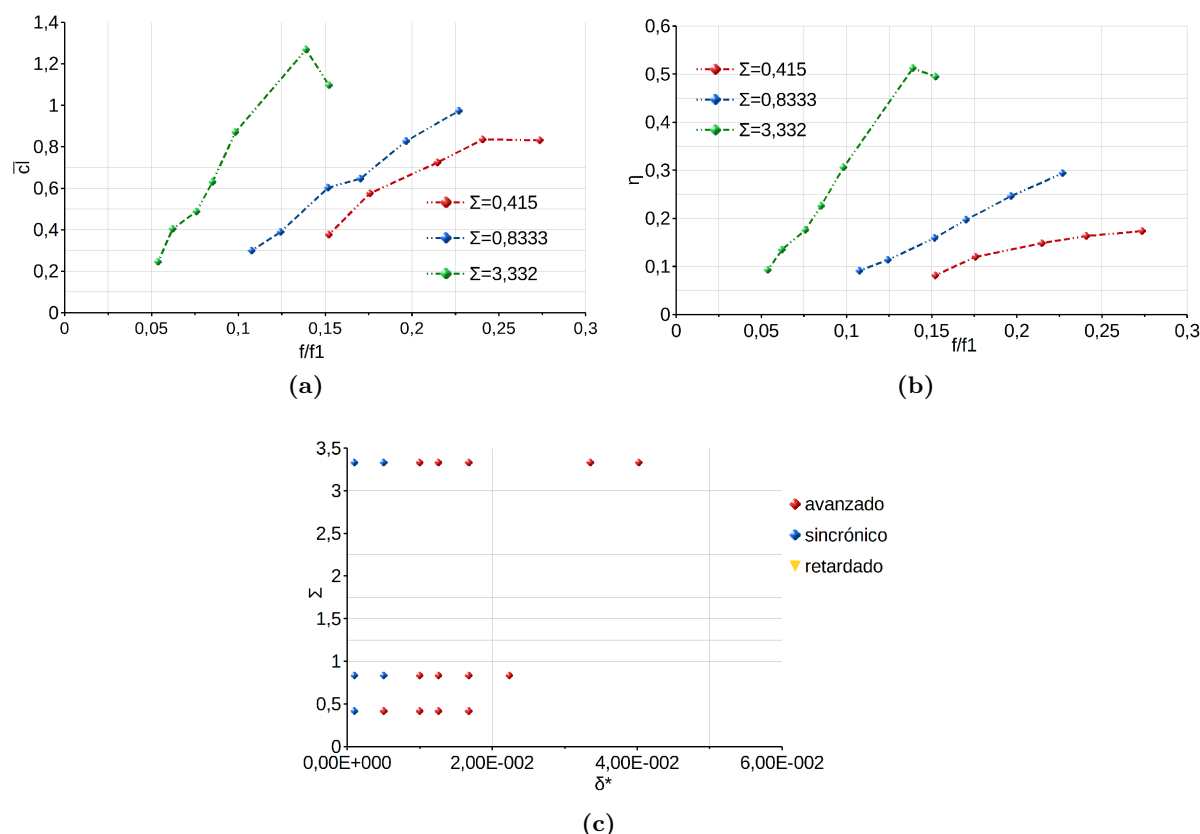


Figura 7.51: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l , eficiencia propulsora η en función de f/f_1 y distribución de los modos de rotación para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $Re = 4200$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

η . El motivo del análisis fue observar si a través del movimiento vertical introducido, es posible incrementar el coeficiente de tracción y su eficiencia respecto al análisis anterior (Sec. 7.4.1.2). Se observa que no existe una notable variación para los perfiles con $\Sigma = 0,415$ y $\Sigma = 0,8333$, pero si un incremento significativo en \bar{c}_l y η para los perfiles con $\Sigma = 3,332$. En las figs. (a) y (b) se presentan los coeficientes \bar{c}_l y η en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Los modos de rotación para el presente caso se observan en la fig. (c). El desplazamiento vertical δ y el coeficiente de potencia introducida \bar{c}_{p_s} en función de la flexibilidad δ^* se pueden observar en el Apéndice D (Fig. D1).

El segundo análisis responde a la cinemática de la especie *Honeybee*. Los parámetros de vuelo son la amplitud de movimiento $h_a = 2,083$ y la frecuencia $f_h = 1,032[1/s]$. El movimiento vertical introducido responde a una cinemática sinusoidal con una amplitud $h_v = 0,25$ y una frecuencia igual a $f_v = 1,032[1/s]$. El parámetro variable es la flexibilidad $0,005 < \delta^* < 0,04024$ y la variable paramétrica el factor FSI en $0,57861 < \Sigma < 4,1666$. En las figs. 7.50 (a) y (b) se presentan el coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l y la eficiencia propulsora η . El coeficiente \bar{c}_l se incrementa para los valores con $\Sigma = 4,1666$ y $\Sigma = 1,1572$ respecto a lo obtenido en el análisis

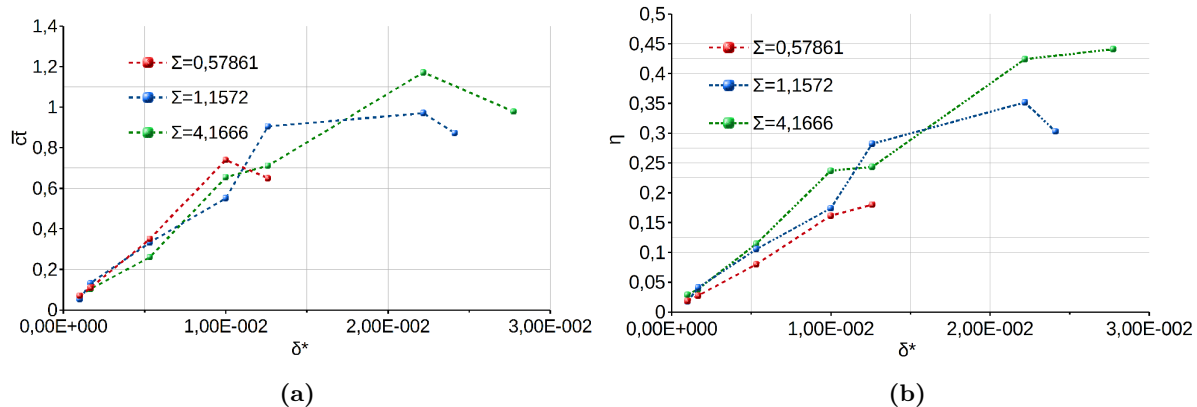


Figura 7.52: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l y eficiencia propulsora η para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

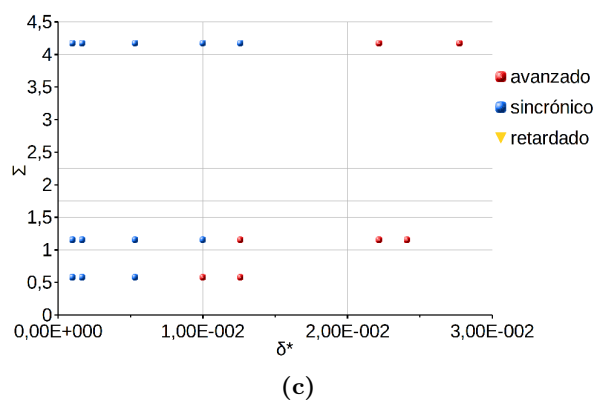
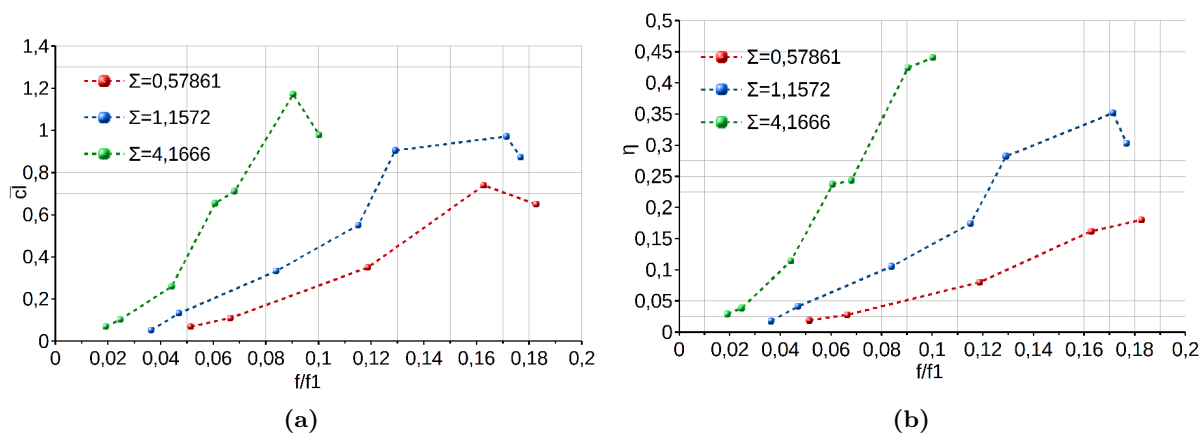


Figura 7.53: Coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l , eficiencia propulsora η en función de f/f_1 y distribución de los modos de rotación para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $Re = 1800$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

anterior (Sec. 7.4.1.2) de la especie *Honeybee*. La eficiencia propulsora η se comporta de manera similar en los tres casos de Σ estudiados. Dicho incremento en $\bar{c}l$ se observa en la fig. 7.53(a) donde además se grafica la eficiencia propulsora η en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Los modos de rotación para el presente caso se presentan en la fig. 7.53(c). El desplazamiento vertical δ y el coeficiente de potencia introducida $\bar{c}p_s$ en función de la flexibilidad δ^* se pueden observar en el Apéndice D (Fig. D2).

7.4.2 *Hovering* Asimétrico

A diferencia del vuelo *Hovering* simétrico, la carrera de este tipo de vuelo se ejerce sobre un plano inclinado con un ángulo β_p como se observa en la fig. 7.54. El principal objetivo es generar sustentación y propulsión controlada en una maniobra que se observa comunmente en aves e insectos, al realizar una aproximación a la superficie donde va a posarse. El objetivo es mantener el vuelo suspendido en una posición por un instante, para luego asentarse de manera suave. Lo que se observa en aves es que la principal componente de sustentación se da en la carrera del ala hacia abajo *downstroke*, y en la carrera hacia arriba *upstroke* el ángulo de ataque es disminuido con el objetivo de minimizar la sustentación hacia abajo.

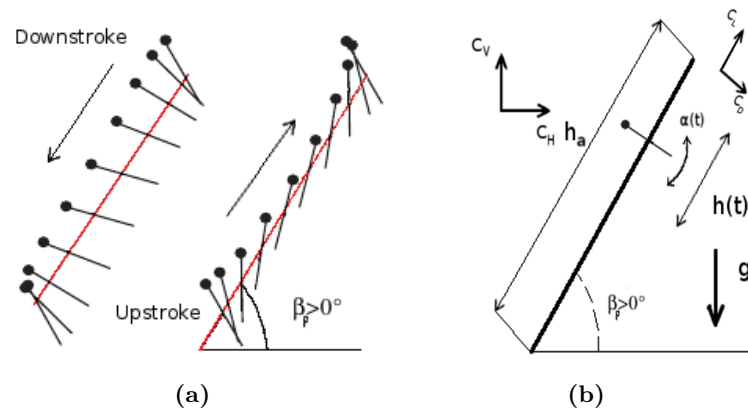


Figura 7.54: *Hovering* asimétrico sobre un plano con una inclinación β_p .

Para el estudio se implementan los parámetros de vuelo y dinámicos de una especie de libélula (Anisoptera, *Dragonfly*) ya que es un ejemplar que ejerce el tipo de vuelo *hovering* asimétrico [130]. El número de Reynolds característico de la especie es $Re = 1256$, con un plano de inclinación de la carrera igual a $\beta_p = 62,8^\circ$, media amplitud de movimiento $h_a = 2,5$, la frecuencia del desplazamiento y del movimiento de cabeceo iguales a $f_h = f_\alpha = 1$, media amplitud de cabeceo igual a $\alpha_a = 30^\circ$ y la geometría a utilizar es la misma que se presenta en la fig. 7.28. El punto de pivot para la rotación de los perfiles a analizar se ubica al 0% de la cuerda. Para los siguientes casos se determinan el coeficiente de fuerza vertical C_V que cuenta con la misma dirección que la fuerza de gravedad, y el coeficiente de fuerza horizontal C_H , con

sentido perpendicular a C_V (fig. 7.54). Ambos coeficientes se pueden calcular en función de los coeficientes de sustentación C_L y resistencia C_D de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C_H &= -C_D \sin(\beta_p) - C_L \cos(\beta_p) \\ C_V &= C_L \sin(\beta_p) + C_D \cos(\beta_p) \end{aligned} \quad (7.2)$$

El análisis tiene el objetivo de estudiar la influencia de la variación de flexibilidad δ^* y el factor de interacción FSI Σ sobre los coeficientes de fuerzas C_V y C_H , sus eficiencias, desplazamientos, etc. El coeficiente de flexibilidad varía en un rango $3,24e^{-3} < \delta^* < 0,0196$ y el factor FSI en un rango $0,625 < \Sigma < 12,5$.

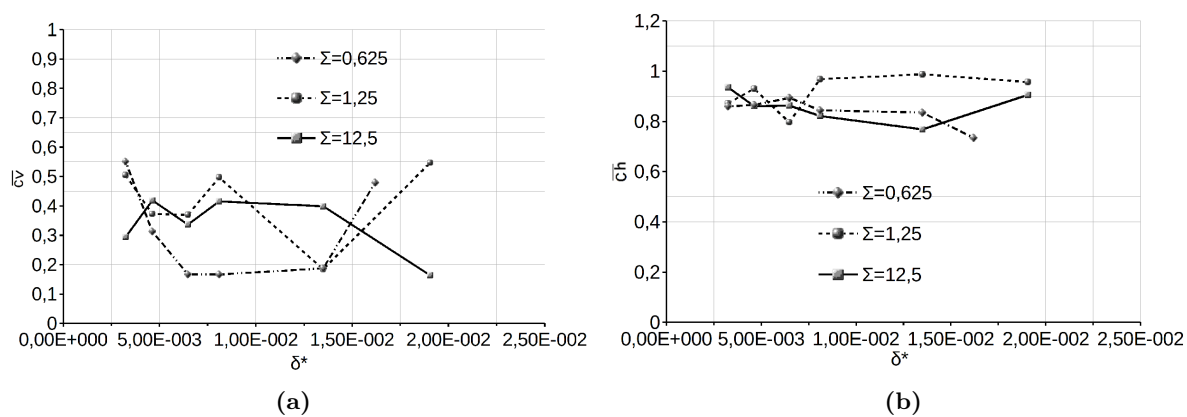


Figura 7.55: Coeficientes de fuerza vertical \bar{c}_v (a) y horizontal \bar{c}_h (b) promedios. Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$.

Los coeficientes de fuerza vertical \bar{c}_v y horizontal \bar{c}_h promedios se presentan en la fig. 7.55(a) y (b) respectivamente. El coeficiente \bar{c}_h tiene poca variación con δ^* para los tres casos del factor FSI simulados. Para este caso el coeficiente de fuerza propulsiva horizontal \bar{c}_h es mayor que el que se obtiene en la dirección vertical de sustentación \bar{c}_v . Esto quiere decir, que se obtiene más ganancia en avance que en sustentación.

Las eficiencia de la fuerza vertical η_v y la fuerza horizontal η_h se presentan en las figs. 7.56 (a) y (b) respectivamente. La variación de ambas eficiencias, es de manera similar a los coeficientes de fuerza, debido a que el coeficiente de potencia \bar{c}_{p_s} 7.56 (c) permanece cuasi-constante con la flexibilidad. La diferencia encontrada entre los coeficientes \bar{c}_{p_s} para los diferentes valores de Σ es consecuencia de la inercia de la estructura.

Los modos de rotación de los perfiles se presentan en la fig. 7.56 (d). Con el incremento de flexibilidad y de densidad del perfil las deformaciones presentes en la estructura son mayores, y los modos de rotación tienden a ser avanzados respecto al movimiento impuesto. Las deformaciones máximas del borde de fuga y los coeficientes de fuerza y sus eficiencias en función de la relación de frecuencias f/f_1 , se pueden observar en el Apéndice D (Figs. D3 y D4).

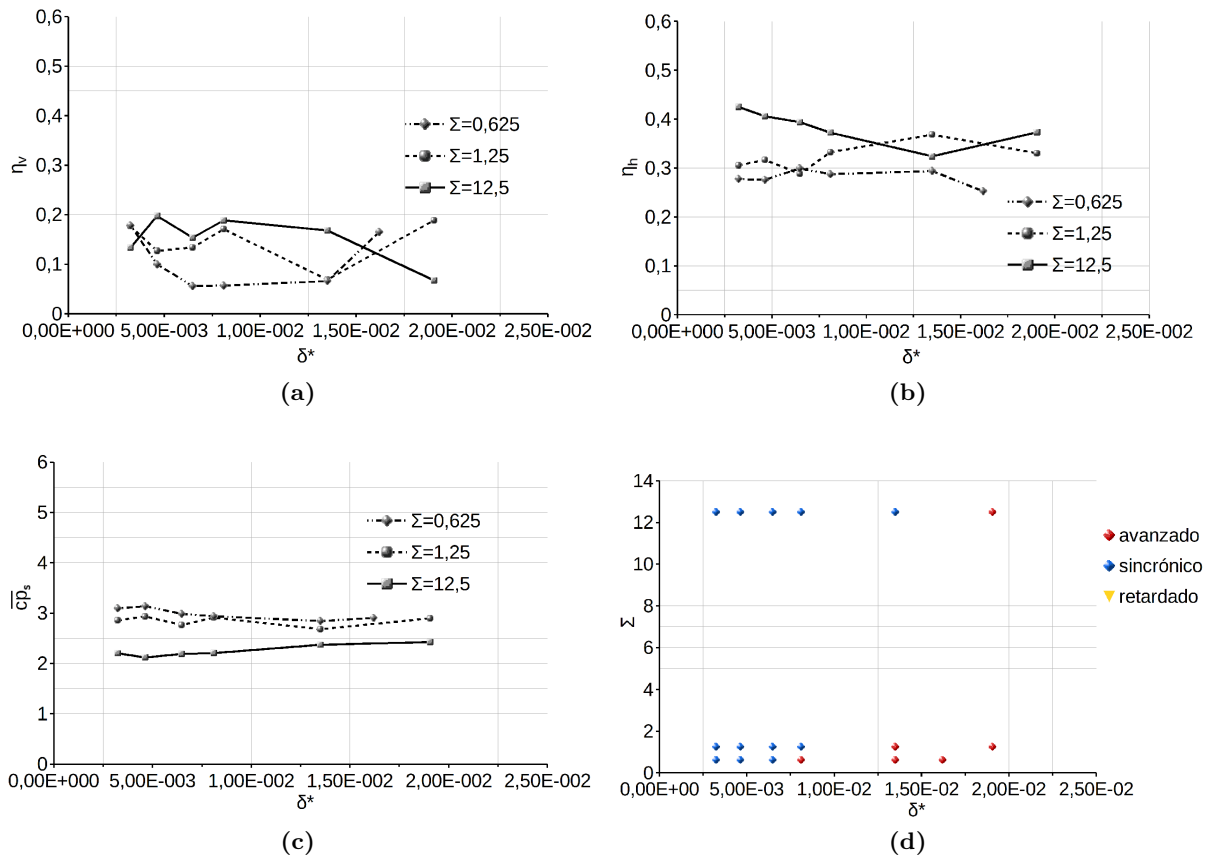


Figura 7.56: Eficiencia propulsiva vertical η_v (a) y horizontal η_h (b). Coeficiente de potencia promedio $\overline{cp_s}$ (c) y modos de rotación (d). Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$.

Mediante la ec. 7.2 puede determinarse el conjunto de coeficientes de fuerzas C_H y C_V para diferentes planos de carrera β_p , debido a que no se cuenta con la presencia de una corriente libre y los términos gravitatorios sobre el fluido son despreciables. A continuación se presenta un estudio de los coeficientes de fuerzas en función de t/T para diferentes planos de carrera β_p . El caso seleccionado para dicho estudio es el correspondiente a $\Sigma = 1,25$ y $\delta^* = 8,1e^{-3}$. En la fig. 7.57 se grafican los coeficientes C_H y C_V en función de t/T para diferentes planos de carrera β_p . El coeficiente C_H presenta sus valores máximos sobre la carrera de *upstroke*. Además en la Tabla 7.2 se observan los coeficientes promedios de fuerza horizontal \overline{ch} y vertical \overline{cv} . El máximo \overline{ch} se da para el plano de carrera igual a $\beta_p = 75^\circ$ y disminuye con el aumento de β_p . El coeficiente C_V presenta sus máximos, para la carrera de *downstroke* y el máximo \overline{cv} se obtiene para $\beta_p = 10^\circ$ y aumenta con el incremento de β_p . El resultado manifiesta que el plano de carrera es una variable de importancia en el vuelo *hovering* que permite al ave o insecto, realizar maniobras con mayor precisión y eficiencia. Se debe tener presente que existe un cambio constante de plano de carrera y ángulo de ataque, para lograr una maniobra deseada. De allí la complejidad de construir mecanismos de dimensiones reducidas que satisfagan el vuelo

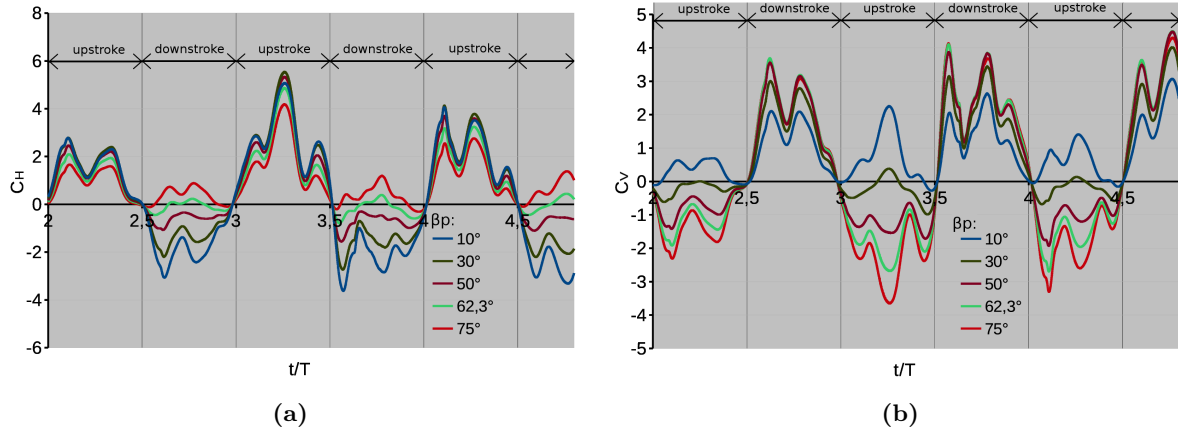


Figura 7.57: Coeficientes de fuerza horizontal C_H y vertical C_V en función de t/T para el caso con $\Sigma = 1,25$ y $\delta^* 8,1e^{-3}$.

completo.

β_p [°]	\bar{c}_h	\bar{c}_v
10	0.165	1.039
30	0.51	0.92
50	0.794	0.69
62.8	0.928	0.497
75	1.011	0.289

Tabla 7.2: Coeficientes de fuerzas promedios \bar{c}_h y \bar{c}_v para diferentes planos de carrera β_p con $\Sigma = 1,25$ y $\delta^* = 8,1e^{-3}$.

A continuación se analiza la influencia de los parámetros de interacción fluido-estructura δ^* y Σ con un plano de carrera igual a $\beta_p = 30^\circ$. En la fig. 7.58 se presentan los coeficientes \bar{c}_v y \bar{c}_h . Al disminuir el ángulo del plano de carrera se obtiene un incremento en el coeficiente \bar{c}_v respecto a los resultados obtenidos con $\beta_p = 62,8^\circ$, con una variación $0,6 < \bar{c}_v < 1$ aproximadamente. El coeficiente \bar{c}_h , presenta una disminución respecto a los resultados obtenidos con $\beta_p = 62,8^\circ$, con una variación entre $0,4 < \bar{c}_h < 0,7$ aproximadamente.

Las eficiencias η_v y η_h de los coeficientes de fuerzas vertical y horizontal se presentan en la fig. 7.59. La variación de η_v se incrementa conforme lo hace el coeficiente de fuerza \bar{c}_v debido a que el coeficiente de potencia introducida \bar{c}_p es el mismo que el obtenido para $\beta_p = 62,8^\circ$. Lo mismo ocurre para la eficiencia η_h , que disminuye conforme al coeficiente \bar{c}_h . Los modos de rotación de la estructura son los mismos que se obtienen para $\beta_p = 62,8^\circ$ y se observan en la fig. 7.56 (d). Finalmente, las deformaciones máximas, los coeficientes de fuerza y sus eficiencias en función de la relación de frecuencias f/f_1 se pueden observar en el Apéndice D (Figs. D3 y D5).

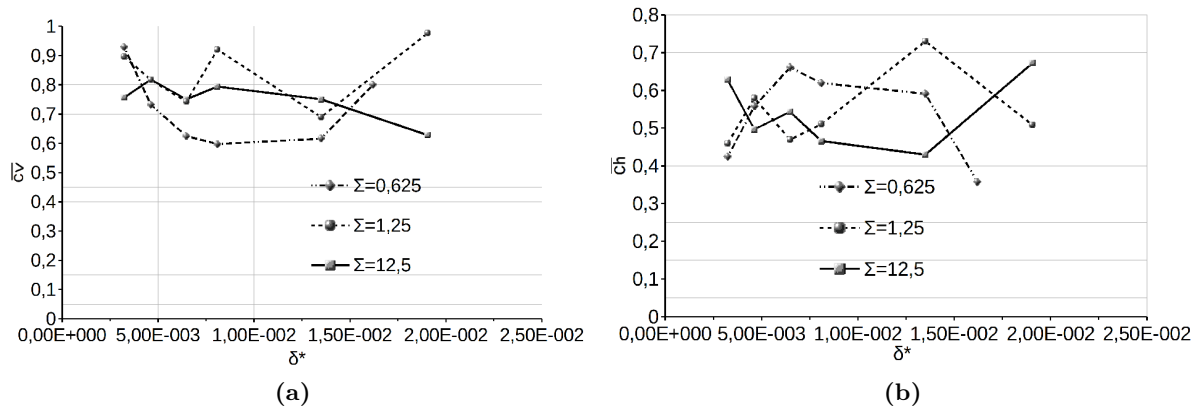


Figura 7.58: Coeficientes de fuerza vertical \bar{c}_v y horizontal \bar{c}_h promedios. Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$.

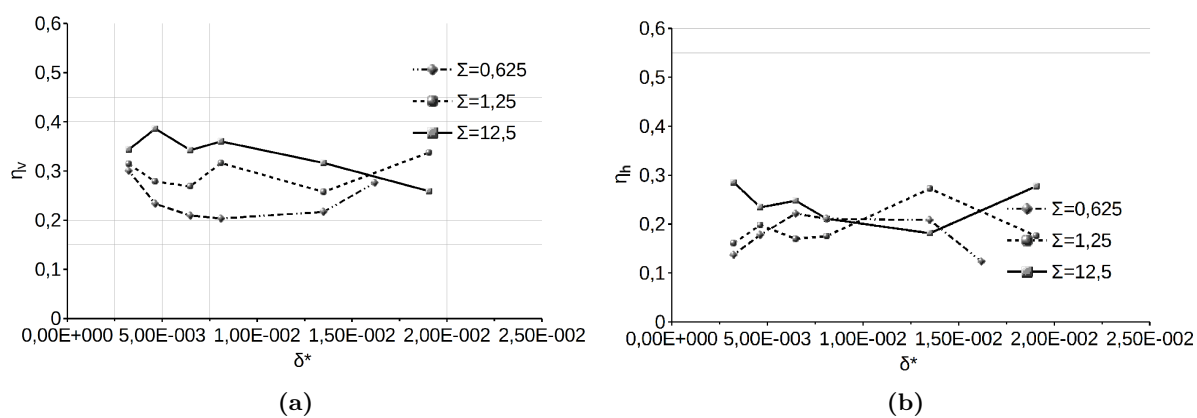


Figura 7.59: Eficiencia propulsiva vertical η_v (a) y horizontal η_h (b). Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se presenta un estudio numérico del flujo a números de Reynolds ultra-bajos ($Re < 10000$) aplicable al desarrollo de micro-vehículos aéreos. El código de cómputo es no estacionario, bidimensional y particionado para analizar interacciones fluido-estructura.

Se resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes bajo régimen laminar en 2 dimensiones, mediante el método de elementos finitos con un algoritmo de integración de pasos fraccionados. El algoritmo de estabilización implementado es conocido como OSS (Orthogonal Subscale Stabilization) y la discretización del dominio fluido-dinámico se realizó con elementos triangulares lineales de tensión constante. El concepto de malla móvil se basó en la formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) y se implementó con un algoritmo de suavizado.

La concepción estructural se basó en el modelo de viga de Euler-Bernoulli y la discretización utilizada se realizó mediante el método de elementos finitos, con elementos unidimensionales lineales. La integración temporal de la viga se implementó mediante el método de Newmark.

La interacción fluido-estructura está basada en un proceso particionado de solución, en el cual las ecuaciones diferenciales parciales de gobierno del fluido y la estructura se resuelven de forma independiente. Las condiciones de acoplamiento entre el fluido y la estructura se satisfacen a través del método *surface tracking* y el algoritmo general de solución responde a un esquema iterativo-particionado de Gauss-Seidel con relajación de Aitken.

La validación del código se llevó a cabo mediante la evaluación de casos teóricos y experimentales encontrados en la bibliografía, tanto en flujos estacionarios, inestacionarios y de interacción fluido-estructura con resultados satisfactorios.

En primer lugar, se utilizó el código con perfiles rígidos en flujo estacionario a los efectos de estudiar la influencia del número de Reynolds, la geometría del perfil (combadura y espesor), sus performances aerodinámicas en términos de C_L y C_D para diferentes condiciones de flujo y remarcar la importancia de los efectos viscosos presentes. El espesor de la zona viscosa que se extiende desde el cuerpo hacia la estela, desempeña un papel fundamental en las características aerodinámicas de los perfiles, al incidir de manera relevante en su geometría efectiva. Quizás el efecto más notorio, es el incremento de la resistencia al avance con la disminución del número

de Reynolds para un mismo ángulo de ataque. De aquí la importancia de la eficiencia, debido a la potencia demandada en el caso del vuelo controlado de un micro vehículo aéreo. Por otra parte, la pendiente de sustentación es menor con respecto a la de Reynolds altos, a causa de que el pico de succión de borde de ataque (b.a.) disminuye por los efectos viscosos, resultando en un impacto negativo en la relación L/D.

En un segundo análisis se realizó el estudio de perfiles rígidos en flujo inestacionario. La primer cinemática desarrollada fue el vuelo *heaving*. En dicha cinemática se estudió el comportamiento de la relación de espesor en función del número de Strouhal a $Re = 1100$. Se observó que la geometría de mayor espesor cuenta con la mayor eficiencia propulsora y además se analizó la topología del flujo en las diferentes geometrías y sobre todo la gran influencia del vórtice desprendido desde el b.a. sobre los parámetros aerodinámicos. Dicho análisis también fue extendido a varias frecuencias de movimiento y a la influencia de la combadura del cuerpo, proporcionando valiosa información relacionada con el conocimiento del vuelo *heaving*.

La siguiente cinemática estudiada fue la denominada *pitching*, donde con un número de Reynolds $Re = 1100$, se calcularon los coeficientes de tracción y sustentación, la eficiencia propulsora en función de la amplitud de cabeceo y la frecuencia reducida. También se tuvieron en cuenta la relación de espesor y el valor de combadura de los perfiles. Además se analizó la topología del flujo y de la estela, para los casos más relevantes.

El acoplamiento entre el vuelo *heaving* y *pitching* da origen al siguiente movimiento analizado que se denomina *flapping*. Las simulaciones de dicho vuelo fueron hechas con el propósito de comparar distintas geometrías de perfiles NACA serie 4 rígidos en términos de los siguientes ítems: amplitud de cabeceo, desplazamiento vertical, frecuencias reducidas y combinaciones de parámetros necesarios para mantener constante el número de Strouhal. El número de Reynolds de las simulaciones fue 1100. Al igual que en casos anteriores los efectos del flujo cercano al cuerpo, la topología de la estela y los desprendimientos superficiales, fueron interpretados como causales de los resultados de las simulaciones del *flapping* obtenidos con los perfiles estudiados.

Luego, se realizaron estudios sobre perfiles flexibles en flujo inestacionario. El principal objetivo fue determinar la influencia de la flexibilidad y el factor de intensidad de interacción (FSI) en los coeficientes de tracción, la eficiencia propulsora, la potencia suministrada, los desplazamientos máximos, los modos de rotación de la estructura, además de la influencia de varias relaciones de frecuencias.

El primer análisis fue realizado sobre perfiles NACA serie 4 flexibles con diferentes relaciones de espesor sometidos al movimiento *heaving*. De las comparaciones con los datos obtenidos para perfiles rígidos, se concluyó que las mejoras sobre el coeficiente de tracción y su eficiencia son factibles para determinados valores de la flexibilidad como así también para diferentes valores del factor de intensidad FSI. Se observó que la geometría flexible mejora la convección de los vórtices desprendidos desde el borde de ataque debido a la combadura temporal que toma el perfil sobre la carrera. Además, se incrementa intensidad de los vórtices desprendidos desde

el borde de fuga como consecuencia de la velocidad de deformación que toma el perfil. Esto produce un incremento sobre los parámetros propulsivos.

También se simulan casos correspondientes al movimiento *flapping*. Se realizó la comparación entre dos cinemáticas diferentes para dos perfiles NACA serie 4 simétricos y flexibles. En ambos casos, se estudió la influencia de la flexibilidad y del factor intensidad de interacción FSI, donde se encontró que existe una mejora sobre la propulsión para ciertos rangos del parámetro de flexibilidad δ^* . Además con la cinemática alternativa se obtienen mejores resultados que con la cinemática sinusoidal, debido a que los vórtices generados en el borde de ataque y de fuga son más intensos y proporcionan mayor velocidad sobre la estela. De los análisis de los movimientos *flapping* y *heaving* (con cinemática sinusoidal se deduce que pueden no existir diferencias entre los máximos valores de propulsión obtenidos. Por lo tanto, podría utilizarse únicamente la flexibilidad como elemento de control y prescindir del hardware de rotación en aplicaciones MAV.

Finalmente, se obtuvieron resultados sobre un perfil flexible con baja relación de espesor para vuelo *hovering* simétrico y asimétrico. En el vuelo *hovering* simétrico se tomaron los parámetros de vuelo y dinámicos de dos especies de insectos, (*Honeybee* y *Hawkmoth*). Se analizaron diferentes cinemáticas (*hovering* con movimiento de cabeceo, sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical), y se compararon los resultados obtenidos en función de la flexibilidad y el factor FSI del perfil. El objetivo fue observar en que configuración se obtienen los mayores valores de sustentación y eficiencia propulsora. En el vuelo *hovering* asimétrico se tomó como base de análisis la cinemática de una especie de libélula, y en función de la flexibilidad y el parámetro FSI se determinaron los coeficientes de fuerza vertical y fuerza horizontal para diferentes inclinaciones del plano de carrera. Además se calcularon las eficiencias propulsoras, los modos de rotación y los desplazamientos máximos de la estructura. Se observó que en todos los casos analizados se obtiene propulsión y sustentación. Además presentan dependencia de la flexibilidad, la densidad estructural y el plano de carrera.

Los resultados obtenidos muestran una visión general útil para la comprensión del conjunto de propiedades que permiten definir la aerodinámica de ultra-bajo Reynolds, de superficies (alas) batientes rígidas y flexibles y otros conceptos para proyectar futuros estudios.

Los desarrollos a futuro tienen por objetivo extender la investigación del flujo de ultra-bajos Reynolds a 3 dimensiones, es decir modelar alas de envergadura finita y ejecutar los análisis más relevantes detectados en casos 2D tanto con perfiles rígidos como flexibles. Se analizarán la influencia del alargamiento y el alabeo de superficies portantes, la propiedades de la estela y del flujo cercano al cuerpo e influencias sobre los parámetros aerodinámicos más importantes.

8.1 Publicaciones y Presentaciones

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Simulaciones inestacionarias de perfiles aerodinámicos rígidos y flexibles a números de Reynolds ultra-bajos ($Re < 10000$)*. "XXII Congreso de Métodos numéricos y sus aplicaciones - ENIEF 2016", Cordoba, Argentina.

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Flow simulations with ultra-low Reynolds numbers over rigid and flexible airfoils*. "Journal of Applied Fluid Mechanics", (2016).

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Steady and unsteady analysis of aerodynamics wing sections at ultra-low Reynolds numbers ($Re < 10000$)*. "1st Pan-American Congress on Computational Mechanics - PANACM 2015 and XI Argentine Congress on Computational Mechanics - MECOM 2015 ", Buenos Aires, Argentina.

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Aerodinámica del vuelo a números de Reynolds ultra-bajos ($Re < 10000$)*. "XX Congreso de Métodos numéricos y sus aplicaciones - ENIEF 2013 ", Mendoza, Argentina.

Algoritmo de Estabilización

Sea una ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva (CDR) escrita en forma indicial, cuyo operador es \mathcal{L} tal que u es la incógnita buscada, (el análisis se extrae de [100]):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u) &:= -\partial_i(\epsilon_{ij}\partial_j u) + a_i\partial_i u + su = f \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Gamma\end{aligned}\tag{A.1}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 2, 3$, $\partial\Gamma$ es el contorno de Ω , ϵ_{ij} es un tensor constante de difusión, a_i es la velocidad solenoidal de advección, $s \geq 0$ la constante de reacción y f una fuerza interna.

El espacio de funciones cuya potencia p ($0 \leq p \leq \infty$) es integrable en un dominio ω , es denotado por $L^p(\omega)$ y cuando $p = 2$, el producto interno es denotado por $(\cdot, \cdot)_\omega$. El espacio de funciones cuyas derivadas distribucionales de hasta $m \geq 0$ (entero) pertenece a $L^2(\omega)$, es denotado por $H^m(\omega)$. El espacio $H_0^1(\omega)$ consiste de funciones en $H^1(\omega)$ que son o valen cero sobre el contorno $\partial\gamma$. El espacio dual topológico de $H_0^1(\omega)$, es denotado por $H^{-1}(\omega)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se utiliza para denotar la paridad dual entre ellos:

El problema puede ser escrito en forma débil, dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, encontrar $u \in \Psi := H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$B(u, \psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in \Psi\tag{A.2}$$

donde:

$$\begin{aligned}B(u, \psi) &= (\partial_i \psi, \epsilon_{ij} \partial_j u)_\Omega + (\psi, a_i \partial_i u)_\Omega + (\psi, su)_\Omega \\ L(\psi) &= \langle \psi, f \rangle_\Omega\end{aligned}\tag{A.3}$$

La discretización del dominio se basa en una partición de elementos finitos, $\mathcal{P}_h = \{K\}$ de dimensión $h < 0$, el cual es un conjunto n_{el} de elementos K tal que cubren el dominio. Basada sobre esta partición, el espacio Ψ es aproximado por un espacio dimensional finito Ψ_h definido como:

$$\Psi_h = \{\omega \in \Psi : \omega \circ F^{-1}|_K \in \mathcal{P}_p(\hat{K}), 0 \leq p \leq \infty\}\tag{A.4}$$

donde $\mathcal{P}_p(\hat{K})$ denota el conjunto de polinomios de a lo sumo grado p , y F es el mapeo afín desde el elemento de referencia \hat{K} al elemento físico K . Por lo tanto el problema discreto por la aproximación de Galerkin puede escribirse como:

$$B(u_h, \psi_h) = L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (\text{A.5})$$

Diferentes esquemas de estabilización son usados dependiendo de la inestabilidad del problema. Un método general que comunmente se utiliza es la formulación variacional de multiescala. La misma está basada en la descomposición de una incógnita u en dos partes, una parte u_h resoluble discreta y una parte \hat{u} en la escala de una subgrilla, no captable por la malla de elementos finitos. Por ende el espacio Ψ se puede particionar como:

$$\Psi = \Psi_h \oplus \hat{\Psi} \quad (\text{A.6})$$

donde $\hat{\Psi}$ es el espacio de funciones en la escala de la subgrilla. Si se aplica la descomposición a la ecuación en forma débil se tiene:

$$\begin{aligned} B(u_h, \psi_h) + B(\hat{u}, \psi_h) &= L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \\ B(u_h, \hat{\psi}) + B(\hat{u}, \hat{\psi}) &= L(\hat{\psi}) \quad \forall \hat{\psi} \in \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La primera ecuación, es la ecuación para la parte resoluble discreta u_h y tiene dos términos: el primero es la contribución de Galerkin y el segundo tiene en cuenta la influencia en la escala de la subgrilla sobre u_h . La segunda ecuación es una ecuación para la contribución de la escala de la subgrilla. Si se introduce la siguiente notación:

$$\Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{P}_h} K \quad \text{y} \quad \Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{P}_h} \partial K \quad (\text{A.8})$$

y

$$(\cdot, \cdot)_h = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} (\cdot, \cdot)_K, \quad (\cdot, \cdot)_{\partial h} = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} (\cdot, \cdot)_{\partial K} \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\cdot\|_K^2 \quad (\text{A.9})$$

Si se integra por partes la (A.7) dentro de cada elemento:

$$\begin{aligned} B(u_h, \psi_h) + (\mathcal{L}^*(\psi_h), \hat{u})_h + (n_i \epsilon_{ij} \partial_j \psi_h, \hat{u})_{\partial h} &= L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \\ (\hat{\psi}, \mathcal{L}(\hat{u}))_h + (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j \hat{u})_{\partial h} &= (\hat{\psi}, (f - \mathcal{L}(u_h)))_h - (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u_h)_{\partial h} \quad \forall \hat{\psi} \in \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde \mathcal{L}^* es el adjunto del operador \mathcal{L} (con condiciones de contorno de Dirichlet) el cual se define como:

$$-\mathcal{L}^*(\psi) = \partial_i(\epsilon_{ij} \partial_j u) + \partial_i(a_i u) - su \quad (\text{A.11})$$

Como el flujo normal a través de cualquier superficie es continuo, se deduce que:

$$(\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u)_{\partial_h} = (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j \hat{u})_{\partial_h} + (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u_h)_{\partial_h} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Notar que $\hat{\psi} = 0$ sobre $\partial\Gamma$. Luego, de la segunda ecuación de (A.10) se deduce que es equivalente a encontrar $\hat{u} \in \hat{\Psi}$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{u}) &= f - \mathcal{L}(u_h) + \hat{\psi}^\perp \text{ en } \Omega_h \\ \hat{u} &= u_{ske} \text{ en } \Gamma_h \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde u_{ske} es una función definida sobre los elementos del contorno, y ψ^\perp es cualquier función en Ψ^\perp (el complemento ortogonal de $\hat{\Psi}$ en el sentido de $L^2(\Omega_h)$). La función u_{ske} debe ser tal que el flujo normal de u sobre los contornos de un elemento interno al dominio, sea continuo y definido como $u_{ske} = u - u_h$ sobre Γ_h . Además, $\hat{\psi}^\perp$ es la función responsable para la garantía de que $\hat{u} \in \hat{\Psi}$. Un paso necesario para resolver el sistema, significa una elección de u_{ske} , ψ^\perp y una solución aproximada de (A.13).

Es de hacer notar que (A.13) se plantea en Ω_h , y consiste en la unión de los elementos de la malla, por lo tanto, cualquier elección de u_{ske} conduce a n_{el} problemas desacoplados sobre cada elemento K . En problemas unidimensionales pueden encontrarse soluciones exactas, pero para problemas de más de una dimensión, la elección de $u_{ske} = 0$ conduce a una aproximación.

La solución aproximada puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\hat{u}|_K = \mathcal{L}^{-1} \left[(f - \mathcal{L}(u_h)) + \hat{\psi}^\perp \right] |_K \simeq \tau_K \left[(f - \mathcal{L}(u_h)) + \hat{\psi}^\perp \right] |_K \quad (\text{A.14})$$

Esta ecuación hace hincapié en que τ_K es una aproximación de la inversa del operador diferencial \mathcal{L} , para cada elemento K , un hecho que se utiliza para construir una aproximación de la misma. Finalmente se debe imponer que $\hat{u} \in \hat{\Psi}$, o de forma equivalente, definir ψ^\perp . La opción mas simple es tomar $\psi^\perp = 0$ que se denomina Aproximación Algebraica de las Subescalas (ASGS). Otra opción es tomar $\hat{\Psi}$ como el complemento ortogonal de Ψ_h en el sentido $L^2(\Omega_h)$, la cual requiere de uso de una proyección $L^2(\Omega_h)$ con el uso de pesos elementos por elementos τ_K , (Proyección Ortogonal de las subescalas OSS). Finalmente la aproximación será de la forma,

$$\hat{u}|_K = \tau_K \Pi(f - \mathcal{L}(u_h)) \quad (\text{A.15})$$

donde $\Pi = I$ (es la identidad en Ψ) en el caso del método ASGS y $\Pi = P_h^\perp = I - P_h$ en el caso del método OSS, siendo P_h la proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos. Si se desprecian los términos de contorno, el problema estabilizado discreto consiste en encontrar $u_h \in \Psi_h$ tal que,

$$B_\tau(u_h, \psi_h) = L_\tau(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (\text{A.16})$$

donde la forma estabilizada es:

$$\begin{aligned} B_\tau(u_h, \psi_h) &= B(u_h, \psi_h) - (\mathcal{L}^*(\psi_h), \tau \Pi \mathcal{L} u_h)_h \\ L_\tau(\psi_h) &= L(\psi_h) - (\mathcal{L}^*(\psi_h), \tau \Pi f)_h \end{aligned} \tag{A.17}$$

Formulación por el método de elementos finitos para una viga en flexión

B.1 Formulación para un elemento de viga en flexión

Se plantea un elemento de viga de sección uniforme bidimensional e isotrópico, de longitud L , masa por unidad de longitud μ_s y rigidez flexural EI como se observa en la fig. B.1. La energía de deformación, la energía cinética y la variación del desplazamiento dentro del elemento deben escribirse en función del vector de desplazamientos nodales $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)^T$.

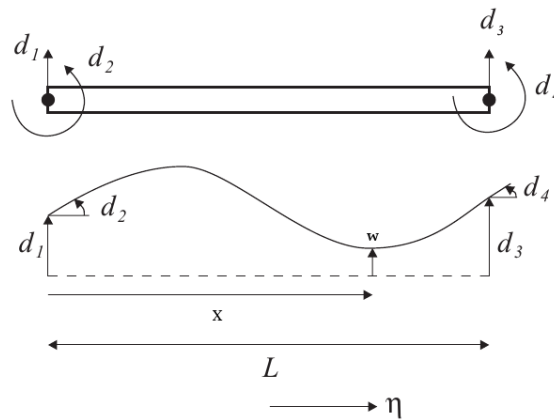


Figura B.1: Elemento de viga bidimensional, [132].

Se asume que el desplazamiento transversal $w(x)$ a lo largo del elemento de viga se puede escribir como una función cúbica de x como,

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (\text{B.1})$$

donde los coeficientes a_0, \dots, a_3 son coeficientes desconocidos a determinar en función de los

desplazamientos y rotaciones nodales en $x = 0, L$. En base a la fig. B.1 se puede determinar:

$$\begin{aligned}
 \text{en } x = 0 \quad d_1 &= a_0 \\
 \text{en } x = 0 \quad d_2 &= a_1 \\
 \text{en } x = L \quad d_3 &= a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 \\
 \text{en } x = L \quad d_4 &= a_1L + 2a_2L + 3a_3L^2
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

Las ec. B.19 pueden ser resueltas para expresiones de a_0, \dots, a_3 en función de los desplazamientos nodales d_1, \dots, d_4 , y el polinomio final puede ser escrito de la siguiente forma:

$$w = N_1d_1 + N_2d_2 + N_3d_3 + N_4d_4 = \mathbf{dN}^T \tag{B.3}$$

donde N_1, \dots, N_4 son polinomios cúbicos en x denominadas funciones de forma, fig. B.2.

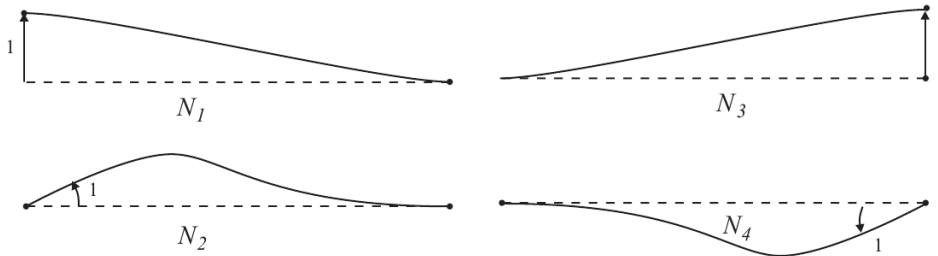


Figura B.2: Funciones de forma para el elemento de viga, [132].

Dichas funciones pueden ser escritas en función de una variable adimensional η de la siguiente manera:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta)^2(2 + \eta); \quad N_2 = \frac{L}{8}(1 - \eta)^2(1 + \eta) \tag{B.4}$$

con $\eta = 2x/L$ y $-1 \leq \eta \leq 1$ fig. B.1. Las funciones de forma N_3 y N_4 son similares a N_1 y N_2 .



Figura B.3: Cargas sobre los nodos del elemento, [132].

Para determinar las ecuaciones de movimiento del elemento, primero las fuerzas se aplican sobre los nodos como se muestra en la fig. B.3 y luego se plantean las ecuaciones de Lagrange con

el vector de desplazamientos nodales que actúan sobre cada coordenada. La energía potencial de deformación se pueden escribir como;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\mathbf{d}^T \mathbf{N}'') (\mathbf{N}''^T \mathbf{d}) dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left[\int_0^L EI (\mathbf{N}'') (\mathbf{N}''^T) dx \right] \mathbf{d} \quad (\text{B.5})$$

donde la notación acotada es $'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ y la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \mu_s \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \mu_s (\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{N}) (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{d}}) dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \left[\int_0^L \mu_s (\mathbf{N}) (\mathbf{N}^T) dx \right] \dot{\mathbf{d}} \quad (\text{B.6})$$

El trabajo hecho por las fuerzas aplicadas en los nodos a través de los desplazamientos es:

$$\delta W = P_1 \delta d_1 + P_2 \delta d_2 + P_3 \delta d_3 + P_4 \delta d_4 = \mathbf{P}^T \delta \mathbf{d} \quad (\text{B.7})$$

Cuando se aplican las ecuaciones de Lagrange, la ecuación de movimiento para el elemento de viga resulta:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (\text{B.8})$$

donde \mathbf{m} y \mathbf{k} son las matrices de masa y rigidez respectivamente dadas por:

$$\mathbf{m} = \left[\int_0^L \mu_s (\mathbf{N}) (\mathbf{N}^T) dx \right] \quad y \quad \mathbf{k} = \left[\int_0^L EI (\mathbf{N}'') (\mathbf{N}''^T) dx \right] \quad (\text{B.9})$$

Es de hacer notar que desde la transformación de la coordenada x a η se deben acarrear las integrales correspondientes. Con la introducción de las funciones de forma polinomiales N_1, \dots, N_4 en las ec. B.9, se obtiene que las matrices elementales para una viga uniforme son:

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Las matrices son simétricas y preservan los signos adoptados de desplazamientos y rotaciones.

La matriz de masa presentada se denomina matriz *consistente*. Existe una alternativa menos precisa denominada matriz de masa *concentrada* donde cada mitad de la masa elemental se divide en cada nodo del elemento. El término correspondiente a las rotaciones puede ser nulo o tomar algún valor medio que permita la influencia de los efectos de inercia. Las matrices de

masas concentradas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{si} &= \frac{\mu_s L}{420} [12, 0, 12, 0] \\ \mathbf{m}_{ci} &= \frac{\mu_s L}{420} [12, L, 12, L^2] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde los subíndices si y ci indican sin y con inercia de rotación respectivamente.

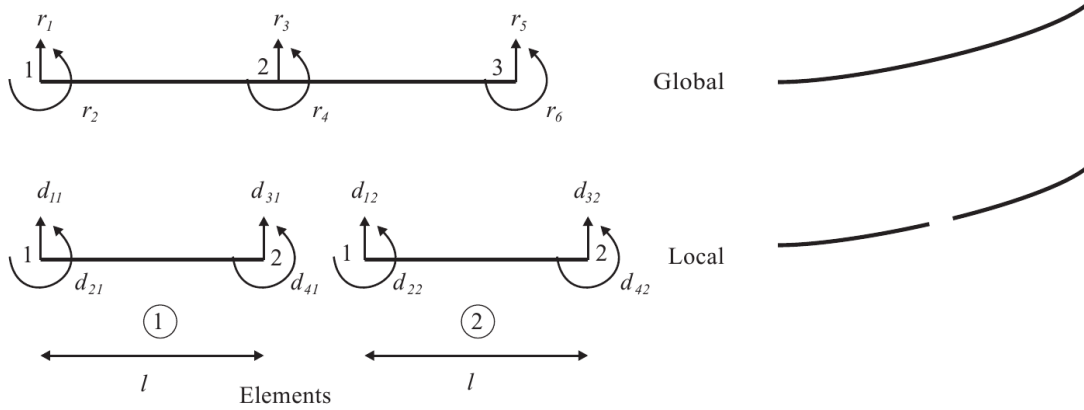


Figura B.4: Proceso de ensamblaje de dos elementos, [132].

B.2 Ensamblaje de la matriz global de la estructura

Una vez determinadas las matrices de cada elemento, se procede a ensamblarlas para obtener una matriz global de la estructura. Para construir dicha matriz, se debe tener presente la compatibilidad entre los desplazamientos de los nodos comunes a dos elementos.

Por ejemplo, se plantea el ensamblaje de las matrices de dos elementos como se observa en la fig. B.4. Los desplazamientos de los nodos $\{1\ 2\}$ locales de los elementos 1 y 2, deben ser compatibles con los desplazamientos de los nodos de $\{1\ 2\}$ y $\{2\ 3\}$ de la estructura global.

Los vectores $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_6)$ y $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_6)$ representan los vectores de desplazamientos y cargas respectivamente, en coordenadas globales. Los vectores \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 son los vectores que contienen los desplazamientos en coordenadas locales de cada elemento y los vectores \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 los vectores que contienen las cargas de cada elemento.

$$\begin{aligned} (d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}) &= (w_1, w_2, w_3, w_4) && \text{elemento 1} \\ (d_{12}, d_{22}, d_{32}, d_{42}) &= (w_3, w_4, w_5, w_6) && \text{elemento 2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

o en forma matricial:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{w} ; \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \\ d_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{w} \quad (\text{B.13})$$

El equilibrio se impone por la compatibilidad de trabajos realizados por las cargas en coordenadas locales y globales.

$$\delta W = \delta \mathbf{w}^T \mathbf{R} = \sum_{j=1}^2 \delta \mathbf{d}_j^T \mathbf{P}_j \quad (\text{B.14})$$

Si se ignora el término de la masa para simplificar las ecuaciones, y se relaciona las fuerzas nodales con los desplazamientos resulta:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{k}_j \mathbf{d}_j \quad j = 1, 2 \quad (\text{B.15})$$

donde $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ son las matrices 4x4 de rigidez elementales obtenidas anteriormente. Luego, la relación entre fuerzas y desplazamientos globales resulta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_r \mathbf{w} \quad (\text{B.16})$$

donde \mathbf{K}_r es la matriz 6x6 de rigidez global, con previas condiciones de contorno impuestas. Si se combinan las ecuaciones B.14, B.15, B.16 con la ec. B.13 y se simplifica se obtiene:

$$\delta W = \delta \mathbf{w}^T \mathbf{K}_r \mathbf{w} = \sum_{j=1}^2 \delta (\mathbf{\Gamma}_j \mathbf{w})^T (\mathbf{k}_j \mathbf{\Gamma}_j \mathbf{w}) = \delta \mathbf{w}^T \left[\sum_{j=1}^2 \mathbf{\Gamma}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{\Gamma}_j \right] \mathbf{w} \quad (\text{B.17})$$

luego,

$$\mathbf{K}_r = \sum_{j=1}^2 \mathbf{\Gamma}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{\Gamma}_j \quad (\text{B.18})$$

En la práctica las operaciones de la ec. B.18 no se llevan a cabo por la gran cantidad de ceros que aparecen en las matrices, lo cual carece de sentido por el costo computacional que demanda. De todos modos, lo que manifiesta la ec. B.18 es la sumatoria de rigideces en los nodos comunes a los elementos y en base a las conectividades previamente establecidas. Esto es lo que comunmente se lleva a la práctica y a continuación se presenta un ejemplo de la matriz

de rigidez en base a los dos elementos de longitud L tratados anteriormente:

$$\mathbf{K}_r = \frac{EI}{420} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 + 12 & -6L + 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L + 6L & 4L^2 + 4L^2 & -6L & -2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

El mismo procedimiento se realiza para la matriz de masa \mathbf{M}_r . Luego la ecuación a resolver para la dinámica de la viga es:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_r \mathbf{w} = \mathbf{R} \quad (\text{B.20})$$

Algoritmo de relajación de Aitken

Para explicar de manera simple el método de relajación de Aitken, se parte de una iteración del algoritmo de Gauss-Seidel en formulación de punto fijo. El desplazamiento al final de la iteración está dado por ¹:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} = \mathbf{S} \circ \mathbf{F}(\mathbf{w}_k) \quad (\text{C.1})$$

En el método de Gauss-Seidel estandar, el desplazamiento al final de la iteración es idéntico al calculado por el solver estructural,

$$\mathbf{w}_{k+1} = \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} \quad (\text{C.2})$$

En el método de relajación de Aitken [28], [74], se determina una variación dinámica para un factor escalar ω_k en un paso de tiempo t_n sobre el método de Gauss-Seidel.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{w}_k + \omega_k \mathbf{r}_k \\ &= (1 - \omega_k) \mathbf{w}_k + \omega_k \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Esto quiere decir que la próxima entrada a la función $\mathbf{S} \circ \mathbf{F}$ de la siguiente iteración, es una combinación de la entrada previa y la última salida. Además la primera relajación en un paso de tiempo determinado, se ejecuta con la última relajación del paso de tiempo anterior, pero limitado a ω_{max} , tal que $\omega_{n+1,0} = \text{sign}(\omega_n) \min(|\omega_n|, \omega_{max})$ y $\omega_{0,0} = \omega_{max}$. El valor de ω_k se obtiene como:

$$\omega_k = -\omega_{k-1} \frac{(\mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})} \quad (\text{C.4})$$

donde $\mathbf{r}_k = \tilde{\mathbf{w}}_{k+1} - \mathbf{w}_k$ se define como el residuo. El valor de ω_k es interpretado en [75], como el método de la secante directamente aplicado a vectores y proyectado sobre $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$. Si se combinan las ecs. C.3 y C.4, se puede escribir la actualización del desplazamiento de la

¹La notación $\mathbf{S} \circ \mathbf{F}$ significa que el resultado de la función \mathbf{F} está dado por el argumento de la función \mathbf{S} .

estructura como,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{w}_k \frac{(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1})^T - (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})} (-\mathbf{r}_k) \\
 &= \mathbf{w}_k \left[\frac{(\tilde{\mathbf{w}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{w}}_k)^T - (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})} - 1 \right] (-\mathbf{r}_k)
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

para $k > 0$.

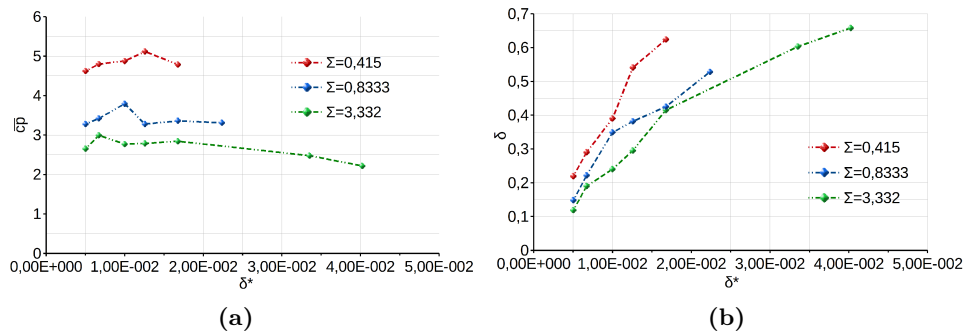


Figura D.1: Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_l y desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie *Hawkmoth* $R_e = 4200$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical .

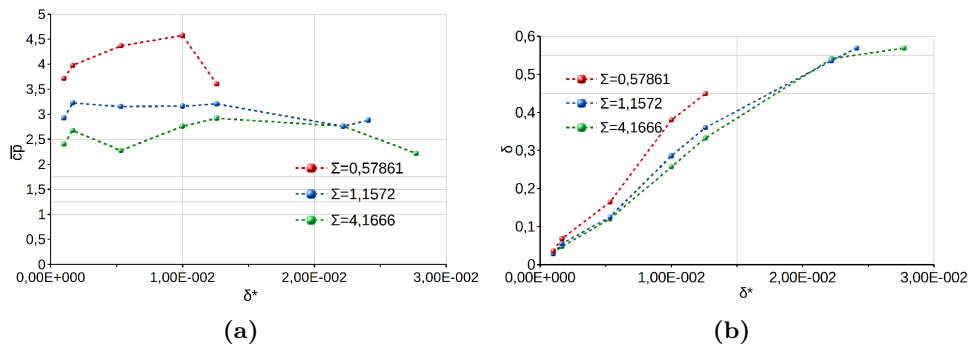


Figura D.2: Coeficiente de potencia promedio \bar{c}_l y desplazamiento del borde de fuga δ para una simulación representativa de la especie *Honeybee* $R_e = 1800$ en movimiento *Hovering* sin movimiento de cabeceo y con movimiento vertical.

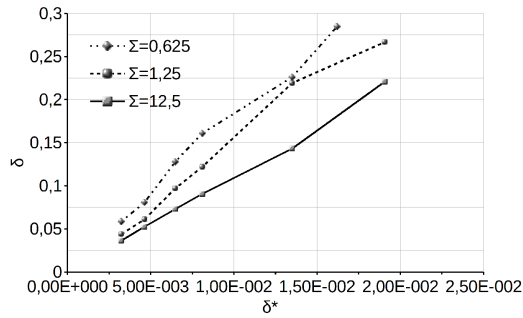


Figura D.3: Desplazamiento máximo en función de la flexibilidad δ^* . Para planos de carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$ y $\beta_p = 30^\circ$.

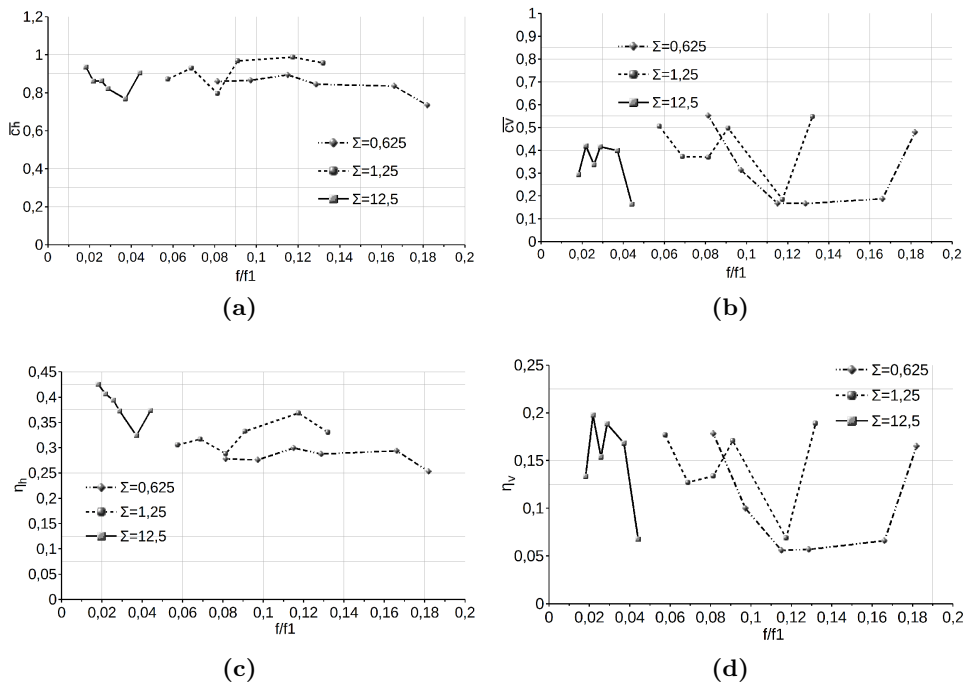


Figura D.4: Coeficientes \bar{c}_h (a), \bar{c}_v (b), η_h (c), η_v (d) en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Plano de la carrera a $\beta_p = 62,8^\circ$.

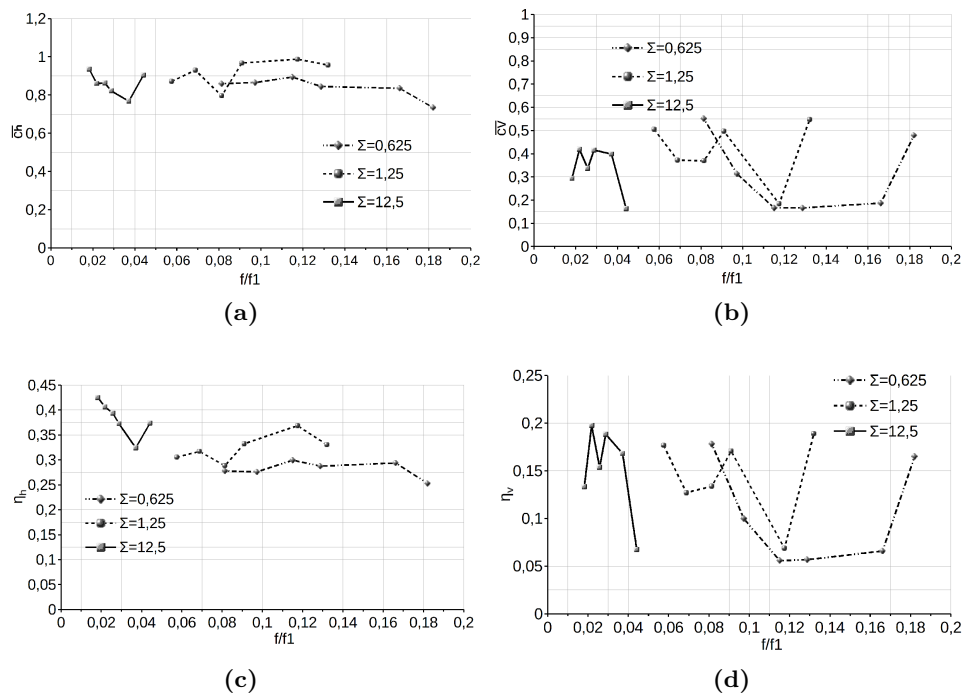


Figura D.5: Coeficientes \bar{c}_h (a), \bar{c}_v (b), η_h (c), η_v (d) en función de la relación de frecuencias f/f_1 . Plano de la carrera a $\beta_p = 30^\circ$.

- [1] ANDERSON, J. M., STREITLIEN, K., BARRETT, D. S., AND TRIANTAFYLLOU, M. S. Oscillating foils of high propulsive efficiency. *Fluids Mechanics* 360:41–72 (1998).
- [2] ARNEY, D., AND FLAHERTY, J. A two-dimensional mesh moving technique for time dependent partial differential equations. *J.Comput. Phys.* 67,124-144 (1986).
- [3] BABUSKA, I. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.* 16:322-333 (1971).
- [4] BADIA, S., AND CODINA, R. Algebraic pressure segregation methods for the incompressible navier-stokes equations. *Arch Comput Methods Eng* (2008).
- [5] BAINES, M. *Moving Finite Elements*. Oxford University Press, 1994.
- [6] BERGER, E., AND WILLE, R. Periodic flow phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 4:313–340 (1972).
- [7] BERMAN, G., AND WANG, Z. Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight. *Cambridge University Press* (2007).
- [8] BETZ, A. General theory of aerodynamic instability and the mechanism in flutter. *Technical report, NACA, Technical Report No. 496* (1935).
- [9] BREZZI, F., AND DOUGLAS, J. Stabilized mixed methods for the stokes problem. *Numer. Math* (1988).
- [10] BREZZI, F., AND FORTIN, M. *Mixed and Hybrid finite element methods*. Series in Computational Mechanics,15. Springer-Verlag, 1991.
- [11] CANANN, S. A., TRISTANO, J. R., AND STATEN, M. L. An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral, and quad-dominant meshes. *International Meshing Roundtable* (1998).
- [12] CARMICHAEL, B. H. Low reynolds number airfoil survey. *NASA CR 1165803* (1981).

- [13] CAUSIN, P., GERBEAU, J., AND NOBILE, F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(42-44):4506-4527.
- [14] CEBRAL, J., AND LÖHNER, R. Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35(4):687-692.
- [15] CHORIN, A. A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Computational Physics* 2:12-26 (1967).
- [16] CHUNG, J., AND HULBERT, G. M. Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized alpha method. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 371375.
- [17] CODINA, R. *A finite element model for incompressible flow problem*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1992.
- [18] CODINA, R. A finite element formulation for the numerical solution of the convection-diffusion equation. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 1993.
- [19] CODINA, R. Pressure stability in fractional step element methods for incompressible flows. *Computational Physics* 170:112-140 (2000).
- [20] CODINA, R. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal subscales in finite element methods. *Computational Physics* 190:1579-1599 (2000).
- [21] CODINA, R. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering* (2002).
- [22] COLORADO, J., BARRIENTOS, A., ROSSI, C., AND BREUER, K. S. Biomechanics of smart wings in a bat robot: morphing wings using sma actuators. *IOPScience* 7 (2012).
- [23] COMBES, S. A., AND DANIEL, T. L. Flexural stiffness in insect wings i. scaling and the influence of wing venation. *The Journal of Experimental Biology* 206, 2979-2987. (2003).
- [24] COMBES, S. A., AND DANIEL, T. L. Flexural stiffness in insect wings ii. spatial distribution and dynamic wing bending. *The Journal of Experimental Biology* 206, 2989-2997. (2003).
- [25] COMBES, S. A., AND DANIEL, T. L. Flexural stiffness in insect wings. effect of wings venation and stiffness distribution on passive bending. *American entomologist* (2005).

- [26] COOK, R., MALKUS, D. S., WITT, R. J., AND PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Hardcover, 2001.
- [27] COUTANCEAU, M., AND BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part1: Steady flow. *J. Fluid Mech.* 79:231–256 (1977).
- [28] DEGROOTE, J. *Development of Algorithms for the Partitioned Simulation of Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*. PhD thesis, Ghent University, 2010.
- [29] DENNIS, S. C. J., AND CHANG, G. Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100. *J. Fluid Mech.* 180:120–154 (1970).
- [30] DETTMER, W. G. *Finite Element Modelling of Fluid Flow with Moving Free Surfaces and Interfaces Including Fluid-Solid Interaction*. PhD thesis, School of Engineering, University of Wales, Swansea, 2004.
- [31] DETTMER, W. G., AND PERIC, D. A fully implicit computational strategy for strongly coupled fluid-solid interaction. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 14:205–247 (2007).
- [32] DI, W., SENG, Y., AND TAI, L. Cfd modeling of insect flight at low reynolds number. *Int. Jour. of Mechanical, Aerospace, Ind., Mechatronic and Manufacturing Eng.* 8 (2014).
- [33] DICKINSON, M. H. Solving the mystery of insect flight. *Scientific American*, June:35–41 (2001).
- [34] DICKINSON, M. H., LEHMANN, F., AND SANE, S. P. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science* 284 1954–60 (2004).
- [35] DONEA, J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient fluid structure interactions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 33:689–723 (1982).
- [36] DONEA, J., AND HUERTA, A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, 2003.
- [37] ELDREDGE, J., TOOMEY, J., AND MEDINA, A. On the roles of chord-wise flexibility in a flapping wing with hovering kinematics. *Journal of Fluid Mechanics*, 659:94–115 (2010).
- [38] ESPINOSA, J. G., OÑATE, E., AND SIERRA, H. Un método de elementos finitos para análisis hidrodinámico de estructuras navales. *International Center for Numerical Methods in Engineering* 59 (2000), 1–115.

- [39] FARHAT, C., KOOBUS, B., AND TRAN, H. Simulation of vortex shedding dominated flows past rigid and flexible structures. *In Computational Methods for Fluid Structure Interaction, Trondheim (Norway)* (1999).
- [40] FARHAT, C., VAN DER ZEE, K., AND GEUZAIN, P. Probably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195(17-18):1973-2001.
- [41] FELIPPA, C., PARK, K., AND FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(24-25):3247-3270.
- [42] FLOREANO, D., ZUFFEREY, J., SRINIVASAN, M., AND ELLINGTON, C. *Flying Insects and Robots*. Springer, 2009.
- [43] FORNBERG, B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *Fluid Mechanics* 98:819-855 (1980).
- [44] GARELLI, L. *Fluid Structure Interaction using an Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería y ciencias hídricas-Instituto de desarrollo tecnológico para la industria química, 2011.
- [45] GARRICK, I. Naca no. 567. Tech. rep., Propulsion of a flapping and oscillating airfoil, 1936.
- [46] GOPALAN, H. *Numerical Modeling of Aerodynamics of Airfoils of Micro Air Vehicles in Gusty Environment*. PhD thesis, University of Akron, 2008.
- [47] GUERRERO, J. *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping flight*. PhD thesis, University of Genova, 2008.
- [48] HAN, S. M., BENAROYA, H., AND WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration* (1999).
- [49] HEATHCOTE, S., AND GURSUL, I. Flexible flapping airfoil propulsion at low reynolds numbers. *AIAA Paper 2005-1405-CP* (2005).
- [50] HEATHCOTE, S., AND GURSUL, I. Effect of spanwise flexibility on flapping wing propulsion. *36th AIAA Fluid Dynamic Conference and Exhibit, paper AIAA-2006-2870, San Francisco, California* (2006).
- [51] HEATHCOTE, S., MARTIN, D., AND GURSUL, I. Flexible flapping airfoil propulsion at zero freestream velocity. *AIAA Journal*, 42(11):2196-2204 (2004).

- [52] HEDRICK, T., COMBES, S., AND MILLER, L. Recent developments in the study of insect flight. *Canadian Journal of Zoology* 93 (2015), 925–943.
- [53] HIGDON, A., OHLSEN, E., STILES, W., AND WEESE, J. *Mechanics of Materials*. Wiley, second edition, 1966.
- [54] HILBER, H. M., HUGHES, T. J. R., AND TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292 (1977).
- [55] HIRT, C., AMSDEN, A., AND COOK, J. An arbitrary lagrangean-eulerian computing method for all flow speeds. *Jnl. of Comp. Physics*, 14:227-253 (1974).
- [56] HOVER, F. S., HAUGSDAL, O., AND TRIANTAFYLLOU, M. S. Effect of angle of attack profiles in flapping foil propulsion. *Fluids and Structures*, 19:37–47 (2004).
- [57] HUGHES, T., AND FRANCA, L. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Vii. the stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 7 (1987).
- [58] HUGHES, T., FRANCA, L., AND HULBERT, G. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least squares method for advective-difusive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 8 (1989).
- [59] HUGHES, T., LIU, W., AND ZIMMERMANN, T. Lagrangian-eulerian finite element formulation for viscous flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 29:329-349 (1981).
- [60] HUGHES, T., SCOVAZZI, G., AND FRANCA, L. *Multiscale and Stabilized Methods, Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley and Sons, 2004.
- [61] HÜBNER, B., WALHORN, E., AND DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:2087–2104.
- [62] ISOGAI, K., SHINMOTO, Y., AND WATANABE, Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of a flapping airfoil. *AIAA*, 37:1145–1151 (2000).
- [63] JACKSON, C. A finite element study on the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Computational Physics* 180:120–154 (2002).
- [64] JONES, K. D., DOHRING, C. M., AND PLATZER, M. F. Wake structures behind plunging airfoils: A comparison of numerical and experimental results. *AIAA Paper 96-0078-CP* (1996).

- [65] KANG, C., AONO, H., CESNIK, C. E. S., AND SHYY, W. Effects of flexibility on the aerodynamic performance of flapping wings. *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference* (2011).
- [66] KANG, C., AND SHYY, W. Effects of flexibility on the aerodynamics of a hovering flexible airfoil at reynolds number of 100 to 1000. *AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (2012).
- [67] KASSIOTIS, C., IBRAHIMBEGOVIC, A., NIEKAMP, R., AND MATTHIES, H. Nonlinear fluid-structure interaction problem. part i: implicit partitioned algorithm, nonlinear stability proof and validation examples. *HAL archives-ouvertes.fr* (2011).
- [68] KATZ, J., AND PLOTKIN, A. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [69] KIM, K. L. J., AND KIM, C. Aerodynamic effects of structural flexibility in two-dimensional insect flapping flight. *Journal of Aircraft*.
- [70] KNOLLER, R. Die gesetze des luftwiderstandes. *Flug und Motortechnik Wien*, 3:1–7 (1909).
- [71] KOHELER, C., WISCHGOLL, T., DONG, H., AND GASTON, Z. Vortex visualization in ultra-low reynolds number insect flight. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics* 17 (2011).
- [72] KOCHESFAHANI, M. Vortical patterns in the wake of an oscillation foil. *AIAA* 27:1200–1205 (1989).
- [73] KUNZ, P. J. *Aerodynamics and desing for ultra-low Reynolds number flight*. PhD thesis, Stanford University, 2003.
- [74] KÜTTLER, U., AND WALL, W. Efficient approaches for fluid structure interaction with fully enclosed incompressible flow domains. In P. Wesseling, E. Oñate, and J. Périaux, editors, *4th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, pages 1–17, Egmond aan Zee, The Netherlands.
- [75] KÜTTLER, U., AND WALL, W. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1):61–72.
- [76] LAI, J. C. S., AND PLATZER, M. Jet characteristics of a plunging airfoil. *AIAA* (1999).
- [77] LEHMANN, F., AND PICK, S. The aerodynamic benefit of wing–wing interaction depends on stroke trajectory in flapping insect wings. *Journal of Experimental Biology* (2007).

- [78] LINNICK, M. N., AND FASEL, H. F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Computational Physics* 204(1):157–192 (2005).
- [79] LIU, C., ZHENG, X., AND SUNG, C. H. Preconditional multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J. Comput. Phys.* 139:35–57 (1998).
- [80] LIU, H., ELLINGTON, C., KAWACHI, K., VANDENBERG, C., AND WILLMOT, A. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *Journal of Experimental Biology*, 201:461–477 (1998).
- [81] MATTHIES, H. G., AND STEINDORF, J. Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 81:805–812 (2003).
- [82] MAZA, M., FLORES, F., AND PREIDIKMAN, S. Interacción fluido-estructura inestacionaria y no-lineal, con modelos de flujo potencial y estructuras de vigas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional Vol XXXI, págs. 771-795* (2012).
- [83] MCMICHAEL, J. M., AND FRANCIS, M. S. Defense advanced research projects agency (darpa). Tech. rep., Micro air vehicles - toward a new dimension in flight, 1997.
- [84] MEDJROUBI, W. *Numerical Simulation of Dynamic Stall for Heaving Airfoils Using Adaptive Mesh Techniques*. PhD thesis, Ossietyky Universität Oldenburg, 2011.
- [85] MIAO, J., AND HO, M. M. Effect of flexure on aerodynamic propulsive efficiency of flapping flexible airfoil. *Fluids and Structures*, 22:401–419 (2006).
- [86] MILLER, L. A., AND PESKIN, C. S. When vortices stick: an aerodynamic transition in tiny insect flight. *Journal of Experimental Biology*, 207, 3073–3088 (2004).
- [87] MUIJRES, F. T., ELZINGA, M. J., MELIS, J. M., AND DICKINSON, M. H. Flies evade looming targets by executing rapid visually directed banked turns. *Science Vol. 344, Issue 6180, pp. 172-177 DOI: 10.1126/science.1248955* (2014).
- [88] NAKATA, T., AND LIU, H. Aerodynamic performance of hovering hawkmoth with flexible wings: computational approach. *Proc. R. Soc., No.279* (2012), 722–731.
- [89] NOCA, F. *On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1997.
- [90] NUDDS, R. L., TAYLOR, G. K., AND THOMAS, A. R. Tuning of strouhal number for high propulsive efficiency accurately predicts how wingbeat frequency and stroke amplitude relate and scale with size and flight speed in birds. *Proc. Biol. Sci.*, 7:2071–2076 (2004).

- [91] OLIVIER, M. *A Fluid-Structure Interaction Partitioned Algorithm Applied to Flexible Flapping Wing Propulsion*. PhD thesis, Université Laval, Québec, Canada, 2014.
- [92] ORLOWSKI, C. T. *Flapping Wing Micro Air Vehicles: An Analysis of the Importance of the Mass of the Wings to Flight Dynamics, Stability, and Control*. PhD thesis, The University of Michigan, 2011.
- [93] OÑATE, E., AND ESPINOSA, J. G. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients. *In European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99)* (1999).
- [94] PEDRO, G., SULEMAN, A., AND DJILALI, N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *International Journal for numerical methods in fluids* 42:493–526 (2003).
- [95] PIPERNO, S., AND FARHAT, C. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. part ii: energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124(1–2):79–112.
- [96] PIPERNO, S., FARHAT, C., AND LARROUTUROU, B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. part i: model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124(1–2):79–112.
- [97] PLATZER, M. F., AND JONES, K. D. The unsteady aerodynamics of flapping-foil propellers. *9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines Ecole Centrale de Lyon* (2000).
- [98] PLATZER, M. F., JONES, K. D., AND LUND, T. G. Experimental and computational investigation of flapping wing propulsion for micro- air vehicles. *In Symposium of Low-Reynolds Number Vehicles, University of Notre Dame* (2000).
- [99] PLATZER, M. F., NEACE, K. S., AND PANG, C. K. Aerodynamic analysis of flapping wing propulsion. *AIAA Paper 93-0484-CP* (1993).
- [100] PRINCIPE, J., AND CODINA, R. On the stabilization parameter in the subgrid scale approximation of scalar convection–diffusion–reaction equations on distorted meshes. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 2009.
- [101] RAMANANARIVO, S., GODOY-DIANA, R., AND THIRIA, B. Rather than resonance, flapping wing flyers may play on aerodynamics to improve performance. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 108, no. 15, pp.5964 - 5969 (2011).
- [102] REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.

- [103] SACCO, C., AND GIUGGIOLONI, F. Análisis de la aerodinámica de un automóvil de competición. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional* (2006).
- [104] SAFFMAN, P. G. *Vortex dynamics*. Cambridge Univ Press, 1995.
- [105] SHIMANUKI, J., AND MACHIDA, K. Structure analysis of the wing of a dragonfly. *Proceedings of the SPIE 5852*, 671–676 (2005).
- [106] SHYY, W., AONO, H., KANG, C., AND LIU, H. An introduction to flapping wing aerodynamics. *Cambridge: Cambridge University Press* (2013).
- [107] SHYY, W., BERG, M., AND LJUNGQVIST., D. Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 35:455–505 (1999).
- [108] SHYY, W., CHIRARATTANANON, P., RAVI, S., AND LIU, H. Aerodynamics, sensing and control of insect-scale flapping-wing flight. *Proceedings of Royal Society, A* 472:20150712 (2016).
- [109] SHYY, W., LIAN, Y., TANG, J., VIHERU, D., AND LIU, H. *Aerodynamics of low Reynolds number flyers*. Cambridge University Press, 2008.
- [110] SHYY, W., TRIZILA, P., KANG, C., AND AONO, H. Can tip vortices enhance lift of a flapping wing? *Aerospace Letters, AIAA* 14 (2009).
- [111] SOTO, O. *Estabilización de la Solución por Elementos Finitos de Problemas de Flujo Incompresible con Rotación, Turbulencia, Superficie Libre y Temperatura*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1997.
- [112] STEINDORF, J. *Partitionerte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*. PhD thesis, Technischen Universität Braunschweig, 2002.
- [113] SUN, M., AND TANG, J. Unsteady aerodynamic force generation by a model fruit fly wing in flapping motion. *Journal of Experimental Biology* (2001).
- [114] TAYLOR, G., NUDDS, R., AND THOMAS, A. Flying and swimming animals cruise at a strouhal number tuned for high power efficiency. *Letters to Nature*, 425:707–711 (2003).
- [115] TENG, N. H. The development of a computer code for the numerical solution of unsteady, inviscid and incompressible flow over and airfoil. *Master's thesis. U.S. Naval Postgraduate School, Department of Aeronautics and Astronautics* (1987).
- [116] THEODORSEN, T. Ein beitrage zur erklärung des segelfluges. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motor-luftschiffahrt*, 3:269–272 (1912).

- [117] TRIANTAFYLLOU, G. S., TRIANTAFYLLOU, M. S., AND GROSENBAUGH, M. A. Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion. *Fluids and Structures*, 7:205–224 (1993).
- [118] TUNCER, I. H. A 2-d unsteady navier-stokes solution method with moving overset grids. *AIAA*, 35:471–476 (1997).
- [119] TUNCER, I. H., AND KAYA, M. Optimization of flapping airfoils for maximum thrust. *AIAA Paper 2003-0420-CP* (2003).
- [120] TUNCER, I. H., AND PLATZER, M. F. Thrust generation due to airfoil flapping. *AIAA* 34:324–331 (1995).
- [121] VAN ZUIJLEN, A., BOSSCHER, S., AND BIJL, H. Two level algorithms for partitioned fluid-structure interaction computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1458–1470.
- [122] VARYANI, K., GATIGANTI, R., AND GERIGK, M. Higher-order time integration through smooth mesh deformation for 3d fluid-structure interaction simulations. *Journal of Computational Physics*, 224(1):414–430.
- [123] VON ELLENRIEDER, K., PARKER, K., AND SORIA, J. Fluid mechanics of flapping wings. *Experimental Thermal and Fluid Science* 32(8):1578 – 1589 (2008).
- [124] VON KARMAN, T., AND BURGERS, J. General aerodynamic theory - perfect fluids. *Aerodynamic Theory 2* (1935).
- [125] VÁZQUEZ, J. G. V. *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. PhD thesis, Universitat politècnica de catalunya, 2007.
- [126] VÁZQUEZ, M., CODINA, R., AND ZIENKIEWICZ, O. Numerical modelling of compressible laminar and turbulent flow: The cbs algorithm. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 1999.
- [127] WALL, W. A., MOK, D. P., AND RAMM, E. Partitioned analysis approach of the transient coupled response of viscous fluids and flexible structures. *In Solids, structures and coupled problems in engineering, proceedings of the European Conference on Computational Mechanics* (1999).
- [128] WALL, W. A., AND RAMM, E. Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ale) finite element method. *IV World Congress on Computational Mechanics, Barcelona* (1998).

- [129] WANG, Z. J. Vortex shedding and frequency selection in flapping flight. *Fluid Mechanics* (2000).
- [130] WANG, Z. J. The role of drag in insect hovering. *The Journal of Experimental Biology* 207 (2004), 4147–4155.
- [131] WOOTTON, R. Springy shells, pliant plates, and minimal motors. abstracting the insect thorax to drive a micro air vehicle. In: *C. Ellington (ed.) Flying Insects and Robots. Springer-Verlag, Switzerland* (2008).
- [132] WRIGHT, J. R., AND COOPER, J. E. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads.* John Wiley and Sons, 2007.
- [133] WU, J., AND SUN, M. Unsteady aerodynamic forces of a flapping wing. *The Journal of Experimental Biology* 207, 1137-1150 (2004).
- [134] YIN, B., AND LUO, H. Effect of wing inertia on hovering performance of flexible flapping wings. *Physics of fluids* 22, 111902 (2010).
- [135] YOUNG, J. *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping airfoils.* PhD thesis, The University of New South Wales, 2005.
- [136] YOUNG, J., AND LAI, J. Oscillation frequency and amplitude effects on the wake of a plunging airfoil. *AIAA* 42:2042–2052 (2004).
- [137] ZHOU, Y., AND WANG, Z. Absorbing boundary conditions for nonlinear euler and navier-stokes equations based on the perfectly matched layer technique. *J. Comput. Phys* 229 (2010), 8733–8749.
- [138] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The finite element method.* Butterwoth-Heinemann, 2002.