

Álgebras de Nichols sobre grupos diedrales y pecios kthulhu en grupos esporádicos

Autor: Beltrán Cubillos, Sergio

Director: Fantino, Fernando Amado

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación como requisito para la obtención del grado de
Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

©FAMAF-UNC 2020



Álgebras de Nichols sobre grupos diedrales y pecios kthulhu en grupos
esporádicos © 2020 por Sergio Beltrán Cubillos se distribuye bajo una
Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Obra Derivada
4.0 Internacional.

A mis padres: José Guillermo y Teresa de Jesús

Porque a ellos les debo todo

Resumen

El presente trabajo es un aporte al problema de la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre grupos finitos no abelianos en el contexto del método del levante de N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider.

El estudio realizado trata acerca de álgebras de Nichols sobre grupos diedrales y sobre pecios en grupos esporádicos simples.

Concretamente, clasificamos los módulos de Yetter-Drinfeld sobre los grupos diedrales \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8 , de orden 8 y 16 respectivamente, cuyas álgebras de Nichols son de dimensión finita, concluyendo el primer paso del método del levante para la familia de grupos diedrales \mathbb{D}_m , con $m = 4t$, cuyo estudio fue iniciado en [FG]. Más aún, damos una presentación por generadores y relaciones de varias de dichas álgebras. De esta manera obtenemos nuevos ejemplos de álgebras de Nichols de dimensión finita sobre grupos no abelianos. Además, exhibimos fórmulas para las dimensiones de los núcleos de los simetrizadores cuánticos para algunos grados bajos.

En la segunda parte de la tesis estudiamos la estructura de pecio de clases de conjugación, usuales y torcidas, en grupos simples esporádicos. Como resultado, aplicando un método de descenso por subgrupos maximales y usando la información computacional del ATLAS [WWT+], logramos determinar las clases de conjugación kthulhu en los grupos simples esporádicos distintos del grupo Monstruo. Además, clasificamos las clases de tipo F en grupos esporádicos de orden bajo y encontramos nuevos ejemplos de clases de tipo C.

Palabras clave: Álgebras de Hopf punteadas, álgebras de Nichols, grupos diedrales, grupos simples esporádicos, pecios.

Abstract

The present work is meant to be a contribution to the classification problem of finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite non-abelian groups in the context of the lifting method due to N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider.

The current study treats about Nichols algebras on dihedral groups and racks in simple sporadic groups.

Specifically, we classify the Yetter-Drinfeld modules over the dihedral groups \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8 , of order 8 and 16 respectively, whose Nichols algebras are finite-dimensional, concluding in this way the first step of the lifting method for the family of the dihedral groups \mathbb{D}_m , for $m = 4t$, study that has been started in [FG]. Moreover, we give presentations by generators and relations for some of these algebras. In this way we obtain new examples of finite-dimensional Nichols algebras over non-abelian groups. Besides, we exhibit formulas for the dimensions of the quantum symmetrizer kernels for low degrees.

In the second part of this thesis we study the rack structure of, usual and twisted, conjugacy classes in sporadic simple groups. As a consequence of the application of the descent method to maximal subgroups and using computational information from the ATLAS [WWT+], we are able to determine the kthulhu classes in sporadic simple groups other than the Monster group. Further, we classify classes of type F in sporadic simple groups of low order and we find new examples classes of type C.

Keywords: Pointed Hopf algebras, Nichols algebras, dihedral groups, sporadic simple groups, racks.

Agradecimientos

Quiero comenzar por agradecer muy especialmente a tres personas de mi círculo más cercano. A mis padres por su comprensión y porque sin su apoyo constante no hubiera sido posible culminar este proceso. A Dionicio por su amistad y por estar presente en el momento en que su ayuda fue vital.

A Iván y Lorena por ser como dos protones cuando mi vida parecía estar sumergida en una nube de electrones. A Javier y Gastón por ofrecerme un techo y largas charlas de matemáticas, de literatura, de todo y de nada.

A mi director, Fernando Fantino, por su infinita paciencia y por las múltiples enseñanzas que me dejó a nivel humano y académico. Espero que finalizar el doctorado sea apenas el comienzo de una colaboración constante que ya empieza a dejar sus primeros frutos.

A los miembros que hacen parte de mi comisión asesora, Adrián Andrada, Nicolás Andruskiewitsch y Alejandro Tiraboschi, por sus atinadas sugerencias. También a mis profesores porque de todos aprendí algo y de algunos aprendí mucho.

Finalmente, a Argentina por su acogida y al CONICET por la oportunidad que me dio de tener una beca para realizar los estudios de doctorado en un lugar de las más altas calidades académicas como el Centro de Investigación y Estudios de Matemática en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Introducción	IX
Contextualización y antecedentes	IX
Planteamiento del problema	XII
Estrategia general	XII
Resultados principales	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Álgebras de Hopf	1
1.1.1. Álgebras	2
1.1.2. Coálgebras	5
1.1.3. Biálgebras	8
1.1.4. Álgebras de Hopf	10
1.2. El método del levante	13
1.2.1. Categorías trenzadas	14
1.2.2. Módulos de Yetter-Drinfeld	16
1.2.3. Álgebras de Nichols	18
1.2.4. El método del levante	21
1.3. Presentación del problema	22
1.3.1. Clases de conjugación	22
1.3.2. Pecos	30
2. Álgebras de Nichols sobre los grupos diedrales	37
2.1. Introducción	37
2.2. Organización del capítulo	38
2.3. Módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles	39
2.3.1. Notación	39
2.3.2. El caso m impar	40
2.3.3. El caso $m = 2r$ con r impar	43
2.3.4. El caso $m = 2r$ con r par	49

2.4.	Módulos reducibles en $\frac{\mathbb{D}_4}{\mathbb{D}_4}\mathcal{YD}$	57
2.4.1.	Módulos isotípicos	57
2.4.2.	Módulos de rango dos	59
2.4.3.	Módulos de rango tres	63
2.4.4.	Módulos de rango cuatro	68
2.4.5.	Módulos de rango cinco	71
2.4.6.	Presentaciones de las álgebras no exteriores	72
2.5.	Módulos reducibles en $\frac{\mathbb{D}_8}{\mathbb{D}_8}\mathcal{YD}$	79
2.5.1.	Módulos de rango dos	80
2.5.2.	Módulos de rango arbitrario	82
2.5.3.	Presentaciones de las álgebras no exteriores	83
2.6.	Apéndice: El álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$, m impar	84
2.6.1.	El álgebra 12-dimensional de Fomin-Kirillov	85
2.6.2.	Relaciones cuadráticas en $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$	87
2.6.3.	Relaciones cúbicas en $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$	89
2.6.4.	Información computacional	91
3.	Pecios simples asociados a grupos esporádicos	93
3.1.	Introducción	93
3.2.	Organización del capítulo	96
3.3.	Uso de los criterios de tipo F y C	96
3.3.1.	Criterio de tipo F en clases de grupos simples esporádicos	96
3.3.2.	Clases de tipo C que no son de tipo D	98
3.4.	Estudio de las clases kthulhu	100
3.4.1.	El lema de Breuer	100
3.4.2.	Método del descenso por subgrupos maximales	103
3.4.3.	Clases kthulhu en grupos simples esporádicos	104
3.4.4.	Clases torcidas kthulhu en grupos esporádicos	113
	Bibliografía	115
	Índice alfabético	118

Introducción

Contextualización y antecedentes

Las álgebras de Hopf, introducidas en la década del cincuenta del siglo pasado, son objetos matemáticos que han sido estudiados en primer lugar en relación con grupos algebraicos siendo luego estudiados como objetos de interés en sí mismos. Clases particulares de álgebras de Hopf que han aparecido en dicho estudio sistemático son los grupos cuánticos, introducidos por Drinfeld en 1986, los cuales pueden ser presentados a partir de deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. También aparecen codificando la simetría de categorías trenzadas, es decir, categorías munidas de un producto tensorial asociativo y conmutativo, como así también en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos, por ejemplo, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja.

En los últimos treinta años ha habido un gran interés en la clasificación de estos objetos. Así pues, el estudio de los problemas para una clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión finita se realiza por dos vías diferentes: el caso semisimple y el caso no semisimple. Una de las estrategias para estudiar el caso no semisimple es mirar la posición relativa del *corradical*, es decir, de la mayor subcoálgebra cosemisimple. Una subclase particular de las álgebras de Hopf H semisimples *triviales* o de las no semisimples son las *punteadas*, o sea aquellas cuyo corradical es isomorfo al álgebra de grupo de $G(H)$, donde $G(H)$ es el grupo de los *elementos de tipo grupo de H* . Para esta subclase de álgebras de Hopf, N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider idearon un método para clasificarlas llamado *método del levante*, ver [AS1, AS2, AS3, AS4], que consiste en estudiar ciertas álgebras graduadas para luego *levantar* esa información al objeto inicial.

Esta tesis se inscribe en el contexto del problema de clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre el cuerpo de los números complejos mediante el método del levante. Según este método, dado un grupo finito G , para hallar todas las álgebras de Hopf punteadas H complejas de dimensión finita tal que $G(H)$ es isomorfo a G hay que llevar a cabo cuatro pasos cuyos conceptos explicaremos en la Sección 1.2:

- (a) Hallar todos los V en ${}^G\mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ de dimensión finita.
- (b) Encontrar una presentación óptima por generadores y relaciones de las álgebras trenzadas del paso (a).
- (c) Para las álgebras $\mathcal{B}(V)$ en el paso (b), hallar salvo isomorfismos las álgebras de Hopf H tales que $gr(H) \cong \mathcal{B}(V)\#kG$ (levantamientos).
- (d) Verificar que toda álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita en ${}^G\mathcal{YD}$, que cumple los pasos anteriores, es generada en grado uno.

Cuando G es un grupo abeliano y de orden coprimo con 2, 3, 5 y 7 la clasificación está completa [AS4]. Cuando G es no abeliano no se tienen resultados generales, sin embargo, mucha ha sido la contribución a este problema en los últimos años. En efecto, además de los primeros ejemplos no triviales de dimensión baja dados en [MS, AG1, G1] se conoce la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre los grupos simétricos \mathbb{S}_3 y \mathbb{S}_4 en [AHS] y [GG], respectivamente, y de los grupos diedrales \mathbb{D}_m con $m = 4t \geq 12$ en [FG].

Por su parte las familias de grupos no abelianos finitos simples o *casi* simples parecen aportar pocos ejemplos de álgebras de Hopf punteadas no triviales. En efecto, en [AFGV1, F2] se han considerado los grupos simétricos y alternados, en [AFGV2, F1] los grupos esporádicos y en [FrGV1, FrGV2, ACGa1, ACGa2, ACGa3, ACGa4, ACGa5] los grupos finitos de tipo Lie. De estos trabajos se tiene que si G es un grupo alternado \mathbb{A}_m , $m \geq 5$, o un grupo esporádico distinto de F_{i22} , \mathbb{B} , \mathbb{M} o $SL_2(q)$, $GL_2(q)$, $PGL_2(q)$ o $PSL_2(q)$, o uno de los grupos $PSL_n(q)$ de la familia infinita dada en [ACGa3], entonces el álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ es la única álgebra de Hopf punteada H cuyo grupo de elementos de tipo grupo es isomorfo a G . En este caso se dice que el álgebra de Hopf H es *trivial*. Esto da lugar a la siguiente

Conjetura. *Si G es un grupo finito simple no abeliano, entonces toda álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con corradical $\mathbb{C}G$ es trivial.*

En general, si G es un grupo finito, entonces la categoría ${}^G\mathcal{YD}$ de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbb{C}G$ es semisimple y las clases de isomorfismo de objetos irreducibles en ${}^G\mathcal{YD}$ están parametrizadas por pares (\mathcal{O}, ρ) , donde \mathcal{O} es una clase de conjugación de G y ρ es una representación irreducible del centralizador de un elemento fijo de \mathcal{O} . Si G es no abeliano, el álgebra de Nichols asociada a (\mathcal{O}, ρ) depende fuertemente de la *estructura* de \mathcal{O} . En términos formales dicha estructura es la de *pecio*. El grupo G y, en particular, cualquier clase de conjugación en G son ejemplos de pecio con la conjugación como operación.

Así pues, otra estrategia para atacar el problema anterior es estudiar las álgebras de Nichols asociadas a un par (X, q) , donde X es un *pecio* y q es un *2-cociclo* de pecios. Ciertas propiedades de los pecios permiten decidir que el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(X, q)$ es de dimensión infinita para todo cociclo q , caso en el cual decimos que X *colapsa*. Tal es el caso de los pecios de *tipo D*, *F* y

C. En [AFGV1, Theorem. 3.6], [ACGa1, Theorem 2.8], [ACGa3, Theorem 2.9] se probó que si X es un pecio de tipo D, F o C, respectivamente, entonces X colapsa. Si un pecio no es de tipo D ni F ni C se dice *kthulhu*.

La propiedad de ser de tipo D, F o C de un pecio se preserva por inclusiones y por proyecciones de pecios. Puesto que todo pecio no trivial admite una proyección sobre un pecio *simple*, resulta fundamental determinar todos los pecios simples de tipo D, F o C. Notamos aquí que un pecio no trivial X se dice *simple* si no posee cocientes propios. Los pecios finitos simples han sido clasificados en [AG2, Theorems 3.9, 3.12], ver también [J]. Explicítamente, cualquier pecio finito simple pertenece a una de las siguientes clases:

- (i) Pecios afines simples,
- (ii) Clases de conjugación (torcidas) no triviales en grupos finitos simples no abelianos,
- (iii) Pecios homogéneos torcidos simples.

De esta manera la clasificación de todos los pecios finitos (simples) de tipo D, F o C, o, por complementariedad, la de los pecios finitos (simples) *kthulhu*, ayudará a delimitar el conjunto de módulos de Yetter-Drinfeld que podrían dar lugar a álgebras de Nichols de dimension finita.

En esta tesis se presentan avances en dos frentes: en la clasificación de álgebras de Nichols sobre grupos diedrales en el Capítulo 2 y en la clasificación de pecios (torcidos) *kthulhu* en grupo simples esporádicos en el Capítulo 3:

En el Capítulo 2, para los grupos diedrales, nos ocuparemos en forma unificada de los pasos (a) y (b) del método del levante en lo que llamamos **Paso 1** según la Subsección 1.2.4. Dado que estos grupos son productos semidirectos de grupos cíclicos podremos usar los resultados conocidos sobre grupos abelianos. Algunos resultados contenidos en esta tesis para dos casos particulares importantes se encuentran en el trabajo [BF1], el cual completa la clasificación de las álgebras de Nichols conseguida en [FG], para \mathbb{D}_m con $m = 4t \geq 12$, y muestra que en órdenes bajos se presentan fenómenos interesantes que no se dan en órdenes superiores y que conducen a nuevos ejemplos de álgebras de Nichols de dimensión finita.

En el Capítulo 3 usamos un punto de vista diferente basado principalmente en [HS1, Corollary 8.3]. Este resultado muestra que en el caso de los grupos finitos simples no abelianos los V que satisfacen el paso (a) solo pueden ser irreducibles en la categoría semisimple ${}^G\mathcal{YD}$. La evidencia actual lleva a conjeturar que si G es un grupo finito simple no abeliano, entonces no existen álgebras $\mathcal{B}(V)$ de dimensión finita en el paso (a). Nosotros trabajaremos en esta dirección para la familia de los grupos esporádicos probando que las herramientas disponibles, usando la estructura de pecio, no deciden en los casos abiertos actualmente, lo cual es por sí mismo un avance pues contribuye a la clasificación de los pecios simples *kthulhu*. Todos los resultados que hemos conseguido en esta línea se encuentran en el artículo [BF2].

Planteamiento del problema

Listamos a continuación los problemas que nos propusimos estudiar en esta tesis, todo con el fin de hacer aportes a la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre ciertos grupos no abelianos usando el método del levante. De manera específica,

1. Estudiar las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre los grupos diedrales. Esto es, comprender las técnicas usadas en [AF2, AHS, FG] y avanzar en la solución a los Problemas 2 y 3 de la Sección 1.3 en los casos abiertos o que no se encuentran en la literatura disponible.
2. Completar la clasificación de los módulos de Yetter-Drinfeld reducibles con álgebras de Nichols de dimensión finita sobre los grupos diedrales \mathbb{D}_m , para $m = 4t$, con base en los resultados de [FG] donde se han logrado clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita para los casos $m = 4t \geq 12$ usando el método del levante. Esto es, resolver el Problema 1 de la Sección 1.3 para los casos abiertos $m = 4$ y $m = 8$.
3. Estudiar familias distinguidas de pecios simples que son clases de conjugación, usuales y torcidas, en grupos simples esporádicos, con base en la clasificación de las clases de tipo D completada en [AFGV2, FV]. Esto es, determinar su colapso usando los criterios de tipo F y C como se planteó en el Problema 4 o avanzar en la clasificación de los pecios kthulhu como se planteó en el Problema 5 de la Sección 1.3.

Referimos a la Sección 1.3 porque allí se presenta con más detalles el problema.

Estrategia general

En el caso de los grupos diedrales usamos la caracterización dada en [AG1] de los módulos irreducibles en la categoría semisimple ${}^G\mathcal{YD}$. Dichos módulos se parametrizan por pares (\mathcal{O}, ρ) donde \mathcal{O} es una clase de conjugación en G y ρ una representación irreducible que cumplen las condiciones de la Subsección 1.3.1. Nuestro trabajo consiste en usar los Criterios 1–9, que se enuncian en [AS1, AS2, AF2, AZ, G1, H1]. Esto nos permite establecer en la Sección 2.3 las dimensiones de las álgebras de Nichols $\mathcal{B}(V)$ donde V es un módulo irreducible, excepto en el caso particular de la clase de las involuciones y la representación signo en \mathbb{D}_m para $m \geq 5$ impar. Para esta clase y representación sobre \mathbb{D}_3 la dimensión del álgebra de Nichols es conocida por [AHS, FK, MS], trabajos que nos sirvieron para hallar algunas dimensiones de las componentes graduadas en el caso $m \geq 5$ para ciertos valores de m .

Posteriormente, procedemos a analizar los módulos de Yetter-Drinfeld reducibles sobre \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8 combinando técnicas para grupos abelianos que se encuentran en [AS1, An1, An2, H2] y para grupos no abelianos enunciadas en [HS2, HV3, HV4, MS]. Todo esto lo hicimos bajo la guía de [FG] que nos proporcionó una estructura de la solución en las pasos (a) y (b) del método del levante, además de ser la ruta a seguir para intentar una clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita en trabajos futuros.

Adicionalmente, son muy importantes las técnicas computacionales implementadas en el programa GAP y el paquete GBNP para bases de Gröbner en variables no conmutativas.

En el caso de los grupos simples esporádicos buscamos pecios de tipo F, definidos y estudiados en [ACGa1], y pecios de tipo C, definidos a partir de resultados de [HV1] y estudiados en [ACGa3]. Para las clases de conjugación, usuales y torcidas, en grupos simples esporádicos que no son de tipo D buscamos determinar si son kthulhu por medio de un procedimiento de descenso a subgrupos maximales. Usamos principalmente técnicas computacionales con el programa GAP y el paquete ATLAS [WWT+].

Resultados principales

Álgebras de Nichols de módulos irreducibles sobre grupos diedrales

En la Sección 2.3 hallamos la mayoría de las dimensiones de las álgebras de Nichols de los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre los grupos diedrales \mathbb{D}_m . Estos resultados se resumen en las Tablas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8. Los casos abiertos se reducen al álgebra asociada a la clase de las involuciones y la representación signo en \mathbb{D}_m , con $m \geq 5$ impar, a la cual denotamos $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$ y estudiamos en el Apéndice 2.6.

Para el caso de $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$ hemos determinado por medios geométricos las relaciones cuadráticas que son

$$R_n^k = v_k v_{k+n} + v_{k+n} v_{k+2n} + \cdots + v_{k-n} v_k.$$

para cada $n = 0, \dots, m-1$ y $k = 0, \dots, (m, n) - 1$, donde (m, n) es el máximo común divisor de m y n . Además hemos encontrado dos formas diferentes de contarlas, hallando la dimensión del núcleo del simetrizador cuántico de orden dos:

Teorema. $\dim(\text{Ker}Q_2) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \text{Tr}((-1)^s c^s)$, donde c es la trenza del módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente.

Teorema. $\dim(\text{Ker}Q_2) = \sum_{n=1}^m (m, n)$

También hemos podido contar las relaciones cúbicas en algunos órdenes bajos:

Proposición. *Si $p \in \{3, 5, 7\}$, entonces $\dim(\text{Ker } Q_3) = 4p(p - 1)$.*

Y computacionalmente en GAP se han determinado las dimensiones de los núcleos de los simetrizadores cuánticos Q_n para n y m bajos, resultados que se muestran en la Tabla 2.20.

Álgebras de Nichols de los módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8

Se ha logrado completar el paso (a) del método del levante con dos teoremas de clasificación:

Teorema. (Teorema de clasificación para \mathbb{D}_4) *Los módulos en ${}_{\mathbb{D}_4}^{\mathbb{D}_4}\mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols de dimensión finita se clasifican así:*

1. Seis módulos irreducibles U, V, W, X, Y, Z .
2. Los siguientes módulos reducibles:
 - i. Módulos isotípicos $U^n, V^n, W^n, X^n, Y^n, Z^n$ para $n > 1$.
 - ii. Módulos no isotípicos $M \oplus N, M^2 \oplus N$ and $M^3 \oplus N$ con sumandos irreducibles M y N que cumplen $\{M, N\} \notin \{\{U, V\}, \{W, Z\}, \{X, Y\}\}$.

Teorema. (Teorema de clasificación para \mathbb{D}_8) *Los módulos en ${}_{\mathbb{D}_8}^{\mathbb{D}_8}\mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols de dimensión finita se clasifican así:*

1. Diez módulos irreducibles $Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$.
2. Los módulos reducibles $Q^i \oplus R^j, S^i \oplus V^j, T^i \oplus U^j$ para $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i + j > 1$.

Además, en las Secciones 2.4.6 y 2.5.3 tenemos presentaciones por generadores y relaciones de todas estas álgebras, con excepción de 12 álgebras asociadas a módulos no isotípicos de rango tres y cuatro sobre \mathbb{D}_4 .

Clases de conjugación, usuales y torcidas, en grupos finitos simples esporádicos

Clases de tipo F. Como contribución a la clasificación de las clases de conjugación de tipo F en los grupos simples esporádicos hemos logrado usar técnicas computacionales para demostrar dos resultados.

Teorema. *Los siguientes grupos esporádicos no tienen clases de conjugación de tipo F:*

- Los grupos de Mathieu $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$.
- Los tres primeros grupos de Janko J_1, J_2, J_3 .
- El grupo de Higman-Sims HS.

Teorema. *Sea G uno de los siguientes grupos simples esporádicos*

$$He, Co_3, McL, T.$$

Sea \mathcal{O} una clase de conjugación en G . Entonces, \mathcal{O} es de tipo F si y solo si se encuentra en la Tabla 1

Grupo G	Clases
He	4B, 4C, 8A, 10A
Co_3	9A, 9B, 24A*
McL	5B, 9A, 9B
T	4B

Tabla 1: Clases de tipo F en ciertos grupos esporádicos.

Clases de tipo C . En la determinación del tipo de todas las clases que no son de tipo D en grupos esporádicos, distintos del monstruo \mathbb{M} , también establecimos las siguientes clases de tipo C .

Teorema. *Las clases de conjugación en la Tabla 2 son de tipo C .*

Grupo	Clases	Grupo	Clases
T	2A	M_{11}	8A, 8B
Suz	3A	Co_1	3A
Co_2	2A	J_2	2A, 3A
J_3	5A, 5B	\mathbb{B}	2A

Tabla 2: Clases de tipo C , no de tipo D , en grupos esporádicos, distintos de \mathbb{M} .

En cuanto a la determinación del tipo de las clases torcidas que no son de tipo D establecimos las siguientes de tipo C :

Teorema. *Las clases de conjugación en la Tabla 3 son de tipo C .*

Grupo	Clases
$Aut(M_{22})$	2B
$Aut(HS)$	2C
$Aut(Fi_{22})$	2D

Tabla 3: Clases torcidas de tipo C , no de tipo D , en grupos esporádicos.

Clases $kthulhu$. Se consideraron las clases de conjugación, usuales y torcidas, de los grupos simples esporádicos, distintos del monstruo \mathbb{M} , que no son de tipo D según la clasificación de [FV] y se determinó, usando técnicas de descenso a subgrupos maximales explicadas en la Sección 3.4, que la mayoría de dichas clases son $kthulhu$, a saber:

Teorema. *Las clases de conjugación en la Tabla 4 son kthulhu.*

Grupo	Clases	Grupo	Clases
M_{11}	11A, 11B	M_{12}	11A, 11B
M_{22}	11A, 11B	M_{23}	23A, 23B
M_{24}	23A, 23B	Ru	29A, 29B
HS	11A, 11B	McL	11A, 11B
Co_2	23A, 23B	Co_3	23A, 23B
J_1	15A, 15B, 19A, 19B, 19C	J_3	19A, 19B
J_4	29A, 43A, 43B, 43C	Ly	37A, 37B, 67A, 67B, 67C
$O'N$	31A, 31B	Fi_{22}	2A, 22A, 22B
Fi_{23}	2A	Fi'_{24}	29A, 29B
\mathbb{B}	46A, 46B, 47A, 47B		

Tabla 4: Clases kthulhu en grupos esporádicos, distintos de \mathbb{M} .

Teorema. *Las clases de conjugación torcidas en la Tabla 5 son kthulhu.*

Grupo	Clases
$\text{Aut}(J_3)$	34A, 34B
$\text{Aut}(O'N)$	38A, 38B, 38C
$\text{Aut}(McL)$	22A, 22B

Tabla 5: Clases torcidas kthulhu en grupos esporádicos.

Clase faltante: Con las técnicas utilizadas y la información disponible actualmente en GAP no ha sido posible determinar el tipo de la clase 2C en $\text{Aut}(Fi'_{24})$ que sería el único caso abierto dentro de las clases que no son de tipo D en grupos esporádicos distintos del monstruo \mathbb{M} .

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo recopilamos, sin demostraciones, algunos hechos generales sobre las estructuras algebraicas que usamos a lo largo de toda la tesis. Las referencias principales para este capítulo serán [Ra, KT]. Cuando citemos resultados poco usuales o muy importantes vamos a indicar con precisión el libro o artículo que estamos usando de guía.

1.1. Álgebras de Hopf

Fijemos un cuerpo k de característica cero. Seguimos la convención notacional según la cual \otimes y Hom significan respectivamente \otimes_k y Hom_k . Además todos los espacios vectoriales tendrán como cuerpo de escalares a k .

Si A , B y C son espacios vectoriales tenemos los siguientes isomorfismos naturales:

- Asociatividad:

$$\alpha : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C) : (a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c).$$

- Conmutatividad:

$$\tau : A \otimes B \rightarrow B \otimes A : a \otimes b \mapsto b \otimes a.$$

- Acción a izquierda y derecha, respectivamente:

$$\eta_l : k \otimes A \rightarrow A : 1 \otimes a \mapsto a, \quad \eta_r : A \otimes k \rightarrow A : a \otimes 1 \mapsto a.$$

En este contexto la multiplicación de k puede denotarse η_k .

Usamos los isomorfismos de asociatividad cuando creamos conveniente especificarlos pero en general identificamos $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ eliminando así los paréntesis. Lo mismo ocurre con las acciones a izquierda y derecha pues identificamos $k \otimes A = A = A \otimes k$ considerando $\lambda \otimes a = \lambda a = a \otimes \lambda$ para todo $\lambda \in k$ y todo $a \in A$.

1.1.1. Álgebras

Definición 1.1. Un *álgebra* sobre k es un triple (A, m, u) donde A es un k -espacio vectorial y $m : A \otimes A \rightarrow A$, $u : k \rightarrow A$ son funciones lineales llamadas *multiplicación* y *unidad*, respectivamente, que hacen conmutativos a los siguientes diagramas:

- Asociatividad: $(\text{id}_A \otimes m)m = (m \otimes \text{id}_A)m$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}_A} & A \otimes A \\
 \text{id}_A \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array} \quad (1.1)$$

- Unidad: $m(u \otimes \text{id}_A) = \eta_l$ y $m(\text{id}_A \otimes u) = \eta_r$

$$\begin{array}{ccccc}
 k \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes u} & A \otimes k \\
 & \searrow \eta_l & \downarrow m & \swarrow \eta_r & \\
 & & A & &
 \end{array} \quad (1.2)$$

Decimos que A es *conmutativa* si $m\tau = m$.

Usamos la notación tradicional para denotar la multiplicación

$$ab = m(a \otimes b).$$

Así, el axioma de asociatividad significa que $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in A$. Por otra parte, si llamamos $1_A = u(1)$, la unidad nos dice que

$$1_A a = m(u \otimes \text{id}_A)(1 \otimes a) = a = m(\text{id}_A \otimes u)(a \otimes 1) = a 1_A$$

para todo $a \in A$. Notemos que la unidad es única pues está determinada por el valor $u(1)$ que es el *elemento unidad* 1_A del álgebra A . Además en un álgebra la multiplicación m es sobreyectiva pues dado $a \in A$ tenemos $m(u(1) \otimes a) = a$.

Definición 1.2. Sean (A, m, u) y (B, m', u') dos álgebras. El *álgebra tensorial* es el espacio vectorial $A \otimes B$ con multiplicación y unidad dadas por

$$\hat{m} = (m \otimes m')(\text{id}_A \otimes \tau \otimes \text{id}_B), \quad \hat{u} = (u \otimes u')\eta_k^{-1}.$$

Esto significa que la multiplicación en $A \otimes B$ está dada por

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$$

para todo $a, c \in A$, $b, d \in B$ y que la unidad es $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$.

Definición 1.3. Sean (A, m, u) y (B, m', u') dos álgebras. Decimos que una función lineal $f : A \rightarrow B$ es un *morfismo de álgebras* si los siguientes diagramas conmutan:

- Compatibilidad de la multiplicación: $m'(f \otimes f) = fm$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ m \downarrow & & \downarrow m' \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (1.3)$$

- Compatibilidad de la unidad: $fu = u'$

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ u \swarrow & & \searrow u' \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (1.4)$$

En términos de los elementos de A tenemos que f es un morfismo de álgebras si $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$ y $f(1_A) = 1_B$.

Denotamos \mathbf{Alg}_k a la categoría de álgebras sobre k . En esta categoría, los isomorfismos son precisamente los morfismos biyectivos de álgebras.

Definición 1.4. Sea (A, m, u) un álgebra. Decimos que un subespacio vectorial B de A es una *subálgebra* de A si

$$m(B \otimes B) \subseteq B, \quad u(1) \in B.$$

Claramente, cuando restringimos las operaciones de un álgebra A a una subálgebra B obtenemos nuevamente un álgebra.

Definición 1.5. Sea (A, m, u) un álgebra. Decimos que un subespacio vectorial I de A es un *ideal a izquierda* (resp. *derecha*) si

$$m(A \otimes I) \subseteq I \quad (\text{resp. } m(I \otimes A) \subseteq I).$$

I es un *ideal* o *ideal bilátero* si es ideal a izquierda y a derecha, lo cual es equivalente a que

$$m(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I.$$

Notemos que ser solo ideal a izquierda (resp. derecha) no implica ser ideal.

Definición 1.6. Sea I un ideal de un álgebra (A, m, u) . Existe una única estructura de álgebra $(A/I, \bar{m}, \bar{u})$ en el espacio vectorial cociente A/I tal que la proyección canónica $\pi : A \rightarrow A/I : a \mapsto \bar{a}$ es un morfismo de álgebras. Específicamente,

$$\bar{m}(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \overline{ab}, \quad \bar{u}(1) = \overline{1_A}.$$

Llamamos a $(A/I, \bar{m}, \bar{u})$ el *álgebra cociente* de A por I .

Definición 1.7. Sea A un álgebra. Un A -módulo a izquierda es un par (V, μ) donde V es un espacio vectorial y $\mu : A \otimes V \rightarrow V$ es una función lineal, a la que llamamos *acción de A en V* , que hace conmutativos a los siguientes diagramas:

- Asociatividad: $\mu(m \otimes \text{id}_V) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu)$.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes V & \xrightarrow{m \otimes \text{id}_V} & A \otimes V \\ \text{id}_A \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V \end{array} \quad (1.5)$$

- Unidad: $\mu(u \otimes \text{id}_V) = \eta$.

$$\begin{array}{ccc} k \otimes V & \xrightarrow{\eta} & V \\ & \searrow u \otimes \text{id}_V & \nearrow \mu \\ & & A \otimes V \end{array} \quad (1.6)$$

En este contexto denotaremos $\mu(a \otimes v) = a \cdot v = av$. Además, podemos definir los A -módulos a derecha de manera análoga usando acciones de la forma $\mu : V \otimes A \rightarrow V : v \otimes a \mapsto va$.

Definición 1.8. Sean (V, μ) y (W, μ') dos módulos a izquierda sobre un álgebra A . Un *morfismo* de V en W es una función lineal $f : V \rightarrow W$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

- Compatibilidad con las acciones: $f\mu = \mu'(\text{id}_A \otimes f)$.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes V & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes f} & A \otimes W \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array} \quad (1.7)$$

Los A -módulos a izquierda junto con los morfismos que acabamos de definir forman una categoría abeliana que denotamos ${}_A\mathcal{M}$. Análogamente, a la categoría de A -módulos a derecha la denotamos \mathcal{M}_A .

Definición 1.9. Sea W un subespacio vectorial de un A -módulo (V, μ) . Decimos que W es un *submódulo* de V si

$$\mu(A \otimes W) \subseteq W.$$

En tal caso, tanto W como V/W son A -módulos. Explícitamente, la acción de A en W es la restricción de μ y la acción de A en el *módulo cociente* V/W está dada por

$$\bar{\mu} : A \otimes V/W \rightarrow V/W : a \otimes \bar{v} \mapsto \overline{av}.$$

1.1.2. Coálgebras

Definición 1.10. Una *coálgebra* sobre k es un triple (C, Δ, ε) donde C es un k -espacio vectorial y $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, $\varepsilon : C \rightarrow k$ son aplicaciones lineales, llamadas *comultiplicación* y *counidad* respectivamente, que hacen conmutativos a los siguientes diagramas:

- Coasociatividad: $(\Delta \otimes \text{id}_C)\Delta = (\text{id}_C \otimes \Delta)\Delta$

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}_C} & C \otimes C \\
 \uparrow \text{id}_C \otimes \Delta & & \uparrow \Delta \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C
 \end{array} \quad (1.8)$$

- Counidad: $(\varepsilon \otimes \text{id}_C)\Delta = \eta_l^{-1}$ and $(\text{id}_C \otimes \varepsilon)\Delta = \eta_r^{-1}$

$$\begin{array}{ccccc}
 k \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_C} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id}_C \otimes \varepsilon} & C \otimes k \\
 & \searrow \eta_l^{-1} & \uparrow \Delta & \nearrow \eta_r^{-1} & \\
 & & C & &
 \end{array} \quad (1.9)$$

Decimos que C es *coconmutativa* si $\tau\Delta = \Delta$.

Usamos la notación de Sweedler para denotar la imagen de un elemento bajo la comultiplicación

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Con esta notación la coasociatividad significa que para todo $c \in C$ tenemos

$$c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}.$$

Análogamente, la counidad significa que

$$\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})$$

para todo $c \in C$.

Notemos además que en una coálgebra la comultiplicación Δ es inyectiva. En efecto, supongamos que $\Delta(c) = 0$. Esto implica que $0 = (\varepsilon \otimes \text{id}_C)\Delta(c) = 1 \otimes c$. Aplicando η_l obtenemos $c = 0$.

Definición 1.11. Sean (C, Δ, ε) y $(D, \Delta', \varepsilon')$ dos coálgebras. La *coálgebra tensorial* es el espacio $C \otimes D$ con la comultiplicación y la counidad dadas por

$$\hat{\Delta} = (\text{id}_C \otimes \tau \otimes \text{id}_D)(\Delta \otimes \Delta'), \quad \hat{\varepsilon} = \eta_k(\varepsilon \otimes \varepsilon').$$

Esto es, $\hat{\Delta}(c \otimes d) = c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}$ y $\hat{\varepsilon}(c \otimes d) = \varepsilon(c)\varepsilon'(d)$.

Definición 1.12. Sean (C, Δ, ε) y $(D, \Delta', \varepsilon')$ dos coálgebras. Decimos que una función lineal $f : C \rightarrow D$ es un *morfismo de coálgebras* si los siguientes diagramas conmutan:

- Compatibilidad de la comultiplicación: $(f \otimes f)\Delta = \Delta'f$

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta' \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array} \quad (1.10)$$

- Compatibilidad de la counidad: $\varepsilon = \varepsilon'f$

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \varepsilon \nearrow & & \nwarrow \varepsilon' \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array} \quad (1.11)$$

Usando los elementos de C podemos decir que $f : C \rightarrow D$ es un morfismo de coálgebras si para todo $c \in C$ tenemos

$$f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} \text{ y } \varepsilon'(f(c)) = \varepsilon(c).$$

Denotamos \mathbf{Coalg}_k a la categoría de coálgebras sobre k . En esta categoría los isomorfismos son precisamente los morfismos biyectivos de coálgebras.

Definición 1.13. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Sea D un subespacio vectorial de C . Decimos que D es una *subcoálgebra* de C si

$$\Delta(D) \subseteq D \otimes D.$$

Notemos que si D es una subcoálgebra de C entonces restringiendo la comultiplicación y la counidad de C a D obtenemos que $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ es una coálgebra.

Definición 1.14. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Sea I un subespacio vectorial de C . Decimos que I es un *coideal a izquierda* (resp. *derecha*) si

$$\Delta(I) \subseteq C \otimes I \text{ (resp. } \Delta(I) \subseteq I \otimes C).$$

I es un *coideal* de C si

$$\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C \text{ y } \varepsilon(I) = 0.$$

Es importante tener presente que ser coideal no implica ser coideal a izquierda (resp. derecha). Por otra parte, ser coideal a izquierda y a derecha es equivalente a ser subcoálgebra.

Definición 1.15. Sea I un coideal de una coálgebra (C, Δ, ε) . Existe una única estructura de coálgebra $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ en el espacio vectorial cociente C/I tal que la proyección canónica $\pi : C \rightarrow C/I : c \mapsto \bar{c}$ es un morfismo de coálgebras. Específicamente,

$$\bar{\Delta}(\bar{c}) = \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}, \quad \bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c).$$

Llamamos a $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ la *coálgebra cociente* de C por I .

Una diferencia importante entre la teoría de álgebras y la de coálgebras es que la última tiene un carácter localmente finito debido al siguiente importante resultado:

Teorema 1.16 (Teorema fundamental de las coálgebras). [Ra, Theorem 2.2.3] *Sea C una coálgebra. Entonces, todo subespacio vectorial de dimensión finita $V \subseteq C$ está contenido en una subcoálgebra de C de dimensión finita.*

Definición 1.17. Sea C un álgebra. Un C -comódulo a derecha es un par (V, ρ) donde V es un espacio vectorial y $\rho : V \rightarrow V \otimes C$ es una función lineal, a la que llamamos *coacción*, que hace conmutativos a los siguientes diagramas:

- Coasociatividad: $(\rho \otimes \text{id}_C)\rho = (\text{id}_V \otimes \Delta)\rho$.

$$\begin{array}{ccc} V \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\text{id}_V \otimes \Delta} & V \otimes C \\ \rho \otimes \text{id}_C \uparrow & & \uparrow \rho \\ V \otimes C & \xleftarrow{\rho} & V \end{array} \quad (1.12)$$

- Counidad: $(\text{id}_V \otimes \varepsilon)\rho = \eta_r^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta_r^{-1}} & V \otimes k \\ \rho \searrow & & \nearrow \text{id}_V \otimes \varepsilon \\ & V \otimes C & \end{array} \quad (1.13)$$

En notación de Sweedler la imagen de un $v \in V$ bajo la coacción ρ es

$$\rho(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}.$$

De manera análoga podemos definir los comódulos a izquierda usando coacciones de la forma $\rho : V \rightarrow V \otimes C$. En este caso escribimos

$$\rho(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}.$$

Definición 1.18. Sea C una coálgebra. Sean (V, ρ) y (W, ρ') dos C -comódulos a derecha. Decimos que una función lineal $f : V \rightarrow W$ es un *morfismo de comódulos* de V en W si hace conmutativo el siguiente diagrama:

- Compatibilidad con las coacciones: $(f \otimes \text{id}_C)\rho = \rho'f$.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\
 V \otimes C & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_C} & W \otimes C
 \end{array} \tag{1.14}$$

Los C -comódulos a derecha y sus morfismos definen una categoría abeliana que denotamos \mathcal{M}^C . De forma análoga, a la categoría de C -comódulos a izquierda la denotamos ${}^C\mathcal{M}$.

Definición 1.19. Sea W un subespacio vectorial de un C -comódulo a derecha (V, ρ) . Decimos que W es un *subcomódulo a derecha* de V si

$$\rho(W) \subseteq W \otimes C.$$

En tal caso, tanto W como V/W son C -comódulos. Explícitamente, la coacción de W es la restricción de ρ y la coacción del *comódulo cociente* V/W es

$$\bar{\mu} : V/W \rightarrow V/W \otimes C : \bar{v} \mapsto \overline{v_{(0)}} \otimes v_{(1)}.$$

1.1.3. Biálgebras

Proposición 1.20. Consideremos una quintupla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que (B, m, u) es un álgebra y (B, Δ, ε) una coálgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Δ y ε son morfismos de álgebras.
2. m y u son morfismos de coálgebras.

En el resultado anterior hemos dejado implícito que las estructuras en $B \otimes B$ son las de álgebra y coálgebra tensorial de las Definiciones 1.2 y 1.11. Así pues, que Δ sea un morfismo de álgebras significa que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ y

$$(ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} = a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}.$$

Definición 1.21. Una *biálgebra* sobre k es una quintupla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ε) es una coálgebra y las dos estructuras son *compatibles*, lo cual quiere decir que se cumple alguna de las condiciones de la Proposición 1.20.

Decimos que una biálgebra B es *conmutativa* si lo es como álgebra y que es *coconmutativa* si lo es como coálgebra. Notemos que si B es conmutativa entonces la multiplicación $m : B \otimes B \rightarrow B$ es un morfismo de álgebras y análogamente, si B es coconmutativa entonces $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$ es un morfismo de coálgebras.

Definición 1.22. Sean A y B biálgebras. La *biálgebra tensorial* es el espacio $A \otimes B$ con la estructura de álgebra tensorial y coálgebra tensorial.

Definición 1.23. Decimos que una función $f : B \rightarrow B'$ entre biálgebras es un *morfismo de biálgebras* si es simultáneamente un morfismo de álgebras y de coálgebras.

Las biálgebras y sus morfismos forman una categoría a la que denotaremos \mathbf{Bialg}_k . En esta categoría los isomorfismos son justamente los morfismos biyectivos.

Definición 1.24. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra. Sea S un subespacio vectorial de B . Decimos que S es una *subbiálgebra* de B si es simultáneamente una subálgebra y una subcoálgebra de B .

Claramente, si restringimos la multiplicación y la comultiplicación de B a una subbiálgebra S obtenemos de nuevo una biálgebra.

Definición 1.25. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra. Sea I un subespacio vectorial de B . Decimos que I es un *biideal* de B si es simultáneamente un ideal y un coideal de B .

Definición 1.26. Sea I un biideal de una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$. Existe una única estructura de biálgebra $(B/I, \bar{m}, \bar{u}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ en el espacio vectorial cociente B/I tal que la proyección canónica $\pi : B \rightarrow B/I : b \mapsto \bar{b}$ es un morfismo de biálgebras. Además, el álgebra y la coálgebra subyacentes son el álgebra cociente y la coálgebra cociente. Llamamos a $(B/I, \bar{m}, \bar{u}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ la *biálgebra cociente* de B por I .

Definición 1.27. Sea B una biálgebra. Un B -*bimódulo* a derecha es una terna (V, μ, ρ) donde (V, μ) es un B -módulo a derecha, (V, ρ) es un B -comódulo a derecha y se cumple la siguiente compatibilidad de la acción y la coacción:

$$\rho(vh) = v_{(0)} \cdot h_{(1)} \otimes v_{(1)}h_{(2)}$$

para todo $v \in V$ y todo $h \in B$.

La última condición de la definición anterior significa que $\rho : V \rightarrow V \otimes B$ es un morfismo de B -módulos a derecha cuando consideramos en $V \otimes B$ la acción diagonal

$$(v \otimes h)x = v \cdot x_{(1)} \otimes hx_{(2)}.$$

Esto equivale a que $\mu : V \otimes B \rightarrow V$ es un morfismo de B -comódulos a derecha cuando consideramos en $V \otimes B$ la coacción

$$\tilde{\rho} : V \otimes B \rightarrow V \otimes B \otimes B : v \otimes h \mapsto v_{(0)} \otimes h_{(1)} \otimes v_{(1)}h_{(2)}.$$

Definición 1.28. Sean V y W dos bimódulos a derecha sobre una biálgebra B . Un *morfismo* de V en W es una función lineal $f : V \rightarrow W$ que es simultáneamente un morfismo de módulos y de comódulos.

A la categoría de B -bimódulos a derecha junto con los morfismos de la definición anterior la denotamos \mathcal{M}_B^B .

Definición 1.29. Sea W un subespacio vectorial de un B -bimódulo a derecha V . Decimos que W es un *subbimódulo* a derecha de V si es a la vez submódulo y subcomódulo. En tal caso, V/W tiene estructura de bimódulo a derecha con la estructura de módulo y comódulo cociente.

1.1.4. Álgebras de Hopf

Definición 1.30. Un *álgebra de Hopf* sobre k es una séxtupla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ tal que $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra y $\mathcal{S} : H \rightarrow H$ es una aplicación k -lineal, a la que llamamos *antípoda*, que hace conmutativo el siguiente diagrama:

- Axioma de la antípoda: $m(\mathcal{S} \otimes \text{id}_H)\Delta = u\varepsilon = m(\text{id}_H \otimes \mathcal{S})\Delta$.

$$\begin{array}{ccccc}
 H \otimes H & \xleftarrow{\Delta} & H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H \\
 \mathcal{S} \otimes \text{id}_H \downarrow & & \downarrow u\varepsilon & & \downarrow \text{id}_H \otimes \mathcal{S} \\
 H \otimes H & \xrightarrow{m} & H & \xleftarrow{m} & H \otimes H
 \end{array} \tag{1.15}$$

En términos de elementos el axioma de la antípoda significa que

$$\mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1_H = x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)})$$

para todo $x \in H$.

Definición 1.31. Sean H y H' dos álgebras de Hopf con antípodas \mathcal{S} y \mathcal{S}' , respectivamente. La biálgebra tensorial $H \otimes H'$ tiene estructura de álgebra de Hopf con antípoda

$$\mathcal{S}_{H \otimes H'} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}'.$$

La llamamos el *álgebra de Hopf tensorial* de H y H' .

Definición 1.32. Sean H y H' dos álgebras de Hopf con antípodas \mathcal{S} y \mathcal{S}' respectivamente. Decimos que una función lineal $f : H \rightarrow H'$ es un *morfismo de álgebras de Hopf* si es un morfismo de biálgebras que hace conmutativo el siguiente diagrama:

- Compatibilidad de la antípoda: $f\mathcal{S} = \mathcal{S}'f$.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{f} & H' \\
 \mathcal{S} \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}' \\
 H & \xrightarrow{f} & H'
 \end{array} \tag{1.16}$$

Es un hecho bien conocido que en la definición anterior basta verificar que el morfismo $f : H \rightarrow H'$ es de biálgebras pues esto implica la compatibilidad con la antípoda.

Las álgebras de Hopf y sus morfismos forman una categoría a la que denotamos \mathbf{Hopf}_k . En esta categoría los isomorfismos son justamente los morfismos biyectivos.

Definición 1.33. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda \mathcal{S} . Sea A un subespacio vectorial de H . Decimos que A es una *subálgebra de Hopf* de H si es una subbiálgebra que cumple $\mathcal{S}(A) \subseteq A$.

Naturalmente, toda subálgebra de Hopf A de H es un álgebra de Hopf cuando restringimos la estructura de biálgebra y la antípoda de H a A .

Definición 1.34. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda \mathcal{S} . Sea I un subespacio vectorial de H . Decimos que I es un *ideal de Hopf* de H si es un biideal y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$.

Definición 1.35. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda \mathcal{S} . Si I es un ideal de Hopf de H entonces existe una única estructura de álgebra de Hopf en la biálgebra cociente H/I tal que la proyección canónica $\pi : H \rightarrow H/I : h \mapsto \bar{h}$ es un morfismo de álgebras de Hopf. Específicamente, la antípoda de H/I está dada por

$$\bar{\mathcal{S}}(\bar{h}) = \overline{\mathcal{S}(h)}.$$

Llamamos a H/I el *álgebra de Hopf cociente* de H por I .

Definición 1.36. Sea H un álgebra de Hopf. Sea V un espacio vectorial. Decimos que V es un *H -módulo de Hopf a derecha* si es un bimódulo a derecha sobre la biálgebra subyacente H . Del mismo modo, un *morfismo de módulos de Hopf* es un morfismo de bimódulos, esto es, un morfismo de módulos y comódulos.

Denotamos \mathcal{M}_H^H a la categoría de H -módulos de Hopf a derecha y sus morfismos. En esta categoría los isomorfismos son precisamente los morfismos biyectivos.

Definición 1.37. Sea V un H -comódulo con coacción $\rho : V \rightarrow V \otimes H$. Decimos que $v \in V$ es *coinvariante* si

$$\rho(v) = v \otimes 1.$$

El conjunto de coinvariantes de V forma un subespacio vectorial que denotamos $V^{\text{co}H}$.

Si W es un espacio vectorial entonces el producto tensorial $W \otimes H$ es un H -módulo de Hopf a derecha con acción

$$\text{id}_W \otimes m : W \otimes H \otimes H \rightarrow W \otimes H : (w \otimes h) \otimes x \mapsto w \otimes hx$$

y coacción

$$\text{id}_W \otimes \Delta : W \otimes H \rightarrow W \otimes H \otimes H : w \otimes h \mapsto w \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

El siguiente resultado muestra que todos los módulos de Hopf tienen esta estructura.

Teorema 1.38 (Teorema fundamental de los módulos de Hopf (a derecha)). [Ra, Theorem 8.2.3] *Si V es un H -módulo de Hopf a derecha entonces*

$$V \cong V^{\text{co}H} \otimes H$$

como módulos de Hopf. El isomorfismo está dado explícitamente por

$$\phi(v) = v_{(0)}\mathcal{S}(v_{(1)}) \otimes v_{(2)}.$$

Ahora consideremos un álgebra de Hopf de dimensión finita $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$. Sabemos que el espacio vectorial dual $H^* = \text{Hom}(H, k)$ tiene la misma dimensión de H . Además tenemos un isomorfismo

$$\nu : H^* \otimes H^* \rightarrow (H \otimes H)^*$$

dado por

$$\nu(f \otimes g)(h \otimes h') = f(h)g(h')$$

que nos permite identificar $H^* \otimes H^*$ con $(H \otimes H)^*$. De este modo, cuando dualizamos la multiplicación $m : H \otimes H \rightarrow H$ obtenemos

$$m^* : H^* \rightarrow (H \otimes H)^*$$

pero podemos considerar a m^* como una función lineal de H^* en $H^* \otimes H^*$. Haciendo lo mismo con todas las operaciones de H conseguimos la siguiente definición:

Definición 1.39. Si $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf de dimensión finita entonces $(H^*, \Delta^*, \varepsilon^*, m^*, u^*, \mathcal{S}^*)$ es un álgebra de Hopf que llamamos el *álgebra de Hopf dual* de H .

Ejemplo 1.40. Sea G un grupo finito. El álgebra de grupo kG es un álgebra de Hopf con las aplicaciones

$$m(g \otimes h) = gh, \quad u(1) = e_G, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

Consideremos también el álgebra de funciones k^G . Sabemos que G es una base de kG con base dual

$$\{\delta_g : g \in G\}$$

donde $\delta_g(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\delta_g(g) = 1$. El álgebra de Hopf dual de kG es $kG^* = k^G$ con multiplicación punto a punto y

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{h \in G} \delta_h \otimes \delta_{h^{-1}g}, \quad \varepsilon(\delta_g) = \delta_g(e), \quad \mathcal{S}(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

Ejemplo 1.41. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. El álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con las aplicaciones

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad \mathcal{S}(x) = -x, \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Ejemplo 1.42. En este ejemplo suponemos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $n \geq 2$ un número entero. Sea ω una raíz n -ésima de la unidad. Definimos el *álgebra de Taft* por generadores y relaciones como

$$H_{n^2}(\omega) = \langle g, x \mid g^n = 1, x^n = 0, xg = \omega gx \rangle.$$

Su dimensión es n^2 con base

$$\{g^i x^j : 0 \leq i, j \leq n-1\}.$$

La estructura de álgebra de Hopf se consigue si definimos en los generadores la comultiplicación por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x,$$

la counidad por

$$\varepsilon(g) = g^{-1}, \quad \varepsilon(x) = 0$$

y la antípoda por

$$\mathcal{S}(g) = g^{-1}, \quad \mathcal{S}(x) = -g^{-1}x.$$

Definición 1.43. Sea H un álgebra de Hopf. Decimos que un elemento no nulo $g \in H$ es de *tipo grupo* si cumple

$$\Delta(g) = g \otimes g.$$

El conjunto de dichos elementos es linealmente independiente y forma un grupo con la multiplicación de H al que llamamos *el grupo de elementos de tipo grupo de H* . Lo denotamos $G(H)$. En el contexto de las álgebras que nos interesan decimos que H es un álgebra de Hopf *sobre el grupo $G(H)$* .

Definición 1.44. Sea H un álgebra de Hopf. Sean $g, h \in G(H)$. Decimos que un elemento $x \in H$ es (g, h) -*primitivo* si

$$\Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x.$$

Al espacio de todos ellos lo denotamos

$$P_{g,h}(H).$$

Si x es $(1, 1)$ -primitivo decimos simplemente que x es *primitivo* y escribimos $P_{1,1}(H) = P(H)$.

1.2. El método del levante

Este método es una técnica de clasificación de álgebras de Hopf. Fue propuesto por Nicolás Andruskiewitsch y Hans-Jürgen Schneider en [AS1, AS2]. Haciendo un uso sistemático de él éstos autores lograron clasificar en [AS4] las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre todos los grupos abelianos de orden coprimo con 210 cuando el cuerpo k es algebraicamente cerrado de característica cero.

1.2.1. Categorías trenzadas

La utilidad de las categorías trenzadas es que ofrecen un contexto general en el cual pueden definirse las nociones de álgebras de Hopf y sus módulos. Hasta ahora los conceptos que requerimos en la categoría de los espacios vectoriales fueron los de producto tensorial junto con los morfismos naturales de asociatividad y acciones a izquierda y derecha.

Definición 1.45. Una *categoría monoidal*, o también *tensorial*, es una séxtupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ donde

1. \mathcal{C} es una categoría.
2. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un bifunctor.
3. $\mathbb{1}$ es un objeto de \mathcal{C} , al que llamamos *identidad* de \mathcal{C} .
4. α, λ , y ρ son familias de isomorfismos naturales que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

- Asociatividad:

$$\alpha = \{\alpha_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z \mid X, Y, Z \in \mathcal{C}\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & \\
 \alpha_{W,X,Y \otimes Z} \nearrow & & \searrow \alpha_{W \otimes X,Y,Z} \\
 W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \\
 \text{id} \otimes \alpha_{X,Y,Z} \downarrow & & \uparrow \alpha_{W,X,Y} \otimes \text{id} \\
 W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\alpha_{W,X \otimes Y,Z}} & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z
 \end{array} \quad (1.17)$$

- Acciones de la identidad a izquierda y derecha:

$$\lambda = \{\lambda_X : \mathbb{1} \otimes X \rightarrow X \mid X \in \mathcal{C}\}, \quad \rho = \{\rho_X : X \otimes \mathbb{1} \rightarrow X \mid X \in \mathcal{C}\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) & \xrightarrow{\alpha_{X,\mathbb{1},Y}} & (X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \\
 \text{id} \otimes \lambda_Y \searrow & & \swarrow \rho_X \otimes \text{id} \\
 & X \otimes Y &
 \end{array} \quad (1.18)$$

Ejemplo 1.46. En la primera sección tenemos el ejemplo que motiva esta noción que es la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_k$ sobre un cuerpo k con el bifunctor \otimes como el producto tensorial usual y $\mathbb{1} = k$.

Podemos también estudiar de manera general aquellas categorías que tienen un análogo al isomorfismo natural de conmutatividad $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ en \mathbf{Vec}_k .

Definición 1.47. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ una categoría monoidal. Una *trenza* en \mathcal{C} es una familia de isomorfismos naturales

$$\tau = \{\tau_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X \mid X, Y \in \mathcal{C}\}$$

que hacen conmutativos a los siguientes diagramas:

- Compatibilidad con las acciones:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\tau_{X,\mathbb{1}}} & \mathbb{1} \otimes X \\ & \searrow \rho_X & \swarrow \lambda_X \\ & X & \end{array} \quad (1.19)$$

- El diagrama del hexágono:

$$\begin{array}{ccccc} & & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\tau_{X \otimes Y, Z}} & Z \otimes (X \otimes Y) \\ & \nearrow \alpha_{X,Y,Z} & & & \searrow \alpha_{Z,X,Y} \\ X \otimes (Y \otimes Z) & & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\ & \searrow \text{id} \otimes \tau_{X,Y} & & & \nearrow \tau_{X,Z} \otimes \text{id} \\ & & X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{\alpha_{X,Z,Y}} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array} \quad (1.20)$$

Si τ es una trenza en \mathcal{C} decimos que $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho, \tau)$ es una *categoría trenzada*.

Copiando con exactitud las definiciones de la Sección 1.1 tenemos que en las categorías trenzadas se pueden definir las nociones de álgebra, coálgebra, biálgebra, álgebra de Hopf, módulo sobre un álgebra, comódulo sobre una coálgebra y módulos de Hopf sobre biálgebras.

Por otra parte, la categorías \mathbf{Alg}_k , \mathbf{Coalg}_k , $\mathbf{Bialg}_{k,A}$, $\mathcal{M}, \mathcal{M}_A, {}^C\mathcal{M}$ y \mathcal{M}^C heredan la estructura tensorial de \mathbf{Vec}_k de modo que es posible definir, por ejemplo, la noción de coálgebra en la categoría de módulos a derecha \mathcal{M}_A sobre un álgebra A .

En este contexto general se pueden definir también los productos tensoriales de álgebras, coálgebras y biálgebras.

En tal caso usaremos el adjetivo de estructuras *trenzadas* para indicar que el producto tensorial se define con la trenza c de la categoría en cuestión. Por ejemplo, reescribiendo la Definición 1.2, si (A, m, u) y (B, m', u') son dos álgebras en una categoría trenzada \mathcal{C} entonces el *álgebra tensorial* es el objeto $A \otimes B$ con multiplicación dada por

$$\hat{m} = (m \otimes m')(\text{id}_A \otimes c \otimes \text{id}_B).$$

En ocasiones escribimos el signo tensorial subrayado $\underline{\otimes}$ para significar que la estructura de álgebra en $A \underline{\otimes} B$ está definida usando la trenza c .

1.2.2. Módulos de Yetter-Drinfeld

Definición 1.48. Sea $H \in \mathbf{Hopf}_k$ con antípoda biyectiva. Un *módulo de Yetter-Drinfeld a izquierda sobre H* es un k -espacio vectorial M dotado de una acción $\mu : H \otimes M \rightarrow M$ y una coacción $\delta : M \rightarrow H \otimes M$ tales que

$$\delta(hm) = h_{(1)}m_{(-1)}\mathcal{S}(h_{(3)}) \otimes h_{(2)}m_{(0)}$$

para todo $h \in H$ y todo $m \in M$.

Un *morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld* es una aplicación lineal que es simultáneamente morfismo de módulos y de comódulos.

Estos datos definen una categoría que denotamos ${}^H_H\mathcal{YD}$. Más específicamente, esta categoría tiene por objetos a los módulos de Yetter-Drinfeld a izquierda. Con los cambios obvios pueden definirse ${}^H\mathcal{YD}_H$, ${}_H\mathcal{YD}^H$ y \mathcal{YD}_H^H .

Si $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$, sus *submódulos de Yetter-Drinfeld* son los subespacios que simultáneamente son submódulos y subcomódulos.

Observación 1.49. De ahora en adelante todas las álgebras de Hopf que consideramos tienen antípoda biyectiva. Hacemos esta restricción para poder trabajar en el contexto de las categorías trenzadas.

Definición 1.50. Sean $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$. El *producto tensorial* $M \otimes N$ es también un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H cuando consideramos la acción

$$h \cdot (m \otimes n) = h_{(1)}m \otimes h_{(2)}n$$

y la coacción

$$\delta(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

La *trenza* c de $M \otimes N$ (o más específicamente $c_{M,N}$) es el morfismo en ${}^H_H\mathcal{YD}$ dado por

$$c(m \otimes n) = m_{(-1)}n \otimes m_{(0)}$$

cuya inversa está dada por

$$c^{-1}(m \otimes n) = n_{(0)} \otimes \mathcal{S}^{-1}(n_{(-1)})m.$$

Estas definiciones dotan a ${}^H_H\mathcal{YD}$ con una estructura de categoría trenzada en la que la identidad es $\mathbb{1} = k$, los isomorfismos de asociatividad y acciones de la identidad son como en \mathbf{Vec}_k . Por lo tanto podemos definir la noción de *biálgebra trenzada* en ${}^H_H\mathcal{YD}$. El ejemplo que nos interesa es el siguiente:

Ejemplo 1.51. Sea $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Consideremos el espacio vectorial

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes n}.$$

Usando la Definición 1.50 tenemos que cada sumando $M^{\otimes n}$ es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H , incluyendo a $M^{\otimes 0} = k$ donde las acciones son triviales. Por lo tanto $T(M) \in {}^H_H\mathcal{YD}$ con la acción y la coacción de la suma directa.

Denotemos $m_1 \otimes \cdots \otimes m_r = m_1 \cdots m_r$. Sabemos que $T(M)$ posee una estructura usual de álgebra donde la multiplicación μ está dada por yuxtaposición

$$\mu((m_1 \cdots m_r) \otimes (n_1 \cdots n_s)) = m_1 \cdots m_r n_1 \cdots n_s$$

para todo $m_1 \cdots m_r \in M^{\otimes r}$ y $n_1 \cdots n_s \in M^{\otimes s}$.

Además, $T(M)$ es una coálgebra con comultiplicación

$$\Delta(m) = 1 \otimes m + m \otimes 1 \in T(M) \otimes T(M)$$

y counidad $\varepsilon(m) = 0$, para todo $m \in M$. Aquí hemos definido Δ en M pero se puede extender a todo $T(M)$ pues $\Delta : M \rightarrow T(M) \otimes T(M)$ es una aplicación lineal y un morfismo de álgebras. A dicha extensión también la denotamos Δ .

Por lo tanto, $T(M)$ está dotada de la estructura de biálgebra trenzada, lo cual significa que

$$(\mu \otimes \mu)(\text{id}_M \otimes c \otimes \text{id}_M)(\Delta \otimes \Delta) = \Delta\mu. \quad (1.21)$$

Llamaremos a $T(M)$ la *biálgebra tensorial trenzada de M* .

En el contexto de los grupos finitos tenemos una forma equivalente de definir los módulos de Yetter-Drinfeld.

Definición 1.52. Sea G un grupo finito. Un *módulo de Yetter-Drinfeld* sobre el álgebra de Hopf kG , o simplemente *sobre G* , es un kG -módulo, G -graduado,

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g$$

tal que

$$hM_g \subseteq M_{hgh^{-1}}$$

para todo $g, h \in G$. La equivalencia entre la estructura de comódulo y la graduación está dada porque

$$M_g = \{m \in M : \delta(m) = g \otimes m\}.$$

El *soporte* de M es

$$\text{Sop}(M) = \{g \in G : M_g \neq 0\}.$$

A la categoría ${}^k_G \mathcal{YD}$ la denotamos también ${}^G_G \mathcal{YD}$. Notar que esta categoría es semisimple. Ver [AG1, Section 3].

Para efectos de realizar cálculos será importante tener presente la siguiente igualdad, que es una traducción de la ecuación 1.21: Si $M \in {}^G_G \mathcal{YD}$ y tomamos $m \in M_g$ y $n \in M$ entonces en la biálgebra tensorial $T(M)$ tenemos

$$\Delta(mn) = 1 \otimes mn + m \otimes n + (g \cdot n) \otimes m + mn \otimes 1. \quad (1.22)$$

1.2.3. Álgebras de Nichols

Definición 1.53. Sea $V \in \mathbf{Vec}_k$. Una *trenza en V* es una aplicación lineal invertible $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ que satisface la *ecuación de trenzas*

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

en $V \otimes V \otimes V$. Si c es una trenza en V decimos que (V, c) es un *espacio vectorial trenzado*.

Ejemplo 1.54. Supongamos que V es un espacio de dimensión finita con base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Si q_{ij} , con $1 \leq i, j \leq n$, son elementos invertibles de k entonces

$$c(v_i \otimes v_j) = q_{ij} v_j \otimes v_i$$

es una trenza en V . En particular, la aplicación natural que da vuelta a los tensorandos (*flip* por su nombre en inglés) $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, es una trenza en V .

Ejemplo 1.55. Sea G un grupo finito. Podemos definir una trenza en $V = kG$ considerando

$$c(g \otimes h) = ghg^{-1} \otimes g.$$

Ejemplo 1.56. Sea G un grupo finito. Si M es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre G entonces podemos dotar a M con una estructura de espacio vectorial trenzado considerando c de modo que para todo $m \in M_g$

$$c(m \otimes n) = gn \otimes m. \tag{1.23}$$

Definición por el grupo de trenzas

Definición 1.57. Sea n un natural $n \geq 2$. Definimos el *grupo de trenzas* \mathbb{B}_n con generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y relaciones

- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-2$
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ cuando $|i-j| \geq 2$.

Por un lado, es claro que $\mathbb{B}_2 \cong \mathbb{Z}$ por ser un grupo infinito generado por un solo elemento y además es el único grupo de trenzas abeliano. Como

$$\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n+1} : \sigma_i \mapsto \sigma_i$$

es un monomorfismo entonces todo \mathbb{B}_n es infinito. Por otro lado, el grupo simétrico \mathbb{S}_n está generado por las transposiciones

$$\tau_i = (i, i+1), \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

que cumplen las mismas relaciones que definen a \mathbb{B}_n , además $\tau_i^2 = \text{id}$, luego

$$\pi : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n : \sigma_i \mapsto \tau_i$$

define un epimorfismo de grupos.

Para definir las álgebras de Nichols necesitaremos dos funciones ρ_n y μ_n , con $n \geq 2$, de las que explicamos su definición y propiedades en los siguientes dos resultados:

Proposición 1.58. *Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado. Si definimos*

$$c_i = \text{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes c \otimes \text{id}_{V^{\otimes n-i-1}}$$

entonces c_1, \dots, c_{n-1} satisfacen las relaciones de \mathbb{B}_n y por lo tanto obtenemos una representación

$$\rho_n : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes n}) : \sigma_i \mapsto c_i.$$

Teorema 1.59 (Matsumoto). [KT, Theorem 4.12] *Existe una función $\mu_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ tal que*

1. $\mu_n(\tau_i) = \sigma_i$.
2. $\mu_n(\alpha\beta) = \mu_n(\alpha)\mu_n(\beta)$ si $l(\alpha\beta) = l(\alpha)l(\beta)$, donde $l(\alpha)$ denota la longitud de α que es la mínima cantidad de generadores τ_i en una escritura de α .
3. μ_n es una sección conjuntista de la proyección $\pi : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$, o sea,

$$\pi \circ \mu_n = \text{id}_{\mathbb{S}_n}.$$

Definición 1.60. Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado. Llamamos *simetrizador cuántico de grado n* al operador $Q_n : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ dado por

$$Q_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{S}_n} \rho_n \circ \mu_n(\alpha).$$

Definimos el *álgebra de Nichols* $\mathcal{B}(V)$ asociada a V como el álgebra graduada

$$\mathcal{B}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^n(V)$$

donde $\mathcal{B}^0(V) = k$, $\mathcal{B}^1(V) = V$ y cuyo n -ésimo grado para $n \geq 2$ es

$$\mathcal{B}^n(V) = V^{\otimes n} / \text{Ker } Q_n.$$

La *serie de Hilbert univariada* de $\mathcal{B}(V)$ es la serie formal

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(V)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(\mathcal{B}^n(V))t^n.$$

Ejemplo 1.61. Sea V un espacio vectorial. Si consideramos la trenza $c = \tau$ definida por el *flip* del Ejemplo 1.54, con $q_{ij} = 1$ para todo i, j , entonces el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ es el *álgebra simétrica* de V . Esto es, el cociente del álgebra tensorial

$$S(V) = T(V) / \langle v \otimes w - w \otimes v : v, w \in V \rangle.$$

En este caso $\dim \mathcal{B}(V) = \infty$.

Ejemplo 1.62. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n . Si consideramos la trenza $c = -\tau = -flip$ tenemos que el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ es el *álgebra exterior* de V definida como el cociente del álgebra tensorial

$$\Lambda(V) = T(V)/\langle v \otimes w + w \otimes v : v, w \in V \rangle = T(V)/\langle v \otimes v : v \in V \rangle.$$

En este caso $\dim \mathcal{B}(V) = 2^n$. En secciones posteriores mostraremos más ejemplos de álgebras de Nichols con dimensión finita.

Definición como cociente del álgebra tensorial

Definición 1.63. Sea $C \in \mathbf{Coalg}_k$. El *corradical* de C es la suma de sus subcoálgebras simples. Lo denotamos C_0 .

Definición 1.64. Sea $C \in \mathbf{Coalg}_k$. Decimos que C es *irreducible* si C_0 es una subcoálgebra simple de C .

Definición 1.65. Sea $C \in \mathbf{Coalg}_k$. Decimos que C es *punteada* si todas sus subcoálgebras simples son unidimensionales.

De estas definiciones es claro que una coálgebra C es punteada irreducible si su corradical C_0 es unidimensional.

Teorema 1.66. [Ra, Theorem 15.5.3] *Sea $H \in \mathbf{Hopf}_k$. Sea $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Entonces, el álgebra tensorial $T(V)$ del Ejemplo 1.51 y la función de inclusión $\iota : V \rightarrow T(V)$ satisfacen:*

1. $T(V)$ es un álgebra de Hopf trenzada punteada irreducible en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y además ι es un morfismo tal que $\iota(V) \subseteq P(T(V))$.
2. Si A es un álgebra de Hopf trenzada punteada irreducible en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y tenemos un morfismo $f : V \rightarrow A$ tal que $f(V) \subseteq P(A)$, entonces existe un morfismo $F : T(V) \rightarrow A$ de álgebras de Hopf trenzadas en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $F\iota = f$.

Ahora procedemos a construir el álgebra de Nichols como un cociente del álgebra tensorial, esto nos llevará a una definición equivalente a la que teníamos usando el grupo de trenzas. Esta nueva definición es más teórica y por eso permite su uso para demostrar resultados generales en comparación con la primera que es más constructiva y se usa para cálculos directos. Ver [AS2].

Sabemos $T(V)$ es un álgebra graduada donde el n -ésimo grado es $V^{\otimes n}$. Definimos $I = \sum \{J : J \text{ es coideal graduado de } T(V) \text{ y } J \cap V = 0\}$. Tenemos que I es un submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$ que cumple también $I \cap V = 0$. Pero además es un ideal y coideal graduado de $T(V)$ lo que nos permite definir la biálgebra trenzada graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$

$$\mathcal{B}(V) = T(V)/I$$

donde $\mathcal{B}^0(V) = k$, $\mathcal{B}^1(V) = V$ y cuyo n -ésimo grado está dado por

$$\mathcal{B}^n(V) = V^{\otimes n}/(I \cap V^{\otimes n}).$$

Definición 1.67. Sean $H \in \mathbf{Hopf}_k$ y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Llamamos *álgebra de Nichols* de V a la biálgebra graduada $\mathcal{B}(V)$.

En general, si A es un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y V es un submódulo de Yetter-Drinfeld de A , decimos que V genera una subálgebra graduada de A si $\sum_{n=0}^{\infty} V^n$ es una suma directa.

Teorema 1.68. [Ra, Theorem 15.5.6] Sea $H \in \mathbf{Hopf}_k$. Sea $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Llamemos $\pi : T(V) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ a la proyección canónica y continuemos denotando ι a la composición

$$V \xrightarrow{\iota} T(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(V)$$

Entonces, el álgebra $\mathcal{B}(V)$ y el morfismo $\iota : V \rightarrow \mathcal{B}(V)$ satisfacen:

1. $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra de Hopf trezada punteada irreducible en ${}^H_H\mathcal{YD}$, ι es un morfismo tal que $\iota(V) \subseteq P(\mathcal{B}(V))$ y $P(\mathcal{B}(V))$ genera una subálgebra graduada de $\mathcal{B}(V)$.
2. Si A es un álgebra de Hopf punteada irreducible sobre k , $f : V \rightarrow A$ es un morfismo tal que $f(V) \subseteq P(A)$ y $P(A)$ genera una subálgebra graduada de A entonces existe un morfismo de álgebras de Hopf $F : \mathcal{B}(V) \rightarrow A$ tal que $F\iota = f$.

Definición 1.69. Sean G un grupo y $V \in {}^G_G\mathcal{YD}$. Si $x \in V$ e $y \in \mathcal{B}(V)$ definimos

$$\text{ad}_c x(y) = \mu(\text{id} - c)(x \otimes y)$$

donde μ es la multiplicación en $\mathcal{B}(V)$ y c es la trenza de $\mathcal{B}(V)$. Para cualquier par de subconjuntos $U \subset V$ y $W \subset \mathcal{B}(V)$ denotamos $\text{ad}(U)(W)$ al subespacio de $\mathcal{B}(V)$ generado por todos los elementos $\text{ad}_c x(y)$ con $x \in U$ e $y \in W$.

1.2.4. El método del levante

Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con $G(H) = G$. Siguiendo [AS4], consideramos la filtración corradical de H

$$H_0 = kG \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots \subset H = \cup_{n \geq 0} H_n.$$

Definimos el *álgebra graduada corradical* de H como

$$\text{gr}(H) = \oplus_{n \geq 0} H_n / H_{n-1} \text{ con } H_{-1} := 0.$$

Recordemos que el teorema fundamental de los módulos de Hopf nos permite entender la estructura de cualquiera de ellos como un producto tensorial de los coinvariantes con H : Si V es un módulo de Hopf sobre H entonces $V \cong V^{\text{co } H} \otimes H$. Un resultado similar ocurre con el álgebra graduada corradical de un álgebra de Hopf. El teorema de Radford-Majid nos dice que si H es un álgebra de Hopf punteada sobre el grupo G entonces

$$\text{gr}(H) \cong \text{gr}(H)^{\text{co } kG} \otimes kG.$$

Llamamos a $R = gr(H)^{\text{co}kG}$ el *diagrama* de H . Este producto tensorial puede dotarse de una estructura de álgebra de Hopf [AS4, Pág. 381], conocida como *bosonización*, a la cual denotamos

$$gr(H) \cong R \# kG.$$

Pues bien, R resulta ser un álgebra de Hopf trenzada y graduada en la categoría ${}^G\mathcal{YD}$ cuyo subespacio en grado uno $V = R(1)$ (el subespacio de primitivos) genera un álgebra $\mathcal{B}(V)$ que es el álgebra de Nichols de V . En [AS2] se muestran ejemplos donde $R \neq \mathcal{B}(V)$ pero con la hipótesis de característica positiva o dimensión infinita. Allí mismo se propone la conjetura de que en el caso que nos concierne de dimensión finita y característica cero siempre se cumple $R = \mathcal{B}(V)$. O sea, $gr(H) \cong \mathcal{B}(V) \# kG$. De V sabemos en este caso que está en ${}^G\mathcal{YD}$ y que $\mathcal{B}(V)$ tiene dimensión finita si H la tiene, más aún, $\dim \mathcal{B}(V)$ divide a $\dim H$.

Así, asumiendo cierta la conjetura, si partimos de un álgebra de Hopf punteada H de dimensión finita con corradical en $H_0 = kG$, donde G es el grupo de elementos de tipo grupo $G(H)$, entonces en la categoría ${}^G\mathcal{YD}$ hallamos un V que cumplirá $\dim \mathcal{B}(V) < \infty$ para obtener la descomposición

$$gr(H) \cong \mathcal{B}(V) \# kG.$$

El *método del levante* consiste en seguir el camino contrario. Aunque éste puede enunciarse de forma general para álgebras cosemisimples nosotros lo establecemos para álgebras de grupo. Partimos de un grupo finito G y queremos saber cuáles álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita H tienen grupo de elementos de tipo grupo $G(H) \cong G$. Para esto debemos hacer los tres pasos siguientes:

Paso 1: Hallar todos los V en ${}^G\mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ de dimensión finita y encontrar una presentación óptima por generadores y relaciones para esta álgebra.

Paso 2: Hallar todas las H que nos dan $gr(H) \cong \mathcal{B}(V) \# kG$. (Levante).

Paso 3: Verificar que toda álgebra de Hopf punteada H con $G(H) \cong G$ cumple $R = \mathcal{B}(V)$. (Generación en grado uno).

1.3. Presentación del problema

1.3.1. Clases de conjugación

Usando el método del levante, en [FG] se han logrado clasificar las álgebras de Hopf punteadas complejas sobre los grupos diedrales \mathbb{D}_m , con $m = 4t \geq 12$. Una parte de nuestro problema se inscribe en este contexto por lo que intentaremos decir algo acerca del primer paso del método para los diedrales restantes. Planteamos esto de la manera más general:

Problema 1. Sea G un grupo finito. Determinar los módulos de Yetter-Drinfeld V sobre G tales que $\dim \mathcal{B}(V) < \infty$.

La categoría ${}^G\mathcal{YD}$ es semisimple así que la estrategia natural es comenzar a estudiar los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles. De ellos sabemos que están parametrizados por pares (\mathcal{O}, ρ) , donde \mathcal{O} es una clase de conjugación de G y (ρ, W) es una representación irreducible del centralizador $Z = C_G(\sigma)$ de algún elemento fijo $\sigma \in \mathcal{O}$, ver [AG1, Proposition 3.1.2]. Este elemento puede ser arbitrario pues la estructura del módulo no depende de él. Elegimos representantes únicos y exhaustivos $g_1 = e, g_2, \dots, g_n$ de las clases laterales a izquierda de G/Z , donde $n = [G : Z] = |\mathcal{O}|$; luego, definimos el siguiente espacio vectorial

$$M(\mathcal{O}, \rho) := \text{Ind}_Z^G(\rho) = \bigoplus_{i=1}^n g_i \otimes W.$$

1. Estructura de módulo en $M(\mathcal{O}, \rho)$:

Tomemos $w \in W$ y g_i , con $i = 1, \dots, n$. Para todo $g \in G$ tenemos que $gg_i \in G = \bigcup_{j=1}^n g_j Z$, luego $gg_i = g_j z$ para algún $j = 1, \dots, n$ y algún $z \in Z$. Así pues,

$$g(g_i \otimes w) = gg_i \otimes w = g_j \otimes zw.$$

2. Estructura de comódulo en $M(\mathcal{O}, \rho)$:

Tomemos el elemento $\sigma \in \mathcal{O}$ y enumeremos los elementos de \mathcal{O} del siguiente modo: $\sigma_i = g_i \sigma g_i^{-1}$ para $i = 1, \dots, n$. Definimos

$$\delta(g_i \otimes w) = \sigma_i \otimes (g_i \otimes w).$$

Esto nos muestra además que el soporte de $M(\mathcal{O}, \rho)$ es \mathcal{O} y que su componente homogénea de grado σ_i es $g_i \otimes W$.

3. Trenza de $M(\mathcal{O}, \rho)$:

Por comodidad escribimos $g_i \cdot v = g_i \otimes v$. Sabemos cuál es la trenza de un módulo de Yetter-Drinfeld para un álgebra de Hopf de manera general, así que de forma particular tenemos a partir de (1.23)

$$c(g_i \cdot v \otimes g_j \cdot w) = \sigma_i(g_j \cdot w) \otimes g_i \cdot v.$$

Denotamos $\mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \mathcal{B}(M(\mathcal{O}, \rho))$. Sucede que estas álgebras tienen dimensión infinita en la mayoría de los casos estudiados cuando G es no abeliano. Por lo tanto, los intentos de solución han arrojado mejores resultados cuando se aplican desde la perspectiva negativa del descarte, es decir, en cambio de hallar todos los V en ${}^G\mathcal{YD}$ con $\mathcal{B}(V)$ de dimensión finita se descartan todos los V en ${}^G\mathcal{YD}$ con $\mathcal{B}(V)$ de dimensión infinita.

Si $\dim \mathcal{B}(V) = \infty$ para todo V en ${}^G\mathcal{YD}$ entonces tenemos un resultado de clasificación pues, por el método del levante, kG será la única álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con grupo G . En este caso decimos que G *colapsa*.

Esto equivale a que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ para todo par (\mathcal{O}, ρ) como acabamos de describir. Así pues, extrapolando la nominación decimos que una clase conjugación \mathcal{O} *colapsa* si $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ para toda representación irreducible ρ del centralizador de alguno de sus elementos.

En resumen, para intentar dar una solución al Problema 1 comenzamos por abordar el siguiente:

Problema 2. Sea G un grupo finito. Determinar los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles $M(\mathcal{O}, \rho)$ sobre G tales que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$.

Un forma de hacer esto consiste en hallar criterios que no dependen de la representación ρ y reducimos el problema a:

Problema 3. Sea G un grupo finito. Determinar las clases de conjugación de G que colapsan.

Criterios de espacios vectoriales trenzados generales

Los Criterios 1–9 que enunciamos a continuación son resultados conocidos que se encuentran en la literatura.

En este párrafo fijamos un espacio vectorial trenzado (V, c) .

Criterio 1. Si existe $v \in V$, no nulo, tal que $c(v \otimes v) = v \otimes v$ entonces

$$\dim \mathcal{B}(V) = \infty.$$

La razón es muy sencilla, al aplicar el simetrizador cuántico al elemento $v^{\otimes n}$ obtenemos $Q_n(v^{\otimes n}) = n!v^{\otimes n} \neq 0$ de modo que $\text{Ker } Q_n \neq V^{\otimes n}$ para todo n .

El siguiente criterio es una generalización inmediata: Un *subespacio trenzado* de V es un subespacio lineal W que satisface

$$c(W \otimes W) \subseteq W \otimes W.$$

En tal caso tenemos una inclusión canónica $\mathcal{B}(W) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ [AS2, Corollary 2.3].

Criterio 2. Si V contiene un subespacio trenzado W tal que $\dim \mathcal{B}(W) = \infty$ entonces

$$\dim \mathcal{B}(V) = \infty.$$

Definición 1.70. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sean q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, elementos invertibles del cuerpo k . Cuando consideremos en $\text{GL}(V \otimes V)$ la trenza del Ejemplo 1.54, $c(v_i \otimes v_j) = q_{ij}v_j \otimes v_i$. Decimos que (V, c) es un *espacio de tipo diagonal con matriz de trenza*

$$q = (q_{ij}) \in M_n(k^\times).$$

En este caso llamamos a $\mathcal{B}(V)$ un *álgebra de Nichols de tipo diagonal*. El *diagrama de Dynkin* asociado a este espacio tiene n *vértices* nombrados

$$q_{11}, \dots, q_{nn}$$

y una *arista* etiquetada con

$$q_{ij}q_{ji}$$

que une a q_{ii} con q_{jj} siempre que $q_{ij}q_{ji} \neq 1$.

Notemos que si un espacio de tipo diagonal V tiene algún vértice etiquetado $q_{ii} = 1$ entonces, por el criterio 1, $\mathcal{B}(V)$ tiene dimensión infinita.

Ahora remarcamos dos hechos conocidos acerca de las álgebras de Nichols de tipo diagonal:

Observación 1.71. En [H2] se clasifican todas las álgebras de Nichols de tipo diagonal con dimensión finita por medio de los conceptos de diagramas de Dynkin, sistemas aritméticos de raíces y grupoides de Weyl.

Observación 1.72. En [An1, An2] se describen de forma minimal las relaciones de las álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita.

Definición 1.73. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Decimos que A es una *matriz generalizada de Cartan* (MGC) si satisface las siguientes tres condiciones:

1. $a_{ii} = 2$ para todo $i = 1, \dots, n$.
2. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ y $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.
3. $a_{ij} = 0$ si y solo si $a_{ji} = 0$.

Definición 1.74. Sea (V, c) un espacio de tipo diagonal con matriz de trenza $q = (q_{ij}) \in M_n(k^\times)$. Supongamos que cada q_{ii} es una raíz de la unidad de orden $o(q_{ii})$ y que existen $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones para todo $i \neq j$:

1. $-o(q_{ii}) < a_{ij} \leq 0$.
2. $q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}$.

Podemos tomar $a_{ii} = 2$ para todo $i = 1, \dots, n$ pues cuando $i = j$ no exigimos ninguna condición. Obtenemos así una MGC $A = (a_{ij})$ por lo cual decimos que (V, c) es un espacio diagonal de *tipo Cartan* con MGC A .

Ejemplo 1.75. Tomemos un espacio vectorial complejo V bidimensional con la trenza $c = -flip$. Tenemos entonces

$$c(v_1 \otimes v_1) = -v_1 \otimes v_1, \quad c(v_1 \otimes v_2) = -v_2 \otimes v_1$$

$$c(v_2 \otimes v_1) = -v_1 \otimes v_2, \quad c(v_2 \otimes v_2) = -v_2 \otimes v_2.$$

El diagrama de Dynkin no tiene aristas pues $q_{12}q_{21} = 1$ por lo cual obtenemos:

$$\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Figura 1.1: Diagrama de Dynkin para $c = -flip$ bidimensional.

Ahora bien, para $i = 1, 2$ tenemos $q_{ii} = -1$ que es una raíz cuadrada de la unidad, esto es, $o(q_{ii}) = 2$. Como

$$q_{12}q_{21} = q_{11}^0 = 1, \quad q_{21}q_{12} = q_{22}^0 = 1$$

entonces (V, c) es un espacio de tipo Cartan con MGC

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.76. Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ dos MGC. Decimos que ellas son *equivalentes*, y escribimos $A \sim B$, si existe una permutación $\alpha \in \mathbb{S}_n$ tal que para todo i, j se tiene

$$b_{ij} = a_{\alpha(i)\alpha(j)}.$$

Decimos que una MGC A es *descomponible* si es equivalente a otra de la forma

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

para dos MGC C y D . En caso contrario decimos que A es *indescomponible*.

El diagrama de Dynkin de un espacio de tipo Cartan es conexo si y solo si su MGC es indescomponible. Esto plantea una estrategia para determinar en general si el álgebra de Nichols de un espacio de tipo Cartan es de dimensión finita: Primero enunciamos un criterio para el caso de los diagramas de Dynkin conexos y después vemos cómo se hallan las dimensiones de las álgebras de Nichols cuando conocemos las dimensiones asociadas a las componentes conexas.

En ese orden de ideas debemos comenzar por estudiar las MGC indescomponibles. De ellas sabemos que se dividen en tres clases, *tipo finito*, *tipo afín* o *tipo indefinido*. Para definir el tipo que nos interesa hacemos la siguiente convención notacional: si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ escribimos $v > 0$ (resp. $v \geq 0$) para decir que $v_i > 0$ (resp. $v_i \geq 0$) para todo i .

Definición 1.77. Decimos que una MGC $A = (a_{ij})$ es de *tipo finito* si cumple:

1. $\text{Det}(A) \neq 0$.
2. Existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v > 0$ y $Av > 0$.

3. Si $Av \geq 0$ entonces $v > 0$ ó $v = 0$.

Criterio 3. [AS1, Theorem 1.1][H1, Theorem 4] Sea (V, c) un espacio de tipo Cartan con MGC $A = (a_{ij})$ indescomponible. Supongamos que $q_{ii} \neq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\dim \mathcal{B}(V) < \infty$.
2. La matriz $A = (a_{ij})$ es de tipo finito.

Ahora bien, si por medio del criterio anterior sabemos que las álgebras de Nichols asociadas a las componentes conexas del diagrama de Dynkin de un espacio de tipo diagonal son de dimensión finita, entonces podemos determinar la dimensión del álgebra completa por medio del siguiente resultado que se puede consultar en [AS1, Lemma 4.2] y [G3, Theorem 2.2].

Proposición 1.78. *Sea V un espacio de tipo Cartan de dimensión n . Supongamos que $\{1, \dots, n\}$ se parte como la unión disjunta de dos subconjuntos no vacíos I, J tales que $q_{ij}q_{ji} = 1$ para todo $i \in I$ y todo $j \in J$. Sean $V_I = \langle v_i : i \in I \rangle$ y $V_J = \langle v_j : j \in J \rangle$. Entonces, V se descompone como*

$$V = V_I \oplus V_J$$

y para las álgebras de Nichols tenemos el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathcal{B}(V) \cong \mathcal{B}(V_I) \otimes \mathcal{B}(V_J).$$

En particular,

$$\dim \mathcal{B}(V) = \dim \mathcal{B}(V_I) \cdot \dim \mathcal{B}(V_J).$$

Ejemplo 1.79. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Consideremos la trenza $c = -flip$. Sabemos por el Ejemplo 1.62 que $\mathcal{B}(V)$ es el álgebra exterior $\Lambda(V)$ y que por lo tanto tiene dimensión 2^n .

Podemos obtener el mismo resultado a la luz del Criterio 3 y la Proposición 1.78. El diagrama de Dynkin asociado a (V, c) consiste en n puntos desconexos etiquetados por $q_{ii} = -1$, como en el Ejemplo 1.75. Ahora bien, para cada componente conexa $\{q_{ii}\}$ tenemos un subespacio correspondiente $V_i = \langle v_i \rangle$ con matriz generalizada de Cartan $A_i = (2) \in M_1(\mathbb{Z})$ que es indescomponible de tipo finito. Luego el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V_i)$ es de dimensión finita. Es fácil ver que $\mathcal{B}(V_i)$ tiene dimensión 2. Luego, $\dim \mathcal{B}(V) = \prod \dim \mathcal{B}(V_i) = 2^n$.

Como comentario final a este criterio queremos destacar la estrategia de descarte conocida como la *técnica del subespacio abeliano* que consiste en tomar un espacio trenzado arbitrario V (generalmente no diagonal), encontrar un subespacio W de tipo Cartan al que se le pueda aplicar el tercer criterio para determinar que $\mathcal{B}(W)$ tiene dimensión infinita usando la clasificación de [H1, H2] y posteriormente aplicar el segundo criterio para concluir que $\mathcal{B}(V)$ también tiene dimensión infinita.

Criterios de módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles

En lo que resta de esta subsección fijamos un grupo finito G , la clase de conjugación $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma$ de un elemento $\sigma \in G$ y una representación irreducible (ρ, W) del centralizador $Z = C_G(\sigma)$.

Claramente $\sigma = \sigma_1$ está en el centro de su centralizador y por el Lema de Schur actúa en W por un escalar que denotamos $q_{\sigma\sigma}$.

Criterio 4. Si $q_{\sigma\sigma} = 1$, entonces $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$.

Esto es consecuencia inmediata del primer criterio aplicado a un elemento $g_1 \otimes v = e \otimes v$ de la componente de grado $\sigma = \sigma_1$.

Criterio 5. [G1, Lemma 3.1] Supongamos que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$.

1. Si $\deg \rho > 2$, entonces $q_{\sigma\sigma} = -1$.
2. Si $\deg \rho = 2$, entonces $q_{\sigma\sigma} \in \{-1, \omega_3, \omega_3^2\}$ donde ω_3 es una raíz cúbica de la unidad distinta de 1.

Criterio 6. [AZ, Lemma 2.2] Supongamos que \mathcal{O} es real, esto es que contiene a los inversos de todos sus elementos. Si $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ entonces $q_{\sigma\sigma} = -1$ y σ tiene orden par.

El criterio anterior nos será de inmensa utilidad en el segundo capítulo de esta tesis. Tendremos también como herramienta la siguiente generalización:

Criterio 7. [AF2, Lemma 1.8] Supongamos que existe un entero j tal que $\sigma, \sigma^j, \sigma^{j^2}$ son distintos y $\sigma^j \in \mathcal{O}$. Si $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ entonces σ tiene orden par y $q_{\sigma\sigma} = -1$.

El siguiente criterio generaliza simultáneamente los criterios 5 y 6:

Criterio 8. [AF2, Lemma 1.9] Supongamos que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ y que existe un entero j tal que $\sigma \neq \sigma^j$ y además $\sigma^j \in \mathcal{O}$.

1. Si $\deg \rho > 1$, entonces σ tiene orden par y $q_{\sigma\sigma} = -1$.
2. Si $\deg \rho = 1$, entonces σ tiene orden par y $q_{\sigma\sigma} \in \{-1, \omega_3, \omega_3^2\}$ donde ω_3 es una raíz cúbica de la unidad distinta de 1.

Criterio 9. [AF2, Theorem 1.4] Sea G un grupo de Coxeter finito. Si σ tiene orden impar entonces \mathcal{O}_σ colapsa.

Clases y representaciones triviales. Terminamos este párrafo con dos casos particulares de los que se conoce la respuesta para todo grupo a partir del Criterio 1:

Observación 1.80. Si G es un grupo finito entonces $\mathcal{O} = \{e\}$ colapsa.

Observación 1.81. Por ε denotamos la representación trivial de cualquier grupo G . Esto es,

$$\varepsilon : G \rightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$$

está dada por $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Para toda clase de conjugación \mathcal{O} de un grupo G tenemos

$$\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \varepsilon) = \infty.$$

Esqueletos

Una de las herramientas más importantes y potentes que tendremos oportunidad de usar es la clasificación de las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld semisimples, de rango mayor o igual que dos, sobre grupos no abelianos, desarrollada en la serie de artículos [HS1, HS2, HV1, HV2, HV3, HV4]. La idea general es la construcción de un diagrama de Dynkin generalizado, llamado *esqueleto*, que permite verificar si una cierta álgebra de Nichols tiene dimensión finita.

Sea G un grupo y $\theta \in \mathbb{N}$. Entonces, \mathcal{F}_θ^G denota el conjunto de θ -uplas $M = (M_1, \dots, M_\theta)$ de módulos de Yetter-Drinfeld (absolutamente) simples M_i de dimensión finita sobre G .

Definición 1.82. [HV4, Definition 2.1] Sea $M \in \mathcal{F}_\theta^G$. Decimos que la trenza c de M es *indescomponible* si no existe una descomposición $M' \oplus M''$ de $\bigoplus_{i=1}^\theta M_i$ en $\mathcal{G}\mathcal{Y}\mathcal{D}$ de modo que $(\mathrm{id} - c^2)(M' \otimes M'') = 0$.

Claro está que si una trenza es descomponible según la definición anterior es porque existe una descomposición $M' \oplus M''$ de M que sea no trivial, lo cual significa que $M' \neq 0 \neq M''$.

Definición 1.83. Sean $\theta \geq 2$ y $M = (M_1, \dots, M_\theta) \in \mathcal{F}_\theta^G$. Para cada par $i \in \{1, \dots, \theta\}$ y $j \neq i$ definimos

$$a_{ij}^M = \begin{cases} -\infty & \text{si } (\mathrm{ad} M_i)^m(M_j) \neq 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \\ -\sup\{m \in \mathbb{N} : (\mathrm{ad} M_i)^m(M_j) \neq 0\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además definimos $a_{ii}^M = 2$. Así obtenemos una matriz A^M que llamamos la *matriz de Cartan* de M .

Definición 1.84. [HV4, Definition 2.2] Sean $\theta \geq 2$ y $M = (M_1, \dots, M_\theta) \in \mathcal{F}_\theta^G$. Sea $A = (a_{ij}^M)$ la matriz de Cartan de M . Decimos que M tiene un *esqueleto* si

- Cada M_i es un módulo de Yetter-Drinfeld simple $M(\sigma_i, \rho_i)$ para algún $\sigma_i \in \mathrm{Sop}(M_i)$ y para una representación irreducible ρ_i del centralizador $C_G(\sigma_i)$.
- Para cada par $1 \leq i < j \leq \theta$, con $a_{ij} \neq 0$, se tiene $a_{ij}^M = -1$ o $a_{ji}^M = -1$.

En tal caso, el *esqueleto* de M es un grafo sin lazos, parcialmente orientado y parcialmente etiquetado, con θ vértices y con las siguientes propiedades:

- El i -ésimo vértice se simboliza con $\dim(M_i)$ puntos.
 - Si $\dim(M_i) = 1$ el vértice se etiqueta con $\rho_i(\sigma_i)$.
 - Si $\dim(M_i) = 2$ con $\text{Sop}(M_i) = \{\sigma_i, \sigma'_i\}$ y hay cierta restricción adicional sobre $p = \rho_i(\sigma'_i \sigma_i^{-1})$ el vértice se etiqueta con (p) . En caso contrario no se etiqueta.
- Para todo $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ con $i \neq j$ hay $a_{ij}a_{ji}$ aristas entre el i -ésimo vértice y el j -ésimo vértice. La arista se orienta hacia el j -ésimo vértice si y solo si $a_{ij} = -1$ y $a_{ji} < -1$.
- Sean $1 \leq i < j \leq \theta$ con $a_{ij} < 0$.
 - Si $\text{Sop}(M_i)$ conmuta con $\text{Sop}(M_j)$ entonces las aristas entre los dos vértices correspondientes son líneas continuas. En caso contrario son líneas punteadas.
 - Si $\dim(M_i) = 1$ o $\dim(M_j) = 1$ entonces la arista se etiqueta con $\rho_i(\sigma_j)\rho_j(\sigma_i)$. En caso contrario no se etiqueta.

La importancia de este concepto es que permite determinar si la dimensión de un álgebra de Nichols es finita construyendo el esqueleto correspondiente y verificando que está en una lista concreta:

Teorema 1.85. [HV4, Theorem 2.5] *Sea $\theta \geq 3$. Sea G un grupo no abeliano y $M = (M_1, \dots, M_\theta) \in \mathcal{F}_\theta^G$. Si la trenza de M es indescomponible entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M tiene un esqueleto de tipo finito, esto es, que se encuentra en la lista [HV4, Figure 2.1].
2. $\mathcal{B}(M)$ tiene dimensión finita.
3. M admite todas las reflexiones y el grupoide de Weyl de $\mathcal{W}(M)$ es finito.

Nosotros nos concentraremos en la equivalencia entre los numerales 1 y 2 del teorema anterior por lo tanto no hacemos referencia al grupoide de Weyl ni al concepto de reflexiones.

1.3.2. Pecios

En esta sección usamos como fuente principal [AG2] y referimos a los lectores a este artículo para mayor información.

La importancia de introducir esta nueva estructura algebraica es que nos da la posibilidad de enunciar criterios de colapso para las clases de conjugación.

Definición 1.86. Un *pecio* es una par (X, \triangleright) donde X es un conjunto no vacío y $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ es una operación tal que

1. $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$ para todo $x, y, z \in X$.
2. La función $\phi_x : X \rightarrow X : y \mapsto x \triangleright y$ es biyectiva para todo $x \in X$.

Si además $x \triangleright x = x$ para todo $x \in X$ decimos que el pecio X es un *quandle*.

Si un quandle X cumple $x \triangleright y = y$ cuando $y \triangleright x = x$ decimos que X es un *conjunto cruzado*.

Decimos que X es un pecio *abeliano* si $x \triangleright y = y$ para todo $x, y \in X$.

Ejemplo 1.87. Todo grupo G es un conjunto cruzado con \triangleright dada por la conjugación

$$x \triangleright y = xyx^{-1}.$$

Observación 1.88. De ahora en adelante todos los pecios (y por el ejemplo anterior todos los grupos) serán finitos aunque no se haga mención explícita de este hecho.

Ejemplo 1.89. Sea G un grupo y \mathcal{O} una de sus clases de conjugación. Si definimos

$$x \triangleright y = xyx^{-1}$$

tenemos que $(\mathcal{O}, \triangleright)$ es un pecio y además es un *subpecio* de G , en el sentido de ser un subconjunto que hereda la estructura con la misma operación de G .

Ejemplo 1.90. Sean G un grupo y $u \in \text{Aut}(G)$. El grupo G actúa en sí mismo por medio de

$$y \mapsto_u x = yxu(y^{-1}).$$

A la órbita $\mathcal{O}_x^{G,u} = \{y \mapsto_u x : y \in G\}$ de x la llamamos *clase de conjugación u -torcida* de x en G .

Si $u(x) = x$ entonces $\mathcal{O}_x^{G,u}$ es un pecio con la operación

$$y \triangleright_u z = yu(zy^{-1}).$$

Definición 1.91. Decimos que una función $f : X \rightarrow S$ entre dos pecios X y S es un *morfismo de pecios* si

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

para todo $x, y \in X$.

Claramente tenemos que la inclusión canónica $i : X \rightarrow S$ es un morfismo de pecios si X es un subpecio de S .

Definición 1.92. Un *automorfismo* de X es un morfismo de pecios biyectivo $f : X \rightarrow X$. Al grupo de automorfismos de X lo denotamos $\text{Aut}_\triangleright(X)$.

El grupo de *automorfismos internos* de X es el subgrupo de $\text{Aut}_\triangleright(X)$ generado por todas las funciones ϕ_x , con $x \in X$, de la Definición 1.86. Lo denotamos $\text{Int}_\triangleright(X)$.

Tomemos un entero positivo n y una función

$$\mathbf{q} : X \times X \rightarrow \mathrm{GL}(n, k) : (x, y) \mapsto \mathbf{q}_{x,y}.$$

Consideremos el espacio vectorial $V = kX \otimes k^n$. Para evitar confusiones escribimos $x \cdot v$ en cambio de $x \otimes v$ al denotar los elementos de V . Definamos $c^{\mathbf{q}} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ por

$$c^{\mathbf{q}}(x \cdot v \otimes y \cdot w) = (x \triangleright y) \cdot \mathbf{q}_{x,y} w \otimes x \cdot v.$$

Es fácil ver que $c^{\mathbf{q}}$ es una trenza en V si y solo si los $\mathbf{q}_{x,y}$ satisfacen la ecuación

$$\mathbf{q}_{x,y \triangleright z} \mathbf{q}_{y,z} = \mathbf{q}_{x \triangleright y, x \triangleright z} \mathbf{q}_{x,z} \quad (1.24)$$

para todo $x, y, z \in X$. Esto motiva la siguiente definición, cuya terminología proviene de la teoría de cohomología desarrollada en [AG2].

Definición 1.93. Sea (X, \triangleright) un pecio. Un 2 -cociclo de grado n en X es una función

$$\mathbf{q} : X \times X \rightarrow \mathrm{GL}(n, k) : (x, y) \mapsto \mathbf{q}_{x,y}$$

que satisface la igualdad (1.24). En tal caso decimos que $(kX \otimes k^n, c^{\mathbf{q}})$ es un espacio vectorial trenzado de *tipo pecio*. Al álgebra de Nichols asociada la denotamos por $\mathcal{B}(X, \mathbf{q})$.

Decimos que un pecio X es *indescomponible* si no puede escribirse como unión disjunta $Y \cup Z$ de subpecios no vacíos con $Y \triangleright Z \subseteq Z$ y $Z \triangleright Y \subseteq Y$.

Recordemos que un pecio X se dice *sobrio* si todo subpecio es abeliano o indescomponible.

Está probado que todo pecio puede escribirse como unión disjunta de componentes indescomponibles maximales [AG2, Proposition 1.17] de modo que el primer paso para estudiar las dimensiones de las álgebras de Nichols $\mathcal{B}(X, \mathbf{q})$ es restringirnos a los pecios indescomponibles. Esto es, para todo pecio indescomponible X y todo 2 -cociclo \mathbf{q} de grado n , determinar si $\dim \mathcal{B}(X, \mathbf{q}) = \infty$.

Los cociclos de grados superiores son muy generales y agregan complejidad al problema. Para determinar las dimensiones de las álgebras de Nichols que nos interesan basta restringirnos a cociclos de grado uno con valores en \mathbb{C} , esta afirmación está justificada en [AG2, Theorem 4.14].

Definición 1.94. Sea (X, \triangleright) un pecio. Un 2 -cociclo en X , o más específicamente 2 -cociclo complejo de grado uno, es una función

$$q : X \times X \rightarrow \mathbb{C}^{\times} : (i, j) \mapsto q_{i,j}$$

que satisface la igualdad

$$q_{i,j \triangleright k} q_{j,k} = q_{i \triangleright j, i \triangleright k} q_{i,k}. \quad (1.25)$$

Si definimos

$$c^q(i \otimes j) = q_{i,j}(i \triangleright j) \otimes i$$

entonces $(\mathbb{C}X, c^q)$ es un espacio vectorial trenzado de *tipo pecio*. Al álgebra de Nichols asociada la denotamos por $\mathcal{B}(X, q)$.

Definición 1.95. Decimos que un pecio X *colapsa* si para todo 2–cociclo (de grado uno) $q : X \times X \rightarrow \mathbb{C}^\times$ el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(X, q)$ tiene dimensión infinita.

Debemos hacer una aclaración para el caso de las clases de conjugación \mathcal{O} de un grupo G . Previamente habíamos definido el colapso de \mathcal{O} cuando $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$ para toda representación irreducible ρ del centralizador de algún elemento $\sigma \in \mathcal{O}$. Esto no implica el colapso de \mathcal{O} como pecio aunque el recíproco sí se cumple:

Proposición 1.96. *Sea G un grupo. Sea \mathcal{O} la clase de conjugación de $\sigma \in G$. Si \mathcal{O} colapsa como pecio entonces*

$$\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$$

para toda representación irreducible de $C_\sigma(G)$. O sea, \mathcal{O} colapsa como clase de conjugación.

La importancia de esta proposición está en el hecho de que un pecio $X = \mathcal{O}$ dado puede aparecer como subpecio de clases de conjugación en distintos grupos.

Pecios simples. Es importante notar que los pecios indescomponibles son extensiones de conjuntos cruzados que esencialmente corresponden a clases de conjugación de grupos finitos [AG2, Proposition 3.1]:

Proposición 1.97. *Sea X un pecio indescomponible. Entonces X es isomorfo a una extensión*

$$Y \times_\alpha S$$

donde Y es un conjunto cruzado fiel indescomponible.

Además, Y puede escogerse unívocamente con la propiedad de que todo morfismo sobreyectivo $X \rightarrow Z$, con Z fiel, se factoriza por medio de Y .

Como anticipábamos, los conjuntos cruzados indescomponibles están caracterizados completamente por medio de la existencia de un único grupo asociado [AG2, Proposition 3.2]:

Proposición 1.98. *Se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si X es un conjunto cruzado fiel indescomponible, entonces existe un grupo G y un morfismo inyectivo de conjuntos cruzados $\varphi : X \rightarrow G$, tales que $Z(G)$ es trivial y $\varphi(X)$ es una sola órbita que genera a G como grupo. Además, G es único, salvo isomorfismos, con estas condiciones.*

2. Si X es una sola órbita en un grupo G con $Z(G)$ trivial y X genera a G , entonces X es conjunto cruzado fiel indescomponible.
3. Hay una equivalencia de categorías entre
 - La categoría de conjuntos cruzados fieles indescomponibles con morfismos sobreyectivos.
 - La categoría de pares (G, \mathcal{O}) , donde G es un grupo con $Z(G)$ trivial y \mathcal{O} es una órbita que genera a G ; un morfismo $f : (G, \mathcal{O}) \rightarrow (K, \mathcal{U})$ es un morfismo de grupos $f : G \rightarrow K$ tal que $f(\mathcal{O}) = \mathcal{U}$.

Dentro de esta familia de conjuntos cruzados destacan los *simples*, aquellos S en los que todo morfismo sobreyectivo $S \rightarrow P$ es *trivial*, o sea, cumple que $|P| = 1$ ó $|P| = |S|$. Estos también están plenamente caracterizados en términos de su grupo asociados [AG2, Proposition 3.4]:

Proposición 1.99. *Sea X un conjunto cruzado indescomponible fiel que corresponde a un par (G, \mathcal{O}) . Entonces, son equivalentes*

1. X es simple.
2. Todo cociente de G , distinto de G , es cíclico.

Además de esta caracterización, se tiene en [AG2, J] una clasificación de los pecios simples. Ver Sección 3.1. Por esta razón abordamos el problema de los criterios de colapso para pecios simples en familias distinguidas, que corresponden a las clases de conjugación, usuales y torcidas, en grupos simples no abelianos.

Otra razón para concentrarnos en los grupos simples no abelianos es el siguiente resultado:

Proposición 1.100. [HS1, Corollary 8.3] *Sea G un grupo simple no abeliano. Sea $0 \neq U \in {}^G_G \mathcal{YD}$. Si $\mathcal{B}(U)$ tiene dimensión finita entonces U es irreducible en ${}^G_G \mathcal{YD}$.*

Esto es, la Proposición 1.100 reduce el estudio de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre grupos simples no abelianos a los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles, es decir, a las álgebras de la forma $\mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho)$. Desde la perspectiva de las técnicas de descarte la Proposición 1.96 reduce el estudio del colapso de las clases de conjugación \mathcal{O} a su colapso como pecios. Planteamos así el siguiente problema:

Problema 4. Determinar el colapso como pecios de las clases de conjugación, usuales y torcidas, de los grupos simples finitos no abelianos.

Criterios de tipo pecio

Para resolver el Problema 4 tenemos herramientas potentes que dependen la estructura de cada pecio.

Definición 1.101. [AFGV1, Definition 3.5] Un pecio X es de *tipo D* si contiene un subpecio descomponible $Y = R \cup S$ junto con dos elementos $r \in R$ y $s \in S$ tales que

$$r \triangleright (s \triangleright (r \triangleright s)) \neq s.$$

Criterio 10. Tipo D.[AFGV1, Theorem 3.6] Todo pecio de tipo D colapsa.

Proposición 1.102. *Una clase de conjugación \mathcal{O} en un grupo G es de tipo D si y solo si existen $r, s \in \mathcal{O}$ tales que*

1. r y s no son conjugados en el subgrupo $\langle r, s \rangle$ que generan en G .
2. $(rs)^2 \neq (sr)^2$.

Definición 1.103. [ACGa1, Definition 2.4] Sea $\mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Decimos que un pecio X es de *tipo F* si tiene una familia de subpecios $\{R_i : i \in \mathbb{I}_4\}$ junto con cuatro elementos $r_i \in R_i$ tales que

1. $R_i \triangleright R_j = R_j$ para todo $i, j \in \mathbb{I}_4$.
2. $R_i \cap R_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
3. $r_i \triangleright r_j \neq r_j$ si $i \neq j$.

Criterio 11. Tipo F.[ACGa1, Theorem 2.8] Todo pecio de tipo F colapsa.

Proposición 1.104. *Una clase de conjugación \mathcal{O} en un grupo G es de tipo F si y solo si existen $r_1, \dots, r_4 \in \mathcal{O}$ tales que*

1. r_i y r_j no son conjugados en el subgrupo $\langle r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle$, para todo $i \neq j$.
2. $r_i r_j \neq r_j r_i$.

Definición 1.105. [ACGa3, Definition 2.3] Decimos que un pecio X es de *tipo C* si contiene un subpecio descomponible $Y = R \cup S$ junto con dos elementos $r \in R$ y $s \in S$ tales que

1. $r \triangleright s \neq s$.
2. $R = \mathcal{O}_r^{\text{Int}(Y)}$ y $S = \mathcal{O}_s^{\text{Int}(Y)}$.
3. $\min\{|R|, |S|\} > 2$ ó $\max\{|R|, |S|\} > 4$.

Criterio 12. Tipo C.[ACGa3, Theorem 2.9] Todo pecio de tipo C colapsa.

Proposición 1.106. [ACGa3, Lemma 2.8] *Una clase de conjugación \mathcal{O} de un grupo G es de tipo C si y solo si existen un subgrupo $H < G$ y dos elementos $r, s \in H \cap \mathcal{O}$ tales que*

1. $rs \neq sr$.
2. $\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$.

3. $H = \langle \mathcal{O}_r^H, \mathcal{O}_s^H \rangle$.
4. $\min\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 2$ ó $\max\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 4$.

Proposición 1.107. [FV, Remark 2.2], [ACGa1, Remark 2.9], [ACGa3, Lemma 2.10] Sean X e Y dos pecios.

1. Sea $Y \rightarrow X$ una inyección de pecios. Si Y es de tipo D , F o C entonces X es del mismo tipo.
2. Sea $X \rightarrow Y$ una proyección de pecios. Si Y es de tipo D , F o C entonces X es del mismo tipo.

Una respuesta negativa a la posibilidad de usar los criterios de tipo D , F o C nos lleva al enunciado de la siguiente definición:

Definición 1.108. [ACGa3, Definition 2.11] Decimos que un pecio X es *kthulhu* si no es de tipo D , ni F , ni C .

Podemos resumir los criterios 10, 11 y 12 en el siguiente hecho:

Teorema 1.109. Si un pecio X no es *kthulhu* entonces colapsa.

Cabe mencionar que existen muchos pecios *kthulhu*, por ejemplo, los pecios abelianos y sobrios.

En [AFGV2, FV] se da la clasificación de los pecios de tipo D que son clases de conjugación, usuales y torcidas, en la familia de los grupos simples esporádicos. Las clases que no son de tipo D están en las Tablas 3.1 y 3.3. Ahí puede comenzar nuestra búsqueda de pecios *kthulhu*. Esto nos conduce finalmente al enunciado de uno de los problemas fundamentales que abordaremos en esta tesis:

Problema 5. Clasificar los pecios *kthulhu* que son clases de conjugación en grupos simples esporádicos finitos.

Capítulo 2

Álgebras de Nichols sobre los grupos diedrales

2.1. Introducción

De aquí en adelante fijamos como cuerpo base al de los números complejos $k = \mathbb{C}$ y además escribimos ${}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\mathcal{YD}$ en cambio de ${}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\mathcal{YD}$.

Fijemos un entero positivo $m \geq 3$. Consideramos el *grupo diedral*, de orden $2m$, presentado por generadores y relaciones

$$\mathbb{D}_m = \langle a, b : a^m = e = b^2, ba = a^{-1}b \rangle = \{e, a, \dots, a^{m-1}, b, ab, \dots, a^{m-1}b\}.$$
¹

En el contexto del método del levante, para clasificar las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre \mathbb{D}_m podemos comenzar por buscar la solución al **Paso 1** que consiste en hallar todas las álgebras de Nichols $\mathcal{B}(V)$ de dimensión finita, donde $V \in {}_{\mathbb{D}_m}^{\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$. Para los grupos diedrales esto puede pensarse separado en tres casos:

- m impar.
 - $m = 3$. Desde una perspectiva histórica este caso es fundamental porque es el primero en el que aparecen álgebras de Hopf punteadas cuyo grupo es no abeliano. La clasificación de estas álgebras se completó en [AHS, Theorem 4.5] para $\mathbb{S}_3 = \mathbb{D}_3$. La dimensión y estructura de las álgebras de Nichols fue estudiada en [AHS, FK, MS]. Toda la información se halla en la Tabla 2.2.
 - $m \geq 5$. Se sabe que todas las álgebras de Nichols son de dimensión infinita con la posible excepción de $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$ cuya dimensión y estructura son hasta ahora desconocidas. Estos resultados fueron

¹Omitimos los casos $\mathbb{D}_1 = \mathbb{Z}/2$ y $\mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ pues son abelianos y quedan fuera del contexto en el que estamos interesados.

demostrados en [AHS, Theorem 4.8]. La información acerca de los módulos irreducibles se encuentra en la Tabla 2.3. Debido a este caso restante no se conoce la clasificación completa de las álgebras de Hopf sobre \mathbb{D}_m .

- m múltiplo de 2 pero no de 4.
 - $m = 6$. En la Tabla 2.4 mostramos las dimensiones de las álgebras de Nichols de los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles. En general, la clasificación de las álgebras de Hopf es desconocida.
 - $m \geq 10$. En la Tabla 2.5 mostramos las dimensiones de las álgebras de Nichols de los módulos irreducibles conocidas hasta ahora, pues hay casos abiertos para algunos pares (\mathcal{O}, ρ) que se reducen al respectivo caso desconocido $(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$, con $m \geq 5$ impar. En consecuencia se desconoce la clasificación de las álgebras de Hopf.
- m múltiplo de 4.
 - $m = 4$. Para los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles están calculadas las dimensiones y se conoce la estructura de las correspondientes álgebras de Nichols. Ver [G2] o Tabla 2.6. La clasificación de las álgebras de Hopf asociadas a estos módulos irreducibles ha sido completada y se encuentra publicada también en [G2].
En esta tesis se calculan las álgebras de Nichols de los módulos reducibles sobre \mathbb{D}_4 .
 - $m = 8$. En esta tesis se calculan las álgebras de Nichols de los módulos irreducibles. Para el caso de los módulos reducibles se calcula la dimensión de sus álgebras de Nichols y se da una presentación por generadores y relaciones de todas estas álgebras de Nichols.
 - $m \geq 12$. La clasificación completa de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita fue hecha por F. Fantino y G. García en [FG]. Todas las álgebras de Nichols de dimensión finita son exteriores. La Tabla 2.8 presenta las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a módulos irreducibles. Además en [FG] se hacen explícitas las condiciones que debe satisfacer un módulo reducible para que su álgebra de Nichols sea de dimensión finita. Como consecuencia es bien conocido que hay infinitas álgebras de Hopf con $G(H) \cong \mathbb{D}_m$ y todas ellas son levantamientos de álgebras exteriores.

2.2. Organización del capítulo

- En la Sección 2.3 mostramos las dimensiones de las álgebras de Nichols de los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre los grupos diedrales \mathbb{D}_m . Las tablas están organizadas en el mismo orden de la introducción anterior.

- En las Secciones 2.4 y 2.5 continuamos el estudio de las álgebras de Nichols sobre grupos diedrales de orden par bajo estudiando los módulos de Yetter-Drinfeld reducibles sobre \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8 respectivamente.
- En la Sección 2.6 mostramos algunos aportes que hemos hecho en el caso en que m es impar.

2.3. Módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles

2.3.1. Notación

En lo que sigue retomamos la notación de la Sección 1.3 para los módulos irreducibles $M(\mathcal{O}, \rho)$, la elección de $\sigma \in \mathcal{O}$, el centralizador $Z = C_\sigma(G)$, los elementos $e = g_1, \dots, g_n$ y la enumeración $\sigma_i = g_i \sigma g_i^{-1}$ de \mathcal{O} .

Entre los centralizadores que nos aparecerán está el grupo cíclico $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m$ que tiene m representaciones irreducibles unidimensionales denotadas $\chi_{(k)}$ con $k = 0, \dots, m-1$. Para ser más específicos, llamamos $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ y definimos

$$\chi_{(k)} : \langle a \rangle \rightarrow \mathbb{C}^\times : a^s \mapsto \chi_{(k)}(a^s) = \omega^{ks}.$$

Aunque podemos parametrizar las representaciones $\chi_{(k)}$ con cualquier raíz primitiva de la unidad, usaremos siempre el ω que acabamos de establecer.

En particular $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/2$ tiene dos representaciones irreducibles: la trivial $\chi_{(0)} = \varepsilon$ y el signo $\chi_{(1)} = \text{sgn}$ que está dada por $\text{sgn}(b) = -1$.

Del grupo diedral \mathbb{D}_m nos basta conocer el caso en que $m = 2r$ es par. Sabemos que hay dos tipos de representaciones irreducibles:

- \mathbb{D}_{2r} posee cuatro representaciones irreducibles de dimensión uno

$$\chi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

definidas en los generadores por

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
a	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1

Tabla 2.1: Representaciones unidimensionales de $\mathbb{D}_m = \mathbb{D}_{2r}$.

- \mathbb{D}_{2r} tiene $r-1$ representaciones irreducibles bidimensionales

$$\rho_l, \quad 1 \leq l \leq r-1$$

dadas en los generadores por

$$\rho_l(a) = \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}, \quad \rho_l(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esta notación podemos proceder a establecer las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre todos los grupos diedrales.

2.3.2. El caso m impar

- El caso $m = 3$

La siguiente tabla muestra todas las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a los módulos irreducibles en ${}_{\mathbb{D}_3}^{\mathbb{D}_3}\mathcal{YD}$:

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión
e	\mathbb{D}_3	Todas	∞
$\mathcal{O}_a = \{a, a^2\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/3$	Todas	∞
$\mathcal{O}_b = \{b, ab, a^2b\}$	$\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/2$	ε	∞
		sgn	12

Tabla 2.2: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles para $m = 3$.

La clase $e = \{e\}$

Sabemos por la Observación 1.80 que esta clase de conjugación colapsa. El mismo argumento sirve para todas las tablas que mostramos a continuación así que no lo trataremos nuevamente por separado.

La clase $\mathcal{O}_a = \{a, a^2\}$

Si para alguna representación irreducible ρ del centralizador $\mathbb{Z}/3$ se tuviera $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ entonces, según el Criterio 6, $\sigma = a$ tendría orden par. Esto es absurdo pues sabemos que $o(a) = 3$. Luego todas las álgebras de Nichols asociadas a esta clase de conjugación tienen dimensión infinita.

La clase $\mathcal{O}_b = \{b, ab, a^2b\}$

Representación ε . Por la Observación 1.81 tenemos que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \varepsilon) = \infty$. Este es un resultado general de modo que en lo sucesivo tampoco haremos mención particular a esta representación.

Representación sgn. Cuando tomamos $\rho = \text{sgn}$ como representación irreducible de $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/2$ obtenemos por primera vez un álgebra de Nichols de dimensión finita. La construcción empieza por considerar el espacio vectorial trenzado

$$V = M(\mathcal{O}, \rho) := M(\mathcal{O}_b, \text{sgn}).$$

Si definimos $g_i = a^i$, con $i \in \mathbb{Z}/3$, entonces

$$V = \text{Ind}_{\langle b \rangle}^{\mathbb{D}_3}(\rho) = \bigoplus_{i=0}^2 g_i \otimes \mathbb{C}.$$

Cuando denotamos $v_i = g_i \otimes 1$ obtenemos la base $\{v_0, v_1, v_2\}$ de V . Por definición cada v_i es de grado homogéneo

$$\sigma_i = g_i b g_i^{-1} = a^{2i} b.$$

Es decir, $v_i \in V_{\sigma_i}$. Así, respecto a la base $\{v_i \otimes v_j : i, j \in \mathbb{Z}/3\}$ de $V \otimes V$ la trenza c está dada por

$$c(v_i \otimes v_j) = \sigma_i \cdot v_j \otimes v_i = a^{2i-j} \cdot \text{sgn}(b) 1 \otimes v_i = -v_{2i-j} \otimes v_i.$$

Es decir,

$$c(v_0 \otimes v_0) = -v_0 \otimes v_0, \quad c(v_0 \otimes v_1) = -v_2 \otimes v_0, \quad c(v_0 \otimes v_2) = -v_1 \otimes v_0,$$

$$c(v_1 \otimes v_0) = -v_2 \otimes v_1, \quad c(v_1 \otimes v_1) = -v_1 \otimes v_1, \quad c(v_1 \otimes v_2) = -v_0 \otimes v_1,$$

$$c(v_2 \otimes v_0) = -v_1 \otimes v_2, \quad c(v_2 \otimes v_1) = -v_0 \otimes v_2, \quad c(v_2 \otimes v_2) = -v_2 \otimes v_2.$$

La matriz de c puede escribirse explícitamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esto permite calcular computacionalmente las dimensiones de cada grado del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$ hallando las dimensiones de los núcleos de los simetrizadores cuánticos:

$$\dim \mathcal{B}^0(V) = 1, \quad \dim \mathcal{B}^1(V) = 3, \quad \dim \mathcal{B}^2(V) = 4, \quad \dim \mathcal{B}^3(V) = 3, \quad \dim \mathcal{B}^4(V) = 1.$$

Denotamos \mathcal{E}_3 a esta álgebra y la llamamos el *álgebra 12-dimensional de Fomín-Kirillov*. Profundizaremos en su estructura en el Ejemplo 2.45.

• **El caso impar $m \geq 5$**

Para esta familia de grupos diedrales se desconoce la dimensión del álgebra de Nichols únicamente para el par $(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$. Por lo tanto tenemos la siguiente tabla que se encuentra en [AF2, Table 1].

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión
e	\mathbb{D}_m	Todas	∞
$\mathcal{O}_{a^i}, i \in \{1, \dots, m-1\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m$	Todas	∞
$\mathcal{O}_b = \{b, ab, \dots, a^{m-1}b\}$	$\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}/2$	ε	∞
		sgn	Desconocida

 Tabla 2.3: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles, m impar, $m \geq 5$.

La clase $\mathcal{O}_{a^i}, i \in \{1, \dots, m-1\}$

Por un lado, para cada $i = 1, \dots, m-1$ tenemos que $\mathcal{O}_{a^i} = \{a^i, a^{-i}\}$. Por otra parte, el centralizador \mathbb{Z}/m es abeliano luego sus representaciones irreducibles son de grado 1. Si para alguna representación ρ de \mathbb{Z}/m tenemos que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$ entonces, usando el Criterio 6, concluimos que $\sigma = a^i$ tiene orden par. Pero esto es imposible pues $o(a^i) = \frac{m}{(m,i)}$ y m es impar. Por lo tanto, $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_{a^i}, \rho) = \infty$.

La clase $\mathcal{O}_b = \{b, ab, \dots, a^{m-1}b\}$

Representación sgn. La clase de conjugación $\mathcal{O} = \mathcal{O}_b$ de la reflexión b contiene a todas las involuciones $\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_m} = \{b, ab, \dots, a^{m-1}b\}$. Además tenemos determinado el centralizador $Z := C_G(b) = \{e, b\} \cong \mathbb{Z}/2$. La representación signo de Z está dada por $\text{sgn} : Z \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^\times)$, $\text{sgn}(b) = -1$.

Llamemos $g_i = a^i$ para $i = 0, \dots, m-1$. Estos g_i son representantes únicos y exhaustivos de las clases laterales de G/Z y esto nos permite enumerar todos los elementos de \mathcal{O} de la siguiente forma

$$\sigma_i = g_i b g_i^{-1} = a^{2i} b \quad \text{para } i = 0, \dots, m-1.$$

El espacio vectorial trenzado V que nos interesa es el asociado a la representación inducida de Z en G :

$$V := M(\mathcal{O}_b, \text{sgn}) := \text{Ind}_Z^G(\text{sgn}) := \bigoplus_{i=0}^{m-1} g_i \otimes \mathbb{C}.$$

Para construir la trenza c llamemos $v_i := g_i \otimes 1$ de modo que v_0, \dots, v_{m-1} es una base de V . Haciendo un cálculo directo tenemos que

$$\sigma_i v_j = a^{2i-j} \otimes \rho(b)1 = -v_{2i-j}.$$

Por lo tanto la trenza en V está dada por

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_{2i-j} \otimes v_i$$

donde los subíndices deben considerarse módulo m . Su inversa es fácil de calcular de modo general y tiene una expresión similar

$$c^{-1}(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_{2j-i}.$$

Un cálculo directo permite mostrar que el conjunto $X = \{v_i : i \in \mathbb{Z}/m\}$ dotado de la operación

$$v_i \triangleright v_j = v_{2i-j}$$

tiene estructura de pecio. Si consideramos el 2-cociclo

$$q_{ij} = -1 \text{ para todo } i = 1 \dots, m$$

entonces $M(\mathcal{O}, \rho)$ es un espacio vectorial trenzado de tipo pecio indescomponible. Esta información nos será útil en la Sección 2.6.

2.3.3. El caso $m = 2r$ con r impar

Comenzamos por resaltar que cuando $m = 2r$ es un número par (sin importar la paridad de r) entonces a^r es el único elemento central no trivial en \mathbb{D}_m . Tenemos por tanto que

$$C_{a^r}(\mathbb{D}_m) = \mathbb{D}_m$$

y solo para este elemento será necesario analizar representaciones irreducibles de grado dos pues en los demás casos los centralizadores son grupos cíclicos. Debido a esto en todas las tablas aparecerá en la segunda posición después de la clase trivial $\mathcal{O} = \{e\}$.

• El caso $m = 6$

Se conocen la dimensiones de la álgebras de Nichols de los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles y además las estructuras de las de dimensión finita. Solo aparecen álgebras exteriores de dimensión 2 y 4 así como álgebras 12-dimensionales isomorfas a $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn})$.

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión
e	\mathbb{D}_6	Todas	∞
$\mathcal{O}_{a^3} = \{a^3\}$	\mathbb{D}_6	χ_1, χ_2	∞
		χ_3, χ_4	2
		ρ_1	4
		ρ_2	∞
$\mathcal{O}_a = \{a, a^5\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/6$	$\chi_{(0)}, \chi_{(1)}, \chi_{(2)}, \chi_{(4)}, \chi_{(5)}$	∞
		$\chi_{(3)}$	4
$\mathcal{O}_{a^2} = \{a^2, a^4\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/6$	Todas	∞
$\mathcal{O}_b = \{b, a^2b, a^4b\}$	$\langle a^3 \rangle \oplus \langle b \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	12
$\mathcal{O}_{ab} = \{ab, a^3b, a^5b\}$	$\langle a^3 \rangle \oplus \langle ab \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	12

Tabla 2.4: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles para $m = 6$.

La clase $\mathcal{O}_{a^3} = \{a^3\}$

Representaciones χ_1, χ_2 . La única opción es elegir $\sigma = a^3$. Al calcular $q_{\sigma\sigma}$ obtenemos para ambas representaciones

$$q_{\sigma\sigma} = \chi_1(\sigma) = \chi_2(\sigma) = 1.$$

Por el Criterio 4 las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita.

Representaciones χ_3, χ_4 . Si llamamos ρ a cualquiera de estas representaciones entonces el espacio asociado es $W = \mathbb{C}$ pues ambas son unidimensionales. En la construcción de la Sección 1.3 solo podemos tener $g_1 = e$ y el módulo de Yetter-Drinfeld es $V = e \otimes \mathbb{C}$. Denotando $v = e \otimes 1$ tenemos que la trenza es

$$c(v \otimes v) = e \cdot \rho(\sigma)1 \otimes e \cdot 1 = -v \otimes v.$$

Luego, el álgebra de Nichols asociada es el álgebra exterior cuya dimensión es $2^{\dim V} = 2$.

Representación ρ_1 . Tomemos $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$. Sabemos que la única opción es tomar $\sigma = a^3$ por lo cual la representación $\rho_1 : \mathbb{D}_6 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2)$ satisface

$$\rho_1(\sigma) = \rho_1(a^3) = \begin{pmatrix} \omega^3 & 0 \\ 0 & \omega^{-3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $q_{\sigma\sigma} = -1$. Además $g_1 = e$ de modo que $V = M(\mathcal{O}, \rho_1) = e \otimes \mathbb{C}^2$. Llamemos $v_1 = e \cdot (1, 0)$ y $v_2 = e \cdot (0, 1)$. Ambos elementos son homogéneos de grado $\sigma_1 = g_1 \sigma g_1^{-1} = \sigma$ por lo cual

$$c(v_i \otimes v_j) = \sigma \cdot v_j \otimes v_i = -v_j \otimes v_i.$$

Concluimos que $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra exterior con dimensión $2^{\dim V} = 4$.

Representación ρ_2 . Como $\rho_2 : \mathbb{D}_6 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2)$ cumple

$$\rho_2(\sigma) = \rho_2(a^3) = \begin{pmatrix} \omega^6 & 0 \\ 0 & \omega^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $q_{\sigma\sigma} = 1$. Por el Criterio 4 tenemos $\dim \mathcal{B}(V) = \infty$.

La clase $\mathcal{O}_a = \{a, a^5\}$

Representaciones $\chi_{(0)}, \chi_{(1)}, \chi_{(2)}, \chi_{(4)}, \chi_{(5)}$. Aplicaremos el Criterio 6. Dado que $a^{-1} = a^5$ entonces \mathcal{O}_a es real. Para conseguir un álgebra de Nichols de dimensión finita la única posibilidad es que $q_{\sigma\sigma} = -1$. Luego todas estas representaciones dan lugar a álgebras de dimensión infinita porque en todos los casos $q_{\sigma\sigma} = \chi_{(k)}(\sigma) = \chi_{(k)}(a)$ y tenemos

$$\chi_{(0)}(a) = 1, \chi_{(1)}(a) = \omega, \chi_{(2)}(a) = \omega^2, \chi_{(4)}(a) = -\omega, \chi_{(5)}(a) = -\omega^2.$$

Representación $\chi_{(3)}$. Podemos escoger $\sigma = a$, $g_1 = e$, $g_2 = b$. Sabemos que el módulo de Yetter-Drinfeld está dado por

$$V = e \cdot \mathbb{C} \oplus b \cdot \mathbb{C}.$$

Si denotamos $v_i = g_i \cdot 1$ obtenemos la base $\{v_1, v_2\}$ de V . Un cálculo directo muestra que respecto a esta base la trenza está dada por

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_i.$$

Obtenemos así un álgebra exterior de dimensión $2^{\dim V} = 4$.

La clase $\mathcal{O}_{a^2} = \{a^2, a^4\}$

Todas las representaciones. Aplicaremos nuevamente el Criterio 6 porque \mathcal{O}_{a^2} es una clase real. Tenemos que $\chi_{(k)}(a^2) = \omega^{2k}$ siempre es distinto de -1 , luego todas las álgebras de Nichols tienen dimensión infinita.

La clase $\mathcal{O}_b = \{b, a^2b, a^4b\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$, $\text{sgn} \otimes \varepsilon$. Si elegimos $\sigma = b$ entonces para cualquiera de estas dos representaciones tenemos $q_{\sigma\sigma} = 1$. Usando el Criterio 4 vemos que las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$, $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Tomemos $\sigma = b$. El centralizador de σ en \mathbb{D}_6 es $Z = \{e, a^3, b, a^3b\} = \langle a^3 \rangle \oplus \langle b \rangle$. Por lo tanto $g_0 = e$, $g_1 = a^2$, $g_2 = a^4$ son representantes únicos y exhaustivos de las clases laterales a izquierda de G/Z . Sea ρ una de las representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$ o $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Dado que ρ es unidimensional tenemos que

$$V = M(\mathcal{O}_b, \rho) = \bigoplus_{n=0}^2 g_n \otimes \mathbb{C}.$$

Llamando $v_i = g_i \otimes 1$ obtenemos la base $\{v_0, v_1, v_2\}$ de V . Los elementos de \mathcal{O}_b quedan enumerados como $\sigma_i = a^{4i}b$ con $i \in \mathbb{Z}/3$. La trenza puede calcularse de forma general

$$c(v_i \otimes v_j) = \sigma_i \cdot v_j \otimes v_i = a^{4i}ba^{2j} \cdot 1 \otimes v_i = (a^2)^{2i-j} \cdot \rho(b)1 \otimes v_i = -v_{2i-j} \otimes v_i.$$

Esto prueba que

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_6}, \varepsilon \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_6}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}).$$

Así pues, todas estas álgebras tienen dimensión 12.

La clase $\mathcal{O}_{ab} = \{ab, a^3b, a^5b\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$, $\text{sgn} \otimes \varepsilon$. Del mismo modo que la clase de conjugación anterior elegimos $\sigma = ab$. Calculamos para las dos representaciones

$$q_{\sigma\sigma} = \varepsilon(e)\varepsilon(ab) = 1, \quad q_{\sigma\sigma} = \text{sgn}(e)\varepsilon(ab) = 1.$$

Y concluimos, en virtud del Criterio 4, que las álgebras de Nichols tienen dimensión infinita.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$, $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Con $\sigma = ab$ podemos elegir $g_i = a^i$, $i \in \mathbb{Z}/3$, como representantes de las clases de \mathbb{D}_6/Z . Los elementos de $\mathcal{O}_{ab} = \mathcal{O}$ quedan enumerados como $\sigma_i = a^{2i} \cdot ab$. Denotamos $v_i = g_i \otimes 1$ y encontramos así una base $\{v_0, v_1, v_2\}$ de $M(\mathcal{O}, \rho)$ donde ρ es una de las representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$ o $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Un cálculo directo muestra que la trenza es

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_{2i-j} \otimes v_i.$$

Por lo tanto también tenemos los isomorfismos

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}^{\mathbb{D}_6}, \varepsilon \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}^{\mathbb{D}_6}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}).$$

Concluimos que estas álgebras son de dimensión 12.

- El caso $m = 2r$, r impar, $r \geq 5$

La tabla se encuentra de forma general en [AF2, Table 2].

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión
e	\mathbb{D}_m	Todas	∞
$\mathcal{O}_{a^r} = \{a^r\}$	\mathbb{D}_m	$\chi_k(a^r) \neq -1$	∞
		$\chi_k(a^r) = -1$	2
		$\rho_l(a_r) = q_{\sigma\sigma} \neq -1$	∞
		$\rho_l(a_r) = q_{\sigma\sigma} = -1$	4
$\mathcal{O}_{a^i} = \{a^{\pm i}\}, i \notin \{0, r\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m$	$\chi_{(k)}(a^i) \neq -1$	∞
		$\chi_{(k)}(a^i) = -1$	4
$\mathcal{O}_b = \{a^j b : j \text{ par}\}$	$\langle a^r \rangle \oplus \langle b \rangle$ $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	Desconocida
$\mathcal{O}_{ab} = \{a^j b : j \text{ impar}\}$	$\langle a^r \rangle \oplus \langle ab \rangle$ $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	Desconocida

Tabla 2.5: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles $m = 2r$, r impar, $r \geq 5$.

Observación 2.1. Es importante observar que los únicos casos desconocidos se reducen al caso abierto cuando m es impar y $m \geq 5$ de la Subsección 2.3.2 pues más adelante probamos que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_{2r}}, * \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}^{\mathbb{D}_{2r}}, * \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_r}, \text{sgn})$.

La clase $\mathcal{O}_{a^r} = \{a^r\}$

Representaciones χ_k con $\chi_k(a^r) \neq -1$. La clase $\mathcal{O}_{a^r} = \{a^r\}$ es real puesto que a^r es su propio inverso. Como $q_{\sigma\sigma} = \chi_k(a^r) \neq -1$ entonces, por el Criterio 6, $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_{a^r}, \chi_k) = \infty$.

Representaciones χ_k con $\chi_k(a^r) = -1$. Estas representaciones χ_k son unidimensionales por lo tanto el módulo de Yetter-Drinfeld asociado es

$$V = e \otimes \mathbb{C}.$$

Denotando $v = e \otimes 1$ tenemos que la trenza es

$$c(v \otimes v) = e \cdot \rho(\sigma)1 \otimes e \cdot 1 = -v \otimes v.$$

Así pues, el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{a^r}, \chi_k)$ es exterior con dimensión $2^{\dim V} = 2$.

Representaciones ρ_l con $q_{\sigma\sigma} \neq -1$. Por abuso de notación en la tabla hemos escrito $\rho_l(a_r) = q_{\sigma\sigma}$ pero en realidad tenemos

$$\rho_l(a^r) = q_{\sigma\sigma} I_2$$

donde I_2 es la matriz identidad de tamaño 2×2 . Ahora, \mathcal{O}_{a^r} es una clase real, luego el Criterio 6 nos permite concluir que las álgebras de Nichols asociadas a las representaciones que cumplen $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ tienen dimensión infinita.

Representaciones ρ_l con $q_{\sigma\sigma} = -1$. Solo podemos escoger $g_1 = e$. La representación ρ_l es bidimensional con lo cual el módulo de Yetter-Drinfeld asociado es

$$V = M(\mathcal{O}_{a^r}, \rho_l) = e \otimes \mathbb{C}^2.$$

Denotemos $v_1 = e \cdot (1, 0)$ y $v_2 = e \cdot (0, 1)$. Estos dos elementos son de grado $\sigma_1 = g_1 \sigma g_1^{-1} = \sigma = a^r$ por lo cual

$$c(v_i \otimes v_j) = \sigma \cdot v_j \otimes v_i = q_{\sigma\sigma} v_j \otimes v_i = -v_j \otimes v_i.$$

Luego $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra exterior con dimensión $2^{\dim V} = 4$.

La clase $\mathcal{O}_{a^i} = \{a^{\pm i}\}$, $i \notin \{0, r\}$

Representaciones $\chi_{(k)}$ con $\chi_{(k)}(a^i) \neq -1$. Estas clases son reales y las representaciones de este caso son precisamente las que cumplen $q_{\sigma\sigma} \neq -1$, luego las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita por el Criterio 6.

Representaciones $\chi_{(k)}$ con $\chi_{(k)}(a^i) = -1$. En este caso tenemos $q_{\sigma\sigma} = -1$. El centralizador de a^i es $Z = \langle a \rangle$ por lo cual podemos escoger $g_1 = e$, $g_2 = b$ como representantes de las clases laterales a izquierda de \mathbb{D}_m/Z . Luego el módulo de Yetter-Drinfeld asociado es

$$V = e \cdot \mathbb{C} \oplus b \cdot \mathbb{C}.$$

Si denotamos $v_i = g_i \cdot 1$ obtenemos la base $\{v_1, v_2\}$ de V . Tenemos además que

$$c(v_i \otimes v_j) = (q_{\sigma\sigma})^{\pm 1} v_j \otimes v_i = -v_j \otimes v_i.$$

Por lo tanto el álgebra de Nichols asociada es un álgebra exterior de dimensión $2^{\dim V} = 4$.

La clase $\mathcal{O}_b = \{a^j b : j \text{ par}\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$. Escogiendo $\sigma = b$ obtenemos $q_{\sigma\sigma} = 1$ para las dos representaciones. Usando el Criterio 4 vemos que las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Tomemos $\sigma = b$ que tiene centralizador

$$Z = \{e, a^r, b, a^r b\} = \langle a^r \rangle \oplus \langle b \rangle.$$

Llamemos ρ a cualquiera de las dos representaciones irreducibles $\varepsilon \otimes \text{sgn}$ o $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$ de Z . Como representantes de la clases laterales a izquierda de \mathbb{D}_m/Z podemos escoger

$$g_i = a^i, \quad 0 \leq i \leq r-1.$$

De este modo los elementos de \mathcal{O}_b quedan enumerados

$$\sigma_i = a^i b a^{-i} = a^{2i} b.$$

Ahora bien, ρ es un representación unidimensional por lo cual el módulo de Yetter-Drinfeld asociado es

$$V = M(\mathcal{O}_b, \rho) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} g_i \otimes \mathbb{C}.$$

Si denotamos $v_i = g_i \otimes 1$ entonces $\{v_i : i \in \mathbb{Z}/r\}$ es una base de V y los grados σ_i actúan en cada v_j como

$$\sigma_i \cdot v_j = a^{2i} b a^j \otimes 1 = a^{2i-j} \otimes \rho(b)1 = -v_{2i-j}$$

con índices módulo r . Por lo tanto la trenza es

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_{2i-j} \otimes v_i$$

con índices módulo r . Esto significa que los dos espacios vectoriales trenzados $M(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_{2r}}, * \otimes \text{sgn})$ y $M(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_r}, \text{sgn})$ tienen la misma trenza lo que induce un isomorfismo de las álgebras de Nichols correspondientes

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_{2r}}, * \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_r}, \text{sgn}).$$

Concluimos que el caso $m = 2r$, r impar con $r \geq 5$, se reduce al caso m impar con $m \geq 5$.

La clase $\mathcal{O}_{ab} = \{a^j b : j \text{ impar}\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$. Tomemos $\sigma = ab$. En tal caso tenemos

$$* \otimes \varepsilon(ab) = q_{\sigma\sigma} = 1.$$

Usando el Criterio 4 concluimos que las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$, $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Si escogemos $\sigma = ab$, cuyo centralizador es

$$Z = \{e, a^r, ab, a^{r+1}b\} = \langle a^r \rangle \oplus \langle ab \rangle,$$

y denotamos

$$g_i = a^i, \quad 0 \leq i \leq r-1$$

entonces exactamente la misma construcción que hicimos para la clase \mathcal{O}_b funciona para la clase \mathcal{O}_{ab} . Por lo tanto hay un isomorfismo de álgebras de Nichols

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}^{\mathbb{D}_{2r}}, * \otimes \text{sgn}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_r}, \text{sgn}).$$

Nuevamente el caso $m = 2r$, r impar con $r \geq 5$, se reduce al caso m impar con $m \geq 5$.

2.3.4. El caso $m = 2r$ con r par

En esta tesis nos enfocamos principalmente en los módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathbb{D}_m con $m = 4$ y $m = 8$. Por esta razón daremos información adicional como las series de Hilbert univariadas de la Definición 1.60.

• El caso $m = 4$

Para $m = 4$ también se conocen las dimensiones de todas las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles como se muestra a continuación:

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión	Serie
e	\mathbb{D}_4	Todas	∞	
$\mathcal{O}_{a^2} = \{a^2\}$	\mathbb{D}_4	$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$	∞	
		ρ_1	4	$(2)_t^2$
$\mathcal{O}_a = \{a, a^3\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/4$	$\chi(1), \chi(3), \chi(4)$	∞	
		$\chi(2)$	4	$(2)_t^2$
$\mathcal{O}_b = \{b, a^2b\}$	$\langle a^2 \rangle \oplus \langle b \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞	
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	4	$(2)_t^2$
$\mathcal{O}_{ab} = \{ab, a^3b\}$	$\langle a^2 \rangle \oplus \langle ab \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞	
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	4	$(2)_t^2$

Tabla 2.6: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles para $m = 4$.

La clase $\mathcal{O}_{a^2} = \{a^2\}$

Representaciones $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$. Únicamente podemos elegir $\sigma = a^2$. Por el Criterio 4 todas estas álgebras de Nichols son de dimensión infinita pues en todos estos casos tenemos

$$q_{\sigma\sigma} = \chi_i(a^2) = \chi_i(a)^2 = 1.$$

Representación ρ_1 . Debemos trabajar con la raíz cuarta de la unidad $\omega = i$. Como

$$\rho_1(a^2) = \rho_1(a)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $q_{\sigma\sigma} = -1$. Del módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente $V = e \otimes \mathbb{C}^2$ tomamos la base formada por los vectores $v_1 = e \cdot (1, 0)$ y $v_2 = e \cdot (0, 1)$. En cualquier caso $\sigma v_j = -v_j$ por lo cual la trenza es

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_i.$$

Obtenemos así un álgebra exterior de dimensión 4.

La clase $\mathcal{O}_a = \{a, a^3\}$

Representaciones $\chi_{(1)}, \chi_{(3)}, \chi_{(4)}$. Si tomamos $\sigma = a$ tenemos

$$\chi_{(1)}(a) = i, \chi_{(3)}(a) = -i, \chi_{(4)}(a) = 1.$$

Como la clase es real y $q_{\sigma\sigma} \neq -1$ entonces, por el Criterio 6, todas las álgebras de Nichols asociadas son de dimensión infinita.

Representación $\chi_{(2)}$. Tomemos $g_1 = e$ y $g_2 = b$. El módulo de Yetter-Drinfeld asociado a esta representación es $V = g_1 \cdot \mathbb{C} \oplus g_2 \cdot \mathbb{C}$. Al trabajar con la base $v_i = g_i \cdot 1$, para $i = 1, 2$, un cálculo directo muestra que la trenza es

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_i.$$

Así, el álgebra de Nichols es exterior de dimensión 4.

La clase $\mathcal{O}_b = \{b, a^2b\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$. Con $\sigma = b$ las dos representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$ y $\text{sgn} \otimes \varepsilon$ dan $q_{\sigma\sigma} = 1$. En virtud del Criterio 4 obtenemos álgebras de Nichols de dimensión infinita.

Representación $\varepsilon \otimes \text{sgn}$. Podemos elegir $g_1 = e$ y $g_2 = a$. Para el módulo de Yetter-Drinfeld $V = g_1 \cdot \mathbb{C} \oplus g_2 \cdot \mathbb{C}$ escogemos la base $\{v_1 = g_1 \cdot 1, v_2 = g_2 \cdot 1\}$. De este modo al hallar la trenza obtenemos

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_i.$$

Por lo cual el álgebra de Nichols es exterior de dimensión 4.

Representación $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Elegimos $g_1 = e$ y $g_2 = a$. En el módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente $V = g_1 \cdot \mathbb{C} \oplus g_2 \cdot \mathbb{C}$ tomamos la base formada por los vectores $v_1 = g_1 \cdot 1$ y $v_2 = g_2 \cdot 1$, con lo cual obtenemos la trenza

$$c(v_1 \otimes v_1) = -v_1 \otimes v_1, \quad c(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

$$c(v_2 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_2, \quad c(v_2 \otimes v_2) = -v_2 \otimes v_2.$$

Por lo tanto V es un espacio de tipo diagonal con diagrama de Dynkin

$$\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Figura 2.1: Diagrama de Dynkin de $M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$.

Como $q_{11} = q_{22} = -1$ son raíces de la unidad y $q_{12}q_{21} = q_{11}^0 = 1$, $q_{21}q_{12} = q_{22}^0 = 1$ entonces V es además un espacio de tipo Cartan con matriz generalizada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado que el diagrama de Dynkin es desconexo y cada una de sus componentes conexas tiene un álgebra de Nichols de dimensión 2 entonces, por el Criterio 3 y la Proposición 1.78, concluimos que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$ es de dimensión 4, cuyas componentes tienen grados

$$\dim \mathcal{B}^0(V) = 1, \quad \dim \mathcal{B}^1(V) = 2, \quad \dim \mathcal{B}^2(V) = 1.$$

La clase $\mathcal{O}_{ab} = \{ab, a^3b\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$, $\text{sgn} \otimes \varepsilon$. Para las representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$ y $\text{sgn} \otimes \varepsilon$ tomamos $\sigma = ab$ y obtenemos $q_{\sigma\sigma} = 1$. En ambos casos basta aplicar el Criterio 4.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$. La elección de $\sigma = ab$, $g_1 = e$ y $g_2 = a$ nos permite ver que los dos espacios vectoriales trenzados $M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ y $M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ tienen la misma trenza. Concluimos así que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ tiene dimensión 4. Sabemos además que esta álgebra es exterior.

Representación $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. La situación es exactamente la misma que la representación anterior. Si tomamos $\sigma = ab$, $g_1 = e$, $g_2 = a$, tenemos la misma trenza en los espacios $M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$ y $M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$. Por lo tanto $\mathcal{B}(V)$ tiene dimensión 4.

• **El caso** $m = 8$

Está completamente determinada la tabla de las dimensiones de todas las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles como se muestra a continuación:

Clase	Centralizador	Representación	Dim.	Serie
e	\mathbb{D}_8	Todas	∞	
$\mathcal{O}_{a^4} = \{a^4\}$	\mathbb{D}_8	$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$	∞	
		ρ_1, ρ_3	4	$(2)_t^2$
		$\rho_2,$	∞	
$\mathcal{O}_{a^j} = \{a^{\pm j}\},$ $j \notin \{0, 4\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(k)}(a^j) \neq -1$	∞	
		$\chi_{(k)}(a^j) = -1$	4	$(2)_t^2$
$\mathcal{O}_b = \{a^j b : j \text{ par}\}$	$\langle a^4 \rangle \oplus \langle b \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞	
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	64	$(2)_t^4(2)_{t^2}^2$
$\mathcal{O}_{ab} = \{a^j b : j \text{ impar}\}$	$\langle a^4 \rangle \oplus \langle ab \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞	
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	64	$(2)_t^4(2)_{t^2}^2$

Tabla 2.7: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles para $m = 8$.

La clase $\mathcal{O}_{a^4} = \{a^4\}$

Representaciones $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$. Debemos elegir $\sigma = a^4$. Para todas las representaciones tenemos

$$q_{\sigma\sigma} = \chi_i(a^4) = \chi_i(a)^4 = 1.$$

Por el Criterio 4 todas estas álgebras de Nichols son de dimensión infinita.

Representaciones ρ_1, ρ_3 . Consideremos la raíz octava de la unidad

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right).$$

Como

$$\rho_1(a^4) = \rho_3(a^4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $q_{\sigma\sigma} = -1$. Del módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente

$$V = e \otimes \mathbb{C}^2$$

tomamos la base formada por los vectores $v_1 = e \cdot (1, 0)$ y $v_2 = e \cdot (0, 1)$. En cualquier caso $\sigma v_j = -v_j$ por lo cual la trenza es

$$c(v_i \otimes v_j) = -v_j \otimes v_i.$$

Obtenemos así un álgebra exterior de dimensión 4.

Representaciones ρ_2 . En este caso

$$\rho_2(a^4) = \begin{pmatrix} \omega^8 & 0 \\ 0 & \omega^{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por la tanto, $q_{\sigma\sigma} = 1$ y en virtud del Criterio 4 concluimos que el álgebra de Nichols es de dimensión infinita.

La clase $\mathcal{O}_{a^j} = \{a^{\pm j}\}$, $j \notin \{0, 4\}$

Representaciones $\chi_{(k)}$ **con** $\chi_{(k)}(a^j) \neq -1$. Como la clase \mathcal{O}_{a^j} es real, esta es una conclusión inmediata del Criterio 6.

Representaciones $\chi_{(k)}$ **con** $\chi_{(k)}(a^j) = -1$. Para construir el módulo de Yetter-Drinfeld V podemos elegir

$$\sigma_1 = a^j, \sigma_2 = a^{-j}, g_1 = e, g_2 = b.$$

Así, $V = (e \cdot \mathbb{C}) \oplus (b \cdot \mathbb{C})$ tiene base

$$v_1 = e \cdot 1, v_2 = b \cdot 1.$$

Como $\chi_{(k)} : \mathbb{Z}/8 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es un homomorfismo entonces

$$\chi_{(k)}(a^{-j}) = \chi_{(k)}(a^j)^{-1} = -1 = \chi_{(k)}(a^j)$$

y tenemos siempre el cálculo $\sigma_i v_s = -v_s$. Por lo tanto, la trenza es

$$c(v_i \otimes v_s) = -v_s \otimes v_i$$

y el álgebra de Nichols es un álgebra exterior de dimensión 4.

La clase $\mathcal{O}_b = \{a^j b : j \text{ par}\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon$, $\text{sgn} \otimes \varepsilon$. Basta elegir $\sigma = b$ y en ese caso todas las representaciones dan $q_{\sigma\sigma} = 1$. Usando el Criterio 4 deducimos que estas álgebras de Nichols son de dimensión infinita.

Representación $\varepsilon \otimes \text{sgn}$. Si elegimos $g_i = a^i$, con $0 \leq i \leq 3$, podemos escribir este módulo de Yetter-Drinfeld irreducible

$$V = \bigoplus_{i=0}^3 g_i \otimes \mathbb{C}.$$

Tomando $v_j = g_j \cdot 1$ tenemos la acción

$$\sigma_i v_j = -v_{2i-j}, \text{ con } 2i - j \pmod{4}.$$

Así podemos calcular la trenza cuya matriz es

$$c = \begin{pmatrix} -1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, -1, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & -1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, -1, 0 \\ \\ 0, 0, 0, -1, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, -1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, -1, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, -1, 0, 0 \\ \\ 0, 0, -1, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & -1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, -1, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & -1, 0, 0, 0 \\ \\ 0, -1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, -1, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, -1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$$

Al realizar el cambio de base

$$w_0 = v_0 + v_2, \quad w_1 = v_0 - v_2, \quad w_2 = v_1 + v_3, \quad w_3 = v_1 - v_3$$

obtenemos un espacio diagonal de tipo Cartan con matriz de trenza

$$q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con esta información podemos hallar el diagrama de Dynkin asociado

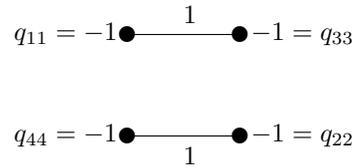


Figura 2.2: Diagrama de Dynkin de $M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$.

Por lo tanto su MGC es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es descomponible y equivalente a la MGC

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Es decir, cada componente es de tipo A_2 y su álgebra de Nichols es de dimensión 8. Por la Proposición 1.78 tenemos $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn}) = 64$. Ver Proposición 2.41 para una presentación del álgebra.

Representación $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. La misma construcción de la representación anterior nos permite calcular la matriz de la trenza que en este caso da

$$c = \begin{pmatrix} -1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, -1, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 1, 0 \\ \\ 0, 0, 0, 1, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, -1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, -1, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 1, 0, 0 \\ \\ 0, 0, 1, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & -1, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, -1, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 1, 0, 0, 0 \\ \\ 0, 1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 1, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, -1, 0, 0, & 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, -1 \end{pmatrix}$$

Con un cambio de base como en $\varepsilon \otimes \text{sgn}$ no conseguimos un espacio de tipo diagonal, sin embargo el programa GAP permite calcular las dimensiones de los grados $\mathcal{B}^n(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$ de donde obtenemos que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn}) = 64$. Ver Proposición 2.43 para una presentación del álgebra.

La clase $\mathcal{O}_{ab} = \{a^j b : j \text{ impar}\}$

Representaciones $\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$. Estas álgebras de Nichols son de dimensión infinita pues tomando $\sigma = ab$ tenemos $q_{\sigma\sigma} = 1$.

Representaciones $\varepsilon \otimes \text{sgn}$. La elección de $\sigma = ab, g_i = a^i$, con $0 \leq i \leq 3$, nos da la misma trenza en $M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ y $M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$. Concluimos así que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ tiene dimensión 64.

Representación $\text{sgn} \otimes \text{sgn}$. Si tomamos $\sigma = ab$, $g_i = a^i$, con $0 \leq i \leq 3$, entonces tenemos la misma trenza en $M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$ y $M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$. Concluimos que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$ tiene dimensión 64.

Observación 2.2. En las dos secciones posteriores veremos que los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre \mathbb{D}_8 cuyas álgebras de Nichols tienen dimensión 64 son en realidad módulos de Yetter-Drinfeld reducibles sobre \mathbb{D}_4 . Esto nos permitirá hallar las dimensiones por otros métodos.

- El caso $m = 2r$, r par, $r \geq 6$.

Este caso motivó nuestro estudio de los módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathbb{D}_4 y \mathbb{D}_8 , ya que estos dos grupos eran los que faltaban para completar el análisis para esta familia de grupos diedrales. La información correspondiente a las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles se encuentra completa en [FG, Table 2].

Clase	Centralizador	Representación	Dimensión
e	\mathbb{D}_m	Todas	∞
$\mathcal{O}_{a^r} = \{a^r\}$	\mathbb{D}_m	$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$	∞
		ρ_l, l par	∞
		ρ_l, l impar	4
$\mathcal{O}_{a^i} = \{a^{\pm i}\}; i \notin \{0, r\}$	$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m$	$\chi_{(k)}(a^i) \neq -1$	∞
		$\chi_{(k)}(a^i) = -1$	4
$\mathcal{O}_b = \{a^j b : j \text{ par}\}$	$\langle a^r \rangle \oplus \langle b \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	
$\mathcal{O}_{ab} = \{a^j b : j \text{ impar}\}$	$\langle a^r \rangle \oplus \langle ab \rangle$ $\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$\varepsilon \otimes \varepsilon, \text{sgn} \otimes \varepsilon$	∞
		$\varepsilon \otimes \text{sgn}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}$	

Tabla 2.8: Álgebras de Nichols de módulos irreducibles $m = 2r$, r par, $r \geq 6$.

Las técnicas para probar lo que respecta a todas las clases \mathcal{O}_{a^r} son las mismas que hemos utilizado en los casos $m = 4$ y $m = 8$. Los detalles se pueden comprobar fácilmente, pero en todo caso remitimos a [FG, Section 2.1] por si alguna información detallada fuera necesaria. Aquí queremos hacer énfasis en las clases \mathcal{O}_b y \mathcal{O}_{ab} de las que se conoce el siguiente resultado:

Proposición 2.3. [FG, Lemma 2.4] *Si $m = 4t$, con $t \geq 3$, entonces las clases de conjugación \mathcal{O}_b y \mathcal{O}_{ab} de \mathbb{D}_m son tipo D. Por lo tanto, $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \rho)$ y $\dim \mathcal{B}(\mathcal{O}_{ab}, \eta)$ son infinitas para todas las representaciones irreducibles ρ y η correspondientes.*

Vale la pena resaltar que las álgebras de Nichols de dimensión finita en la Tabla 2.8 son todas exteriores. Un hecho que no ocurre en los casos de orden bajo $m = 4$ y $m = 8$. Esto tiene profundas implicaciones en la clasificación de los módulos de Yetter-Drinfeld reducibles que empezamos a continuación.

2.4. Módulos reducibles en $\mathbb{D}_4 \mathcal{YD}$

Según la Tabla 2.6 tenemos seis módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre \mathbb{D}_4 cuyas álgebras de Nichols son de dimensión finita, por comodidad les daremos un nuevo nombre a cada uno de ellos y a los elementos que forman sus bases de modo que podemos escribir las \mathbb{D}_4 -graduaciones explícitamente:

- $U := M(\mathcal{O}_{a^2}, \rho_1) = \langle u_1 := e \cdot (1, 0), u_2 := e \cdot (0, 1) \rangle_{a^2}$.
- $V := M(\mathcal{O}_a, \chi_{(2)}) = \langle v_1 := e \cdot 1 \rangle_a \oplus \langle v_2 := b \cdot 1 \rangle_{a^3}$.
- $W := M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn}) = \langle w_1 := e \cdot 1 \rangle_b \oplus \langle w_2 := a \cdot 1 \rangle_{a^2b}$.
- $X := M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn}) = \langle x_1 := e \cdot 1 \rangle_b \oplus \langle x_2 := a \cdot 1 \rangle_{a^2b}$.
- $Y := M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn}) = \langle y_1 := e \cdot 1 \rangle_{ab} \oplus \langle y_2 := a \cdot 1 \rangle_{a^3b}$.
- $Z := M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn}) = \langle z_1 := e \cdot 1 \rangle_{ab} \oplus \langle z_2 := a \cdot 1 \rangle_{a^3b}$.

A continuación estudiaremos los módulos reducibles, es decir, aquellos que son suma directa de irreducibles. En tal caso llamaremos *rango* a la cantidad de sumandos irreducibles que componen al módulo.

2.4.1. Módulos isotípicos

Comenzaremos por estudiar las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld reducibles *isotípicos*, es decir, aquellos que son suma directa de una cantidad determinada n de copias del mismo módulo de Yetter-Drinfeld irreducible. Para ello nos será de gran utilidad saber cómo actúan los generadores a y b en cada uno de los vectores de las bases de los irreducibles. Esta información está contenida en la siguiente tabla:

	u_1	u_2	v_1	v_2	w_1	w_2	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2
a	iu_1	$-iu_2$	$-v_1$	$-v_2$	w_2	w_1	x_2	$-x_1$	y_2	y_1	z_2	$-z_1$
b	u_2	u_1	v_2	v_1	$-w_1$	$-w_2$	$-x_1$	x_2	$-y_2$	$-y_1$	z_2	z_1

Tabla 2.9: Acción de a y b en la bases de los irreducibles sobre \mathbb{D}_4 .

Módulos de tipo U^n

En el r -ésimo sumando de $U^n = U \oplus \dots \oplus U$ consideramos la base

$$B_r = \{u_1^r = e \cdot (1, 0), u_2^r = e \cdot (0, 1)\}.$$

Una base de U^n está formada por la unión disjunta $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$. Todos los elementos de B son de grado homogéneo $\sigma = a^2$ y sabemos que $q_{\sigma\sigma} = -1$, por lo tanto si tomamos $u, u' \in B$ obtenemos $c(u \otimes u') = a^2 \cdot u' \otimes u = -u' \otimes u$. Es decir, la trenza en U^n es $c = -\text{flip}$ y el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(U^n)$ es exterior de dimensión 2^{2n} .

Módulos de tipo V^n

En el r -ésimo sumando de V^n consideramos la base

$$B_r = \{v_1^r = e \cdot 1, v_2^r = b \cdot 1\}$$

de tal modo que $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ es una base de V^n . Al calcular la trenza c respecto a B obtenemos

$$\begin{aligned} c(v_1^r \otimes v_1^s) &= a \cdot v_1^s \otimes v_1^r = -v_1^s \otimes v_1^r, \quad c(v_1^r \otimes v_2^s) = a \cdot v_2^s \otimes v_1^r = -v_2^s \otimes v_1^r \\ c(v_2^r \otimes v_1^s) &= a^3 \cdot v_1^s \otimes v_2^r = -v_1^s \otimes v_2^r, \quad c(v_2^r \otimes v_2^s) = a^3 \cdot v_2^s \otimes v_2^r = -v_2^s \otimes v_2^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c = -flip$ y $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra exterior de dimensión 2^{2n} .

Módulos de tipo W^n

Este caso es igual a los dos anteriores. Sea B la unión de las n bases disjuntas

$$B_r = \{w_1^r = e \cdot 1, w_2^r = a \cdot 1\}.$$

La representación $\varepsilon \otimes \text{sgn}$ actúa en los grados $\{b, a^2b\}$ del mismo modo:

$$\varepsilon \otimes \text{sgn}(b) = \varepsilon \otimes \text{sgn}(a^2b) = -1.$$

Por lo tanto para cada $w \in B$ tenemos $\sigma_i w = -w$. Concluimos que la trenza es $c = -flip$ y el álgebra de Nichols asociada es exterior de dimensión 2^{2n} .

Módulos de tipo X^n

En el r -ésimo sumando W de W^n tomemos la base

$$B_r = \{x_1^r = e \cdot 1, x_2^r = a \cdot 1\}.$$

Llamemos B a la base de W^n que resulta de la union disjunta de todas ellas. La trenza de V se puede calcular de manera general:

$$\begin{aligned} c(x_1^r \otimes x_1^s) &= b \cdot x_1^s \otimes x_1^r = -x_1^s \otimes x_1^r, \quad c(x_1^r \otimes x_2^s) = b \cdot x_2^s \otimes x_1^r = x_2^s \otimes x_1^r \\ c(x_2^r \otimes x_1^s) &= a^2b \cdot x_1^s \otimes x_2^r = x_1^s \otimes x_2^r, \quad c(x_2^r \otimes x_2^s) = a^2b \cdot x_2^s \otimes x_2^r = -x_2^s \otimes x_2^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, W^n es un espacio de tipo Cartan con matriz generalizada $A = 2I_{2n}$. El diagrama de Dynkin asociado consiste en $2n$ puntos desconexos con la etiqueta $q_{ii} = -1$ para $i = 1, \dots, 2n$. El mismo argumento del Ejemplo 1.79 muestra que $\mathcal{B}(V)$ es un álgebra de dimensión 2^{2n} .

Módulos de tipo Y^n

Los espacios vectoriales Y y W tienen la misma trenza, por lo tanto sus álgebras de Nichols son isomorfas y concluimos que $\mathcal{B}(Y^n)$ es un álgebra exterior de dimensión 2^{2n} . Notar que si bien Y y W son isomorfos como espacios vectoriales trenzados no lo son como módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathbb{D}_4 .

Módulos de tipo Z^n

Como ocurre en el caso anterior, Z y X tienen la misma trenza, por lo tanto $\mathcal{B}(Z^n)$ es de dimensión finita 2^{2n} pues $\mathcal{B}(X^n)$ también lo es.

Podemos resumir esta información en el siguiente resultado:

Proposición 2.4. *Sea M un módulo irreducible de Yetter-Drinfeld en $\mathbb{D}_4 \mathcal{YD}$. El módulo de Yetter-Drinfeld isotópico M^n es un espacio de tipo Cartan de dimensión $2n$ cuyo diagrama de Dynkin tiene $2n$ puntos disconexos etiquetados por $q_{ii} = -1$. Además,*

$$\dim \mathcal{B}(M^n) = 2^{2n}$$

y la serie de Hilbert correspondiente es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(M^n)}(t) = (2)_t^{2n}.$$

2.4.2. Módulos de rango dos

De ahora en adelante nos ocuparemos del estudio de los módulos no isotópicos. Empezamos con los módulos de dos componentes isotópicas calculando las dimensiones de las álgebras de Nichols asociadas a los módulos de rango dos. La información importante se puede resumir en la siguiente tabla.

Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$	Serie
$U \oplus V$	\mathbb{Z}_4	[H2]	∞	
$U \oplus W$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$U \oplus X$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$U \oplus Y$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$U \oplus Z$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$V \oplus W$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$V \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$V \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$V \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$W \oplus X$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$W \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$W \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV3, 2.1]	∞	
$X \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV3, 2.1]	∞	
$X \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HS2, 4.6]	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$
$Y \oplus Z$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	64	$(2)_t^4 (2)_{t^2}^2$

Tabla 2.10: Suma de dos módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre \mathbb{D}_4 .

En la columna $\langle \text{Sop} \rangle$ aparece el subgrupo generado por el soporte del módulo. Esto es importante porque es el criterio que determina si usamos la teoría abeliana o no.

En la columna Razón la palabra ‘Dynkin’ significa que la trenza es diagonal y eso permite hallar la dimensión. Cuando se encuentra ‘(cv)’ significa que para obtener trenzas diagonales de tipo Cartan en estos cuatro módulos hacemos los siguientes cambios de variable:

1. En $U \oplus W$ tomamos $m_1 = u_1 + u_2$, $m_2 = u_1 - u_2$, $m_3 = w_1$, $m_4 = w_2$.
2. En $U \oplus X$ tomamos $m_1 = u_1 + u_2$, $m_2 = u_1 - u_2$, $m_3 = x_1$, $m_4 = x_2$.
3. En $U \oplus Y$ tomamos $m_1 = iu_1 + u_2$, $m_2 = iu_1 - u_2$, $m_3 = y_1$, $m_4 = y_2$.
4. En $U \oplus Z$ tomamos $m_1 = iu_1 + u_2$, $m_2 = iu_1 - u_2$, $m_3 = z_1$, $m_4 = z_2$.

Procediendo de la misma manera que lo realizado con la trenza del módulo $M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$ en \mathbb{D}_8 (pág 54), podemos deducir que en la Tabla 2.10 los módulos $U \oplus W$, $U \oplus X$, $U \oplus Y$, $U \oplus Z$, $W \oplus X$ y $Y \oplus Z$ son diagonales de tipo Cartan con MGC

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Los módulos $U \oplus V$, $W \oplus Z$ y $X \oplus Y$ tienen Nichols de dimensión infinita; son importantes porque en rangos superiores permiten descartar todos los otros módulos que los contienen. Veamos las justificaciones:

El módulo $U \oplus V$

Sea $M = U \oplus V$. Consideremos las bases $\{u_1, u_2\}$ y $\{v_1, v_2\}$ de U y V respectivamente. Calculando la trenza c de M obtenemos

$$\begin{aligned} c(u_j \otimes u_j) &= -u_j \otimes u_j, & c(v_j \otimes v_j) &= -v_j \otimes v_j; & j &= 1, 2, \\ c(u_1 \otimes u_2) &= -u_2 \otimes u_1, & c(u_1 \otimes v_1) &= v_1 \otimes u_1, & c(u_1 \otimes v_2) &= v_2 \otimes u_1, \\ c(u_2 \otimes u_1) &= -u_1 \otimes u_2, & c(u_2 \otimes v_1) &= v_1 \otimes u_2, & c(u_2 \otimes v_2) &= v_2 \otimes u_2, \\ c(v_1 \otimes u_1) &= iu_1 \otimes v_1, & c(v_1 \otimes u_2) &= -iu_2 \otimes v_1, & c(v_1 \otimes v_2) &= -v_2 \otimes v_1, \\ c(v_2 \otimes u_1) &= -iu_1 \otimes v_2, & c(v_2 \otimes u_2) &= iu_2 \otimes v_2, & c(v_2 \otimes v_1) &= -v_1 \otimes v_2. \end{aligned}$$

Así podemos construir su diagrama de Dynkin:

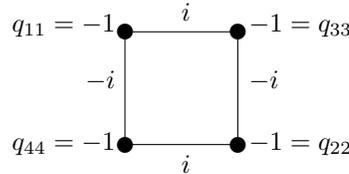


Figura 2.3: Diagrama de Dynkin del módulo $U \oplus V$ sobre \mathbb{D}_4 .

La clasificación de las álgebras de Nichols de tipo diagonal en [H2] nos permite concluir que este diagrama no corresponde a ningún álgebra de dimensión finita. O sea, $\mathcal{B}(U \oplus V)$ es un álgebra de Nichols de dimensión infinita.

Los módulos $W \oplus Z$ y $X \oplus Y$

Si estos módulos tuvieran Nichols de dimensión finita, la única posibilidad sería que tal dimensión fuera 64 por la clasificación en [HV3, Theorem 2.1]. Pero usando GAP podemos verificar que los primeros términos de sus series de Hilbert son

$$1, 4, 10, 24, 53, 108, 210, 392, \dots$$

Luego,

$$\dim \mathcal{B}(W \oplus Z) = \dim \mathcal{B}(X \oplus Y) = \infty.$$

Ahora veamos ejemplos arquetípicos de los razonamientos que se utilizan en los dos casos que se presentan: cuando el subgrupo generado por el soporte del módulo es $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ (teoría abeliana) y cuando es \mathbb{D}_4 (teoría no abeliana). Los demás módulos se tratan de manera análoga.

El módulo $W \oplus X$. Uso de la teoría abeliana.

Como se mencionó después de la Tabla 2.10, la MGC de este módulo es $\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. El digrama de Dynkin correspondiente es el de la Figura 2.4.

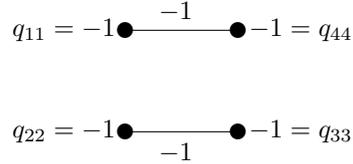


Figura 2.4: Diagrama de Dynkin $W \oplus X$ sobre \mathbb{D}_4 .

Podemos usar ahora la Proposición 1.78. Cada componente conexa es de tipo A_2 y por tanto tiene asociada un álgebra de Nichols de dimensión 8. Así pues,

$$\dim \mathcal{B}(W \oplus X) = 64.$$

Para ser aún más específicos, la descomposición de la MGC indica que existen dos subespacios vectoriales trenzados, a saber $M_1 = \langle w_1, x_2 \rangle$ y $M_2 = \langle w_2, x_1 \rangle$, tales que

$$W \oplus X = M_1 \oplus M_2$$

y por ende

$$\dim \mathcal{B}(W \oplus X) = \dim \mathcal{B}(M_1) \cdot \dim \mathcal{B}(M_2) = 8^2 = 64.$$

Además la serie de Hilbert de cada M_i es $(2)_t^2 (2)_{t^2}$ por lo cual la serie de $W \oplus X$ es el producto de estas

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(W \oplus X)}(t) = (2)_t^4 (2)_{t^2}^2.$$

El módulo $V \oplus W$. Uso de la teoría no abeliana.

Comenzamos por verificar que \mathbb{D}_4 es un cociente del grupo

$$\Gamma_2 = \langle x, y, \nu \mid yx = \nu xy, x\nu = \nu^{-1}x, y\nu = \nu y, \nu^2 = 1 \rangle.$$

Siguiendo [HS2] definimos un homomorfismo $\phi : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{D}_4$ dado en los generadores por $x \mapsto b$, $y \mapsto a$, $\nu \mapsto a^2$. Verificar que ϕ es un homomorfismo es directo:

$$\begin{aligned} \phi(y)\phi(x) &= ab = a^2ba = \phi(\nu)\phi(x)\phi(y), \\ \phi(x)\phi(\nu) &= ba^2 = a^2b = \phi(\nu)^{-1}\phi(x), \\ \phi(y)\phi(\nu) &= a^3 = \phi(\nu)\phi(y), \\ \phi(\nu)^2 &= a^4 = 1 \end{aligned}$$

Este caso corresponde a la [HS2, Proposition 4.4] con $V = M(\mathcal{O}_a, \chi_{(2)})$ y $W = M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$. En la notación de [HS2] tenemos $\epsilon = a^2$, además

$$g = a, \rho = \chi_{(2)} \quad y \quad h = b, \sigma = \varepsilon \otimes \text{sgn}.$$

Verificamos

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon h^2)\sigma(\epsilon g^2) &= \chi_{(2)}(a^2b^2)\varepsilon \otimes \text{sgn}(a^4) = \chi_{(2)}(a^2) = \omega^4 = 1, \\ \rho(g) &= \chi_{(2)}(a) = \omega^2 = -1, \\ \sigma(h) &= \varepsilon \otimes \text{sgn}(b) = -1 \end{aligned}$$

donde $\omega = \exp(2i\pi/4)$. Por [HS2, Proposition 4.4] se tiene que la matriz de Cartan es

$$A^{(V,W)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A_2.$$

Es decir $V \oplus W$ es un módulo de tipo A_2 . Por [HS2, Theorem 4.6 (3)] tenemos que

$$\dim \mathcal{B}(V \oplus W) = 64.$$

Además podemos calcular el esqueleto y siguiendo [HV4, Appendix B.1] en este caso es

$$\alpha_2 \quad : - - - :$$

La serie de Hilbert multivariada está en [HS2, 4.6 (3)] o en [HV4, 2.6 (3)] por lo que podemos hallar que la serie univaluada es $(2)_t^4(2)_{t^2}^2$.

Los otros casos se muestran de manera similar. Resumimos todo esto en el siguiente resultado:

Proposición 2.5. Sean M y N dos módulos de Yetter-Drinfeld distintos e irreducibles sobre \mathbb{D}_4 . Entonces, para $\{M, N\} \in \{\{U, V\}, \{W, Z\}, \{X, Y\}\}$ tenemos

$$\dim \mathcal{B}(M \oplus N) = \infty.$$

En caso contrario, $\dim \mathcal{B}(M \oplus N) = 64$ con serie de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(M \oplus N)}(t) = (2)_t^4(2)_{t^2}^2.$$

2.4.3. Módulos de rango tres

Por la Proposición 2.4 los módulos isotípicos ya son conocidos así que debemos tomar tres módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles L , M , N y ocuparnos de los módulos de tipo $M^2 \oplus N$ (Ver Tabla 2.11) con dos componentes isotípicas y de tipo $L \oplus M \oplus N$ (Ver Tabla 2.12) con tres componentes isotípicas.

Rango tres con dos componentes isotípicas

Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$	Serie
$U^2 \oplus V$	\mathbb{Z}_4	$\supset U \oplus V$	∞	
$U^2 \oplus W$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$U^2 \oplus X$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$U^2 \oplus Y$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$U^2 \oplus Z$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$V^2 \oplus U$	\mathbb{Z}_4	$\supset U \oplus V$	∞	
$V^2 \oplus W$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$V^2 \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$V^2 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$V^2 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$W^2 \oplus U$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$W^2 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$W^2 \oplus X$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$W^2 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$W^2 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞	
$X^2 \oplus U$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$X^2 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$X^2 \oplus W$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$X^2 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞	
$X^2 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Y^2 \oplus U$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Y^2 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Y^2 \oplus W$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Y^2 \oplus X$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞	
$Y^2 \oplus Z$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Z^2 \oplus U$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Z^2 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Z^2 \oplus W$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞	
$Z^2 \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$
$Z^2 \oplus Y$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin	4096	$(2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2$

Tabla 2.11: Suma de tres módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles, con dos componentes isotípicas, sobre \mathbb{D}_4 .

Los razonamiento son los mismos que para los módulos de rango dos. Veamos dos casos a manera de ejemplo.

El módulo $W^2 \oplus X$. Uso de la teoría abeliana.

Tomemos $W^2 \oplus X := \langle w_1, w_2, w'_1, w'_2, x_1, x_2 \rangle$. La MGC es

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El diagrama de Dynkin correspondiente se muestra en la Figura 2.5.

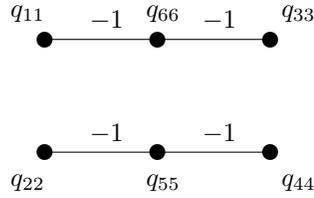


Figura 2.5: Diagrama de Dynkin del módulo $W^2 \oplus X$ sobre \mathbb{D}_4 .

Por lo tanto, si tomamos

$$M_1 := \langle w_1, w'_1, x_2 \rangle, \quad M_2 := \langle w_2, w'_2, x_1 \rangle$$

tenemos la descomposición

$$W^2 \oplus X = M_1 \oplus M_2.$$

Cada componente de tipo A_3 tiene asociada un álgebra de Nichols de dimensión 64. Así, por la Proposición 1.78

$$\dim \mathcal{B}(W^2 \oplus X) = \dim \mathcal{B}(M_1) \cdot \dim \mathcal{B}(M_2) = 64^2 = 4096.$$

Además la serie de Hilbert de cada M_i es $\mathcal{H}_{\mathcal{B}(M_i)}(t) = (2)_t^3 (2)_{t^2}^2 (2)_{t^3}$ y

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(W^2 \oplus X)}(t) = (2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2.$$

El módulo $V^2 \oplus W$. Uso de la teoría no abeliana.

En la Sección 2.4.2 calculamos el esqueleto de $V \oplus W$ que es

$$\alpha_2 \quad : - - - :$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \text{ad}(V)(W) &\neq 0, \quad \text{ad}(V)^2(W) = 0, \\ \text{ad}(W)(V) &\neq 0, \quad \text{ad}(W)^2(V) = 0. \end{aligned}$$

Ver Definición 1.69. Por otra parte, para todo par de elementos v_i y v_j de la base de $V \oplus V$ tenemos

$$\text{ad}(v_i)(v_j) = v_i v_j - \mu(c(v_i \otimes v_j)) = v_i v_j + v_j v_i = 0$$

por lo tanto $\text{ad}(V)(V) = 0$. Así, la MGC de $V^2 \oplus W$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pero si organizamos los sumandos como $V \oplus W \oplus V$ la MGC queda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es de tipo finito A_θ con $\theta = 3$. Por lo cual el esqueleto es

$$\alpha_3 \quad : - - - : - - - :$$

y por [HV4, Theorem 2.6, Table 1] tenemos

$$\dim \mathcal{B}(V^2 \oplus W) = 2^{\theta(\theta+1)} = 2^{12} = 4096.$$

El mismo resultado nos da la serie de Hilbert multivaluada y cálculos en GAP nos permiten encontrar la serie univaluada que también resulta ser

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(V^2 \oplus W)}(t) = (2)_t^6 (2)_{t^2}^4 (2)_{t^3}^2.$$

Rango tres con tres componentes isotópicas

Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$
$U \oplus V \oplus W$	\mathbb{D}_4	$\supset U \oplus V$	∞
$U \oplus V \oplus X$	\mathbb{D}_4	$\supset U \oplus V$	∞
$U \oplus V \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset U \oplus V$	∞
$U \oplus V \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset U \oplus V$	∞
$U \oplus W \oplus X$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	∞
$U \oplus W \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$U \oplus W \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞
$U \oplus X \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞
$U \oplus X \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$U \oplus Y \oplus Z$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	Dynkin (cv)	∞
$V \oplus W \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V \oplus W \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V \oplus W \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞
$V \oplus X \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞
$V \oplus X \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V \oplus Y \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$W \oplus X \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞
$W \oplus X \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞
$W \oplus Y \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞
$X \oplus Y \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞

Tabla 2.12: Suma de tres módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles, con tres componentes isotópicas, sobre \mathbb{D}_4 .

El módulo $U \oplus W \oplus X$. Uso de la teoría abeliana.

Sabemos que en U debemos hacer el cambio de variable $m_1 = u_1 + u_1$ y $m_2 = u_1 - u_2$ dejando las bases de W y X sin modificación. Con esto conseguimos una trenza de tipo Cartan con MGC

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4.4. Módulos de rango cuatro

Por el Corolario 2.7 debemos estudiar los módulos de tipo $M^3 \oplus N$ y $M^2 \oplus N^2$ con sumandos irreducibles M y N . Sabemos además que si $\{M, N\}$ es uno de los pares en $\{\{U, V\}, \{W, Z\}, \{X, Y\}\}$ entonces estos módulos contienen una copia de $U \oplus V$, $W \oplus Z$ o $X \oplus Y$ y su álgebra de Nichols tiene dimensión infinita. Ver Tabla 2.10.

Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$	Serie
$U^3 \oplus V$	\mathbb{Z}_4	$\supset U \oplus V$	∞	
$U^3 \oplus W$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$U^3 \oplus X$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$U^3 \oplus Y$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$U^3 \oplus Z$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$V^3 \oplus U$	\mathbb{Z}_4	$\supset U \oplus V$	∞	
$V^3 \oplus W$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$V^3 \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$V^3 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$V^3 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$W^3 \oplus U$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$W^3 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$W^3 \oplus X$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$W^3 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$W^3 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞	
$X^3 \oplus U$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$X^3 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$X^3 \oplus W$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$X^3 \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞	
$X^3 \oplus Z$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Y^3 \oplus U$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Y^3 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Y^3 \oplus W$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Y^3 \oplus X$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞	
$Y^3 \oplus Z$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Z^3 \oplus U$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Z^3 \oplus V$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Z^3 \oplus W$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞	
$Z^3 \oplus X$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.6]	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$
$Z^3 \oplus Y$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	16777216	$(2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2$

Tabla 2.13: Módulos de tipo 3 + 1 sobre \mathbb{D}_4 .

Nuevamente usaremos la teoría abeliana y no abeliana dependiendo del subgrupo generado por el soporte del módulo. Presentamos un ejemplo de cada caso y queda claro que los demás módulos se tratan de manera análoga.

El módulo $W^3 \oplus X$. Uso de la teoría abeliana.

Tomemos $W^3 \oplus X := \langle w_1, w_2, w'_1, w'_2, w''_1, w''_2, x_1, x_2 \rangle$. Este módulo tiene una trenza diagonal y su diagrama de Dynkin tiene dos componentes conexas como las de la Figura 2.6.

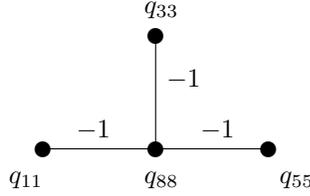


Figura 2.6: Subdiagrama de Dynkin del módulo $W^3 \oplus X$ sobre \mathbb{D}_4 .

Donde $q_{ii} = -1$ para todo $i \in \{1, 3, 5, 8\}$. Por lo tanto, el álgebra de Nichols tiene dimensión

$$\prod_{l=1,2} 2^{12} = 2^{24}.$$

La serie de Hilbert puede hallarse usando cálculos de GAP y resulta ser

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(W^3 \oplus X)}(t) = (2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2.$$

El módulo $V^3 \oplus W$. Uso de la teoría no abeliana.

En la Sección 2.4.2 calculamos el esqueleto de $V \oplus W$ que es

$$: - - - :$$

Esto es, $\text{ad}(V)(W) \neq 0$, $\text{ad}(V)^2(W) = 0$, $\text{ad}(W)(V) \neq 0$, $\text{ad}(W)^2(V) = 0$. La MGC de $V^3 \oplus W = V \oplus W \oplus V \oplus V$ es por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es de tipo D_4 . Su esqueleto es

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ : - - - : - - - : \end{array}$$

Luego, [HV4, Theorem 2.6, Table 1] nos da la dimensión y serie de Hilbert que aparece en la Tabla 2.13 en el formato univariada

$$\dim \mathcal{B}(V^3 \oplus W) = 4^{4(4-1)} = 4^{12} = 2^{24} = 16777216.$$

Rango cuatro de tipo $2 + 2$

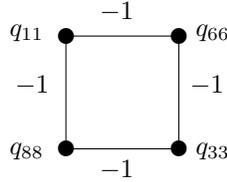
Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$
$U^2 \oplus V^2$	\mathbb{Z}_4	$\supset U \oplus V$	∞
$U^2 \oplus W^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	∞
$U^2 \oplus X^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	∞
$U^2 \oplus Y^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	∞
$U^2 \oplus Z^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin (cv)	∞
$V^2 \oplus W^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V^2 \oplus X^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V^2 \oplus Y^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$V^2 \oplus Z^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$W^2 \oplus X^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	∞
$W^2 \oplus Y^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$W^2 \oplus Z^2$	\mathbb{D}_4	$\supset W \oplus Z$	∞
$X^2 \oplus Y^2$	\mathbb{D}_4	$\supset X \oplus Y$	∞
$X^2 \oplus Z^2$	\mathbb{D}_4	[HV4, Theorem 2.5]	∞
$Y^2 \oplus Z^2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dynkin	∞

Tabla 2.14: Módulos de tipo $2 + 2$ sobre \mathbb{D}_4 .

En todos estos módulos el problema se reduce a usar dos veces consecutivas la información y las técnicas de la Tabla 2.10.

El módulo $W^2 \oplus X^2$. Uso de la teoría abeliana.

Tomemos $W^2 \oplus X^2 := \langle w_1, w_2, w'_1, w'_2, x_1, x_2, x'_1, x'_2 \rangle$. Si consideramos el subespacio vectorial trenzado $M_1 := \langle w_1, w'_1, x_2, x'_2 \rangle$ encontramos que su diagrama de Dynkin es

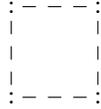
Figura 2.7: Subdiagrama de Dynkin del módulo $W^2 \oplus X^2$ sobre \mathbb{D}_4 .

Donde $q_{ii} = -1$ para todo $i \in \{1, 3, 6, 8\}$. Por la clasificación de [H2] sabemos que $\dim \mathcal{B}(M_1) = \infty$ y por tanto

$$\dim \mathcal{B}(W^2 \oplus X^2) = \infty.$$

El módulo $V^2 \oplus W^2$. Uso de la teoría no abeliana.

Ya tenemos calculados los espacios generados por las adjuntas y sabemos que $\text{ad}(V)(W) \neq 0$, $\text{ad}(V)^2(W) = 0$, $\text{ad}(W)(V) \neq 0$, $\text{ad}(W)^2(V) = 0$. Esto nos permite calcular la MGC y el esqueleto de $V^2 \oplus W^2$ que resulta ser



que no es de tipo finito. Por [HV4, Theorem 2.5] tenemos

$$\dim \mathcal{B}(V^2 \oplus W^2) = \infty.$$

Resumimos las Tablas 2.13 y 2.14 en el siguiente resultado:

Proposición 2.8. *Los módulos en $\mathbb{D}_4\mathcal{YD}$ no isotípicos con rango cuatro que tienen álgebra de Nichols de dimensión finita son los de la forma $M^3 \oplus N$ con sumandos irreducibles M y N que satisfacen $\{M, N\} \notin \{\{U, V\}, \{W, Z\}, \{X, Y\}\}$. En este caso $\dim \mathcal{B}(M^3 \oplus N) = 2^{24}$ con serie de Hilbert*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(M^3 \oplus N)}(t) = (2)_t^8 (2)_{t^2}^6 (2)_{t^3}^6 (2)_{t^4}^2 (2)_{t^5}^2.$$

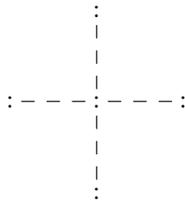
2.4.5. Módulos de rango cinco

Proposición 2.9. *Sea M un módulo de Yetter-Drinfeld no isotípico sobre \mathbb{D}_4 . Si el rango de M es mayor o igual a 5 entonces*

$$\dim \mathcal{B}(M) = \infty.$$

Demostración. Por el Corolario 2.7 sabemos que un módulo reducible sobre \mathbb{D}_4 con Nichols de dimensión finita no puede tener más de dos componentes isotípicas. Luego basta analizar los módulos de tipo $M^4 \oplus N$ y $M^3 \oplus N^2$ con sumandos irreducibles M y N . Los módulos de tipo $M^3 \oplus N^2$ contienen a uno de tipo $M^2 \oplus N^2$ y la afirmación queda probada en este caso por la Tabla 2.14.

Para los módulos de tipo $M^4 \oplus N$ se construyen los diagramas de Dynkin o esqueletos correspondientes y se verifica que todos contienen subdiagramas o son esqueletos en forma de cruz. Estos diagramas o esqueletos no son de tipo finito y por lo tanto las álgebras de Nichols son de dimensión infinita. Por ejemplo,



es el esqueleto de $V^4 \oplus W$. □

Teorema 2.10. (Teorema de clasificación para \mathbb{D}_4) *Los módulos en $\mathbb{D}_4\mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols de dimensión finita se clasifican así:*

1. *Los seis módulos irreducibles: $U = M(\mathcal{O}_{a^2}, \rho_1)$, $V = M(\mathcal{O}_a, \chi_{(2)})$, $W = M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$, $X = M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, $Y = M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$, $Z = M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$.*
2. *Los siguientes módulos reducibles:*
 - i. *Módulos isotípicos U^n , V^n , W^n , X^n , Y^n , Z^n para $n > 1$.*
 - ii. *Módulos no isotípicos $M \oplus N$, $M^2 \oplus N$ and $M^3 \oplus N$ con sumandos irreducibles M y N que cumplen $\{M, N\} \notin \{\{U, V\}, \{W, Z\}, \{X, Y\}\}$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Tabla 2.6 y las Proposiciones 2.4, 2.5, 2.6, 2.8 y 2.9. Para ver la información más detallada acerca de los módulos no isotípicos remitimos a las Tablas 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14 \square

2.4.6. Presentaciones de las álgebras no exteriores

Una vez obtenido el Teorema de Clasificación para \mathbb{D}_4 (2.10) el siguiente paso es encontrar las presentaciones por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols asociadas a estos módulos. En esta sección presentamos algunos avances en la solución de este problema.

Para el caso de los espacios de tipo diagonal la solución ha sido completada y para ello referimos a los resultados [An1, Theorem 3.1] y [An2, Theorem 3.9].

Comenzamos por dos resultados que se pueden deducir de dos maneras distintas: usando las trenzas correspondientes o bien usando el hecho de que son espacios de tipo Cartan y por tanto en [An1, An2] se dan las presentaciones:

Proposición 2.11. *El álgebra $\mathcal{B}(X)$ es cuadrática conmutativa y tiene una presentación dada por los generadores $\{x_1, x_2\}$ con relaciones*

- x_1^2 ,
- x_2^2 ,
- $x_1x_2 - x_2x_1$.

Obtenemos una presentación de $\mathcal{B}(Z)$ con los mismos generadores y relaciones cambiando cada x_i por z_i .

Notar que $\text{ad}_c(x_1)x_2 = x_1x_2 - x_2x_1$.

Corolario 2.12. *La Proposición 2.11 se generaliza a las álgebras de Nichols asociadas a las componentes isotípicas X^n y Z^n . En consecuencia, $\mathcal{B}(X^n)$ y $\mathcal{B}(Z^n)$ son álgebras conmutativas.*

Observación 2.13. Los módulos isotípicos U^n , V^n , W^n , Y^n , tienen trenza $c = -\text{flip}$, por lo tanto sus álgebras de Nichols son exteriores y en este caso las presentaciones son las usuales para dichas álgebras.

Presentaciones en rango dos

Sabemos que los módulos $U \oplus W$, $U \oplus Y$, $U \oplus X$ y $U \oplus Z$ son de tipo Cartan haciendo los cambios de variable en U que se indican después de la Tabla 2.10. Por lo tanto las presentaciones son conocidas en términos de las bases

$$\{m_1 = u_1 + u_2, m_2 = u_1 - u_2\} \quad \text{o} \quad \{m_1 = iu_1 + u_2, m_2 = iu_1 + u_2\}.$$

Aquí mostraremos las presentaciones calculadas usando bases de Gröbner en variables no conmutativas con el paquete GBNP en GAP. En estos cuatro casos resultan presentaciones equivalentes a las dadas en [An1, An2]. Lo mismo ocurre para $W \oplus X$ e $Y \oplus Z$, donde no se necesitan cambios de variable.

Proposición 2.14. *El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus W)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(U)$,
- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(W)$,
- $u_1w_1 - w_1u_1 + u_2w_1 - w_1u_2$,
- $u_1w_2 - w_2u_1 - u_2w_2 + w_2u_2$,
- $(u_1w_2)^2 + (w_2u_1)^2$,
- $(u_2w_1)^2 + (w_1u_2)^2$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(U+W)enD4.log. □

Observación 2.15. El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus W)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(U)$ y $\mathcal{B}(W)$; $\text{ad}_c(u_1 + u_2)w_1$, $\text{ad}_c(u_1 - u_2)w_2$, $(\text{ad}_c(u_1)w_2)^2$, $(\text{ad}_c(u_2)w_1)^2$.

Proposición 2.16. *El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus X)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(U)$,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(X)$ de la Proposición 2.11,
- $u_1x_2 + x_2u_1 + u_2x_2 + x_2u_2$,
- $u_1x_1 + x_1u_1 - u_2x_1 - x_1u_2$,
- $(u_1x_2)^2 + (x_2u_1)^2$,
- $(u_2x_1)^2 + (x_1u_2)^2$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(U+X)enD4.log. □

Observación 2.17. El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus X)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(U)$ y $\mathcal{B}(X)$; $\text{ad}_c(u_1 + u_2)x_2$, $\text{ad}_c(u_1 - u_2)x_1$, $(\text{ad}_c(u_1)x_2)^2$, $(\text{ad}_c(u_2)x_1)^2$.

Proposición 2.18. *El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus Y)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(U)$,
- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(Y)$,
- $u_1y_1 - y_1u_1 - iu_2y_1 + iy_1u_2$,
- $u_1y_2 - y_2u_1 + iu_2y_2 - iy_2u_2$,
- $(u_1y_2)^2 + (y_2u_1)^2$,
- $(u_2y_1)^2 + (y_1u_2)^2$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(U+Y)enD4.log. □

Observación 2.19. El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus Y)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(U)$ y $\mathcal{B}(Y)$; $\text{ad}_c(iu_1 + u_2)y_1$, $\text{ad}_c(iu_1 - u_2)y_2$, $(\text{ad}_c(u_1)y_2)^2$, $(\text{ad}_c(u_2)y_1)^2$.

Proposición 2.20. *El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus Z)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(U)$,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(Z)$ de la Proposición 2.11,
- $u_1z_2 + z_2u_1 - iu_2z_2 - iz_2u_2$,
- $u_1z_1 + z_1u_1 + iu_2z_1 + iz_1u_2$,
- $(u_1z_2)^2 + (z_2u_1)^2$,
- $(u_2z_1)^2 + (z_1u_2)^2$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(U+Z)enD4.log. □

Observación 2.21. El álgebra $\mathcal{B}(U \oplus Z)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(U)$ y $\mathcal{B}(Z)$; $\text{ad}_c(iu_1 + u_2)z_1$, $\text{ad}_c(iu_1 - u_2)z_1$, $(\text{ad}_c(u_1)z_2)^2$, $(\text{ad}_c(u_2)z_1)^2$.

Proposición 2.22. *El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus W)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(V)$,
- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(W)$,
- $v_1w_1 - w_1v_2 + v_2w_2 - w_2v_1$,
- $v_1w_2 - w_2v_2 + v_2w_1 - w_1v_1$,
- $(v_1w_1)^2 + (w_1v_1)^2$,
- $v_1w_1v_2w_1 + w_1v_1w_1v_2 + v_2w_1v_1w_1 + w_1v_2w_1v_1$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(V+W)enD4.log. □

Observación 2.23. El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus W)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$; $\text{ad}_c(v_1)w_1 - \text{ad}_c(v_2)w_2$, $\text{ad}_c(v_1)w_2 + \text{ad}_c(v_2)w_1$, $(v_1w_1)^2 + (w_1v_1)^2$, $v_1w_1v_2w_1 + w_1v_1w_1v_2 + v_2w_1v_1w_1 + w_1v_2w_1v_1$.

Proposición 2.24. *El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus X)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(V)$,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(X)$ de la Proposición 2.11,
- $v_1x_1 - x_1v_2 + v_2x_2 - x_2v_1$,
- $v_1x_2 - x_2v_2 - v_2x_1 + x_1v_1$,
- $(v_1x_1)^2 + (x_1v_1)^2$,
- $v_1x_1v_2x_1 - x_1v_1x_1v_2 - v_2x_1v_1x_1 + x_1v_2x_1v_1$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(V+X)enD4.log. □

Observación 2.25. El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus X)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(X)$; $\text{ad}_c(v_1)x_1 + \text{ad}_c(v_2)x_2$, $\text{ad}_c(v_1)x_2 - \text{ad}_c(v_2)x_1$, $(v_1x_1)^2 + (x_1v_1)^2$, $v_1x_1v_2x_1 - x_1v_1x_1v_2 - v_2x_1v_1x_1 + x_1v_2x_1v_1$.

Proposición 2.26. *El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus Y)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(V)$,
- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(Y)$,
- $v_1y_1 + y_1v_2 - v_2y_2 - y_2v_1$,
- $v_1y_2 + y_2v_2 - v_2y_1 - y_1v_1$,
- $(v_1y_1)^2 + (y_1v_1)^2$,
- $v_1y_1v_2y_1 + y_1v_1y_1v_2 + v_2y_1v_1y_1 + y_1v_2y_1v_1$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(V+Y)enD4.log. □

Observación 2.27. El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus Y)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(Y)$; $\text{ad}_c(v_1)y_1 - \text{ad}_c(v_2)y_2$, $\text{ad}_c(v_1)y_2 - \text{ad}_c(v_2)y_1$, $(v_1y_1)^2 + (y_1v_1)^2$, $v_1y_1v_2y_1 + y_1v_1y_1v_2 + v_2y_1v_1y_1 + y_1v_2y_1v_1$.

Proposición 2.28. *El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus Z)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(V)$,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(Z)$ de la Proposición 2.11,
- $v_1z_1 + z_1v_2 - v_2z_2 - z_2v_1$,

- $v_1z_2 + z_2v_2 + v_2z_1 + z_1v_1$,
- $(v_1z_1)^2 + (z_1v_1)^2$,
- $v_1z_1v_2z_1 - z_1v_1z_1v_2 - v_2z_1v_1z_1 + z_1v_2z_1v_1$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(V+Z)enD4.log. □

Observación 2.29. El álgebra $\mathcal{B}(V \oplus Z)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(Z)$; $\text{ad}_c(v_1)z_1 - \text{ad}_c(v_2)z_2$, $\text{ad}_c(v_1)z_2 + \text{ad}_c(v_2)z_1$, $(v_1z_1)^2 + (z_1v_1)^2$, $v_1z_1v_2z_1 - z_1v_1z_1v_2 - v_2z_1v_1z_1 + z_1v_2z_1v_1$.

Proposición 2.30. *El álgebra $\mathcal{B}(W \oplus X)$ tiene la siguiente presentación:*

- *Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(W)$,*
- *Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(X)$ de la Proposición 2.11,*
- $w_1x_1 + x_1w_1$,
- $w_2x_2 + x_2w_2$,
- $(w_1x_2)^2 + (x_2w_1)^2$,
- $(w_2x_1)^2 + (x_1w_2)^2$.

Demostración. Ver al archivo AlgebraB(W+X)enD4.log. □

Observación 2.31. [An1, An2] El álgebra $\mathcal{B}(W \oplus X)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(W)$ y $\mathcal{B}(X)$; $\text{ad}_c(w_1)x_1$, $\text{ad}_c(w_2)x_2$, $(\text{ad}_c(w_1)x_2)^2$, $(\text{ad}_c(w_2)x_1)^2$.

Proposición 2.32. *El álgebra $\mathcal{B}(W \oplus Y)$ tiene la siguiente presentación:*

- *Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(W)$,*
- *Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(Y)$,*
- $w_1y_1 + y_1w_2 + w_2y_2 + y_2w_1$,
- $w_1y_2 + y_2w_2 + w_2y_1 + y_1w_1$,
- $(w_1y_1)^2 + (y_1w_1)^2$,
- $w_1y_1w_2y_1 + y_1w_1y_1w_2 + w_2y_1w_1y_1 + y_1w_2y_1w_1$.

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(W+Y)enD4.log. □

Observación 2.33. El álgebra $\mathcal{B}(W \oplus Y)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(W)$ y $\mathcal{B}(Y)$; $\text{ad}_c(w_1)y_1 + \text{ad}_c(w_2)y_2$, $\text{ad}_c(w_1)y_2 + \text{ad}_c(w_2)y_1$, $(w_1y_1)^2 + (y_1w_1)^2$, $w_1y_1w_2y_1 + y_1w_1y_1w_2 + w_2y_1w_1y_1 + y_1w_2y_1w_1$.

Observación 2.34. El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(W \oplus Y)$ fue considerada en [AG1] y en [MS]. Estos últimos autores exhiben en [MS, Example 6.5] la siguiente presentación de dicha álgebra:

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(W)$,
- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(Y)$,
- $w_1y_1 + y_2w_1 + w_2y_2 + y_1w_2$,
- $w_1y_2 + y_1w_1 + w_2y_1 + y_2w_2$,
- $((w_1 + w_2)(y_1 - y_2))^2 + ((y_1 - y_2)(w_1 + w_2))^2$,
- $((w_1 - w_2)(y_1 + y_2))^2 + ((y_1 + y_2)(w_1 - w_2))^2$.

Ver el archivo `AlgebraB(W+Y)enD4-1.log`.

Proposición 2.35. *El álgebra $\mathcal{B}(X \oplus Z)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(X)$ de la Proposición 2.11,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(Z)$ de la Proposición 2.11,
- $x_1z_1 + z_1x_2 + x_2z_2 - z_2x_1$,
- $x_1z_2 - z_2x_2 - x_2z_1 - z_1x_1$,
- $(z_1x_1)^2 - (x_1z_1)^2$,
- $x_1z_1x_2z_1 + z_1x_1z_1x_2 + x_2z_1x_1z_1 + z_1x_2z_1x_1$.

Demostración. Ver el archivo `AlgebraB(X+Z)enD4.log`. □

Observación 2.36. El álgebra $\mathcal{B}(X \oplus Z)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{B}(Z)$; $\text{ad}_c(x_1)z_1 + \text{ad}_c(x_2)z_2$, $\text{ad}_c(x_1)z_2 - \text{ad}_c(x_2)z_1$, $(z_1x_1)^2 - (x_1z_1)^2$, $x_1z_1x_2z_1 + z_1x_1z_1x_2 + x_2z_1x_1z_1 + z_1x_2z_1x_1$.

Proposición 2.37. *El álgebra $\mathcal{B}(Y \oplus Z)$ tiene la siguiente presentación:*

- Las relaciones cuadráticas del álgebra exterior $\mathcal{B}(Y)$,
- Las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(Z)$ de la Proposición 2.11,
- $y_1z_1 + z_1y_1$,
- $y_2z_2 + z_2y_2$,
- $(y_1z_2)^2 + (z_2y_1)^2$,
- $(y_2z_1)^2 + (z_1y_2)^2$.

Demostración. Ver el archivo `AlgebraB(Y+Z)enD4.log`. Notar que $Y \oplus Z$ es el mismo espacio vectorial trenzado que $W \oplus X$. □

Observación 2.38. [An1, An2] El álgebra $\mathcal{B}(Y \oplus Z)$ también admite una presentación con los mismos generadores y las relaciones siguientes: las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(Y)$ y $\mathcal{B}(Z)$; $\text{ad}_c(y_1)z_1$, $\text{ad}_c(y_2)z_2$, $(\text{ad}_c(y_1)z_2)^2$, $(\text{ad}_c(y_2)z_1)^2$.

Presentaciones en rango tres y cuatro

En este caso nos vimos obligados a dejar sin solución el siguiente problema:

Problema principal. Hallar las presentaciones de las doce álgebras de Nichols $\mathcal{B}(M^2 \oplus N)$ y $\mathcal{B}(M^3 \oplus N)$ para los módulos de la Tabla 2.15:

$V^2 \oplus X$	$V^3 \oplus X$
$V^2 \oplus Z$	$V^3 \oplus Z$
$X^2 \oplus V$	$X^3 \oplus V$
$X^2 \oplus Z$	$X^3 \oplus Z$
$Z^2 \oplus V$	$Z^3 \oplus V$
$Z^2 \oplus X$	$Z^3 \oplus X$

Tabla 2.15: Módulos sobre \mathbb{D}_4 cuyas Nichols quedan sin presentación.

Las presentaciones de las álgebras de Nichols asociadas a los demás módulos se pueden hallar usando [An1, An2] pues en todos hay cambios de variable que permiten hallar trenzas de tipo diagonal. Dichos cambios de variable son los siguientes:

1. Si $\{M, N\} \in \{\{U, W\}, \{U, X\}\}$ tomamos

$$m_1 = u_1 + u_2, \quad m_2 = u_1 - u_2$$

y dejamos sin cambio la base de W o X .

2. Si $\{M, N\} \in \{\{U, Y\}, \{U, Z\}\}$ tomamos

$$m_1 = iu_1 + u_2, \quad m_2 = iu_1 - u_2$$

y dejamos sin cambio la base de Y o Z .

3. Si $\{M, N\} \in \{\{V, W\}, \{V, Y\}, \{W, Y\}\}$ hacemos el cambio de base

- $m_1 = v_1 + v_2, \quad m_2 = v_1 - v_2$ en V ,
- $n_1 = w_1 + w_2, \quad n_2 = w_1 - w_2$ en W ,
- $s_1 = y_1 + y_2, \quad s_2 = y_1 - y_2$ en Y .

Los demás casos quedan contemplados en la Tabla 2.15. Para estas álgebras de Nichols se han calculado todas las relaciones hasta orden 5. No obstante esto y el conocimiento de su dimensión, no ha sido aún computacionalmente posible determinar una presentación para dichas álgebras de Nichols.

2.5. Módulos reducibles en $\mathbb{D}_8 \mathcal{YD}$

Según la Tabla 2.7 hay diez módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre \mathbb{D}_8 cuyas álgebras de Nichols son de dimensión finita. Podemos escribir las \mathbb{D}_8 -graduaciones explícitamente:

- $Q := M(\mathcal{O}_{a^4}, \rho_1) = \langle q_1 = e \cdot (1, 0), q_2 = e \cdot (0, 1) \rangle_{a^4}$.
- $R := M(\mathcal{O}_{a^4}, \rho_3) = \langle r_1 = e \cdot (1, 0), r_2 = e \cdot (0, 1) \rangle_{a^4}$.
- $S := M(\mathcal{O}_a, \chi_{(4)}) = \langle s_1 = e \cdot 1 \rangle_a \oplus \langle s_2 = b \cdot 1 \rangle_{a^7}$.
- $T := M(\mathcal{O}_{a^2}, \chi_{(2)}) = \langle t_1 = e \cdot 1 \rangle_{a^2} \oplus \langle t_2 = b \cdot 1 \rangle_{a^6}$.
- $U := M(\mathcal{O}_{a^2}, \chi_{(6)}) = \langle u_1 = e \cdot 1 \rangle_{a^2} \oplus \langle u_2 = b \cdot 1 \rangle_{a^6}$.
- $V := M(\mathcal{O}_{a^3}, \chi_{(4)}) = \langle v_1 = e \cdot 1 \rangle_{a^3} \oplus \langle v_2 = b \cdot 1 \rangle_{a^5}$.
- $W := M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$
 $= \langle w_1 = e \cdot 1 \rangle_b \oplus \langle w_2 = a \cdot 1 \rangle_{a^2b} \oplus \langle w_3 = a^2 \cdot 1 \rangle_{a^4b} \oplus \langle w_4 = a^3 \cdot 1 \rangle_{a^6b}$.
- $X := M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$
 $= \langle x_1 = e \cdot 1 \rangle_b \oplus \langle x_2 = a \cdot 1 \rangle_{a^2b} \oplus \langle x_3 = a^2 \cdot 1 \rangle_{a^4b} \oplus \langle x_4 = a^3 \cdot 1 \rangle_{a^6b}$.
- $Y := M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$
 $= \langle y_1 = e \cdot 1 \rangle_{ab} \oplus \langle y_2 = a \cdot 1 \rangle_{a^3b} \oplus \langle y_3 = a^2 \cdot 1 \rangle_{a^5b} \oplus \langle y_4 = a^3 \cdot 1 \rangle_{a^7b}$.
- $Z := M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$
 $= \langle z_1 = e \cdot 1 \rangle_{ab} \oplus \langle z_2 = a \cdot 1 \rangle_{a^3b} \oplus \langle z_3 = a^2 \cdot 1 \rangle_{a^5b} \oplus \langle z_4 = a^3 \cdot 1 \rangle_{a^7b}$.

Las siguientes tablas muestran cómo actúan los generadores a y b en cada uno de los vectores de las bases que acabamos de establecer:

	q_1	q_2	r_1	r_2	s_1	s_2	t_1	t_2	u_1	u_2
a	ωq_1	$\omega^7 q_2$	$\omega^3 r_1$	$\omega^5 r_2$	$-s_1$	$-s_2$	$\omega^2 t_1$	$\omega^6 t_2$	$\omega^6 u_1$	$\omega^2 u_2$
b	q_2	q_1	r_2	r_1	s_2	s_1	t_2	t_1	u_2	u_1
	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	w_4	x_1	x_2	x_3	x_4
a	$-v_1$	$-v_2$	w_2	w_3	w_4	w_1	x_2	x_3	x_4	$-x_1$
b	v_2	v_1	$-w_1$	$-w_4$	$-w_3$	$-w_2$	$-x_1$	x_4	x_3	x_2
	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4		
a	y_2	y_3	y_4	y_1	z_2	z_3	z_4	$-z_1$		
b	$-y_4$	$-y_3$	$-y_2$	$-y_1$	z_4	z_3	z_2	z_1		

Tabla 2.16: Acción de a y b en la bases de los irreducibles sobre \mathbb{D}_8 .

Tenemos que muchos de estos módulos sobre \mathbb{D}_8 pueden ser estudiados como módulos sobre un grupo más pequeño dependiendo del subgrupo que genera su soporte [ACGa1, Remark 2.1]. Esta información queda clara con la Tabla 2.17.

Módulos sobre \mathbb{D}_8	$\langle \text{Sop} \rangle$	Módulos sobre \mathbb{D}_4	$\langle \text{Sop} \rangle$
Q	\mathbb{Z}_2	U	\mathbb{Z}_2
R	\mathbb{Z}_2	U	\mathbb{Z}_2
S	\mathbb{Z}_8	Ninguno	
T	\mathbb{Z}_4	V	\mathbb{Z}_4
U	\mathbb{Z}_4	V	\mathbb{Z}_4
V	\mathbb{Z}_8	Ninguno	
W	\mathbb{D}_4	$W \oplus Y$	\mathbb{D}_4
X	\mathbb{D}_4	$X \oplus Z$	\mathbb{D}_4
Y	\mathbb{D}_4	$W \oplus Y$	\mathbb{D}_4
Z	\mathbb{D}_4	$X \oplus Z$	\mathbb{D}_4

Tabla 2.17: Equivalencias de espacios vectoriales trenzados de \mathbb{D}_8 en \mathbb{D}_4 .

2.5.1. Módulos de rango dos

Módulos que no contienen a W, X, Y, Z

En la Tabla 2.18 todos los módulos son diagonales de tipo Cartan sin necesidad de cambios de base. Vemos que solo $Q \oplus R, S \oplus V$ y $T \oplus U$ tienen Nichols de dimensión finita pues su trenza es $c = -flip$. En los demás casos el diagrama de Dynkin es un cuadrado lo que significa que el álgebra de Nichols tiene dimensión infinita, ver por ejemplo las Figuras 2.3 y 2.7.

Módulo	Tipo Cartan	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$	Serie
$Q \oplus R$	Sí		16	$(2)_t^4$
$Q \oplus S$	Sí	[H2]	∞	
$Q \oplus T$	Sí	[H2]	∞	
$Q \oplus U$	Sí	[H2]	∞	
$Q \oplus V$	Sí	[H2]	∞	
$R \oplus S$	Sí	[H2]	∞	
$R \oplus T$	Sí	[H2]	∞	
$R \oplus U$	Sí	[H2]	∞	
$R \oplus V$	Sí	[H2]	∞	
$S \oplus T$	Sí	[H2]	∞	
$S \oplus U$	Sí	[H2]	∞	
$S \oplus V$	Sí		16	$(2)_t^4$
$T \oplus U$	Sí		16	$(2)_t^4$
$T \oplus V$	Sí	[H2]	∞	
$U \oplus V$	Sí	[H2]	∞	

Tabla 2.18: Módulos de rango dos sobre \mathbb{D}_8 . Primera parte.

Módulos que contienen a W, X, Y, Z

Módulo	$\langle \text{Sop} \rangle$	Razón	$\dim \mathcal{B}(M)$
$Q \oplus W$	\mathbb{D}_4	$U \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$Q \oplus X$	\mathbb{D}_4	$U \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$Q \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$U \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$Q \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$U \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$R \oplus W$	\mathbb{D}_4	$U \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$R \oplus X$	\mathbb{D}_4	$U \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$R \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$U \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$R \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$U \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$S \oplus W$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$S \oplus X$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$S \oplus Y$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$S \oplus Z$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$T \oplus W$	\mathbb{D}_4	$V \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$T \oplus X$	\mathbb{D}_4	$V \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$T \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$V \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$T \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$V \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$U \oplus W$	\mathbb{D}_4	$V \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$U \oplus X$	\mathbb{D}_4	$V \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$U \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$V \oplus W \oplus Y$ en \mathbb{D}_4	∞
$U \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$V \oplus X \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$V \oplus W$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$V \oplus X$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$V \oplus Y$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$V \oplus Z$	\mathbb{D}_8	[HV2, Theorem 5.5]	∞
$W \oplus W$	\mathbb{D}_4	$W^2 \oplus Y^2$ en \mathbb{D}_4	∞
$W \oplus X$	\mathbb{D}_4	$W \oplus X \oplus Y \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$W \oplus Y$	\mathbb{D}_8	[HV4, Appendix B]	∞
$W \oplus Z$	\mathbb{D}_8	[HV4, Appendix B]	∞
$X \oplus X$	\mathbb{D}_4	$X^2 \oplus Z^2$ en \mathbb{D}_4	∞
$X \oplus Y$	\mathbb{D}_8	[HV4, Appendix B]	∞
$X \oplus Z$	\mathbb{D}_8	[HV4, Appendix B]	∞
$Y \oplus Y$	\mathbb{D}_4	$W^2 \oplus Y^2$ en \mathbb{D}_4	∞
$Y \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$W \oplus X \oplus Y \oplus Z$ en \mathbb{D}_4	∞
$Z \oplus Z$	\mathbb{D}_4	$X^2 \oplus Z^2$ en \mathbb{D}_4	∞

Tabla 2.19: Módulos de rango dos sobre \mathbb{D}_8 . Segunda parte.

Como vemos, todos los módulos se reducen a \mathbb{D}_4 con excepción de doce casos donde $\langle \text{Sop} \rangle = \mathbb{D}_8$. Mostramos los razonamientos de los que se deducen los demás en forma análoga.

El módulo $S \oplus W$.

Consideremos el grupo Γ_4 presentado como

$$\Gamma_4 = \langle x, y, \nu \mid yx = \nu xy, x\nu = \nu^{-1}x, y\nu = \nu y, \nu^4 = 1 \rangle.$$

Tenemos un homomorfismo de grupos $\Gamma_4 \rightarrow \mathbb{D}_8$ dado por

$$x \mapsto b, y \mapsto a, \nu \mapsto a^2.$$

Así estamos en las hipótesis de [HV2, Theorem 5.5]. Este resultado nos dice que $\dim \mathcal{B}(S \oplus W) < \infty$ si y solo si se cumplen las tres siguientes condiciones

- $\chi_{(4)}(a) = \varepsilon \otimes \text{sgn}(b) = -1.$
- $\chi_{(4)}(a^2) = \chi_{(4)}(e) \cdot \varepsilon \otimes \text{sgn}(a^8).$
- $[\chi_{(4)}(a^2)]^2 = -1.$

Como la última condición no se cumple entonces $\dim \mathcal{B}(S \oplus W) = \infty.$

El módulo $W \oplus Y$.

La clasificación de los módulos de Yetter-Drinfeld de rango dos con sistema de raíces finito en [HV3] o [HV4, Appendix B] muestra que no es posible tener un módulo reducible con dos sumandos irreducibles de dimensión cuatro y cuya álgebra de Nichols tenga dimensión finita. Luego, $\dim \mathcal{B}(W \oplus Y) = \infty.$

2.5.2. Módulos de rango arbitrario

Proposición 2.39. *Los únicos módulos reducibles M en la categoría ${}_{\mathbb{D}_8}^{\mathbb{D}_8} \mathcal{YD}$ con $\dim \mathcal{B}(M) < \infty$ son*

$$Q^i \oplus R^j, S^i \oplus V^j, T^i \oplus U^j$$

con $i + j > 1$. En este caso $\mathcal{B}(M)$ es un álgebra exterior de dimensión $2^{2(i+j)}$.

Demostración. Por la Tabla 2.19, M no puede tener sumandos simples de dimensión 4. Además, la Tabla 2.18 descarta los módulos de rango dos con sumandos directos en $\{Q, R, S, T, U, V\}$ pues sus álgebras de Nichols tienen dimensión infinita. En todos estos casos basta construir el diagrama de Dynkin y verificar que son cuadrados lo que descarta la posibilidad de que tengan álgebra de Nichols de dimensión finita.

Por lo tanto, los únicos módulos que pueden tener álgebra de Nichols de dimensión finita son

$$Q^i \oplus R^j, S^i \oplus V^j \text{ y } T^i \oplus U^j.$$

Cálculos directos en la Tabla 2.16 permiten hallar las trenzas donde verificamos que en todos estos módulos siempre aparecen álgebras exteriores. A manera de ejemplo, para $Q^i \oplus R^j$ tenemos que en general $c(m \otimes n) = a^4 n \otimes m = -n \otimes m.$ \square

Teorema 2.40. (Teorema de clasificación para \mathbb{D}_8) *Los módulos en $\mathbb{D}_8 \mathcal{YD}$ con álgebra de Nichols de dimensión finita se clasifican así:*

1. *Los diez módulos irreducibles: $Q = M(\mathcal{O}_{a^4}, \rho_1)$, $R = M(\mathcal{O}_{a^4}, \rho_3)$, $S = M(\mathcal{O}_a, \chi_{(4)})$, $T = M(\mathcal{O}_{a^2}, \chi_{(2)})$, $U = M(\mathcal{O}_{a^2}, \chi_{(6)})$, $V = M(\mathcal{O}_{a^3}, \chi_{(4)})$, $W = M(\mathcal{O}_b, \varepsilon \otimes \text{sgn})$, $X = M(\mathcal{O}_b, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, $Y = M(\mathcal{O}_{ab}, \varepsilon \otimes \text{sgn})$, $Z = M(\mathcal{O}_{ab}, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$.*
2. *Los módulos reducibles: $Q^i \oplus R^j$, $S^i \oplus V^j$, $T^i \oplus U^j$ para $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i+j > 1$.*

Demostración. Es inmediato a partir de la Proposición 2.39 y las Tablas 2.7, 2.18 y 2.19. \square

2.5.3. Presentaciones de las álgebras no exteriores

Solo hay cuatro álgebras de Nichols no exteriores sobre \mathbb{D}_8 y estas corresponden a los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles W , X , Y y Z . Obtenemos sus presentaciones por métodos computacionales basados en rutinas internas que utilizan bases de Gröbner.

Proposición 2.41. *El álgebra $\mathcal{B}(W)$ tiene una presentación con generadores w_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, y relaciones*

- $w_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$,
- $w_1 w_3 + w_3 w_1$,
- $w_2 w_4 + w_4 w_2$,
- $w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_4 + w_4 w_1$,
- $w_1 w_4 + w_4 w_3 + w_3 w_2 + w_2 w_1$,
- $(w_1 w_2)^2 + (w_2 w_1)^2$,
- $w_1 w_2 w_3 w_2 + w_2 w_1 w_2 w_3 + w_3 w_2 w_1 w_2 + w_2 w_3 w_2 w_1$.

Obtenemos una presentación para $\mathcal{B}(Y)$ con los mismos generadores y relaciones cambiando cada w_i por y_i .

La dimensión es 64 y la serie de Hilbert está dada por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(W)}(t) = (2)_t^4 (2)_{t^2}^2.$$

Una integral no nula está dada por

$$w_1 w_2 w_1 w_2 w_3 w_2 w_1 w_4.$$

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(W)enD8.log. \square

Observación 2.42. El álgebra $\mathcal{B}(W)$ admite una presentación con los mismos generadores y las siguientes relaciones: $w_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$, $\text{ad}_c(w_1)w_3$, $\text{ad}_c(w_2)w_4$, $\text{ad}_c(w_1)w_2 + \text{ad}_c(w_3)w_4$, $\text{ad}_c(w_1)w_4 + \text{ad}_c(w_3)w_2$, $(w_1 w_2)^2 + (w_2 w_1)^2$, $w_1 w_2 w_3 w_2 + w_2 w_1 w_2 w_3 + w_3 w_2 w_1 w_2 + w_2 w_3 w_2 w_1$.

Proposición 2.43. *El álgebra $\mathcal{B}(X)$ tiene una presentación con generadores x_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, y relaciones*

- $x_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$,
- $x_1x_3 - x_3x_1$,
- $x_2x_4 - x_4x_2$,
- $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 - x_4x_1$,
- $x_1x_4 - x_4x_3 - x_3x_2 - x_2x_1$,
- $(x_1x_2)^2 - (x_2x_1)^2$,
- $x_1x_2x_3x_2 + x_2x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1x_2 + x_2x_3x_2x_1$.

Obtenemos una presentación para $\mathcal{B}(Z)$ con los mismos generadores y relaciones cambiando cada x_i por z_i .

La dimensión es 64 y la serie de Hilbert está dada por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}(W)}(t) = (2)_t^4 (2)_{t^2}^2.$$

Una integral no nula está dada por

$$x_1x_2x_1x_2x_3x_2x_1x_4.$$

Demostración. Ver el archivo AlgebraB(X)enD8.log. □

Observación 2.44. El álgebra $\mathcal{B}(X)$ admite una presentación con los mismos generadores y las siguientes relaciones: $x_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$, $\text{ad}_c(x_1)x_3$, $\text{ad}_c(x_2)x_4$, $\text{ad}_c(x_1)x_2 + \text{ad}_c(x_3)x_4$, $\text{ad}_c(x_1)x_4 - \text{ad}_c(x_3)x_2$, $(x_1x_2)^2 - (x_2x_1)^2$, $x_1x_2x_3x_2 + x_2x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1x_2 + x_2x_3x_2x_1$.

2.6. Apéndice: El álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$, m impar

Como hemos dicho previamente, para los valores impares de $m \geq 5$ se sabe que las álgebras de Nichols asociadas a módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles son todas de dimensión infinita, salvo en el caso desconocido de $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}^m}, \text{sgn})$.

Nuestro propósito en este apéndice será obtener información acerca de las relaciones de $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}^m}, \text{sgn})$, recordando que en general $\mathcal{B}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^n(V)$ donde $\mathcal{B}^n(V) = V^{\otimes n} / \text{Ker } Q_n$ siendo Q_n el simetrizador cuántico de grado n construido con la trenza c .

2.6.1. El álgebra 12-dimensional de Fomin-Kirillov

En la Tabla 2.1 vimos que $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn})$ tiene dimensión 12. Esta álgebra aparece por primera vez en el artículo [FK] donde Fomin y Kirillov intentan comprender la combinatoria del anillo de cohomología de las variedades bandera por medio de las álgebras cuadráticas \mathcal{E}_n definidas con generadores $[ij]$, donde $1 \leq i < j \leq n$, y relaciones

- $[ij]^2 = 0$ si $i < j$.
- $[ij][jk] = [jk][ik] + [ik][ij]$ y $[jk][ij] = [ik][jk] + [ij][ik]$ si $i < j < k$.
- $[ij][kl] = [kl][ij]$ si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, $i < j$ y $k < l$.

Como álgebra de Nichols esta álgebra ha sido estudiada en [AG1] y en [MS]. En [MS], Milinski y Schneider muestran que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn}) = \mathcal{E}_3$ hallando así una presentación de $\mathcal{B}(V)$. Sus métodos corresponden al uso de técnicas en grupos de Coxeter aplicados a \mathbb{S}_n . En este caso tenemos la coincidencia $\mathbb{S}_3 = \mathbb{D}_3$ pero no podemos reutilizar sus ideas de forma directa con \mathbb{D}_n así que adoptaremos otro punto de vista para encontrar una presentación de $\mathcal{B}(V)$.

Ejemplo 2.45. Usando como ejemplo el caso $m = 3$ intentaremos explicar la idea general que nos permite hallar las relaciones cuadráticas en

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_m}, \text{sgn}).$$

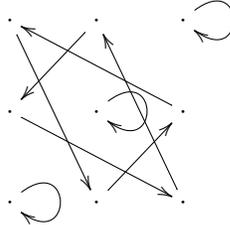
Denotemos $v_i = g_i \otimes 1$. Tenemos que $\{v_0, v_1, v_2\}$ es una base de V y la trenza de $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ está dada en la base $\{v_i \otimes v_j : i, j \in \mathbb{Z}/3\}$ por

$$c(v_i \otimes v_i) = -v_i \otimes v_i \text{ para } i = 0, 1, 2$$

$$c(v_0 \otimes v_1) = -v_2 \otimes v_0, \quad c(v_2 \otimes v_0) = -v_1 \otimes v_2, \quad c(v_1 \otimes v_2) = -v_0 \otimes v_1$$

$$c(v_0 \otimes v_2) = -v_1 \otimes v_0, \quad c(v_1 \otimes v_0) = -v_2 \otimes v_1, \quad c(v_2 \otimes v_1) = -v_0 \otimes v_2.$$

Para visualizar esta trenza de manera gráfica asociemos a cada $v_i \otimes v_j$ el punto (i, j) del plano $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$. De este modo obtenemos cinco *órbitas* que resultan de aplicar c en forma sucesiva (teniendo presente que vamos a considerar los resultados con signo positivo)



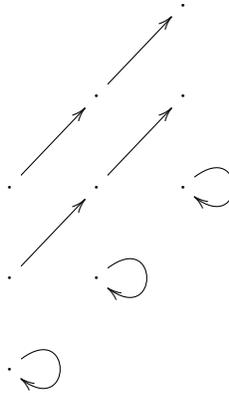
En el siguiente párrafo probaremos que al sumar los elementos de cada órbita obtenemos una relación cuadrática de $\mathcal{B}(V)$. Ya sabemos que $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b^{\mathbb{D}_3}, \text{sgn})$ es un álgebra de Nichols cuadrática y por lo tanto le hemos hallado una presentación con generadores $\{v_0, v_1, v_2\}$ y relaciones

- v_i^2 para todo $i = 0, 1, 2$,
- $v_0v_1 + v_2v_0 + v_1v_2$,
- $v_0v_2 + v_1v_0 + v_2v_1$.

Esta presentación se da en [AG1] y se halla por métodos algebraicos.

Es importante resaltar en este momento que en la literatura actual tampoco se establece si $\mathcal{B}(V)$ es cuadrática para $m \geq 5$.

Ahora cambiemos la perspectiva con la que vemos el plano $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$. Si trasladamos tres unidades hacia arriba a cada uno de los tres puntos bajo la diagonal principal obtenemos nuevamente un representación del mismo plano. Las órbitas de la inversa c^{-1} adquieren una forma diferente pues corresponden a puntos (en la diagonal principal) y líneas rectas de pendiente uno:



Obviamente, la órbitas dadas por c y c^{-1} son iguales, pero este nuevo punto de vista permite escribirlas de otro modo:

- $R_0^0 := v_0^2$,
- $R_0^1 := v_1^2$,
- $R_0^2 := v_2^2$,
- $R_1^0 := v_0v_1 + v_1v_2 + v_2v_0$,
- $R_2^0 := v_0v_2 + v_2v_1 + v_1v_0$.

Por la notación R_n^k denominamos la relación cuadrática que comienza en v_kv_{k+n} y cada sumando que se adiciona tiene subíndices con diferencia respectiva de n con lo anteriores. Véase la definición general en la ecuación (2.1).

2.6.2. Relaciones cuadráticas en $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$

Definición 2.46. Sea \rightarrow la acción de \mathbb{Z}/m en $\{v_i \otimes v_j : i, j \in \mathbb{Z}/m\}$ dada por

$$s \rightarrow v_i \otimes v_j := (-1)^s c^s(v_i \otimes v_j)$$

Podemos calcular fácilmente la acción de forma general pues

$$s \rightarrow v_i \otimes v_j = v_{(s+1)i-sj} \otimes v_{si-(s-1)j}.$$

Denotamos Ω_{ij} a la órbita de $v_i \otimes v_j$ bajo \rightarrow . Además definimos ω_{ij} como la suma de todo los elementos de la órbita Ω_{ij} .

Lema 2.47. Si $r = \min\{s \in \mathbb{Z}^+ : s \rightarrow v_i \otimes v_j = v_i \otimes v_j\}$ entonces $|\Omega_{ij}| = r$.

Demostración. Si K es el subgrupo estabilizador de $v_i \otimes v_j$ entonces es generado por la clase residual de r en \mathbb{Z}/m y

$$|\Omega_{ij}| = [\mathbb{Z}/m : K] = m/o(r) = (m, r).$$

Llamemos $\Omega = \{s \rightarrow v_i \otimes v_j : s = 0, \dots, (m, r) - 1\}$. Sus elementos son diferentes por la invertibilidad de c y la minimalidad de r . Luego Ω tiene (m, r) elementos distintos y está contenido en Ω_{ij} . Por lo tanto, $\Omega = \Omega_{ij}$. Pero esto muestra además que $(m, r) \rightarrow v_i \otimes v_j = v_i \otimes v_j$ y por minimalidad tenemos $(m, r) = r$, de donde deducimos que $|\Omega_{ij}| = r$. \square

Ahora mostramos un caso particular de [GG, Lemma 2.2].

Teorema 2.48. El conjunto de los ω_{ij} , sin repeticiones, es una base de $\text{Ker } Q_2$.

Demostración. La comprobación de que cada ω_{ij} está en el núcleo de Q_2 es inmediata pues al aplicar $\text{id}_{V \otimes V} + c$ cada tensorando aparece una vez como imagen de la identidad $\text{id}_{V \otimes V}$ con signo positivo y una vez como imagen de c con signo negativo.

Sea $X = \{v_i \otimes v_j : i, j \in \mathbb{Z}/m\}$. Dado que las órbitas Ω_{ij} forman una partición de X entonces toda combinación nula $\sum \lambda_{ij} \omega_{ij} = 0$ es una combinación lineal nula de X que por ser linealmente independiente hace cero a todos los coeficientes λ_{ij} . Esto prueba la independencia lineal de los ω_{ij} .

Sea $\sum \lambda_{kl} v_k \otimes v_l$ un elemento de $\text{Ker } Q_2$ expresado en la base X . Al aplicar Q_2 y observar un tensorando determinado vemos que cada uno de ellos debe tener el mismo coeficiente de su preimagen bajo c de modo que pueda anularse la suma total. Es decir, todos los tensorandos de la misma órbita tienen el mismo coeficiente lo cual prueba que los ω_{ij} generan a $\text{Ker } Q_2$. \square

Así pues, tenemos que los ω_{ij} determinan de forma minimal las relaciones cuadráticas en $\mathcal{B}(V)$. Ahora procedemos a contarlas.

Teorema 2.49. *Si m es un entero impar entonces*

$$\dim(\text{Ker } Q_2) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \text{Tr}((-1)^s c^s).$$

Demostración. Por el Teorema 2.48, $\dim(\text{Ker } Q_2)$ es igual al número de órbitas de la acción \rightarrow en X . Podemos usar el Lema de Cauchy-Frobenius que afirma que el número de órbitas que tiene un conjunto bajo una acción \rightarrow es el producto interno de su caracter con el caracter trivial. Así pues,

$$\dim(\text{Ker } Q_2) = \langle \chi_{\rightarrow}, \varepsilon \rangle = \frac{1}{m} \sum_{s \in \mathbb{Z}/m} \chi_{\rightarrow}(s) \varepsilon(-s) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \text{Tr}((-1)^s c^s)$$

como queríamos. □

No basta conocer el número de relaciones cuadráticas pues también es necesario poder escribirlas de una forma sencilla con el propósito de efectuar cálculos en $\mathcal{B}(V)$. De la definición de la trenza² podemos ver que los elementos de la órbita de un $v_i \otimes v_j$ se corresponden con los puntos de la recta de pendiente uno en el plano $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$ que contiene a (i, j) cuando sumamos sucesivamente $j - i$ a cada componente:

$$(i, j), (j, 2j - i), (2j - i, 3j - 2i), \dots, (2i - j, i).$$

Usando el orden de $j - i$ en \mathbb{Z}/m sabemos que hay $(m, j - i)$ órbitas por cada recta. Así pues, para escribir las relaciones podemos usar dos índices $n = 0, \dots, m - 1$ y k que dependerá de n . Debemos calcular primero (m, n) y después para cada $k = 0, \dots, (m, n) - 1$ tenemos una relación con $\frac{m}{(m, n)}$ binomios

$$R_n^k = v_k v_{k+n} + v_{k+n} v_{k+2n} + \dots + v_{k-n} v_k. \quad (2.1)$$

Notemos que, en particular, con $n = 0$ conseguimos todos los cuadrados $R_0^i = v_i^2$ para $i = 0, \dots, m - 1$.

Con esta notación podemos escribir los ω_{ij} de otra manera pues basta usar el algoritmo de la división de Euclides para hallar k tal que $i = s(m, j - i) + k$, donde $0 \leq k < (m, j - i)$, con lo cual

$$\omega_{ij} = R_{j-i}^k.$$

De este modo tenemos una nueva forma de contar las relaciones cuadráticas pues hay m rectas de pendiente uno en $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$ y la que pasa por cada punto $(0, n)$ aporta (m, n) relaciones. Luego, hemos probado el siguiente resultado:

²Acá usamos realmente la inversa de la trenza que nos da la misma órbita pero de una forma más fácil de escribir.

Teorema 2.50. *Si m es un entero impar entonces*

$$\dim(\text{Ker } Q_2) = \sum_{n=1}^m (m, n).$$

Esta función es bien conocida en teoría de números pues está dada por la fórmula de Pillai $\pi(m)$ que es una función multiplicativa y por tanto basta conocer su valor para cada primo p y cada exponente $r \geq 1$,

$$\pi(p^r) = (r+1)p^r - rp^{r-1}.$$

2.6.3. Relaciones cúbicas en $\mathcal{B}(\mathcal{O}_b, \text{sgn})$

Una idea combinatoria similar se puede usar para hallar las relaciones cúbicas para ciertos valores particulares de m . El caso general no está resuelto y por eso ahora nos reducimos al caso particular en que $m = p$ es primo.

Para trabajar en $V^{\otimes 3}$ usaremos la siguiente notación: cada relación R_n^k en $\mathcal{B}(V)$ es imagen bajo la proyección canónica de un tensor

$$T_n^k = v_k \otimes v_{k+n} + v_{k+n} \otimes v_{k+2n} + \cdots + v_{k-n} \otimes v_k.$$

Consideremos todos los tensores $T_0^n = v_n \otimes v_n$ con $n = 0, \dots, p-1$ y

$$T_n^0 = v_0 \otimes v_n + v_n \otimes v_{2n} + \cdots + v_{(p-1)n} \otimes v_0$$

con $n = 0, \dots, p-1$, que al proyectarse dan las relaciones cuadráticas de $\mathcal{B}(V)$. Sabemos que hay en total $\dim(\text{Ker } Q_2) = 2p-1$. Si tensorizamos a izquierda o derecha por cualquier v_i obtenemos un elemento de $\text{Ker } Q_3$ pues su imagen en $\mathcal{B}^3(V)$ es una relación cuadrática (nula) multiplicada por v_i . De este modo obtenemos $2p(2p-1)$ tensores en total. Sin embargo hay algunas relaciones de dependencia lineal entre ellos. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.51. Consideremos el vector $v_1 \otimes v_2 \otimes v_4$ en el caso \mathbb{D}_5 . Él aparece solo en

$$T_1^0 \otimes v_4 = v_0 \otimes v_1 \otimes v_4 + v_1 \otimes v_2 \otimes v_4 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 + v_3 \otimes v_4 \otimes v_4 + v_4 \otimes v_0 \otimes v_4,$$

$$v_1 \otimes T_2^0 = v_1 \otimes v_0 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2 \otimes v_4 + v_1 \otimes v_4 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_1 \otimes v_3 \otimes v_0.$$

En una combinación lineal nula que contenga a $v_1 \otimes v_2 \otimes v_4$ deben aparecer estas dos expresiones con el mismo coeficiente y signos cambiados. Tomaremos la primera negativa y la segunda positiva para efectos de conteo. El mismo razonamiento aplica para todos los tensorandos de $-T_1^0 \otimes v_4$ y $v_1 \otimes T_2^0$ de modo que en la suma final aparecen respectivamente

$$v_0 \otimes T_3^0 + v_1 \otimes T_2^0 + v_2 \otimes T_1^0 + v_3 \otimes T_0^4 + v_4 \otimes T_4^0,$$

$$-T_2^0 \otimes v_0 - T_3^0 \otimes v_1 - T_4^0 \otimes v_2 - T_0^1 \otimes v_3 - T_1^0 \otimes v_4.$$

Notemos la asimetría en los superíndices cuando tensorizamos por v_3 . Este no es un problema pues al sumar las dos líneas anteriores todo se anula salvo los términos cuadráticos para los que deben incluirse todas las diferencias

$$v_3 \otimes T_0^s - T_0^s \otimes v_3$$

donde $s = 0, \dots, 4$. Vuelve la simetría porque aparece $v_3 \otimes T_0^0 - T_0^0 \otimes v_3$. Por otra parte, no es necesaria la suma de $v_3 \otimes T_0^3 - T_0^3 \otimes v_3$ pero ella misma se anula así que no impide escribir una sumatoria general.

Para un número primo arbitrario p tenemos dos maneras de enunciar esto en forma general. Fijemos un índice $i = 0, \dots, p-1$. Viendo el comportamiento regular de los subíndices de los v_s podemos escribir

$$\sum_{s=1}^{p-1} v_i \otimes T_0^s - T_0^s \otimes v_i + \sum_{s=0}^{p-1} v_s \otimes T_{i-s}^0 - T_{s-i}^0 \otimes v_s \quad (2.2)$$

o viendo la regularidad en los subíndices de T_s^0 podemos reescribir

$$\sum_{s=0}^{p-1} v_i \otimes T_0^s - T_0^s \otimes v_i + \sum_{s=1}^{p-1} v_{i-s} \otimes T_s^0 - T_{-s}^0 \otimes v_{i-s} = 0. \quad (2.3)$$

De este modo hallamos p relaciones de dependencia lineal. Por otra lado están las diferencias de cubos

$$v_i \otimes T_0^i - T_0^i \otimes v_i = 0 \quad (2.4)$$

de las que hay p también.

Notemos que cada $v_i \otimes v_j \otimes v_k$ determina una única combinación lineal nula en la que está y se necesita toda la suma para que se anule. Por lo tanto cada $v_i \otimes T_n^k$ ó $T_n^k \otimes v_i$ aparece una única vez en alguna de estas combinaciones. Si quitamos un solo sumando a cada una de las expresiones (2.2) ó (2.4) los demás serán linealmente independientes. Hemos hallado entonces

$$2p(2p-1) - 2p = 4p(p-1)$$

vectores independientes en $\text{Ker } Q_3$.

Para valores bajos de p sucede que estos vectores linealmente independientes generan $\text{Ker } Q_3$:

Proposición 2.52. *Si $p \in \{3, 5, 7\}$ entonces*

$$\dim(\text{Ker } Q_3) = 4p(p-1).$$

Demostración. Esta igualdad se prueba computacionalmente. Ver Tabla 2.20. \square

Calculando directamente para algunos valores superiores de m , usando las matrices respectivas a los operadores $\text{Ker } Q_3$, podemos constatar que esto no ocurre en la situación general como podemos verificar en la Tabla 2.20 también.

2.6.4. Información computacional

En la literatura actual existen pocos resultados teóricos acerca de las dimensiones de los núcleos de los simetrizadores cuánticos Q_n , sobre \mathbb{D}_m con m impar, más allá de encontrar todas las relaciones cuadráticas como hicimos en la Sección 2.6.2. Esto nos llevó a hacer una primera aproximación computacional para determinar alguna información que fuera de utilidad a nivel intuitivo; sin embargo, las matrices que se deben utilizar crecen en tamaño exponencialmente y esto hace que sea poco lo que puede decirse únicamente por estos métodos.

m	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
3	5	24	80	3^5	3^6
5	9	80	512	2865	15061
7	13	168	1586	13097	
9	21	351	4251		
11	21	462	7292		
13	25	672			
15	45	1320			
17	33	1258			
19	37	1634			
21	65	2856			
23	45	2576			
25	65	3775			
27	81	4968			
29	57	4524			
31	61				

Tabla 2.20: Cálculo de $\dim \text{Ker } Q_n$ para m y n bajos.

Desde $m = 31$ en adelante se pueden trabajar algunos valores más grandes de m pero solo se logra obtener información de las relaciones cuadráticas lo cual no nos aporta algo distinto a lo que ya sabemos.

Capítulo 3

Pecios simples asociados a grupos esporádicos

3.1. Introducción

En los Problemas 4 y 5 de la Sección 1.3.2 nos planteamos el uso de técnicas de descarte para álgebras de Nichols de la forma $\mathcal{B}(X, q)$, donde X es un pecio y q un 2-cociclo, estudiando familias distinguidas de pecios simples. Nuestro objetivo será intentar determinar el colapso de X por medio de los criterios de tipo D, F y C, o en caso contrario mostrar la imposibilidad de usar estos criterios probando que X es kthulhu.

Las familias que estudiamos son parte de aquellas que aparecen en la clasificación de los pecios simples, ver [AG2, J]. Aquí seguiremos la presentación dada en [AFGaV1, Section 2.5]. Esta establece que todo pecio simple finito está en alguna de las siguientes tres familias:

- (i) Pecios afines simples,
- (ii) Clases de conjugación (torcidas) no triviales en grupos finitos simples no abelianos,
- (iii) Pecios homogéneos torcidos simples.

Respecto a la familia (ii) la literatura es extensa pero está lejos de resolver completamente el problema de su colapso, aunque es importante notar que todos los resultados que se conocen hasta hoy tienen la conclusión común de hallar clases de conjugación que colapsan como pecios. En este capítulo nos ocuparemos de los 27 grupos simples esporádicos. Algunos aportes significativos que se encuentran en la literatura para los grupos alternados y de tipo Lie son los siguientes:

- Los grupos alternados \mathbb{A}_n para $n \geq 5$.
En los artículos [AFGV1, F2] se clasifican las clases de tipo D y se demuestra que todas las clases de conjugación en \mathbb{A}_n , $n \geq 5$, colapsan salvo por las clases (p) en \mathbb{A}_p y $(1, p)$ en \mathbb{A}_{p+1} para cierta familia distinguida de primos p .
- Los grupos de tipo Lie.
Al tratamiento de las clases unipotentes, semisimples y mixtas de estos grupos se dedica la serie aún en construcción de artículos [ACGa1, ACGa2, ACGa3, ACGa4, ACGa5]. Para probar el colapso de estos pecios simples se han creado los criterios de tipo F y C, con resultados remarcables aunque no se han podido aplicar exhaustivamente al análisis de todas las clases. Ver también [FrGV1, FrGV2].

Los 27 grupos esporádicos

Notación: En este capítulo usaremos la notación del ATLAS [WWT+] para denotar a las clases de conjugación de un grupo dado. Esto consiste en que las clases de conjugación de elementos de orden n se llaman nA , nB , nC , etcétera.

Con la excepción del *grupo monstruo* \mathbb{M} , las clases de conjugación de tipo D en los grupos finitos simples esporádicos están completamente clasificadas en los artículos [AFGV2, FV].

Teorema 3.1. [FV, Appendix] *Sea G un grupo finito simple esporádico distinto de \mathbb{M} . Una clase de conjugación de G es de tipo D si y solo si no está en la Tabla 3.1.*

Grupo	Clases	Grupo	Clases
T	2A	M_{11}	8A, 8B, 11A, 11B
M_{12}	11A, 11B	M_{22}	11A, 11B
M_{23}	23A, 23B	M_{24}	23A, 23B
Ru	29A, 29B	Suz	3A
HS	11A, 11B	McL	11A, 11B
Co_1	3A	Co_2	2A, 23A, 23B
Co_3	23A, 23B	J_1	15A, 15B, 19A, 19B, 19C
J_2	2A, 3A	J_3	5A, 5B, 19A, 19B
J_4	29A, 43A, 43B, 43C	Ly	37A, 37B, 67A, 67B, 67C
$O'N$	31A, 31B	Fi_{22}	2A, 22A, 22B
Fi_{23}	2A	Fi'_{24}	29A, 29B
\mathbb{B}	2A, 46A, 46B, 47A, 47B		

Tabla 3.1: Clases de $G \neq \mathbb{M}$ que no son de tipo D.

Observación 3.2. En la Tabla 3.1, como adelanto a los resultados que probaremos, señalamos en rojo las clases que son de tipo C como lo prueba el Teorema 3.14. Las demás clases son kthulhu como lo demuestra el Teorema 3.26.

Teorema 3.3. [FV, Remark 4.13] *Las clases de conjugación del monstruo \mathbb{M} son de tipo D, con la posible excepción de los casos abiertos de la Tabla 3.2.*

32A, 32B, 41A, 46A, 46B, 47A, 47B, 59A, 59B, 69A, 69B
71A, 71B, 87A, 87B, 92A, 92B, 94A, 94B

Tabla 3.2: Clases de \mathbb{M} que no se sabe si son de tipo D.

De las clases torcidas en grupos simples G se sabe que ellas se pueden realizar como clases de conjugación del grupo de automorfismos $\text{Aut}(G)$ (Ver [FV, Introduction]) y usando este hecho se conoce también la clasificación completa de aquellas que son de tipo D.

Teorema 3.4. [FV, Theorem 1.1] *Sea G un grupo finito simple esporádico. Una clase de conjugación de $\text{Aut}(G)$ es de tipo D si y solo si no está en la Tabla 3.3. ([FV, Table 1]).*

Grupo	Clases	Grupo	Clase
$\text{Aut}(M_{22})$	2B	$\text{Aut}(J_3)$	34A, 34B
$\text{Aut}(HS)$	2C	$\text{Aut}(ON)$	38A, 38B, 38C
$\text{Aut}(Fi_{22})$	2D	$\text{Aut}(McL)$	22A, 22B
$\text{Aut}(Fi'_{24})$	2C		

Tabla 3.3: Clases de $\text{Aut}(G)$ que no son de tipo D.

Observación 3.5. En la Tabla 3.3, como adelanto a los resultados que probaremos, señalamos en rojo las clases que son de tipo C. No sabemos el tipo de las clases 2C en $\text{Aut}(Fi'_{24})$, las demás son kthulhu como lo prueba el Teorema 3.74.

Dada la información que se tiene acerca de las clases de tipo D en los grupos simples esporádicos surge la pregunta de si aquellas clases que no son de tipo D sí son de tipo F o C. Por ello nos dedicaremos a buscar soluciones a los Problemas 4 y 5 dentro de esta familia. En el contexto del método del levante se han hecho más avances sobre el colapso de estas clases pues por técnicas abelinas se ha logrado probar que algunas de las álgebras asociadas respectivas tienen dimensión infinita. Así se establece la lista de clases restantes:

Teorema 3.6. [AFGV2, Theorem I] con actualización en [FV, Remark 4.14] *Sea G un grupo simple esporádico. Entonces, el álgebra de Nichols de todo $V \in_G^G \mathcal{YD}$ tiene dimensión infinita, con la posible excepción de las álgebras asociadas a las clases en la Tabla 3.4.*

Grupo	Clases
Fi_{22}	22A, 22B
\mathbb{B}	46A, 46B
\mathbb{M}	32A, 32B, 46A, 46B, 92A, 92B, 94A, 94B

Tabla 3.4: Clases con dimensión de las álgebras Nichols desconocida.

3.2. Organización del capítulo

- En la Sección 3.3 usamos los criterios de tipo F y C. En la Subsección 3.3.1 mostramos los resultados de implementar el algoritmo de tipo F a las clases de ciertos grupos esporádicos donde el tamaño permite abordar el problema con el programa GAP. En la Subsección 3.3.2 encontramos nuevos ejemplos de clases de tipo C entre las clases de las Tablas 3.1 y 3.3.
- En la Sección 3.4 completamos la clasificación de las clases que aparecen en la Tabla 3.1 mostrando que las que no son de tipo C son kthulhu. Hacemos el mismo estudio para las clases torcidas de la Tabla 3.3.

3.3. Uso de los criterios de tipo F y C

Todos los resultados de esta sección tienen demostraciones que consisten en la aplicación de rutinas computacionales y por tal motivo no se incluyen.

3.3.1. Criterio de tipo F en clases de grupos simples esporádicos

Usando la Proposición 1.104 creamos una rutina en GAP cuya parte principal mostramos a continuación:

```

gap> O:=ConjugacyClass(G,r);
gap> for s in O do
> if r*s<>s*r then
>   for t in O do
>     if r*t<>t*r and s*t<>t*s then
>       for u in O do
>         if r*u<>u*r and s*u<>u*s and t*u<>u*t then
>           H:=Group(r,s,t,u);
>           if IsConjugate(H,r,s)=false and IsConjugate(H,r,t)=false and
>             IsConjugate(H,r,u)=false and IsConjugate(H,s,t)=false and
>             IsConjugate(H,s,u)=false and IsConjugate(H,t,u)=false
>           then
>             Print("r=",r,"\n","s=",s,"\n","t=",t,"\n","u=",u);
>             break;
>           fi;
>         fi;
>       od;
>     fi;
>   od;
> fi;
> od;

```

Con esta herramienta verificamos que se cumplen los dos siguientes resultados respecto a la clasificación de las clases de conjugación de tipo F en grupos simples esporádicos:

Teorema 3.7. *Los siguientes grupos esporádicos no tienen clases de conjugación de tipo F:*

- *Los grupos de Mathieu M_{11} , M_{12} , M_{22} , M_{23} , M_{24} .*
- *Los tres primeros grupos de Janko J_1 , J_2 , J_3 .*
- *El grupo de Higman-Sims HS .*

Teorema 3.8. *Sea G uno de los siguientes grupos simples esporádicos*

$$He, Co_3, McL, T.$$

Sea \mathcal{O} una clase de conjugación en G . Entonces, \mathcal{O} es de tipo F si y solo si se encuentra en la Tabla 3.5

Grupo G	Clases
He	4B, 4C, 8A, 10A
Co_3	9A, 9B, 24A*
McL	5B, 9A, 9B
T	4B

Tabla 3.5: Clases de tipo F en ciertos grupos esporádicos.

Observación 3.9. El grupo Co_3 tiene exactamente dos clases de elementos de orden 24. Una de ellas es de tipo F y la otra no pero con la información del ATLAS y las técnicas que hemos usado no hemos logrado identificarlas. Por esa razón hemos usado un asterisco para distinguirlas y hemos llamado 24A* a la clase de tipo F en Co_3 .

Observación 3.10. Todas estas clases de conjugación ya eran de tipo D pues no aparecen en la Tabla 3.1.

El Teorema 3.8 da una clasificación completa de las clases de tipo F en cuatro grupos simples esporádicos. Algunos resultados parciales se pueden dar para los grupos de Suzuki y Rudvalis:

Teorema 3.11. *Sea G uno de los dos grupos esporádicos Suz o Ru . En la Tabla 3.6 se muestran las clases de tipo F de G y aquellas que permanecen como casos abiertos. Además, las clases que no aparecen no son de tipo F.*

Grupo G	Clases de tipo F	Casos abiertos
Suz	4A, 4B, 4C	11A
Ru	4D, 8B, 8C, 16A, 16B	7A, 14A, 14B, 14C, 15A

Tabla 3.6: Grupos esporádicos con clases que no se sabe si son de tipo F

3.3.2. Clases de tipo C que no son de tipo D

Debido al gran tamaño de la mayoría de los grupos esporádicos resulta ineficiente aplicar el criterio de tipo C para clases de conjugación por medio de rutinas computacionales basadas en la Proposición 1.106. Esto sugiere la definición provisional de un criterio más restrictivo pero de más fácil aplicación:

Definición 3.12. Sea \mathcal{O} una clase de conjugación en un grupo finito G . Decimos que \mathcal{O} es de tipo C' si existen $r, s \in \mathcal{O}$ tales que

1. $rs \neq sr$,
2. $\mathcal{O}_r^{(r,s)} \neq \mathcal{O}_s^{(r,s)}$,
3. $\min\{|\mathcal{O}_r^{(r,s)}|, |\mathcal{O}_s^{(r,s)}|\} > 2$ o $\max\{|\mathcal{O}_r^{(r,s)}|, |\mathcal{O}_s^{(r,s)}|\} > 4$.

Proposición 3.13. Toda clase de tipo C' es de tipo C.

Demostración. Si \mathcal{O} es de tipo C' basta tomar $H = \langle r, s \rangle$ y este subgrupo, junto con los dos elementos r y s , satisfacen las condiciones del criterio de tipo C de la Proposición 1.106. \square

Se puede crear un rutina para verificar el criterio de tipo C' cuya parte principal es la siguiente:

```
gap> O:=ConjugacyClass(G,r);
gap> for s in O do
> if r*s<>s*r then
>   H:=Group(r,s);
>   if IsConjugate(H,r,s)=false then
>     m1:=Size(ConjugacyClass(H,r)); m2:=Size(ConjugacyClass(H,s));
>     if (m1>2 and m2>2) or (m1>4 or m2>4) then
>       Print("r=",r,"\n","s=",s);
>     fi;
>   fi;
> fi;
> od;
```

Teorema 3.14. Las clases de conjugación en la Tabla 3.7 son de tipo C.

Grupo	Clases	Grupo	Clases
T	2A	M_{11}	8A, 8B
Suz	3A	Co_1	3A
Co_2	2A	J_2	2A, 3A
J_3	5A, 5B	B	2A

Tabla 3.7: Clases de tipo C en la Tabla 3.1.

Demostración. El tratamiento de las clases 8A, 8B en M_{11} , 3A en Suz , 3A en J_2 y 5A, 5B en J_3 consiste en aplicar directamente la rutina computacional que establecimos antes del enunciado del teorema.

Las demás clases requieren argumentos más sofisticados usando la propiedad de conservación del tipo D, F y C de la Proposición 1.107.

Consideremos el grupo de Tits $T = 2F4(2)'$ en la notación de GAP. Vamos a probar que la clase $\mathcal{O} = 2B$ en el octavo subgrupo maximal $2F4(2)'M8$ es de tipo C. Como \mathcal{O} se inyecta en la clase 2A de T concluimos, por la Proposición 1.107, que 2A en T también es de tipo C.

El subgrupo maximal $K \cong (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \rtimes ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ de $2F4(2)'M8$ tiene dos clases de involuciones \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 con cardinales 25 y 10 respectivamente, que se inyectan en la clase 2B de $2F4(2)'M8$. Es fácil verificar que existen dos elementos $r \in \mathcal{O}_1$, $s \in \mathcal{O}_2$ que no conmutan tales que $\mathcal{O}_r^H = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_s^H = \mathcal{O}_2$, donde $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle \cong (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \rtimes \mathbb{D}_4$. Este subgrupo H y los elementos $r, s \in H$ cumplen las las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106, luego 2B en $2F4(2)'M8$ es de tipo C.

Debemos notar que en este caso el criterio de tipo C' de la Definición 3.12 no detecta si alguna de las clases en las subgrupos sucesivos es de tipo C.

Argumentos similares se usan en las cuatro clases de conjugación restantes que enunciamos de modo resumido a continuación:

La clase 3A de J_2 se inyecta en la clase con tamaño 560 de elementos de orden 3 en $\mathbb{A}_5 \times J_2$, esta se inyecta en la clase 3A de $(\mathbb{A}_5 \times J_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$ y esta a su vez se inyecta en la clase 3A de Co_1 . Como 3A en J_2 es de tipo C concluimos que 3A de Co_1 es de tipo C.

Para la clase 2A en Co_2 consideramos el octavo subgrupo maximal $Co2M8$ que tiene cuatro clases de conjugación de involuciones que se inyectan en la clase 2A de Co_2 , precisamente estas cuatro clases son 2A, 2C, 2J, 2P de $Co2M8$ cuyos tamaños son 5, 120, 96, 320, respectivamente.

Llamemos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 a las clases 2A y 2P de $Co2M8$. Luego, es fácil verificar que existen $r \in \mathcal{O}_1$ y $s \in \mathcal{O}_2$ tales que $rs \neq sr$ y que $\mathcal{O}_r^H = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_s^H = \mathcal{O}_2$, donde $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^8 \rtimes (\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{S}_5)$. Esto implica que la clase 2A de Co_2 verifica las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106.

Para 2A en J_2 tomamos las clases $\mathcal{O}_1 = 2A$ y $\mathcal{O}_2 = 2C$ en el cuarto subgrupo maximal $J2M4$ cuyos cardinales son 3 y 24, respectivamente. Entonces, se puede verificar que existen $r \in \mathcal{O}_1$, $s \in \mathcal{O}_2$ tales que $rs \neq sr$ y además $\mathcal{O}_r^H = \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_s^H = \mathcal{O}_2$, donde $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle \cong (((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$. Esto implica que la clase 2A de J_2 verifica las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106.

Ahora consideramos la clase 2A de \mathbb{B} . Tenemos que la clase 2B de $M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ se inyecta en la clase 2B del subgrupo maximal $BM18 \cong (\mathbb{A}_5 \rtimes \mathbb{Z}_2) \times (M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2)$ de

\mathbb{B} y esta a su vez se inyecta en la clase 2A de \mathbb{B} . Como 2B de $M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ es de tipo C por el Teorema 3.15 (que se prueba de forma independiente a continuación), entonces por la Proposición 1.107 podemos concluir que 2A de \mathbb{B} es una clase de tipo C. \square

Teorema 3.15. *Las clases de conjugación en la Tabla 3.8 son de tipo C.*

Grupo	Clases
$\text{Aut}(M_{22})$	2B
$\text{Aut}(HS)$	2C
$\text{Aut}(Fi_{22})$	2D

Tabla 3.8: Clases de tipo C en la Tabla 3.3.

Demostración. Para probar que la clase 2B de $\text{Aut}(M_{22}) \cong M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ es de tipo C consideramos las clases $\mathcal{O}_1 = 2C$ y $\mathcal{O}_2 = 2E$ del tercer subgrupo maximal M22:2M3 de $M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ cuyos cardinales son 30 y 60, respectivamente. Podemos verificar fácilmente que en $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle = M_{22} : 2M3 \cong \mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{S}_6$ existen $r \in \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_r^H$ y $s \in \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_s^H$ que satisfacen las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106. Luego, 2B de $M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ es de tipo C.

Veamos ahora lo que ocurre con la clase 2C de $\text{Aut}(HS) \cong HS \rtimes \mathbb{Z}_2$. El argumento es esencialmente el mismo que usamos en el caso anterior. Consideramos las clases $\mathcal{O}_1 = 2C$ y $\mathcal{O}_2 = 2G$ del séptimo subgrupo maximal HS : 2M7 cuyos cardinales son 20 y 40, respectivamente. Se verifica directamente que $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle = HS : 2M7 \cong \mathbb{Z}_2^{(1+6)} \rtimes \mathbb{S}_5$ y las clases \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 no conmutan. Luego existen $r \in \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_r^H$ y $s \in \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_s^H$ que satisfacen las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106. Por lo tanto, 2C de $HS \rtimes \mathbb{Z}_2$ es de tipo C.

Nos falta analizar el caso de la clase 2D en $\text{Aut}(Fi_{22}) \cong Fi_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$. En este caso tomamos las clases $\mathcal{O}_1 = 2B$ y $\mathcal{O}_2 = 2F$ del séptimo subgrupo maximal $Fi_{22} : 2M7$ cuyos cardinales son 540 y 126, respectivamente. Estas dos clases generan un subgrupo $H := \langle \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \rangle = HS : 2M7 \cong \text{PSU}(4, 3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. Además las clases no conmutan por lo que existen $r \in \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_r^H$ y $s \in \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_s^H$ que satisfacen las condiciones 1-4 de la Proposición 1.106. Por lo tanto, 2D de $Fi_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ es de tipo C. \square

3.4. Estudio de las clases kthulhu

3.4.1. El lema de Breuer

En esta primera subsección establecemos la estrategia general que vamos a usar para demostrar que la mayoría de las clases en la Tabla 3.1 son kthulhu.

Fijemos un grupo no abeliano G y una de sus clases de conjugación $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g$.

Lema de Breuer para el criterio de tipo D

Lema 3.16. *Supongamos que \mathcal{O} es de tipo D por r y s . Esto es, $r, s \in \mathcal{O}$ satisfacen*

1. $(rs)^2 \neq (sr)^2$,
2. r y s no son conjugados en $H = \langle r, s \rangle$.

Sea M un grupo intermedio $H \subset M \subseteq G$. Si $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M entonces $\mathcal{O} \cap M$ es de tipo D.

Demostración. Claramente $r, s \in \mathcal{O} \cap M$ satisfacen las condiciones del criterio de tipo D, en la Proposición 1.102, para $\mathcal{O} \cap M$. \square

Ahora presentamos una versión generalizada del lema de Breuer, que se encuentra en [FV, Lemma 2.4]. Denotamos

$$\mathfrak{M}_g = \{M : M \text{ es un subgrupo maximal de } G \text{ tal que } \mathcal{O} \cap M \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.17. [FV, Lemma 2.4] *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si \mathcal{O} es una clase de tipo D entonces existe $N \in \mathfrak{M}_g$ tal que $\mathcal{O} \cap N$ es de tipo D.*

Demostración. Escojamos $r, s \in \mathcal{O}$ tales que \mathcal{O} es de tipo D por r y s . Como r y s son conjugados en G pero no en $H = \langle r, s \rangle$ entonces $H \neq G$. Por lo tanto, existe un subgrupo maximal N de G tal que

$$H \subseteq N \subset G.$$

Es claro que $N \in \mathfrak{M}_g$ pues $r \in \mathcal{O} \cap N$. Además, $\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$ implica $H \neq N$, pues la hipótesis dice que $\mathcal{O} \cap N$ es una sola clase de conjugación en N . Luego, N es un subgrupo estrictamente intermedio

$$H \subset N \subset G.$$

Por el Lema 3.16 concluimos que $\mathcal{O} \cap N$ es de tipo D. \square

Reenunciamos el Lema 3.17 en forma de su contrarrecíproco que será la manera en que se usará.

Lema 3.18. *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ la clase $\mathcal{O} \cap M$ no es de tipo D, entonces \mathcal{O} no es de tipo D.*

Notar que el Lema 3.18 nos da una estrategia para probar que una clase \mathcal{O} no es de tipo D. Enunciaremos los resultados análogos para los criterios de tipo F y C.

Lema de Breuer para el criterio de tipo F

Lema 3.19. *Supongamos que \mathcal{O} es de tipo F por r_a , $a \in \mathbb{I}_4$. Esto es, los elementos $r_a \in \mathcal{O}$, con $a \in \mathbb{I}_4$, satisfacen, para $a \neq b$ en \mathbb{I}_4 ,*

1. $r_a r_b \neq r_b r_a$,
2. $\mathcal{O}_{r_a}^H \neq \mathcal{O}_{r_b}^H$, donde $H = \langle r_a : a \in \mathbb{I}_4 \rangle$.

Sea M un grupo intermedio $H \subset M \subseteq G$. Si $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M entonces $\mathcal{O} \cap M$ es de tipo F.

Demostración. Los elementos $r_a \in \mathcal{O} \cap M$, con $a \in \mathbb{I}_4$, satisfacen las condiciones del criterio de tipo F, en la Proposición 1.104, para $\mathcal{O} \cap M$. \square

Lema 3.20. *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si \mathcal{O} es una clase de tipo F entonces existe $N \in \mathfrak{M}_g$ tal que $\mathcal{O} \cap N$ es de tipo F.*

Demostración. (Cf. Lema 3.17). \square

Al igual que antes enunciamos la forma contrarrecíproca que usaremos:

Lema 3.21. *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ la clase $\mathcal{O} \cap M$ no es de tipo F, entonces \mathcal{O} no es de tipo F.*

Lema de Breuer para el criterio de tipo C

Lema 3.22. *Supongamos que \mathcal{O} es de tipo C por $r, s \in \mathcal{O}$ y $H < G$. Esto es, el subgrupo $H < G$ y los dos elementos $r, s \in H \cap \mathcal{O}$ satisfacen*

1. $rs \neq sr$,
2. $\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$,
3. $H = \langle \mathcal{O}_r^H, \mathcal{O}_s^H \rangle$,
4. $\min\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 2$ o $\max\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 4$.

Sea M un grupo intermedio $H \subset M \subseteq G$. Si $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M entonces $\mathcal{O} \cap M$ es de tipo C.

Demostración. Como $r, s \in H \cap \mathcal{O} = H \cap (\mathcal{O} \cap M)$ entonces r, s y H satisfacen las condiciones del criterio de tipo C, en la Proposición 1.106, para $\mathcal{O} \cap M$. \square

Lema 3.23. *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si \mathcal{O} es una clase de tipo C entonces existe $N \in \mathfrak{M}_g$ tal que $\mathcal{O} \cap N$ es de tipo C.*

Demostración. (Cf. Lema 3.17). \square

Lema 3.24. *Supongamos que para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ tenemos que $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M . Si para todo $M \in \mathfrak{M}_g$ la clase $\mathcal{O} \cap M$ no es de tipo C, entonces \mathcal{O} no es de tipo C.*

3.4.2. Método del descenso por subgrupos maximales

Los contrarrecíprocos de los lemas de Breuer, específicamente los Lemas 3.18, 3.21 y 3.24, permiten probar que una clase \mathcal{O} es kthulhu. Para ello necesitamos descender a los subgrupos maximales comprobando dos hechos:

- Para todo $M \in \mathfrak{M}_g$, $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación.
- Para todo $M \in \mathfrak{M}_g$, $\mathcal{O} \cap M$ no es de tipo D, F o C.

En general no bastará descender una sola vez a los subgrupos maximales lo que hace necesario reiterar el proceso, es decir, será necesario considerar subgrupos maximales de subgrupos maximales y así siguiendo. Todo esto con la ventaja computacional de que los subgrupos maximales M y las clases $\mathcal{O} \cap M$ son más pequeños que G y \mathcal{O} , respectivamente.

Estrategia general:

Para probar que una clase \mathcal{O} en un grupo G es kthulhu podemos proceder como sigue:

1. Hallar las cadenas de subgrupos maximales tales que $\mathcal{O} \cap M_k \neq \emptyset$

$$M_1 \subset \cdots \subset M_{j-1} \subset M_j = G$$

comprobando que cada clase $\mathcal{O} \cap M_{k-1}$ no se separa en M_k .

En la construcción de estas cadenas hay que tener presente que la cantidad de subgrupos maximales en \mathfrak{M}_g puede ser enorme pero muchos de ellos son isomorfos y por tanto tienen las mismas propiedades.

2. Probar que toda clase $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap M_1$ es kthulhu.

Haremos esto verificando que cualquier par de elementos $r, s \in \mathcal{O}'$ que no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ generan un grupo abeliano H lo que hace imposible que \mathcal{O}' sea de tipo D, F o C, pues estos criterios exigen una condición de no conmutatividad.

El lema principal que usamos en la mayoría de casos como herramienta para probar en el segundo paso que H es abeliano es el siguiente:

Lema 3.25. Sean n y m dos números naturales tales que n es primo y $m \mid n-1$. Sea $H := \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m$ un producto semidirecto. Si $x, y \in H$ tienen orden n entonces $\langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z}_n$.

Demostración. Como $m \mid n-1$ entonces existen morfismos de grupos no triviales $\mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{n-1} \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$, lo cual implica la existencia del producto semidirecto $H = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_m$.

Llamemos $x = (a, b) \in H$. Como x tiene orden n entonces $nb = 0$ en \mathbb{Z}_m y el orden de b en \mathbb{Z}_m debe dividir a n . Pero m divide a $n-1$ y por tanto m y n

son primos relativos. Luego $b = 0$. Así pues, $x = (a, 0)$ con a de orden n en \mathbb{Z}_n . El mismo argumento sirve para mostrar que $y = (c, 0)$ con c de orden n en \mathbb{Z}_n . Así,

$$\mathbb{Z}_n \cong \langle x \rangle \subseteq \langle x, y \rangle \subset \mathbb{Z}_n \times 0.$$

Concluimos que $\langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. □

3.4.3. Clases kthulhu en grupos simples esporádicos

Ahora estamos en condiciones de mostrar el resultado principal que muestra que la mayoría de las clases de conjugación en la Tabla 3.1 son kthulhu:

Teorema 3.26. *Las clases de conjugación en la Tabla 3.9 son kthulhu.*

Grupo	Clases	Grupo	Clases
M_{11}	11A, 11B	M_{12}	11A, 11B
M_{22}	11A, 11B	M_{23}	23A, 23B
M_{24}	23A, 23B	Ru	29A, 29B
HS	11A, 11B	McL	11A, 11B
Co_2	23A, 23B	Co_3	23A, 23B
J_1	15A, 15B, 19A, 19B, 19C	J_3	19A, 19B
J_4	29A, 43A, 43B, 43C	Ly	37A, 37B, 67A, 67B, 67C
ON	31A, 31B	Fi_{22}	2A, 22A, 22B
Fi_{23}	2A	Fi'_{24}	29A, 29B
\mathbb{B}	46A, 46B, 47A, 47B		

Tabla 3.9: Clases kthulhu en la Tabla 3.1.

Dividimos la demostración del Teorema 3.26 en varias proposiciones que enlistamos a continuación:

- 11A y 11B en M_{11} son kthulhu por la Proposición 3.28.
- 11A y 11B en M_{12} son kthulhu por la Proposición 3.30.
- 11A y 11B en M_{22} son kthulhu por la Proposición 3.32.
- 23A y 23B en M_{23} son kthulhu por la Proposición 3.34.
- 23A y 23B en M_{24} son kthulhu por la Proposición 3.36.
- 29A y 29B en Ru son kthulhu por la Proposición 3.38.
- 11A y 11B en HS son kthulhu por la Proposición 3.40.
- 11A y 11B en McL son kthulhu por la Proposición 3.42.
- 23A y 23B en Co_2 son kthulhu por la Proposición 3.44.
- 23A y 23B en Co_3 son kthulhu por la Proposición 3.46.

- 15A y 15B en J_1 son kthulhu por la Proposición 3.48.
- 19A, 19B y 19C en J_1 son kthulhu por la Proposición 3.50.
- 19A y 19B en J_3 son kthulhu por la Proposición 3.52.
- 29A en J_4 es kthulhu por la Proposición 3.54.
- 43A, 43B y 43C en J_4 son kthulhu por la Proposición 3.56.
- 37A y 37B en Ly son kthulhu por la Proposición 3.58.
- 67A, 67B y 67C en Ly son kthulhu por la Proposición 3.60.
- 31A y 31B en $O'N$ son kthulhu por la Proposición 3.62.
- 2A en Fi_{22} es kthulhu por la Proposición 3.63.
- 22A y 22B en Fi_{22} son kthulhu por la Proposición 3.66.
- 2A en Fi_{23} es kthulhu por la Proposición 3.67.
- 29A y 29B en Fi'_{24} son kthulhu por la Proposición 3.69.
- 46A y 46B en \mathbb{B} son kthulhu por la Proposición 3.71.
- 47A y 47B en \mathbb{B} son kthulhu por la Proposición 3.73.

El grupo M_{11}

Lema 3.27. Sean $x, y \in M_{11}$ dos elementos de orden 11 conjugados en M_{11} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. La prueba está implícita en [FV, Lemma 4.5]. Las cadenas de subgrupos maximales construidas con el proceso de descenso están conformadas siempre por los mismos grupos

$$\langle x, y \rangle = H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M_{11}.$$

Por el Lema 3.25 tenemos $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Proposición 3.28. Las clases 11A y 11B en M_{11} son kthulhu.

Demostración. Si alguna clase $\mathcal{O} \in \{11A, 11B\}$ no fuera kthulhu entonces existirían dos elementos $r, s \in \mathcal{O}$ que no son conjugados en $\langle r, s \rangle$ y además no conmutan o no conmutan cuadráticamente. Esto es imposible porque $\langle r, s \rangle$ es abeliano ya que $\langle r, s \rangle \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

El grupo M_{12}

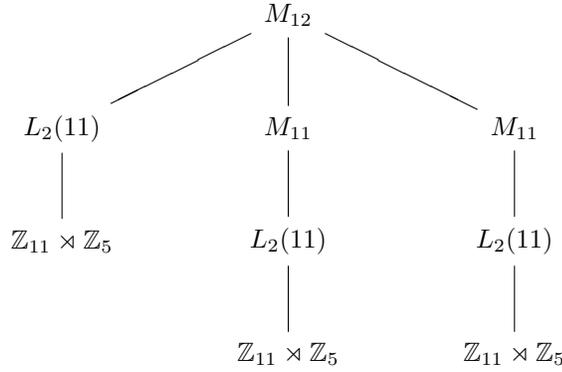
Lema 3.29. Sean $x, y \in M_{12}$ dos elementos de orden 11 conjugados en M_{12} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos dan dos cadenas

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M_{12}$$

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M_{11} \subset M_{12}.$$

Diagramaticamente podemos ver el proceso así:



No es posible descender un paso más porque el siguiente subgrupo maximal es \mathbb{Z}_{11} que es abeliano y allí las clases se parten. Esto termina el proceso y en este punto usamos el Lema 3.25. Por lo tanto, tenemos que en cualquier caso, $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Proposición 3.30. Las clases 11A y 11B en M_{12} son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo M_{22}

Lema 3.31. Sean $x, y \in M_{22}$ dos elementos de orden 11 conjugados en M_{22} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M_{22}$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Proposición 3.32. Las clases 11A y 11B en M_{22} son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo M_{23}

Lema 3.33. Sean $x, y \in M_{23}$ dos elementos de orden 23 conjugados en M_{23} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{23}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{23} \rtimes \mathbb{Z}_{11} \subset M_{23}$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{23}$. □

Proposición 3.34. Las clases 23A y 23B en M_{23} son kthulhu.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo M_{24}

Lema 3.35. Sean $x, y \in M_{24}$ dos elementos de orden 23 conjugados en M_{24} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{23}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos dan la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{23} \rtimes \mathbb{Z}_{11} \subset M \subset M_{24}$$

donde $M \cong M_{23}$ ó $M \cong L_2(23)$. En cualquier caso, $H \cong \mathbb{Z}_{23}$. □

Proposición 3.36. Las clases 23A y 23B en M_{24} son kthulhu.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo Ru

Lema 3.37. Sean $x, y \in Ru$ dos elementos de orden 29 conjugados en Ru . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{29}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{29} \rtimes \mathbb{Z}_{14} \subset L_2(29) \subset Ru$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{29}$. □

Proposición 3.38. Las clases 29A y 29B en Ru son kthulhu.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo HS

Lema 3.39. Sean $x, y \in HS$ dos elementos de orden 11 conjugados en HS . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M \subset HS$$

donde $M \cong M_{11}$ ó $M \cong M_{22}$. Por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Proposición 3.40. Las clases 11A y 11B en HS son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo McL

Lema 3.41. Sean $x, y \in McL$ dos elementos de orden 11 conjugados en McL . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M \subset McL$$

donde $M \cong M_{11}$ ó $M \cong M_{22}$. Por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Proposición 3.42. Las clases 11A y 11B en McL son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo Co_2

Lema 3.43. [FV, Lemma 4.7] Sean $x, y \in Co_2$ dos elementos de orden 23 conjugados en Co_2 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{23}$.

Demostración. Los elementos de orden 23 en Co_2 están en el subgrupo maximal M_{23} . La afirmación se sigue del Lema 3.33. □

Proposición 3.44. Las clases 23A y 23B en Co_2 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo Co_3

Lema 3.45. [FV, Proposition 4.2 (3)] Sean $x, y \in Co_3$ dos elementos de orden 23 conjugados en Co_3 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{23}$.

Demostración. Los elementos de orden 23 en Co_3 están en el subgrupo maximal M_{23} . La afirmación se sigue del Lema 3.33. □

Proposición 3.46. Las clases 23A y 23B en Co_3 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo J_1

Lema 3.47. Sean $x, y \in J_1$ dos elementos de orden 15 conjugados en J_1 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces H es abeliano.

Demostración. La construcción de la cadena de subgrupos maximales es muy particular en este caso pues tenemos

$$M \subset \mathbb{D}_3 \times \mathbb{D}_5 \subset J_1$$

donde M es uno de los grupos $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{D}_5$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{D}_3$ o \mathbb{D}_{15} . Se puede comprobar que los subgrupos de M generados por elementos de orden 15 son siempre abelianos. \square

Proposición 3.48. Las clases 15A y 15B en J_1 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). \square

Lema 3.49. Sean $x, y \in J_1$ dos elementos de orden 19 conjugados en J_1 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{29}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{19} \rtimes \mathbb{Z}_9 \subset J_1$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{19}$. \square

Proposición 3.50. Las clases 19A, 19B y 19C en J_1 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). \square

El grupo J_3

Lema 3.51. Sean $x, y \in J_3$ dos elementos de orden 19 conjugados en J_3 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{19}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{19} \rtimes \mathbb{Z}_9 \subset L_2(19) \subset J_3$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{19}$. \square

Proposición 3.52. Las clases 19A y 19B en J_3 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). \square

El grupo J_4

Lema 3.53. Sean $x, y \in J_4$ dos elementos de orden 29 conjugados en J_4 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{29}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{29} \rtimes \mathbb{Z}_{28} \subset J_4$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{29}$. □

Proposición 3.54. La clase 29A en J_4 es *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

Lema 3.55. Sean $x, y \in J_4$ dos elementos de orden 43 conjugados en J_4 . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{43}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{43} \rtimes \mathbb{Z}_{14} \subset J_4$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{43}$. □

Proposición 3.56. Las clases 43A, 43B y 43C en J_4 son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo Ly

Lema 3.57. Sean $x, y \in Ly$ dos elementos de orden 37 conjugados en Ly . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{37}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{37} \rtimes \mathbb{Z}_{18} \subset Ly$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{37}$. □

Proposición 3.58. Las clases 37A y 37B en Ly son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

Lema 3.59. Sean $x, y \in Ly$ dos elementos de orden 67 conjugados en Ly . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{67}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{67} \rtimes \mathbb{Z}_{22} \subset Ly$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{67}$. □

Proposición 3.60. Las clases 67A, 67B y 67C en Ly son *kthulhu*.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo $O'N$

Lema 3.61. Sean $x, y \in O'N$ dos elementos de orden 31 conjugados en $O'N$. Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{31}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{31} \rtimes \mathbb{Z}_{15} \subset L_2(31) \subset O'N$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{31}$. □

Proposición 3.62. Las clases 31A y 31B en $O'N$ son kthulhu.

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). □

El grupo Fi_{22}

La clase 2A en Fi_{22} se trata de manera computacional sin necesidad del usar descenso por subgrupos maximales.

Proposición 3.63. La clase 2A en Fi_{22} es kthulhu.

Demostración. Esta clase tiene 3510 elementos. Si tomamos un elemento fijo $r \in 2A$ podemos verificar que para todo $s \in 2A$, tal que $rs \neq sr$, se tiene que r y s son conjugados en $\langle r, s \rangle$. Esto implica que no pueden existir dos elementos r y s que cumplan la definición de pecio de tipo C. Por razones análogas esta clase tampoco es de tipo F. Luego, la clase es kthulhu. □

Las clases 22A y 22B del grupo Fi_{22} también presentan una particularidad que consiste en que debemos cocientar primero para poder usar la misma técnica de descenso por subgrupos maximales, por lo demás el argumento es el mismo.

Lema 3.64. [FV, Lemma 4.5] Sean $x, y \in U_6(2)$ dos elementos de orden 11 conjugados en $U_6(2)$. Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{11}$.

Demostración. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M \subset U_6(2)$$

donde $M \cong U_5(2)$ ó $M \cong M_{22}$. Esto solo deja la posibilidad $H \cong \mathbb{Z}_{11}$. □

Lema 3.65 (Breuer). [FV, Proposition 4.4] Sea $\mathcal{O} \in \{22A, 22B\}$ en Fi_{22} . Si $r, s \in \mathcal{O}$ no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ entonces H es abeliano.

Demostración. El único subgrupo maximal de Fi_{22} que contiene elementos de orden 22 es $M := Fi_{22}M1 \cong 2.U_6(2)$. Además, la intersección $\mathcal{O} \cap M$ es una sola clase de conjugación en M , luego r y s son conjugados en M y por ende en $M/Z(M)$.

El centro de M es \mathbb{Z}_2 . Llamemos z al generador de $Z(M)$. Usando la función `PowerMap` en GAP se puede probar que $r^{11} = s^{11} = z$. Lo cual implica que $Z(M) \subset H$ y que $x := [r]$ e $y := [s]$ tienen orden 11 en

$$H/Z(M) = \langle [r], [s] \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Notemos que H es un subgrupo de M por lo cual

$$H/Z(M) < M/Z(M) \cong U_6(2).$$

Veamos que x e y no son conjugados en $\langle x, y \rangle$: Si existiera $[t] \in H/Z(M)$ tal que $[t][r][t^{-1}] = [s]$ entonces $trt^{-1} \in [s] = \{s, sz\}$. Por un lado $\text{ord}(trt^{-1}) = 22$. Y por otro lado $(sz)^{11} = s^{11}z^{11} = z^2 = e$, luego $\text{ord}(sz) = 11$. Por lo tanto, $trt^{-1} \neq sz$ y concluimos $trt^{-1} = s$. Lo cual es una contradicción porque r y s no son conjugados en H .

Hemos probado que x e y no son conjugados en $H/Z(M) = \langle x, y \rangle$. Pero sabemos que x e y son conjugados en $M/Z(M) \cong U_6(2)$. Por el Lema 3.64 tenemos que

$$H/Z(M) = \langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z}_{11}.$$

Luego H tiene orden 22 y es cíclico porque contiene a r y s que son elementos de orden 22. Concluimos que H es abeliano. \square

Proposición 3.66. *Las clases 22A y 22B en Fi_{22} son kthulhu.*

Demostración. Si alguna clase $\mathcal{O} \in \{22A, 22B\}$ no fuera kthulhu entonces existirían dos elementos $r, s \in \mathcal{O}$ que no son conjugados en $\langle r, s \rangle$ y además no conmutan o no conmutan cuadráticamente. Esto es imposible porque $\langle r, s \rangle$ es abeliano. \square

El grupo Fi_{23}

Proposición 3.67. *La clase 2A en Fi_{23} es kthulhu.*

Demostración. La prueba es igual a la de la Proposición 3.63. Esta clase tiene 31671 elementos. Tomamos un elemento fijo $r \in 2A$ y verificamos que para todo $s \in 2A$, tal que $rs \neq sr$, se tiene que r y s son conjugados en $\langle r, s \rangle$. Esto implica que no pueden existir dos elementos r y s que cumplan la definición de pecio de tipo C. Por razones análogas esta clase tampoco es de tipo F. Luego, la clase es kthulhu. \square

El grupo Fi'_{24}

Lema 3.68. *Sean $x, y \in Fi'_{24}$ dos elementos de orden 29 conjugados en Fi'_{24} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{29}$.*

Demostración. La prueba está implícita en [FV, Proposition 4.10].

El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{29} \rtimes \mathbb{Z}_{14} \subset Fi'_{24}$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{29}$. \square

Proposición 3.69. *Las clases 29A y 29B en Fi'_{24} son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). \square

El grupo \mathbb{B}

En este caso ocurre lo mismo que con las clases de elementos de orden 22 en Fi_{22} .

Lema 3.70. [FV, Proposition 4.12, STEP 2.] *Sea $\mathcal{O} \in \{46A, 46B\}$ en \mathbb{B} . Si $r, s \in \mathcal{O}$ no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ entonces H es abeliano.*

Demostración. Podemos proceder de manera análoga a la demostración del Lema 3.65 pero usando el Lema 3.43 en el lugar del Lema 3.64. \square

Proposición 3.71. *Las clases 46A y 46B en \mathbb{B} son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.66). \square

Lema 3.72. *Sean $x, y \in \mathbb{B}$ dos elementos de orden 47 conjugados en \mathbb{B} . Si x e y no son conjugados en el subgrupo $H := \langle x, y \rangle$ entonces $H \cong \mathbb{Z}_{47}$.*

Demostración. La prueba está implícita en [FV, Proposition 4.12, STEP 3.]. El proceso de descenso a subgrupos maximales nos da la cadena

$$H \subset \mathbb{Z}_{47} \rtimes \mathbb{Z}_{23} \subset \mathbb{B}$$

por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_{47}$. \square

Proposición 3.73. *Las clases 47A y 47B en \mathbb{B} son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.28). \square

3.4.4. Clases torcidas kthulhu en grupos esporádicos

Teorema 3.74. *Las clases de conjugación torcidas en la Tabla 3.10 son kthulhu.*

Grupo	Clases
$\text{Aut}(J_3)$	34A, 34B
$\text{Aut}(O'N)$	38A, 38B, 38C
$\text{Aut}(McL)$	22A, 22B

Tabla 3.10: Clases torcidas kthulhu en la Tabla 3.3.

Separamos la prueba del Teorema 3.74 en tres proposiciones:

- 34A y 34B en $\text{Aut}(J_3)$ son kthulhu por la Proposición 3.76.
- 38A, 38B y 38C en $\text{Aut}(O'N)$ son kthulhu por la Proposición 3.78.
- 22A y 22B en $\text{Aut}(McL)$ son kthulhu por la Proposición 3.80.

El grupo $\text{Aut}(J_3)$

Lema 3.75. *Sea $\mathcal{O} \in \{34A, 34B\}$ en $\text{Aut}(J_3)$. Si $r, s \in \mathcal{O}$ no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ entonces H es abeliano.*

Demostración. $L_2(17) \times \mathbb{Z}_2$ es el único subgrupo maximal con elementos de orden 34 y sus clases no se separan. Su centro es \mathbb{Z}_2 . Cocientando por el centro debemos trabajar con elementos de orden 17 en $L_2(17)$ para el que tenemos la cadena de maximales

$$\mathbb{Z}_{17} \rtimes \mathbb{Z}_8 \subset L_2(17).$$

La parte final del argumento es el mismo que en los Lemas 3.64 y 3.65. □

Proposición 3.76. *Las clases 34A y 34B en $\text{Aut}(J_3)$ son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.66). □

El grupo $\text{Aut}(O'N)$

Lema 3.77. *Sea $\mathcal{O} \in \{38A, 38B, 38C\}$ en $\text{Aut}(O'N)$. Si $r, s \in \mathcal{O}$ no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ entonces H es abeliano.*

Demostración. $J_1 \times \mathbb{Z}_2$ es el único subgrupo maximal con elementos de orden 38. Su centro es \mathbb{Z}_2 . Nuevamente ocurre que las clases no se separan. Cocientando por el centro debemos trabajar con elementos de orden 19 en J_1 para el que tenemos la cadena de maximales

$$\mathbb{Z}_{19} \rtimes \mathbb{Z}_9 \subset J_1.$$

En este punto basta usar el argumento de los Lemas 3.64 y 3.65. □

Proposición 3.78. *Las clases 38A, 38B y 38C en $\text{Aut}(O'N)$ son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.66). □

El grupo $\text{Aut}(McL)$

Lema 3.79. *Sea $\mathcal{O} \in \{22A, 22B\}$ en $\text{Aut}(McL)$. Si $r, s \in \mathcal{O}$ no son conjugados en $H := \langle r, s \rangle$ entonces H es abeliano.*

Demostración. $\mathbb{Z}_2 \times M_{11}$ es el único subgrupo maximal con elementos de orden 22. Su centro es \mathbb{Z}_2 . Las clases no se separan. Cocientando por el centro debemos trabajar con elementos de orden 11 en M_{11} para el que tenemos la cadena de maximales

$$\mathbb{Z}_{11} \rtimes \mathbb{Z}_5 \subset L_2(11) \subset M_{11}.$$

La parte final del argumento es el mismo que en los Lemas 3.64 y 3.65. □

Proposición 3.80. *Las clases 22A y 22B en $\text{Aut}(McL)$ son kthulhu.*

Demostración. (Cf. Proposición 3.66). □

Bibliografía

- [ACGa1] N. ANDRUSKIEWITSCH, G. CARNOVALE and G. A. GARCÍA, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type I. Non-semisimple classes in $PSL_n(q)$* , J. Algebra **442** (2015), 36–65.
- [ACGa2] –, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type II. Unipotent classes in symplectic groups*, Commun. Contemp. Math. **18** (2016), 1550053 [35 pages].
- [ACGa3] –, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type III. Semisimple classes in $PSL_n(q)$* , Rev. Mat. Iberoam. **33** 3 (2017), 995–1024.
- [ACGa4] –, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type IV. Unipotent classes in Chevalley and Steinberg groups*, Algebr. Represent. Theory **23** (2020), 621–655.
- [ACGa5] –, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type V. Mixed classes in Chevalley and Steinberg groups*, Manuscripta Math., to appear. Online version, free access.
- [AF1] N. ANDRUSKIEWITSCH and F. FANTINO, *On pointed Hopf algebras associated with unmixed conjugacy classes in \mathbb{S}_m* , J. Math. Phys. **48** (2007), 033502-1 – 033502-26.
- [AF2] –, *On pointed Hopf algebras associated with alternating and dihedral groups*, Rev. Unión Mat. Argent. **48** 3 (2007), 57–71.
- [AFGaV1] N. ANDRUSKIEWITSCH, F. FANTINO, G. A. GARCÍA and L. VENDRAMIN, *On Nichols algebras associated to simple racks*, Contemp. Math. **537** (2011), 31–56.
- [AFGaV2] –, *On twisted homogeneous racks of type D*, Rev. Un. Mat. Argentina **51** 2 (2010), 1–16.
- [AFGV1] N. ANDRUSKIEWITSCH, F. FANTINO, M. GRAÑA and L. VENDRAMIN, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial*, Ann. Mat. Pura Appl. **190** 2 (2011), 225–245.

- [AFGV2] –, *Pointed Hopf algebras over the sporadic simple groups*, J. Algebra **325** 1 (2011), 305–320.
- [AG1] N. ANDRUSKIEWITSCH and M. GRAÑA, *Braided Hopf algebras over non abelian finite groups*, Bol. Acad. Nacional de Ciencias (Córdoba) **63** (1999), 45–78.
- [AG2] –, *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. Math. **178** (2003), 177–243.
- [AHS] N. ANDRUSKIEWITSCH, I. HECKENBERGER and H.-J. SCHNEIDER, *The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module*, Amer. J. Math. **132** 6 (2010), 1493–1547.
- [An1] I. ANGINO, *On Nichols algebras of diagonal type*, J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 189–251.
- [An2] –, *A presentation by generators a relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on roots systems*, J. Europ. Math. Soc. **17** (2015), 2643–2671.
- [AS1] N. ANDRUSKIEWITSCH and H.-J. SCHNEIDER, *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154** (2000), 1–45.
- [AS2] –, *Pointed Hopf Algebras in New directions in Hopf algebras*, MSRI series Cambridge Univ. Press **43** (2002), 1-68.
- [AS3] –, *Finite quantum groups over abelian groups of prime exponent*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **35** (2002), 1–26.
- [AS4] –, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math. **171** 1 (2010), 375–417.
- [AZ] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. ZHANG, *On pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in S_n* , Proc. Amer. Math. Soc. **135** 9 (2007), 2723–2731 (electronic).
- [BF1] S. BELTRÁN and F. FANTINO, *On Nichols algebras over dihedral groups \mathbb{D}_m with $m = 4t$* , To be submitted.
- [BF2] S. BELTRÁN and F. FANTINO, *Kthulhu classes in sporadic simple groups*, To be submitted.
- [F1] F. FANTINO, *On pointed Hopf algebras associated with the Mathieu simple groups*, J. Algebra Appl. **8** 5 (2009), 633–672.
- [F2] –, *Conjugacy classes of p -cycles of type D in alternating groups*, Comm. Algebra, **42** 10 (2014), 4426–4434.
- [FG] F. FANTINO and G. GARCÍA, *On pointed Hopf algebras over dihedral group*, Pacific J. Math. **252** 1 (2011), 69–91.

- [FV] F. FANTINO and L. VENDRAMIN, *On twisted conjugacy classes of type D in sporadic simple groups*, Contemp. Math. **585** (2013), 247–259.
- [FK] S. FOMIN and N. KIRILLOV, *Quadratic algebras, Dunkl elements and Schubert calculus*, Progress in mathematics **172** (1999), 146–182.
- [FrGV1] S. FREYRE, M. GRAÑA and L. VENDRAMIN, *On Nichols algebras over $SL_2(q)$ and $GL_2(q)$* , J. Math. Phys. **48** (2007), 123513.
- [FrGV2] –, *On Nichols algebras over $PGL_2(q)$ and $PSL_2(q)$* J. Algebra Appl. **9** (2010), 195–208.
- [GG] G. GARCÍA and A. GARCÍA IGLESIAS, *Finite dimensional pointed Hopf algebras over S_4* , Israel J. Math. **183** (2011), 417–444.
- [G1] M. GRAÑA, *On Nichols algebras of low dimension* in New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math. **267** (2000), 111–136.
- [G2] –, *Pointed Hopf algebras of dimension 32*, Comm. Algebra **28** 6 (2000), 2935–2976.
- [G3] –, *A freeness theorem for Nichols algebras*, J. Algebra **231** (2000), 235–257.
- [H1] I. HECKENBERGER, *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164** (2006), 175–188.
- [H2] –, *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009), 59–124.
- [HS1] I. HECKENBERGER and H.-J. SCHNEIDER, *Root systems and Weyl groupoids for Nichols algebras*, Proc. Lond. Math. Soc. **101** 3 (2010), 623–654.
- [HS2] –, *Nichols algebras over groups with finite root system of rank two I*, J. Algebra **324** (2010), 3090–3114.
- [HV1] I. HECKENBERGER and L. VENDRAMIN, *Nichols algebras over groups with finite root system of rank two II*, J. Group Theory **17** (2014), 1009–1034.
- [HV2] –, *Nichols algebras over groups with finite root system of rank two III*, J. Algebra **422** (2015), 223–256.
- [HV3] –, *The classification of Nichols algebras over groups with finite root system of rank two*, J. Eur. Math. Soc. **19** (2017), 1977–2017.
- [HV4] –, *A classification of Nichols algebras of semisimple Yetter-Drinfeld modules over non abelian groups*, J. Eur. Math. Soc. **19** (2017), 299–356.

- [J] D. JOYCE, *Simple quandles*, J. Algebra **79** 2 (1982), 307–318.
- [KT] C. KASSEL and V. TURAEV, *Braid groups*, Graduate texts in mathematics **247**, Springer, 2008.
- [MS] A. MILINSKI and H.-J. SCHNEIDER, *Pointed Indecomposable Hopf Algebras over Coxeter Groups*, Contemp. Math. **267** (2000), 215–236.
- [Ra] D. RADFORD, *Hopf algebras*, Series on knots an everything **49**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012.
- [WWT+] R. A. WILSON, P. WALSH, J. TRIPP, I. SULEIMAN, R. PARKER, S. NORTON, S. NICKERSON, S. LINTON, J. BRAY and R. ABBOTT. *A world-wide-web Atlas of finite group representations*, <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>.

Índice alfabético

- álgebra, 2
 - cociente, 3
 - conmutativa, 2
 - de Taft, 13
 - exterior, 20
 - graduada, 19
 - graduada corradical, 21
 - ideal de un, 3
 - simétrica, 19
 - tensorial, 2
- álgebra de Fomín-Kirillov, 41, 85
- álgebra de Hopf, 10
 - cociente, 11
 - dual, 12
 - ideal de un, 11
 - tensorial, 10
- álgebra de Nichols, 18
 - $\mathcal{B}(\mathcal{O}, \rho)$, 23
- antípoda, 10
- biálgebra, 8
 - biideal de una, 9
 - cociente, 9
 - coconmutativa, 8
 - conmutativa, 8
 - tensorial, 9
 - trenzada, 17
 - trenzada, 16
 - graduada, 20
- bimódulo, 9
 - cociente, 10
- bosonización, 22
- categoría
 - ${}^G_G\mathcal{YD}$, 17
 - ${}^H_H\mathcal{YD}$, 16
 - monoidal, 14
 - tensorial, 14
 - trenzada, 15
- coálgebra, 5
 - cociente, 7
 - coconmutativa, 5
 - coideal de una, 6
 - irreducible, 20
 - punteada, 20
 - tensorial, 5
- coacción, 7
- cociclo, 32
- coinvariante, 11
- colapso
 - de clases de conjugación, 23
 - de pecios, 33
- comódulo, 7
 - cociente, 8
- comultiplicación, 5
- conjunto cruzado, 31
- corradical, 20
- counidad, 5
- diagrama de Dynkin
 - de un espacio diagonal, 25
- elemento
 - de tipo grupo, 13
 - primitivo, 13
 - unidad, 2
- espacio vectorial
 - trenzado, 18

- de tipo Cartan, 25
 - de tipo diagonal, 18
- esqueleto, 29
- grupos de trenzas, 18
- método del levante, 21
- módulo, 4
 - cociente, 4
 - de Hopf, 11
 - de Yetter-Drinfeld, 16
 - irreducible (\mathcal{O}, ρ) , 23
 - sobre un grupo, 17
 - soporte, 17
- matriz de Cartan, 29
- matriz generalizada de Cartan
 - MGC, 25
- Matsumoto, 19
- morfismo de
 - álgebras, 3
 - álgebras de Hopf, 10
 - biálgebras, 9
 - bimódulos, 9
 - coálgebras, 6
 - comódulos, 7
 - módulos, 4
 - módulos de Hopf, 11
 - módulos de Yetter-Drinfeld, 16
 - pecios, 31
- pecio, 31
 - abeliano, 31
 - de tipo C, 35
 - de tipo C', 98
 - de tipo D, 35
 - de tipo F, 35
 - indescomponible, 32
 - kthulhu, 36
 - simple, 34
 - sobrio, 32
- producto tensorial de
 - módulos de Yetter-Drinfeld, 16
- quandle, 31
- rango, 57
- simetrizador cuántico, 19
- subálgebra, 3
 - de Hopf, 11
- subbiálgebra, 9
- subbimódulo, 10
- subcoálgebra, 6
- subcomódulo, 8
- submódulo, 4
 - de Yetter-Drinfeld, 16
- subpecio, 31
- Sweedler
 - notación de, 5
- Teorema fundamental de
 - las coálgebras, 7
 - los módulos de Hopf, 12
- trenza, 15
 - ecuación de, 18
 - indescomponible, 29