Universidad Nacional de Córdoba

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, FAMAF

SUBVARIEDADES REFLECTIVAS E ÍNDICE DE ESPACIOS SIMÉTRICOS

Tesis para optar al grado de doctor en matemática

Autor: Juan Sebastian Rodríguez Carreño

Director: Carlos Enrique Olmos
Codirector: Jürgen Berndt

2020

Resumen

El índice $i(M)$ de una variedad Riemanniana M fue introducido por Onishchik [23] y se define como el menor entero n tal que existe una subvariedad totalmente geodésica propia de M con codimensión n. De manera análoga, en [2] C.Olmos y J. Berndt definen el índice reflectivo $i_r(M)$ de un espacio simétrico M como el menor entero n tal que existe una subvariedad reflectiva propia de M con codimensión n. En este mismo trabajo, Olmos y Berndt conjeturan que $i(M) = i_r(M)$ para todo espacio simétrico tal que $M \neq G_2^2/SO_4$ y $M \neq G_2/SO_4$. En esta tesis damos una respuesta afirmativa de la conjetura para la familia Sp_r/U_r $(r \geq 3)$ y para los espacios simétricos excepcionales de tipo I y III.

Nuestra metodología se basa en el estudio de la representación slice de subvariedades totalmente geodésicas. Esta herramienta nos permite desarrollar algunos criterios para decidir cuando una subvariedad totalmente geodésica es reflectiva.

Abstract

The index $i(M)$ of a Riemannian manifold M was introduced by Onishchik [23] and is defined as the least integer n such that there exists a proper totally geodesic submanifold of M with codimension n. Analogously, in [2] C. Olmos and J. Berndt define the reflective index $i_r(M)$ as the least integer n such that there exists a proper reflective submanifold of M with codimension n. In this paper, Olmos and Berndt conjecture that $i(M) = i_r(M)$ for every irreducible symmetric space such that $M \neq G_2^2/SO_4$ and $M \neq G_2/SO_4$.

In this thesis we give an afirmative answer of the conjecture for the family Sp_r/U_r $(r \geq 3)$ and for the exceptional symmetric spaces of type I and III.

Our methodology is based on the study of the slice representation of totally geodesic submanifolds. This tool allows us to prove some criteria to decide when a totally geodesic submanifold is reflective. The results obtained in this thesis are an essential step for solving the index conjecture.

Agradecimientos

Durante los últimos años muchas personas me apoyaron e hicieron posible la culminación de mi doctorado.

En primer lugar, quiero agradecer a mi director Carlos Olmos por su paciencia y dedicación durante mis años de doctorado. Gracias a Carlos crecí mucho como matemático y como persona. También agradezco a mi codirector Jürgen Berndt por el tiempo que dedicó para construir esta tesis y todo el apoyo que me brindó.

No podría dejar de agradecer a la FaMAF por permitirme ser parte de esta prestigiosa institución. También le doy gracias al CONICET por el apoyo económico y por el enorme papel que cumple en el desarrollo científico del país. Un especial agradecimiento a los jurados, Edison, Jesús y Silvio, por tomarse el tiempo de leer esta tesis y por sus valiosos comentarios.

Finalmente, agradezco a mi familia por el apoyo y el amor incondicional que me brindan en todo momento. En especial a mis padres y a mi hermano. También a Bruna Cussiol, quien me acompaño en los últimos años del doctorado.

Índice general

Introducción

Los espacios simétricos son de las variedades Riemannianas más importantes y han sido estudiados por muchos matemáticos. Su riqueza algebraica permitió a Cartan dar una clasificación completa en la década de los 20's. Las subvariedades totalmente geodésicas resultan ser fundamentales en el estudio de subvariedades. Algebraicamente, subvariedades totalmente geodésicas de espacios simétricos corresponden a sistemas triples de Lie. Resulta sorprendente que la clasificación de subvariedades totalmente geodésicas en espacios simétricos es un problema que permanece abierto. Sin embargo, algunos avances se han hecho en este problema. En [24] Wolf clasifica las subvariedades totalmente geodésicas de espacios simétricos de rango 1. En una serie de trabajos S. Klein clasifica las subvariedades totalmente geodésicas de espacios simétrico de rango 2 (ver [13],[14],[15],[16]).

Por otro lado, en [23] Onishchik introduce el índice para espacios simétricos definido como

$$i(M) = \{\mathrm{codim}(\Sigma) \mid \Sigma \text{ es subvariedad totalmente geodésica de} M\}.$$

Una clase importante de subvariedades totalmente geodésicas son aquellas que se obtienen como una componente conexa del conjunto de puntos fijos de una involución. Dichas subvariedades se llaman subvariedades reflectivas. Algebraicamente, subvariedades reflectivas corresponden a sistemas triples de Lie complementarios. En [19] y [20] Leung clasifica las subvariedades reflectivas de espacios simétricos. En [2] Berndt y Olmos introducen y calculan el índice reflectivo de espacios simétricos definido por

$$i_r(M) = \{\mathrm{codim}(\Sigma) \mid \Sigma \text{ es subvariedad reflectiva de} M\}.$$

En este mismo trabajo Olmos y Berndt introducen la conjetura del índice y prueban su validez para algunos espacios simétricos.

Conjetura. *Para todo espacio simétrico irreducible y simplemente conexo M diferente de G_2/SO_4 y G_2^2/SO_4, se tiene que $i(M) = i_r(M)$.*

Una de las herramientas fundamentales que utilizan Berndt y Olmos es el estudio de subvariedades totalmente geodésicas mediante la representación slice y s-órbitas. Esta tesis representa una continuación de [2, 4] y contiene los resultados obtenidos en un trabajo a ser publicado en la *Revista Matemática Iberoamericana* en el presente año y disponible en arXiv [6]. Uno de los objetivos de este trabajo es probar la conjetura del índice para los espacios simétricos excepcionales de tipo I y III. Este resultado es un paso fundamental para la resolución de la conjetura del índice, que ha sido completada recientemente en [5].

A continuación describimos el contenido de esta tesis. A lo largo de esta tesis M será un espacio simétrico con un punto $o \in M$. Denotaremos por $G = Iso^o(M)$ a la componente conexa por la identidad del grupo de isometrías y por $K = G_o$ la isotropía de o en G.

En el primer capítulo presentamos los preliminares de este trabajo. Los resultados de este capítulo son bien conocidos y no representan el trabajo original de esta tesis. Comenzamos estudiando la teoría general de los espacios simétricos. Deducimos la fórmula para el tensor de curvatura, lo que nos permite caracterizar las subvariedades totalmente geodésicas como sistemas triples de Lie. Usando esta caracterización definimos el grupo de transformaciones *glide* de una subvariedad totalmente geodésica. En la última sección introducimos los sistemas de holonomía y el teorema de Simons. Usando el teorema de Simons probamos el *Slice lemma* para subvariedades totalmente geodésicas.

En el segundo capítulo, estudiamos subvariedades reflectivas de espacios simétricos y su relación con la representación slice y s-órbitas. Por completitud, incluimos las pruebas de algunos resultados de [2, 4]. Entre estos resultados, recordamos que las subvariedades totalmente geodésicas maximales no semisimples se obtienen a partir del espacio normal de una s-órbita simétrica (que es un sistema triple de Lie) [2, Theorem 4.2], [4, Lemma 4.1, Lemma 4.2] .

Construimos el *bottom space* como un cociente simétrico para probar la existencia de isometrías de orden dos. Esta construcción nos permite probar el siguiente resultado con respecto a s-órbitas no simétricas.

Proposición. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible, simplemente conexo. Asumamos que $w \in T_oM$ es tal que $K \cdot w$ no es una subvariedad simétrica de T_oM. Entonces, $\nu_w(K \cdot w)$ está contenido propiamente en un sistema triple de Lie (propio) de T_oM.*

Uno de los resultados fundamentales que utilizamos en esta tesis es el Lemma 3.2 de [2]. Grosso modo, este lema dice que en un espacio simétrico de rango mayor a 1 los puntos fijos de la representación slice de una subvariedad reflectiva hacen parte del factor plano de la subvariedad reflectiva complementaria. Utilizando este lema podemos extender la Proposición 3.4 de [2] al siguiente resultado.

Proposición. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Supongamos que $rk(M) \geq 2$ y que Σ es una subvariedad semisimple totalmente geodésica de M con $o \in \Sigma$. Si el núcleo de la representación slice completa $\rho' : K^\Sigma \to O(\nu_o\Sigma)$ es no trivial, entonces Σ es reflectiva.*

Utilizando este lema probamos la siguiente proposición.

Proposición. *Sea M un espacio simétrico irreducible con $rk(M) \geq 2$. Asumamos que Σ_1 y Σ_2 son subvariedades totalmente geodésicas completas con $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Si Σ_1 es reflectiva, entonces Σ_2 es reflectiva.*

Terminamos el capítulo probando uno de los resultados principales de este trabajo:

Teorema. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo con $rk(M) \geq 2$, donde $G = Iso^o(M)$, $K = G_o$ y $o \in M$. Sea $\Sigma = G'/K'$ subvariedad propia totalmente geodésica y completa de M que contiene a o, donde G' denota el grupo de transformaciones glide de Σ y K' la isotropía de o en*

G'. Denotemos por $\rho : (K')^o \to SO(\nu_o\Sigma)$ la representación slice conexa de Σ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Σ es reflectiva y $\nu_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie no semisimple.

(ii) Existe $v \in T_oM$ tal que $K \cdot v$ es una s-órbita simétrica y $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$.

Más aún, cualquiera de las afirmaciones anteriores implica la siguiente afirmación:

(iii) Σ es maximal y existe un vector no nulo en $\nu_o\Sigma$ que es fijo por la representación ρ.

Si además $\dim(\Sigma) \geq \frac{1}{2}\dim(M)$*, entonces las tres afirmaciones son equivalentes.*

En el último capítulo estudiamos el índice reflectivo para los espacios simétricos excepcionales. El objetivo es probar la conjetura del índice para el espacio simétrico $M = Sp_r(\mathbb{R})/U(r)$ y para los espacios simétricos excepcionales de tipo I y III. Para esto utilizamos el índice de espacios simétricos de tipo II, calculado por Berndt y Olmos en [3].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios simétricos

En esta sección estudiamos los preliminares de la teoría general de espacios simétricos. Los resultados presentados son bien conocidos y no representan el trabajo original de esta tesis. El libro de Helgason [10] es una de las referencias más completas en la actualidad. Muchos de las demostraciones de esta sección se encuentran en las notas W. Ziller [25] y las notes de J. Eschenburg [8].

A menudo escribimos M para denotar una variedad Riemanniana (M, g), sin hacer referencia explícita la métrica. A lo largo de este trabajo τ_c denota el transporte paralelo a lo largo de la curva c. Si G es un grupo de Lie, la componente conexa por la identidad será denotada por G^o. En el caso del grupo de isometrías y de la holonomía, escribimos $Iso^o(M)$ y $hol^o(M)$, para la componente por la identidad.

Una variedad Riemanniana M se dice un *espacio (globalmente) simétrico* si existe la *simetria geodésica* en cada punto, esto es, para cada $p \in M$ existe una isometría s_p tal que $s_p(p) = p$ y $d_p s_p = -Id$. Si γ es una geodésica en p se tiene que $s_{\gamma(t)}(\gamma(t_0)) = \gamma(2t - t_0)$. Utilizando esta igualdad, es fácil ver que cualquier geodésica se extiende a todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto M es completa.

Si M es conexo, por el teorema de Hopf-Rinow tenemos que para $p, q \in M$ existe una geodésica $\gamma : [0, L] \to M$ uniendo p con q. Se sigue que $s_{\gamma(L/2)}(p) = q$ y por lo tanto M es homogénea. A lo largo de esta tesis ∇ denota la conexión de Levi-Civita y $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ al tensor de curvature de M. Es fácil ver que toda isometría preserva el tensor ∇R y por lo tanto, para todo $x, y, z, w \in T_pM$ tenemos

$$\begin{aligned}
-(\nabla_x R)(y, z, w) &= d_p s_p((\nabla_x R)(y, z, w)) \\
&= (\nabla_{d_p s_p} R)(d_p s_p y, d_p s_p z, d_p s_p w) \\
&= (\nabla_x R)(y, z, w).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\nabla R = 0.$$

Esta última igualdad es equivalente a que para cualquier curva diferenciable a trozos c se satisface $\tau_c R = R$, donde τ_c denota el transporte paralelo a lo largo de c y $(\tau_c R)(u, v, w) := \tau_c^{-1} R_{\tau_c u, \tau_c v} \tau_c w$. Como consecuencia del teorema de Cartan, Ambrose, Hicks (ver apéndice A) tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.1. *Sean M y $\tilde{M}$ espacios simétricos y R, $\tilde{R}$ sus correspondientes tensores de curvatura. Sean $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y $A : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ una isometría lineal tal que $A(R_p) = \tilde{R}_{\tilde{p}}$. Si M es simplemente conexo, entonces existe una isometría local $f : M \to \tilde{M}$ tal que $d_pf = A$.*

Demostración. Veamos que A satisface las hipótesis del teorema de Cartan, Ambrose, Hicks. Sea γ una geodésica en M comenzando en p y tomemos $u, v, w, z \in T_pM$. Sean $u(t), v(t), w(t), z(t)$ los campos paralelos a lo largo de γ correspondientes a u, v, w, z, respectivamente. Hagamos $\tilde{\gamma}$ la geodésica por $\tilde{p}$ con $\tilde{\gamma}'(0) = A\gamma'(0)$. Sean $\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{w}(t)$ y $\tilde{z}(t)$ los campos paralelos a lo largo de $\tilde{\gamma}$ con condición inicial Au, Av, Aw y Az, respectivamente. Si denotamos por τ_t el transporte paralelo a lo largo de la curva $\gamma|_{[0,t]}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}_{\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)}\tilde{w}(t), \tilde{z}(t)\rangle &= \langle \tilde{R}_{\tau_tAu,\tau_tAv}\tau_tAw, \tau_tAz\rangle \\ &= \langle \tau_t^{-1}\tilde{R}_{\tau_tAu,\tau_tAv}\tau_tAw, Az\rangle \\ &= \langle \tilde{R}_{Au,Av}Aw, Az\rangle \\ &= \langle R_{u,v}w, z\rangle.\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad usamos que A es isometría lineal tal que $A(R) = \tilde{R}$. □

De aquí en adelante utilizaremos la siguiente notación. Para un espacio simétrico M denotamos por $Iso(M)$ al grupo de Lie de isometrías de M y por $G = Iso^o(M)$ la componente conexa de la identidad. Fijemos un punto $o \in M$ y sea K la isotropía de o en G. Denotamos por $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ el álgebra de Lie de G.

Cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ determina un campo de Killing X^* en M por $X^*_p = \frac{d}{dt}\big|_0 \mathrm{Exp}(tX)p$ cuyo flujo es el grupo monoparamétrico $\mathrm{Exp}(tX)$, donde Exp denota la exponencial del grupo G. Si V es un subespacio de $\mathfrak{g}$, denotamos por $V \cdot p$ al conjunto $\{X^*_p \mid X \in V\}$. Como M es completa, la aplicación $X \to X^*$ es un isomorfismo lineal de $\mathfrak{g}$ en el álgebra de campos de Killing (con el corchete de campos vectoriales), que satisface

$$[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]. \tag{1.1}$$

Identificaremos $\mathfrak{g}$ con el álgebra de campos de Killing, teniendo en cuenta (1.1). Si γ es una geodésica en M podemos definir un subgrupo monoparamétrico en G.

Definición 1.1.2. *Sean $v \in T_oM$ y $\gamma(t) = \exp_o(tv)$ la geodésica por o con condición inicial v. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\phi^v_t = s_{\gamma(t/2)}s_o$ la transvección geométrica a lo largo de γ en t.*

Es inmediato que ϕ^v_s es un subgrupo monoparamétrico de isometrías y por lo tanto determina un único campo de Killing X^v de M tal que $X^v_p = \frac{d}{ds}\big|_0 \phi^v_s(p)$. Los subgrupos monoparamétricos ϕ^v_s y $\mathrm{Exp}(sX^v)$ tienen la misma derivada en $s = 0$ y por lo tanto $\phi^v_s = \mathrm{Exp}(sX^v)$. Sea $\mathfrak{p} = \{X^v \mid v \in T_oM\}$ subespacio de $\mathfrak{g}$ (bajo la identificación de campos de Killing con $\mathfrak{g}$).

Proposición 1.1.3. *En un espacio simétrico M tenemos las siguientes propiedades*

1. *$\phi_s^v(\gamma(t)) = \gamma(s+t)$ y $d_{\gamma(t)}\phi_s^v : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(s+t)}M$ es el transporte paralelo a lo largo de $\gamma|_{[s,s+t]}$.*

2. *El grupo G actúa transitivamente en M y si K denota la isotropía de o en G, entonces K es compacto y M es difeomorfo a G/K.*

3. *Si $v \in T_oM$, entonces el campo de Killing asociado satisface $X_o^v = v$ y $(\nabla X^v)_o = 0$. Por lo tanto, $\mathfrak{p} = \{X \mid X$ es campo de Killing y $(\nabla X)_o = 0\}$ y la transformación lineal $v \to X^v$ es un isomorfismo de T_oM con $\mathfrak{p}$ y su inversa es $X \to X_o^*$.*

4. *La geodésica de M por o con condición inicial $v \in T_oM$ está dada por $\gamma(t) = Exp(tX^v)o$.*

Demostración. 1. La primera afirmación se sigue de la igualdad $s_{\gamma(s)}(\gamma(t)) = \gamma(2s-t)$. Veamos que la diferencial de ϕ_s^v es el transporte paralelo. Sean $u \in T_oM$ y U el transporte paralelo de u a lo largo de γ. Como ϕ_s^v es una isometría, el campo $(\phi_s^v)_*U$ es paralelo a lo largo de $\phi_s^v(\gamma(t))$. Es decir, $d\phi_s^v u$ es el transporte paralelo a lo largo de $\gamma|_{[s,s+t]}$.

2. Si $p \in M$ y $v \in T_oM$ es tal que $p = \exp_o(v)$, entonces $\phi_s^v \in G$ y satisface $\phi_s^v(1) = p$. Notemos que K es cerrado y que la representación isotrópica $\chi : K \to O(T_oM)$ dada por $k \to d_ok$ es inyectiva. Por lo tanto, podemos pensar K como un subgrupo cerrado de $O(T_oM)$ y por lo tanto K es compacto. La última afirmación se sigue de la transitividad de G en M.

3. La primera igualdad es inmediata de la definición de X^v. Si $u \in T_oM$ y c curva en M con $c'(0) = u$, usando 1. tenemos que

$$\nabla_u X^v = \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\bigg|_{t=0} \phi_s^v(c(t)) = \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_s^v(c(t)) = \frac{D}{ds} d\phi_s^v(c'(0)) = 0.$$

Como todo campo de Killing está determinado por su valor en o y por su derivada covariante en o, entonces $\mathfrak{p} = \{X \mid X$ es Killing y $(\nabla X)_o = 0\}$. Finalmente

$$(X^v)^* = \frac{d}{dt}\bigg|_o \mathrm{Exp}(tX^v)o = \frac{d}{dt}\bigg|_o \phi_t^v(o) = X_o^v = v.$$

4. Como $\mathrm{Exp}(tX^v) = \phi_t^v$, entonces por 1 tenemos $\phi_t^v(o) = \phi_t^v(\gamma(0)) = \gamma(t)$.

□

La proposición anterior y la siguiente definición justifica el nombre de las transvecciones geométricas.

Definición 1.1.4. *Para una variedad Riemanniana M definimos el grupo de transvecciones de M como*

$$Tr(M) = \{g \in Iso(M) \mid \ \forall p \in M\ \exists\gamma,\ \textit{curva de } p \textit{ a } g(p),\ \textit{tal que } dg_p = \tau_\gamma\ \}.$$

Su álgebra de Lie se denomina el álgebra de transvecciones de M.

En un espacio simétrico M tenemos las transvecciones geométricas a lo largo de geodésicas y por lo tanto $Tr(M)$ actúa transitivamente en M.

Recordemos que el grupo de holonomía $hol_p(M)$ de M en p es el subgrupo de isometrías lineales de $O(T_pM)$ generado por todos los transportes paralelos a lo largo de lazos diferenciales a trozos en p. El grupo de holonomía restringido $hol_p^o(M)$ es la componente conexa de $hol_p(M)$ y consta de aquellas curvas que son homotópicamente nulas.

Proposición 1.1.5. *Sea K la isotropía de o en G. El grupo de holonomía $hol_o(M)$ es un subgrupo de K (visto como subgrupo de $O(T_oM)$). Si la acción de K en T_oM es reducible, entonces M es localmente reducible y si M es simplemente conexo, entonces es globalmente reducible. Si M es localmente irreducible, entonces M es irreducible isotópicamente, i.e, K actúa irreduciblemente, es Einstein.*

Demostración. Si γ es una geodésica a trozos, el transporte paralelo es el diferencial de una composición de transvecciones (ver Proposición 1.1.3, 1.). Como esta composición fija o, entonces $\tau_\gamma \in K$. Si α es cualquier lazo diferenciable a trozos en o, podemos cubrir su imagen por entornos convexos de M tal que, en cada entorno, α es homotópico a una geodésica. Haciendo los entornos cada vez más pequeños, tenemos una sucesión de geodésicas a trozos γ_n que aproximan a α. Por continuidad, los transportes paralelos τ_{γ_n} convergen a τ_α. Como K es cerrado, concluimos que $\tau_\alpha \in K$. La segunda parte es inmediata del teorema de descomposición de De Rham.

Finalmente, supongamos que M es irreducible. Por la parte anterior, K es irreducible en T_oM. Sea $A \in End(T_oM)$ simétrico con respecto a la métrica de M, tal que $Ric(u,v) = \langle Au, v\rangle$. Veamos que los autoespacios de A son invariantes por K. Si $k \in K$, y $v \in T_oM$ es un autovector de A con autovalor λ, entonces para todo $u \in T_oM$

$$Ric(ku, v) = Ric(ku, kk^{-1}v) = Ric(u, k^{-1}v) = \langle \lambda u, k^{-1}v\rangle = \langle \lambda ku, v\rangle.$$

Como A es simétrica y sus autoespacios son invariantes por K, concluimos que $A = \lambda Id$ y M es Einstein. □

Utilizando el teorema de descomposición de De Rham tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.6. *Si M es un espacio simétrico, entonces para cada $p \in M$ existe un abierto U de M que contiene a p tal que $U = M_1 \times \cdots \times M_l$, donde cada M_i es un espacio simétrico irreducible. Si M es simplemente conexo, entonces se puede tomar a $U = M$. En este caso $Iso(M) = Iso(M_1) \times \cdots \times Iso(M_l)$ y $Iso(M)_o = Iso(M_1)_o \times \cdots \times Iso(M_l)_o$, donde $Iso(M_i)_o$ actúa trivialmente en T_oM_j para $j \neq i$.*

Definición 1.1.7. *Un espacio simétrico M se dice semisimple, si ninguno de los M_i de la definición anterior es un espacios simétricos plano.*

Usando la forma canónica para transformaciones ortogonales tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.1.8. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo, con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Entonces, la dimensión del centro de K es 0 ó 1. En el segundo caso, M admite una estructura Kähler.*

Demostración. Primero supongamos que $\dim M = 2a$ es par y sea k_0 un elemento del centro de K. Como M es simplemente conexo, entonces K es conexo y por lo tanto $d_o k_0 \in SO(T_oM)$. Por la forma canónica de transformaciones ortogonales, se tiene que existe una base $e_1, f_1, \cdots, e_a, f_a$ y ángulos $\theta_i \in [0, 2\pi)$ tales que

$$d_o k_0(e_i) = \cos(\theta_i)e_i + \operatorname{sen}(\theta_i)f_i; \qquad d_o k_0(f_i) = -\operatorname{sen}(\theta_i)e_i + \cos(\theta_i)f_i.$$

Sea $(T_oM)_{\mathbb{C}}$ la complexificación de T_oM y sea $(d_ok_0)_{\mathbb{C}}$ la extensión $\mathbb{C}$-lineal de d_ok_0 a $(T_oM)_{\mathbb{C}}$. Note que $\{w_i = e_i + \sqrt{-1}f_i\}$ es una base de autovectores de $(d_ok_0)_{\mathbb{C}}$ con autovalores $\lambda_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$. Como k_0 conmuta con todo elemento de K, entonces K deja invariante al autoespacio generado por $\{w_i \mid \lambda_i = \lambda_1\}$. Es decir, K deja invariante al subespacio de T_oM generado por $\{e_i, f_i \mid \theta_i = \theta_1\}$. Como M es irreducible, tal subespacio debe ser T_oM y por lo tanto $\theta_i = \theta_1$, para todo i. Por lo tanto, el centro de K (en $SO(T_oM)$) es generado por $\{\mathrm{Exp}(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$, donde $A \in \mathfrak{so}(T_oM)$ satisface

$$Ae_i = \theta f_i \quad \text{y} \quad Af_i = -\theta e_i.$$

Es decir, el centro tiene dimensión 0 o 1.

Si M es impar, la forma canónica de matrices ortogonales y un argumento análogo al anterior implica que el centro tiene dimensión 0.

Finalmente, supongamos que la dimensión del centro es 1. Tomando $t = \frac{\pi}{2\theta}$, tenemos que existe k_0 en el centro de K tal que $(d_ok_0)^2 = -\mathrm{id}$. Como d_ok_0 conmuta con K y $hol(M) = hol^o(M) \subset K$, podemos definir una estructura casi compleja J compatible con la métrica de M y paralela. Se sigue que J es integrable y por lo tanto M es Kähler.

□

1.1.1. Pares simétricos y descomposición de Cartan

La simetría s_o en el punto $o \in M$ determina una involución $\sigma : G \to G$ definida por $\sigma(g) = s_ogs_o$. Denotamos por G^σ al subgrupo de puntos fijos de σ.

Proposición 1.1.9. *El subgrupo K satisface $G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma$. Si $\mathfrak{k}$ denota el álgebra de Lie de K, entonces los auotespacios asociados a los autovalores 1 y -1 de $d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ son $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$, respectivamente.*

Demostración. Para todo $k \in K$ la isometría $\sigma(k) = s_oks_o$ fija o y su diferencial en o es dk_o. Es decir $\sigma(k) = k$ y por lo tanto $K \subset G^\sigma$. Por otro lado, para $X \in \mathrm{Lie}(G^\sigma)$ tenemos que $s_o\mathrm{Exp}(tX)s_o = \mathrm{Exp}(tX)$ para t en algun intervalo que contiene el 0. Se sigue que $s_o\mathrm{Exp}(tX)o = \mathrm{Exp}(tX)o$ y como o es un punto fijo aislado de s_o, tenemos que $\mathrm{Exp}(tX)o = o$ para t lo suficientemente pequeño. Por unicidad de geodésicas tenemos que $\mathrm{Exp}(tX)o = o$, para todo t y por lo tanto $\mathrm{Exp}(X) \in K$. Como estos elementos generan $(G^\sigma)^o$, concluimos que $(G^\sigma)^o \subset K$.

Claramente el autoespacio asociado al autovalor 1 de $d\sigma$ es $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(G^\sigma)$. Sea V el autoespacio asociado al autovalor -1 de $d\sigma$. Si $X \in \mathfrak{p}$, $X^* = X^v$ y γ es la geodésica determinada por v, entonces

$$\begin{aligned} d\sigma(X) &= \frac{d}{ds}\bigg|_0 \sigma(\phi_s^v) = \frac{d}{ds}\bigg|_0 s_os_{\gamma(s/2)} = \frac{d}{ds}\bigg|_0 (s_{\gamma(s/2)}s_o)^{-1} \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_0 (\phi_s^v)^{-1} = \frac{d}{ds}\bigg|_0 \phi_{-s}^v = \frac{d}{ds}\bigg|_0 \mathrm{Exp}(-sX) = -X. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathfrak{p}$ es un subespacio de V. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus V$, entonces

$$\dim \mathfrak{p} = \dim M = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k} = \dim V.$$

Lo que prueba que $\mathfrak{p} = V$. □

Podemos descomponer a $\mathfrak{g}$ como suma de autoespacios de $d\sigma$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Como $d\sigma$ es un homomorfismo de álgebras de Lie tenemos que $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$. Esta descomposición se llama la *descomposición de Cartan* del espacio simétrico M. Como siempre identificamos T_oM con $\mathfrak{p}$. Bajo esta identificación, la acción en T_oM de un elemento $k \in K$ esta dada por $\mathrm{Ad}(k)$. La proposición anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.10. *El par (G, K) se dice un par simétrico si G es un grupo de Lie, K es un subgrupo compacto de G tal que G actúa casi efectivamente en G/K y existe una involución $\sigma : G \to G$ tal que $(G^\sigma)^o \subset K \subset G^\sigma$. El par simétrico se dice efectivo, si la acción de G en G/K es efectiva.*

Recordemos que G actúa casi efectivamente en G/K si y sólo si el conjunto de elementos que actúa trivialmente es discreto. Como todo elemento fuera de K actúa de forma no trivial, esto es equivalente a pedir que el conjunto $\{k \in K \mid g^{-1}kg \in K \text{ para todo } g \in G\}$ es finito. Es decir, la acción es casi efectiva si y sólo si todo subgrupo normal de G contenido en K es finito. En términos de álgebras de Lie esto sucede si y solo si $\mathfrak{k}$ no contiene ideales no nulos de $\mathfrak{g}$.

Al igual que en espacios simétricos, para cada par simétrico (G, K) tenemos la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, como suma de autoespacios de la involución $d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Identificamos el subespacio $\mathfrak{p}$ con $T_K G/K$ y bajo esta identificación la acción de $k \in K$ en G/K corresponde a $\mathrm{Ad}(k)$.

Si M es un espacio simétrico, $G = Iso^o(M)$ y K es la isotropía de G en o, entonces el par (G, K) es un par simétrico. La siguiente proposición permite construir espacios simétricos a partir de pares simétricos.

Proposición 1.1.11. *Sea (G, K) un par simétrico con involución σ. Entonces G/K admite una métrica tal que G actúa por isometrías. Cualquier métrica que satisface esta condición hace a G/K un espacio simétrico.*

Demostración. Como K es compacto, usando el " truco unitario " de Weyl, existe un producto interno en $\mathfrak{p}$ que es $\mathrm{Ad}(K)$ invariante. Lo que es equivalente a un producto interno $\langle\, ,\, \rangle_o$ en T_oM invariante por K. Definimos una métrica en G/K por $\langle u, v \rangle_{gK} = \langle dL_{g^{-1}}u, dL_{g^{-1}}v \rangle_K$, donde L_g denota la acción de $g \in G$ en G/K. Como $\langle\, ,\, \rangle_K$ es $K-$invariante, está métrica está bien definida y por definición, G actúa por isometrías. Lo que prueba la primera parte.

Como G actúa por isometrías, G/K es homogénea. Por tanto, para ver que G/K es simétrica, basta ver que existe la simetría en $o = K$. Dado que $K \subset G^\sigma$, la involución σ induce un difeomorfismo $s_o : G/K \to G/K$ definida por $s_o(gK) = \sigma(g)K$. Por definición s_o fija o y como T_oG/K se identifica con el autoespacio -1 de $d\sigma$, entonces $d_os_o = -Id$. Resta ver que s_o es una isometría. Derivando en o la igualdad $s_oL_g = L_{\sigma(g)}s_o$, se tiene que $d_{gK}(s_o)d_o(L_g) = -d_{\sigma(g)K}(L_{\sigma(g)})$ y como G actúa por isometrías concluimos que s_o es una isometría. □

1.1.2. Curvatura en espacios simétricos

Para calcular el tensor de curvatura en espacios simétricos necesitamos el siguiente lema

Lema 1.1.12. *Sea M una variedad Riemanniana y X un campo de Killing en M. Entonces para U, V campos en M se satisface la siguiente igualdad*

$$2\nabla_U \nabla_V X - \nabla_{[U,V]} X = 2R_{U,X} V.$$

En particular, si M es un espacio simétrico y $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$, entonces

$$\nabla_{X_o} \nabla_Y Z = R_{X_o, Z_o} Y_o.$$

Demostración. Como X es un campo de Jacobi a lo largo de cualquier geodésica, usando la ecuación de Jacobi, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{U+V} \nabla_{U+V} X + R_{X,U+V}(U+V) \\
&= \nabla_U \nabla_U X + \nabla_U \nabla_V X + \nabla_V \nabla_U X + \nabla_V \nabla_V X \\
&\qquad + R_{X,U} U + R_{X,U} V + R_{X,V} U + R_{X,V} V \\
&= \nabla_U \nabla_V X + \nabla_V \nabla_U X + R_{X,U} V + R_{X,V} U \\
&= \nabla_U \nabla_V X + \nabla_V \nabla_U X + R_{X,U} V - R_{V,U} X - R_{U,X} V \\
&= \nabla_U \nabla_V X + \nabla_V \nabla_U X - R_{V,U} X - 2R_{U,X} V \\
&= 2\nabla_U \nabla_V X + \nabla_{[V,U]} X - 2R_{U,X} V
\end{aligned}$$

La última igualdad es inmediata, puesto que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ $\square$

Sean $u, v, w \in T_o M$ y X^u, X^v, X^w sus campos de Killing asociados. De la identidad de Bianchi y el lema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
R(u,v)w &= R(w,v)u - R(w,u)v \\
&= -\nabla_w \nabla_{X^v} X^u - \nabla_w \nabla_{X^u} X^v \\
&= \nabla_w [X^v, X^u] \\
&= [X^w, [X^v, X^u]]_o.
\end{aligned}$$

Como el corchete en los campos de Killing difiere por un signo con el corchete en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.13. *Bajo la identificación de $\mathfrak{p}$ con $T_o M$ el tensor de curvatura es*

$$R(u,v)w = -[[u,v],w].$$

También podemos dar una fórmula para la conexión de Levi-Civita.

Proposición 1.1.14. *Sea $u \in T_o M$ e Y un campo en M. La conexión de Levi Civita satisface*

$$\nabla_u Y = [X^u, Y]_o.$$

Demostración. El flujo de X^u son las transvecciones geométricas ϕ_t^u a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = \exp_o tu$. Sea τ_t el transporte paralelo a lo largo de la curva $\gamma|_{[0,t]}$. Luego

$$[X^u, Y]_o = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 d(\phi_t^u) Y_{\phi_{-t}^v(0)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \tau_t^{-1} Y_{\gamma(t)} = (\nabla u Y)_o.$$

$\square$

Recordemos que dado un par simétrico (G, K), el espacio cociente $M = G/K$ es un espacio simétrico con cualquier métrica homogénea. Sin embargo, en general no es cierto que $G = Iso^o(M)$. La siguiente proposición da condiciones para que eso suceda. Denotamos por $\chi : K \to O(T_oM)$ la representación isotrópica de M y por $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, definida por

$$B(X, Y) = Tr(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y).$$

Proposición 1.1.15. *Si (G, K) es un par simétrico y $M = G/K$ no tiene factor euclídeo (localmente), entonces $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$ y $\chi(K) = hol^o(M)$. Si además el par es efectivo, entonces $G = Iso^o(G/K)$.*

Demostración. Basta probar el resultado para M irreducible y no plano. Sea $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^\perp \cap \mathfrak{k}$ el complemento ortogonal de $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ en $\mathfrak{k}$ y $X \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^\perp \cap \mathfrak{k}$. Para todo $Y, Z \in \mathfrak{p}$ tenemos

$$0 = B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z).$$

Por lo tanto $[X, \mathfrak{p}] = 0$, pues $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ es no degenerada. Se sigue que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^\perp \cap \mathfrak{k}$ es un ideal en $\mathfrak{g}$ contenido en $\mathfrak{k}$. Como $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \neq 0$ y la acción es casi efectiva, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]^\perp \cap \mathfrak{k} = \{0\}$ y por lo tanto $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$. Por la proposición 1.1.5 sabemos que $hol^o(M) \subset K$. Por otro lado, del teorema de Ambrose-Singer, el álgebra de Lie de $hol^o(M)$ está generada por los endomorfismos de curvatura $\{R_{u,v} \mid u, v \in T_oM\}$ (pues R es invariante por transporte paralelo). Bajo la identificación de $\mathfrak{p}$ con T_oM tenemos que $R_{u,v} = -\mathrm{ad}_{[u,v]}$. Como la representación isotrópica es la acción adjunta de K en $\mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$, entonces el álgebra de Lie de $hol^o(M)$ es $\mathfrak{k}$ y por lo tanto $hol^o(M) = \chi(K)$.

Ahora asumamos que el par (G, K) es efectivo y sea $\sigma : G \to G$ la involución. Sea $G' = Iso^o(M)$ y $K' = G'_K$ la isotropía de K en G'. Como la acción de G en M es efectiva, $G \subset G'$ y $K \subset K'$. La simetría de M en $o = K$ esta dada por $s_o(gK) = \sigma(g)K$ (ver demostración del Teorema 1.1.11). Sabemos que el par (G', K') es un par simétrico con involución $\sigma' : G' \to G'$ definida por $\sigma'(g') = s_o g' s_o$. Note que $\sigma = \sigma'|_G$. Consideremos $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ la descomposición de Cartan del par (G', K'). Como $\sigma = \sigma'|_G$, entonces $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ y como tienen la misma dimensión, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. Por lo tanto

$$\mathfrak{k}' = [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}.$$

Concluimos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ y por lo tanto $G = G'$. □

Corolario 1.1.16. *Sea M es un espacio simétrico sin factor plano y $G = Iso^o(M)$. Las transvecciones geométricas generan a $Tr(M)$ y $Tr(M) = G$.*

Demostración. El subgrupo G' generado por las transvecciones geométricas es el subgrupo de Lie conexo de $Iso^o(M)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$. Por la proposición anterior $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ y como $G \subset Tr(M) \subset Iso^o(M)$, entonces $G' = Tr(M) = G$. □

1.1.3. Tipo y dualidad

Proposición 1.1.17. *La forma de Killing es definida negativa en $\mathfrak{k}$. Si M es irreducible, entonces $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ es un múltiplo de la métrica en T_oM.*

Demostración. Denotemos por $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno $\mathrm{Ad}(K)-$invariante en $\mathfrak{p}$ inducido por la métrica en M y sea $(\ ,\ )$ una métrica bi-invariante en K. Si $X \in \mathfrak{k}$, con respecto al producto interno $((\,,\,)) = (\,,\,) \oplus \langle\,,\,\rangle$ la derivación $\mathrm{ad}(X)$ es antisimétrica. Si $E_1, \cdots E_m$ es una base ortonormal con respecto a este producto interno, entonces

$$B(X,X) = \sum_i ((\mathrm{ad}(X)^2 E_i, E_i)) = -\sum_i ((\mathrm{ad}(X)E_i, \mathrm{ad}(X)E_i)) \leq 0.$$

Más aún, la igualdad se tiene si y sólo si $X \in Z(\mathfrak{g})$, pero $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} = \{0\}$, dado que K actúa efectivamente en $\mathfrak{p}$.

Ahora asumamos que M es irreducible y tomemos $A \in End(\mathfrak{p})$ simétrico tal que $B(X,Y) = \langle AX, Y\rangle$. Como B es $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$ invariante, los autoespacios de A son $\mathrm{ad}\mathfrak{k}$ invariantes y por lo tanto $\mathrm{Ad}K$ invariantes. Por Proposición 1.1.5 $A = \lambda Id$ y $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = \lambda\langle\ ,\ \rangle$. $\square$

Si en un espacio simétrico $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = \lambda\langle\,,\,\rangle$ entonces decimos que M es de tipo

- Euclídeo si $\lambda = 0$.
- Compacto si $\lambda < 0$.
- No compacto si $\lambda > 0$.

De la proposición anterior, tenemos que todo espacio simétrico irreducible es de alguno de los tres tipos anteriores. Como $d\sigma$ preserva la forma de Killing B de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ son sus autoespacios, entonces $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Se sigue que si M es irreducible y no es de tipo euclídeo, entonces G es semisimple. Usando la descomposición de De Rham, tenemos que $Iso^o(M)$ es semisimple, para todo espacio simétrico simplemente conexo y semisimple M.

En espacios simétricos de tipo compacto $-B$ es un producto interno en $\mathfrak{g}$. En espacios de tipo no compacto también podemos definir un producto interno natural en $\mathfrak{g}$.

Lema 1.1.18. *Sea M de tipo no compacto y $\sigma : G \to G$ la involución en G. La forma bilineal $(X,Y) = -B(d\sigma X, Y)$ define un producto interno en $\mathfrak{g}$ tal que $d\sigma$ es simétrica. Con respecto a este producto interno ad_X es antisimétrica si $X \in \mathfrak{k}$ y simétrica si $X \in \mathfrak{p}$.*

Demostración. Que $(\ ,\ )$ es un producto interno con $d\sigma$ simétrico se sigue de $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ y de que B es definida negativa y positiva en $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$, respectivamente. Por otro lado, para $X \in \mathfrak{k} \cup \mathfrak{p}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$\mathrm{ad}_X d\sigma(Y) = [X, d\sigma(Y)] = \pm d\sigma[X,Y] = \pm d\sigma \mathrm{ad}_X Y,$$

donde el último signo es $+$ si $X \in \mathfrak{k}$ y $-$ si $X \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_X Y, Z) &= B(d\sigma \mathrm{ad}_X Y, Z) = \pm B(\mathrm{ad}_X d\sigma(Y), Z)\\ &= \mp B(Y, d\sigma \mathrm{ad}_X Z) = \mp(Y, \mathrm{ad}_X Z).\end{aligned}$$

$\square$

Observación 1.1.19. *Cuando M es irreducible y de tipo no compacto, el producto interno $\langle\,,\,\rangle$ en $\mathfrak{p}$ determinado por la métrica es un múltiplo de $(\ ,\ )|_{\mathfrak{p}}$.*

La siguiente proposición justifica porque la terminología anterior.

Proposición 1.1.20. *Si M es de tipo euclídeo, entonces $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = \{0\}$ y $R = 0$. Si M es de tipo no compacto, entonces M tiene curvatura seccional no positiva y es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Si M es de tipo compacto e irreducible, entonces M es compacto.*

Demostración. Primero asumamos que M es de tipo euclídeo, es decir $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = 0$. Como B es definida negativa en $\mathfrak{k}$ y $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p}) = 0$, tenemos que $\mathfrak{p} = \ker B$. Por lo tanto $\mathfrak{p}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y por las relaciones de Cartan debe ser $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = 0$. De la fórmula para la curvatura (ver Proposición 1.1.13) concluimos que $R = 0$.

Ahora supongamos que $M = G/K$ es de tipo no compacto, donde $G = Iso^o(M)$ y K la isotropía de o en G. Para $u, v \in T_oM$ ortonormales tenemos que la curvatura seccional K satisface

$$K(u,v) = \langle R(u,v)v, u\rangle = -\lambda B([[u,v],v],u) = -\lambda B([u,v],[u,v]) \leq 0.$$

Por el teorema de Hadamard, la aplicación $\exp_o : \mathfrak{p} \to M$ es un cubrimiento y por la Proposición 1.1.3, $\exp_o(X) = \mathrm{Exp}(X)o$. Veamos que $\exp_o$ es inyectiva y, por lo tanto, un difeomorfismo. Supongamos que $\mathrm{Exp}(X)o = \mathrm{Exp}(X')o$. Es decir, $\mathrm{Exp}(X')^{-1}\mathrm{Exp}(X) \in K$ y por lo tanto $\mathrm{Exp}(X) = \mathrm{Exp}(X')k$, para algún $k \in K$. Aplicando la adjunta en G a la ecuación anterior, tenemos $e^{\mathrm{ad}_X} = e^{\mathrm{ad}_{X'}}\mathrm{Ad}(k)$. Del Lema 1.1.18 tenemos que ad_X y $\mathrm{ad}_{X'}$ son simétricas con respecto al producto interno en $\mathfrak{g}$. Por lo tanto

$$e^{2\mathrm{ad}_X} = e^{\mathrm{ad}_X}(e^{\mathrm{ad}_X})^t = e^{\mathrm{ad}_{X'}}\mathrm{Ad}(k)\mathrm{Ad}(k)^t(e^{\mathrm{ad}_{X'}})^t = e^{2\mathrm{ad}'_X}.$$

De esta ecuación tenemos que los autovalores de $2\mathrm{ad}_X$ y $2\mathrm{ad}'_X$ son iguales. Los autoespacios de $2\mathrm{ad}_X$ y $2\mathrm{ad}'_X$, asociados al autovalor λ, es el autoespacio de $e^{2\mathrm{ad}_X} = e^{2\mathrm{ad}'_X}$ asociado al autovalor e^λ. Concluimos que $\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_{X'}$ y como $\mathfrak{g}$ es semisimple, $X = X'$. Lo que prueba la inyectividad de $\exp_o$ y la segunda parte de la proposición.

Finalmente, asumamos que M es de tipo compacto. Como todo espacio de tipo compacto, tiene únicamente factores de De Rham de tipo compacto, podemos asumir que M es irreducible. Para $u \in T_oM$ con $\|u\| = 1$ y $\{u_i\}$ una base ortonormal de T_oM tal que $u_0 = u$, se tiene que

$$Ric(u,u) = \sum_i K(u,u_i) = \lambda \sum_i B([u,u_i],[u,u_i]).$$

Como M es de tipo compacto, entonces $Ric(u,u) \geq 0$. Si $Ric(u,u) = 0$, entonces $[u,\mathfrak{g}] = 0$ y como $\mathfrak{g}$ es semisimple $u = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $Ric(u,u) > 0$ y como M es Einstein, $Ric(u,u)$ es una constante positiva para vectores unitarios. Del teorema de Myers se sigue que M es compacto. □

Para espacios simétricos simplemente conexos tenemos la noción de dualidad. Sea $M = G/K$ un espacio simétrico simplemente conexo con involución $\sigma : G \to G$. Como M es simplemente conexo y G es conexo, entonces K también es conexo. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan del álgebra de Lie de G y $[\,,\,]$ el corchete en $\mathfrak{g}$. Definimos un nuevo corchete $[\,,\,]^*$ en $\mathfrak{g}$ por

$$\begin{aligned}
&[u,v]^* = -[u,v], \text{ si } u,v \in \mathfrak{p}\\
&[u,X]^* = [u,X], \text{ si } u \in \mathfrak{p} \text{ y } X \in \mathfrak{k}\\
&[X,Y]^* = [X,Y], \text{ si } X,Y \in \mathfrak{k}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $[\,,\,]$ es un corchete de Lie. Denotemos por $\mathfrak{g}^*$ al álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,\,]^*)$ y sea G^* el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$. Sea K^* el subgrupo de G^* con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Se tiene que $d\sigma : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ es un morfismo de álgebras de Lie y como G^* es simplemente conexo, existe un único morfismo $\sigma^* : G^* \to G^*$ con $d\sigma^* = d\sigma$. Se sigue que (G^*, K^*) es un par simétrico con involución σ^* y por lo tanto determina un espacio simétrico simplemente conexo $M^* = G^*/K^*$.

Equivalentemente, se puede definir $\mathfrak{g}^*$ como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ vista como subálgebra de la complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Proposición 1.1.21. *El espacio M^* satisface las siguientes propiedades*

1. *M es de tipo compacto si y sólo si M^* es de tipo no compacto.*
2. *M es de tipo no compacto si y sólo si M^* es de tipo compacto.*
3. *Si M no tiene un factor euclídeo, entonces $K = K^*$. Por lo tanto M es irreducible si y sólo si M^* lo es.*

Demostración. Sea ad^* la representación adjunta de $\mathfrak{g}^*$ y B^* su forma de Killing. Por construcción, la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ coinciden. Para todo $X \in \mathfrak{p}$ se tiene que la matriz de ad^*X en una base que respete la descomposición de Cartan es

$$\mathrm{ad}^*X = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{ad}X|_{\mathfrak{p}} \\ \mathrm{ad}X|_{\mathfrak{k}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto para todo $X, Y \in \mathfrak{p}$ se tiene

$$B^*(X,Y) = -Tr\begin{pmatrix} \mathrm{ad}X|_{\mathfrak{p}}\mathrm{ad}Y|_{\mathfrak{k}} & 0 \\ 0 & \mathrm{ad}X|_{\mathfrak{k}}\mathrm{ad}Y|_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} = -B(X,Y).$$

Como la métrica en $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}^*$ coincide, la ecuación anterior prueba *1.* y *2.*

Si M no tiene factor euclídeo, M^* tampoco tiene factor euclídeo y de la proposición 1.1.15 obtenemos $G^* = Iso^o(M^*)$. Denotemos por R y R^* la curvatura de M y M^*, respectivamente. Como M y M^* son simplemente conexos, K y K^* son conexos. En $\mathfrak{p}$ se tiene que $R = -R^*$. Más aun, si identificamos K y K^* como subgrupos de $O(\mathfrak{p})$, de la Proposición 1.1.1

$$K = \{A \in O(\mathfrak{p}) \mid A(R) = R\} = \{A \in O(\mathfrak{p}) \mid A(R^*) = R^*\} = K^*.$$

La última parte se sigue de que la representación isotrópica de M y M^* coinciden y de la Proposición 1.1.5. □

Corolario 1.1.22. *Si M es irreducible de tipo no euclídeo, entonces M es Einstein y no Ricci flat. En particular la curvatura escalar de M es no nula.*

Demostración. Por dualidad podemos asumir que M es de tipo compacto. El resultado se sigue de la Proposición 1.1.5 y del cálculo para el tensor de Ricci en la demostración de la Proposición 1.1.20. □

Finalizamos esta sección mostrando que el tensor de curvatura en un espacio simétrico M de tipo compacto (no compacto) es semidefinido negativo (positivo). En general si M es una variedad Riemanniana, el tensor de curvatura R_p en $p \in M$ se puede pensar como un endomorfismo de $\Lambda^2_p(M)$ de la siguiente manera. Dotemos a $\Lambda_p^2(M)$ con el producto interno tal que para toda base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM, el conjunto $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ es una base ortonormal de $\Lambda_p^2(M)$, o equivalentemente, con el producto interno definido por

$$\langle x \wedge y, v \wedge w\rangle = \langle x, v\rangle\langle y, w\rangle - \langle x, w\rangle\langle y, v\rangle.$$

Por otro lado, el producto interno en T_pM permite identificar $\Lambda_p^2(M)$ con el espacio de transformaciones antisimétricas, mediante la fórmula

$$(u \wedge v)(x) = \langle v, x\rangle u - \langle u, x\rangle v.$$

De las identidades del tensor de curvatura se sigue que R induce una forma bilineal simétrica.

$$\begin{array}{rlcl} R: & \Lambda_p^2(M) \times \Lambda_p^2(M) & \to & \mathbb{R} \\ & (x \wedge y, u \wedge v) & \to & R(x \wedge y, u \wedge v) = R(x, y, u, v). \end{array}$$

Abusando de la notación, denotamos por $R : \Lambda_p^2(M) \to \Lambda_p^2(M)$ a la transformación simétrica inducida por esta forma bilineal.

Lema 1.1.23. *Sea M un espacio simétrico de tipo compacto (no compacto) y R el tensor de curvatura de M en o. Entonces, el endomorfismo de curvatura $R : \Lambda_o^2(M) \to \Lambda_o^2(M)$ es semidefinido negativo (positivo). Más aún, $\langle R(x \wedge y), x \wedge y\rangle = 0$ si y sólo si $R(x \wedge y) = 0$.*

Demostración. Supongamos que M es de tipo compacto (el caso de tipo no compacto es análogo) y reescalando la métrica si hace falta, podemos suponer que $\langle \cdot, \cdot\rangle = -B$. Para $x \wedge y \in \Lambda_o^2(M)$ tenemos

$$\langle R(x \wedge y), x \wedge y\rangle = \langle R_{x,y}x, y\rangle = -B(-[[x, y], x], y) = B([x, y], [x, y]) \leq 0.$$

La igualdad en la anterior desigualdad se da si y sólo si $[x, y] = 0$. Como $\{R_{u,v}\}_{u,v\in T_oM}$ genera a $\mathfrak{k}$ y la acción de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{p}$ es efectiva, entonces esta última igualdad es equivalente a que $R(x \wedge y) = 0$. $\square$

1.1.4. Subvariedades totalmente geodésicas

Recordemos que una subvariedad Σ de M se dice totalmente geodésica si toda geodésica de Σ es una geodésica de M. Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi Civita en M y Σ, respectivamente. Se tiene que Σ es totalmente geodésica si y sólo si $\nabla_{\mathfrak{X}(\Sigma)}\mathfrak{X}(\Sigma) \subset \mathfrak{X}(\Sigma)$, en este caso, $\overline{\nabla} = \nabla|_{\mathfrak{X}(\Sigma)\times\mathfrak{X}(\Sigma)}$. Cartan caracterizó algebraicamente las subvariedades totalmente geodésicas en espacios simétricos. Un subespacio $V \subset \mathfrak{g}$ se dice un *sistema triple de Lie*, si $[V, [V, V]] \subset V$.

Proposición 1.1.24 (Cartan). *Si Σ es una subvariedad totalmente geodésica, entonces $T_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie. Recíprocamente, si V es un sistema triple de Lie contenido en $\mathfrak{p}$, entonces existe una única subvariedad Σ totalmente geodésica y completa que contiene a o y satisface $T_o\Sigma = V$. Toda subvariedad totalmente geodésica está contenida en una subvariedad totalmente geodésica completa.*

Demostración. Utilizando la fórmula de curvatura en espacios simétricos, se tiene que $[T_o\Sigma, [T_o\Sigma, T_o\Sigma]] = R_{T_o\Sigma,T_o\Sigma}T\Sigma \subset T\Sigma$. Lo que prueba la primera parte.

Ahora supongamos que V es un sistema triple de Lie. El subespacio $\mathfrak{g}' = [V,V] \oplus V$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Sea G' el subgrupo conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$ y $\Sigma = G' \cdot o$, la órbita de G' por o. Luego

$$T_o\Sigma = \left\{ \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \operatorname{Exp}(tX)p \mid X \in V \right\} = V \cdot p = V.$$

Como $\gamma(t) = \operatorname{Exp}(tv)o$ es la geodésica de M con condición incial $v \in T_o\Sigma$, entonces Σ es totalmente geodésica en o. Sean $p \in \Sigma$ y $v \in T_o\Sigma$ tal que $p = \exp_o(v) = \operatorname{Exp}(v)o$. Por lo tanto para cada $w \in T_pM$ la geodésica por p en M con condición inical w es $\gamma(t) = \operatorname{Exp}(v)\alpha(t)$, donde $\alpha(t)$ es la geodésica por o con condición inicial $d(\operatorname{Exp}(tX))_o^{-1}w$. Como $\operatorname{Exp}(v) \in G'$ y Σ es totalmente geodésica en o, entonces $\gamma(t) \in \Sigma$. Lo que prueba que Σ es totalmente geodésica. Por la definición de Σ es claro que $\Sigma = \exp_o(V)$ y que Σ es completa.

Finalmente cualquier subvariedad totalmente geodésica Σ' de M que contiene o satisface $\Sigma' \subset \exp(T_o\Sigma')$. □

Proposición 1.1.25. *Sean Σ una subvariedad completa totalmente geodésica de un espacio simétrico M, $o \in \Sigma$ y s_o la simetría de M en o. Entonces, $s_o(\Sigma) = \Sigma$ y, por lo tanto, Σ también es un espacio simétrico.*

Demostración. De la proposición anterior sabemos que $\Sigma = \exp_o(V)$, donde V es un sistema triple de Lie. Si $p \in \Sigma$ y $v \in V$ tal que $\exp_o(v) = p$, entonces $s_o(p) = \exp_o(-v) \in \Sigma$. □

Ahora supongamos que $M = G/K$ es un espacio simétrico irreducible donde $G = Iso^o(M)$ y K la isotropía de un punto $o \in M$. Sea Σ una subvariedad conexa, completa y totalmente geodésica de M. Asumamos que Σ es semisimple. El subgrupo conexo G' de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}' = [T_o\Sigma, T_o\Sigma] \oplus T_o\Sigma$ se llama el *grupo de transformaciones glide de* Σ. Denotemos por K' la isotropía de o en G'. Por otro lado, el subgrupo $G^\Sigma = \{g \in G \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ se llama el *subgrupo de isometrías extrínsecas de* Σ y denotamos por K^Σ la isotropía de o en G^Σ. En general, los subgrupos G^Σ y K^Σ no son conexos. Por la prueba de la Proposición 1.1.24, el grupo G' actúa transitivamente en Σ y por lo tanto $\Sigma = G'/K'$.

Observación 1.1.26. *El álgebra $\mathfrak{g}'$ no depende del punto o. En efecto, sea p otro punto de Σ y denotemos por $\mathfrak{g}''$ al álgebra $[T_p\Sigma, T_p\Sigma] \oplus T_p\Sigma$. Pensamos a $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ como subálgebras del espacio vectorial de transvecciones infinitesimales $\mathfrak{p}$. Sea $v \in T_o\Sigma$ tal que $\gamma_v(1) = \phi_1^v(o) = p$, donde $\phi_1^v = s_{1/2}s_o$ denota la transvección geométrica de γ_v en 1. Como el álgebra de transformaciones glide es una construcción geométrica y $\phi_1^v(o) = p$, entonces*

$$(\phi_1^v)_*(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}''.$$

Por otro lado, el campo de Killing X^v definido por $X_p^v = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^v(p)$ es un elemento del sistema triple de Lie $T_o\Sigma$, visto como subespacio de $\mathfrak{p}$. Como ϕ_1^v es el flujo del campo $X^v \in \mathfrak{g}'$ y $\mathfrak{g}'$ es un álgebra de Lie (de campos en M), entonces

$$(\phi_1^v)_*(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}'.$$

Lo que prueba que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}''$ y por lo tanto el grupo de transformaciones glide no depende del punto o.

Observación 1.1.27. *De la observación anterior es claro que para todo $g \in G^{\Sigma}$ se tiene*

$$g_*(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}'.$$

Lo que implica que el subgrupo G' es un subgrupo normal de G^{Σ}.

Supongamos que $M = G/K$ es un espacio simétrico de tipo no compacto y $\Sigma = G'/K'$ es una subvariedad completa totalmente geodésica de M. Como M es una variedad de curvatura no positiva, entonces Σ también tiene curvatura no positiva. Se sigue que $\Sigma = \Sigma_0 \times \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_a$, donde Σ_0 es un espacio euclídeo y Σ_i es un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto, para $i \in \{1, \cdots, a\}$. Observemos que el grupo de transformaciones glide de Σ es $G' = G^1 \times \cdots \times G^a$, donde G^i es el grupo de transformaciones glide de Σ_i. Denotemos por $\mathfrak{g}^i$ el álgebra de Lie de G^i.

Sea $X \in \mathfrak{g}$ y X^* el campo de Killing de M inducido X. Para cada $p \in \Sigma$, denotemos por X_p^{Σ} a la proyección ortogonal de X_p^* en $T_p\Sigma$. Como Σ es totalmente geodésica se tiene que X^{Σ} define un campo de Killing en Σ. El siguiente lema es probado por Berndt y Olmos en [4].

Lema 1.1.28. [4, Lemma 2.1] *Sea M un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto. Con la notación anterior tenemos que si X es un campo de Killing en M, entonces $X^{\Sigma} \in \mathfrak{g}'$.*

Demostración. Primero supongamos que $X \in \mathfrak{p}$. En este caso $(\nabla X^*)_o = 0$ y como Σ es totalmente geodésica $(\nabla' X^{\Sigma})_o = 0$, donde ∇' es la conexión de Levi-Civita de Σ. Es decir, X^{Σ} es una transvección infinitesimal en Σ y por lo tanto $X^{\Sigma} \in \mathfrak{g}'$.

Ahora supongamos que $X \in \mathfrak{k}$. Escribamos $X^{\Sigma} = X_0^{\Sigma} + X_1^{\Sigma} + \cdots + X_d^{\Sigma}$, donde X_0^{Σ} es un campo de Killing en Σ_0 y $X_i^{\Sigma} \in \mathfrak{g}^i$, para $i = 1, \cdots, d$. Veamos que $X_0^{\Sigma} = 0$. Como X_0^{Σ} está en el álgebra de isotropía de Σ_0, basta ver que $(\nabla' X_0^{\Sigma})o = 0$. En efecto, usando la fórmula para la conexión de Levi Civita en espacios simétricos y el Lema 1.1.18 tenemos que para $u, v \in T_o\Sigma_0$ se satisface

$$\langle \nabla'_u X_0^{\Sigma}, v\rangle = \langle \nabla_u X, v\rangle = \langle [X^u, X]_o, X^v\rangle = \langle X_o, [u, v]_o\rangle = 0.$$

$\square$

Del lema anterior tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 1.1.29. *Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica de un espacio simétrico $M = G/K$ irreducible y no euclídeo, con $G = Iso^o(M)$. Sea $f \in G$ isometría de M tal que $f(\Sigma) = \Sigma$. Entonces, la restricción $f|_{\Sigma}$ es un elemento del grupo de transformaciones glide G'.*

Demostración. La isometría f es un producto de elementos de la forma $\mathrm{Exp}X$, con $X \in \mathfrak{g}^{\Sigma}$. El resultado se sigue del Lema 1.1.28 y de la igualdad $\mathrm{Exp}X^{\Sigma} = \mathrm{Exp}(X)|_{\Sigma}$, para $X \in \mathfrak{g}^{\Sigma}$. $\square$

Definimos la *parte abeliana* de un sistema triple de Lie $\mathbb{V} \subset \mathfrak{p}$ como el subespacio $T_o\Sigma_0 \subset \mathbb{V}$, donde Σ_0 es el factor (local) de De Rham plano de la subvariedad totalmente geodésica asociada al sistema triple de Lie $\mathbb{V}$.

Corolario 1.1.30. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible no euclídeo, con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de M. Supongamos que $\mathbb{V}$ es un sistema triple de Lie contenido en $\mathfrak{p}$ y denotemos por $\mathfrak{a}$ la parte abeliana de $\mathbb{V}$. Sea $K^{\mathbb{V}} = \{k \in K \mid Ad(k)(\mathbb{V}) = \mathbb{V}\}$. Si $k \in (K^{\mathbb{V}})^o$, entonces la acción de k en $\mathfrak{a}$ es trivial.*

Demostración. Denotemos por $\mathfrak{k}^{\mathbb{V}}$ el álgebra de Lie de $K^{\mathbb{V}}$. Como $\mathfrak{k}^{\mathbb{V}}$ deja invariante a $\mathbb{V}$, también debe dejar invariante a su parte abeliana $\mathfrak{a}$. Por el Lema 1.1.28, $[\mathfrak{k}^{\mathbb{V}}, \mathfrak{a}] = 0$ y por lo tanto la acción de $K^{\mathbb{V}}$ en $\mathfrak{a}$ es trivial. $\square$

Corolario 1.1.31. *Supongamos que $M = G/K$ es un espacio simétrico de tipo compacto o no compacto y $\Sigma = G'/K'$ es una subvariedad totalmente geodésica de M con grupo de transformaciones glide G' e isotropía glide K'. Entonces el par (G', K') es un par simétrico. En particular, la imagen de la representación isotrópica de los grupos $(K')^o$, $(K^{\Sigma})^o$ e $Iso^o(\Sigma)_o$ es la misma.*

Demostración. Si Σ es semisimple, el álgebra de Lie de K' está generada como espacio lineal por los tensores de curvatura $\{R_{x,y}\}_{x,y \in T_o\Sigma}$. Supongamos que $R_{x,y}$ actúa trivialmente en $T_o\Sigma$. En particular, $\langle R(x \wedge y), x \wedge y \rangle = 0$ y por el Lema 1.1.23 se tiene $R_{x,y} = 0$. Si Σ no es semisimple, $\mathfrak{k}'$ actúa trivialmente en el factor plano de Σ. Lo que prueba que la acción es casi efectiva. La involución de Cartan es la restricción de la involución de Cartan en G a G'. La última parte se sigue del Corolario 1.1.29 y de la Proposición 1.1.15. $\square$

Ejemplo 1.1.32. *La componente conexa del grupo de isometrías de la esfera unitaria S^n es el grupo SO_{n+1} y la isotropía de e_{n+1} en SO_{n+1} es*

$$(SO_{n+1})e_{n+1} = \left\{ \operatorname{diag}(A, 1) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mid A \in SO_n \right\}.$$

Abusando de notación, denotemos por SO_n a la isotropía anterior y por $\mathfrak{so}_n$ su álgebra de Lie. Se sigue que $S^n = SO_{n+1}/SO_n$ y la descomposición de Cartan de S^n es $\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$, donde pensamos a $\mathbb{R}^n$ como el subespacio

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X_v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \\ \hline -v^t & 0 \end{array} \right) \mid v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

La representación isotrópica de S^n es la representación natural de SO_n en $\mathbb{R}^n$. Más aún, es fácil ver que si $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$[[X_u, X_v], X_w] = X_{(u,w)v-(v,w)u},$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$. De lo anterior, tenemos que cualquier subespacio V de $\mathbb{R}^n$ es un sistema triple de Lie. Sea Σ la subvariedad totalmente geodésica asociada al subespacio $\{0\} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Note que

$$[X_{e_i}, X_{e_j}] = E_{ji} - E_{ij},$$

donde E_{ij} es la matriz con un 1 en la entrada ij y 0 en el resto de entradas. Se sigue que el álgebra de isotropía glide de Σ en e_{n+1} es el grupo de matrices diagonales por bloques de la forma

$$\mathfrak{k}' = [\{0\} \times \mathbb{R}^k, \{0\} \times \mathbb{R}^k] = \{\operatorname{diag}(0_{(n-k)}, X, 0) \mid X \in \mathfrak{so}_k\},$$

donde $0_{(n-k)}$ denota la matriz cero de tamaño $(n-k)\times(n-k)$. Por lo tanto, el álgebra de las transformaciones glide de Σ es

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus (\{0\}\times\mathbb{R}^k) = \{\mathrm{diag}(0_{(n-k)}, X) \mid X \in \mathfrak{so}_{k+1}\}.$$

Esto muestra que el grupo de transformaciones glide de Σ es

$$G' = \mathrm{diag}(id_{(n-k)}, SO_{k+1})$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma = G'\cdot e_{n+1} = \{0\}\times S^k \subset S^n.$$

Ejemplo 1.1.33. *Sea $\mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo y $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}P^k$ la proyección canónica. La componente conexa del grupo de isometrías de $\mathbb{C}P^n$ es SU_{n+1} y la isotropía de $\mathbb{C}e_{n+1}$ es*

$$(SU_{n+1})_{\mathbb{C}e_{n+1}} = \left\{ \begin{pmatrix} & A & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \det A^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in U_n \right\}.$$

Denotemos por $S(U_nU_1)$ a la isotropía anterior. Tenemos que $\mathbb{C}P^n = SU_{n+1}/S(U_nU_1)$. El álgebra de Lie de $S(U_nU_1)$ es

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n\mathfrak{u}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} & X & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -TrX \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{u}_n \right\}.$$

La descomposición de Cartan de $\mathbb{C}P^n$ es $\mathfrak{su}_{n+1} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n\mathfrak{u}_1)\oplus\mathbb{C}^n$, donde pensamos a $\mathbb{C}^n$ como el subespacio

$$\left\{ X_v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \\ \hline -\bar{v}^t & 0 \end{array}\right) \mid v \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

La representación isotrópica de $\mathbb{C}P^n$ está dada por

$$\begin{pmatrix} & X & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -TrX \end{pmatrix} \cdot X_v = X_{Xv+Tr(X)v}.$$

Un argumento similar al del ejemplo anterior muestra que cualquier subespacio complejo V de $\mathbb{C}^n$ es un sistema triple de Lie. Más aún, el grupo de transformaciones glide asociado al sistema triple de Lie $\mathbb{C}^k$ es $G' = \mathrm{diag}(id_{(n-k)}, SU_{k+1})$ y la subvariedad totalmente geodésica es

$$\Sigma = G'\cdot(\mathbb{C}e_{n+1}) = \pi(\{0\}\times\mathbb{C}^{k+1}) \cong \mathbb{C}P^k.$$

Terminamos esta sección enunciando, sin demostración, un resultado conocido debido N. Iwahori.

Proposición 1.1.34. **[12]** *Sea M un espacio simétrico irreducible. Si M admite una hipersuperficie totalmente geodésica, entonces M es un espacio de curvatura constante.*

1.1.5. Rango y s-órbitas

Una subvariedad F totalmente geodésica y plana de un espacio simétrico M se dice un *flat* de M. Los flats maximales de M, es decir, aquellos flats que no están estrictamente contenidos en otros, juegan un papel fundamental en la teoría de espacios simétricos. Por la correspondencia de subvariedades totalmente geodésicas y sistemas triples de Lie, tenemos que una subvariedad totalmente geodésica y completa F es un flat maximal si y sólo si su correspondiente sistema triple de Lie T_oF es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{a}$ un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ y A el subgrupo conexo abeliano de G con álgebra de Lie $\mathfrak{a}$. Sea $F = \exp_o(\mathfrak{a}) = A \cdot o$ el flat maximal correspondiente en M. Primero veamos que F es cerrado en M. La clausura $\bar{A}$ de A en G es un subgrupo conexo y abeliano de G. Sea $\bar{\mathfrak{a}}$ el álgebra de Lie de $\bar{A}$. Notemos que $\bar{\mathfrak{a}}$ está contenido en $\mathfrak{p}$ si y sólo si $\sigma(g) = g^{-1}$, para todo $g \in \bar{A}$. Como esta última es una condición cerrada y A la satisface, entonces $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$ y por maximalidad de $\mathfrak{a}$ tenemos que $\bar{A} = A$. Como K es compacto, entonces $F = A/A \cap K$ es cerrado en $M = G/K$. Si M es compacto, F también y por lo tanto es un toro plano. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los subespacios abelianos maximales de $\mathfrak{p}$

Asociamos a cada espacio simétrico de tipo no compacto M un sistema de raíces. Sea $(\ ,\ )$ el producto interno natural en $\mathfrak{g}$ tal que la transformación $\mathrm{ad}(X)$ es simétrica, para todo $x \in \mathfrak{p}$ (ver Lema 1.1.18). Tomemos $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ un subespacio abeliano maximal en $\mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{a}$ es abeliano, las transformaciones $\{\mathrm{ad}(X) \mid X \in \mathfrak{a}\}$ se diagonalizan simultáneamente y por lo tanto $\mathfrak{g}$ se descompone como suma de autoespacios

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde $\Delta \subset \mathfrak{a}^*$ es un conjunto finito, llamado *sistema de raíces restringido de* $\mathfrak{g}$ *con respecto a* $\mathfrak{a}$, formado por los $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ tal que el siguiente conjunto es no trivial;

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(X)Y = \alpha(X)Y, \text{ para todo } X \in \alpha\}.$$

El número $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ se llama la multiplicidad de la raíz α. El sistema de raíces restringido Δ, junto con las multiplicidades de sus elementos, determinan totalmente el espacio simétrico M. El producto interno $(\ ,\ )$ induce un isomorfismo de $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}^*$ y vía este isomorfismo podemos definir un producto interno en $\mathfrak{a}^*$ que también denotamos por $(\ ,\ )$. El *grupo de Weyl* asociado al sistema de raíces Δ es el grupo generado por las reflexiones $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, donde

$$s_\alpha : \mathfrak{a}^* \to \mathfrak{a}^*, \qquad s_\alpha(\mu) = \mu - 2\frac{(\mu, \alpha)}{|\alpha|^2}\alpha.$$

Un conjunto de raíces $\Lambda \subset \Delta$ se dice un conjunto de *raíces simples*, si cada elemento $\beta \in \Delta$ se escribe de manera única como combinación lineal de elementos de Λ, donde los coeficientes son o todos positivos o todos negativos. Un conjunto de raíces simples siempre existe y es único salvo por transformaciones en el grupo de Weyl.

A cada espacio simétrico M de tipo no compacto le podemos asociar un diagrama de vértices y líneas de la siguiente manera. Consideremos el conjunto de raíces simples $\Lambda = \{\alpha_1, \cdots \alpha_r\}$. Asociemos a cada raíz α_i de Λ un vértice que denotamos por $\circ$ si $2\alpha \notin \Delta$ y por $\circledcirc$ si $2\alpha \in \Delta$. Se puede mostrar que el ángulo entre dos elementos de Λ siempre es alguno de los valores

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}.$$

Conectamos los vértices correspondientes a α_i y α_j con 0, 1, 2 ó 3 lineas si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\pi}{6}$, respectivamente. Más aún, si los vértices α_i y α_j estan conectados por al menos una linea y $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle > \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle$, dibujamos una linea del vértice α_i al vértice α_j. El grafo resultante se llama el *diagrama de Dynkin de* M y no depende de $\mathfrak{a}$.

Vamos a utilizar la acción de K en $\mathfrak{p} \cong T_oM$ y el sistema de raíces para mostrar que dos elementos de $\mathcal{A}$ son conjugados por un elemento de K. Recordemos que la representación $\chi : K \to O(T_o(G \cdot o))$ dada por $\chi(k)(v) = (d_ok)v$ se llama la representación isotrópica de M en o. Si $X \in \mathfrak{p}$, la órbita $K \cdot X = \mathrm{Ad}(K)X$ es una subvariedad del espacio euclídeo $\mathfrak{p}$. Como $T_X(\mathrm{Ad}(K)X) = [\mathfrak{k}, X]$, es fácil ver que el espacio normal de $\mathrm{Ad}(K)X$ en X es el centralizador de X en $\mathfrak{p}$, esto es,

$$\nu_X(\mathrm{Ad}(K)X) = Z_{\mathfrak{p}}(X) = \{Y \in \mathfrak{p} \mid [X, Y] = 0\}.$$

Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ es tal que $X \in \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a} \subset \nu_X(\mathrm{Ad}(K)X)$. Un elemento $X \in \mathfrak{p}$ se dice *regular* si $\nu_X(\mathrm{Ad}(K)X) \in \mathcal{A}$ y *singular* en caso contrario.

El siguiente resultado dice que el conjunto de elementos regulares de $\mathfrak{p}$ es denso.

Proposición 1.1.35. *Para cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, existe un número finito de hiperplanos de $\mathfrak{a}$ tal que si $X \in \mathfrak{a}$ cae fuera de tales hiperplanos, entonces X es regular. Cada elemento regular está en un único elemento de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Como M se descompone como producto de irreducibles y el resultado es trivialmente valido para espacios de tipo euclídeo, podemos suponer que M es de tipo compacto o no compacto. Más aún, como el espacio de flats maximales y la representación isotrópica no cambia para espacios duales, podemos asumir que M es de tipo no compacto.

Sea Δ el sistema de raíces de $\mathfrak{a}$ y consideremos la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Por las relaciones de Cartan, si $Z_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $X_\alpha \in \mathfrak{p}$ y $Y_\alpha \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\mathrm{ad}(X)X_\alpha = \alpha(X)Y_\alpha; \quad \mathrm{ad}(X)Y_\alpha = \alpha(X)X_\alpha.$$

Si hacemos $\bar{Z}_\alpha = -X_\alpha + Y_\alpha$, entonces $\bar{Z}_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, esto es, $-\alpha$ también es una raíz de $\mathfrak{a}$. Sean $\mathfrak{p}_\alpha$ y $\mathfrak{k}_\alpha$ el conjunto de las componentes en $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{k}$ de todos los $Z_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, respectivamente. Tenemos que

$$\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{p}_\alpha + \mathfrak{k}_\alpha.$$

Por lo tanto podemos escoger $\Delta_+ \subset \Delta$ con la mitad de elementos de Δ tal que contiene únicamente α o $-\alpha$, para cada raiz α. Tenemos la descomposición

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{p}_\alpha.$$

Notemos que la descomposición anterior es la descomposición de $\mathfrak{p}$ en autoespacios de la familia de operadores $\{(\mathrm{ad}X)^2|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p} \mid X \in \mathfrak{a}\}$ que se diagonalizan simultáneamente. Para cada raiz $\alpha \in \Delta_+$, consideremos $\alpha^\perp = \ker \alpha$ hiperplano de $\mathfrak{a}$. Veamos que esta familia de hiperplanos satisfacen la conclusión de la proposición. Sea $X \in \mathfrak{a} \setminus \bigcup \alpha^\perp$ e $Y = Y_0 + \sum_\alpha Y_\alpha \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$, donde cada $Y_\alpha \in \mathfrak{p}_\alpha$. Como alguno de los Y_α es no nulo, tenemos que $[X, Y] = \sum_\alpha \alpha(X) Y_\alpha \neq 0$. Es decir, X es regular.

La última parte de la proposición es clara, pues cada elemento de $\mathcal{A}$ que contiene a $X \in \mathfrak{p}$ debe estar contenido en $Z_{\mathfrak{p}}(X)$. □

Los hiperplanos $\alpha^\perp \subset \mathfrak{a}$ de la proposición anterior, se llaman *hiperplanos de reflexión de* $\mathfrak{a}$. Las componentes conexas de $\mathfrak{a} \setminus \bigcup \alpha^\perp$ se llaman *cámaras de Weyl de* $\mathfrak{a}$.

Usando la proposición anterior podemos probar que dos elementos de $\mathcal{A}$ son conjugados por un elemento de K.

Proposición 1.1.36. *Cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ interseca ortogonalmente toda órbita de la acción de K en $\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{a}' \in \mathcal{A}$ es otro abeliano maximal, entonces existe $k \in K$ tal que $\mathfrak{a}' = Ad(k)\mathfrak{a}$.*

Demostración. Sabemos que si $X \in \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a} \subset \nu_X(\mathrm{Ad}(K)X)$ y por lo tanto cada vez que $\mathfrak{a}$ interseque a una órbita de la acción de K en $\mathfrak{p}$, lo hace ortogonalmente.

Ahora veamos que $\mathfrak{a}$ interseca a toda órbita. Como el conjunto de elementos regulares es denso en $\mathfrak{p}$, basta mostrar que $\mathfrak{a}$ interseca a la órbita de todo elemento regular. Sea X regular y $\mathfrak{a}' = \nu_X(T_X \mathrm{Ad}(K)X)$ abeliano maximal de $\mathfrak{p}$. Fijemos $Y \in \mathfrak{a}$ un elemento regular. Como $\mathrm{Ad}(K)Y$ es compacto, existe un $\mathrm{Ad}(k)Y$ elemento de distancia mínima a X. Por lo tanto, el vector $X - \mathrm{Ad}(k)Y$ es perpendicular a la órbita $\mathrm{Ad}(K)Y$, es decir, $X - \mathrm{Ad}(k)Y \in \nu_{\mathrm{Ad}(k)Y}(\mathrm{Ad}(K)Y)$. Por otro lado $\nu_{\mathrm{Ad}(k)Y}(\mathrm{Ad}(K)Y) = \mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{a})$, pues $\mathrm{Ad}(k)$ es una isometría e Y es un elemento regular. Se sigue que $\mathfrak{a}$ interseca la órbita de X en $\mathrm{Ad}(k^{-1})X$. Como X es regular, es claro que $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. □

De la proposición anterior, todo elemento de $\mathcal{A}$ tiene la misma dimensión.

Definición 1.1.37. *Definimos el rango de M como la dimensión de cualquier subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ y lo denotamos por* $\mathrm{rk}(M)$.

Observación 1.1.38. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y Σ una subvariedad totalmente geodésica, semisimple y completa de M. Denotemos por $(\cdot, \cdot)$ el producto interno en $\mathfrak{p} = T_oM$ del Lema 1.1.18. Note que Σ es un espacio simétrico de tipo no compacto con descomposición de Cartan $\mathfrak{g}' = [T_o\Sigma, T_o\Sigma] \oplus T_o\Sigma$ e involución $d_o\sigma|_{\mathfrak{g}'}$. Si M y Σ tienen el mismo rango, entonces todo abeliano maximal $\mathfrak{a}$ de $T_o\Sigma$ es un subespacio abeliano maximal de T_oM. En este caso, es claro que toda raiz α de $\mathfrak{g}'$ es una raíz de $\mathfrak{g}$ y $\dim \mathfrak{g}'_\alpha \leq \dim \mathfrak{g}_\alpha$. Más aún, el producto interno en Σ del Lema 1.1.18 es $(\cdot, \cdot)|_{\Sigma \times \Sigma}$. Se sigue que el diagrama de Dynkin de Σ es un subdiagrama del diagrama de Dynkin de M.*

En los resultados anteriores fue de gran utilidad considerar las órbitas de la representación isotrópica del espacio simétrico. Una *s-órbita* es una órbita de la representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple M. Definimos la *representación slice de* $M = G/K$ como $\rho : K \to O(\nu_o(G \cdot o))$ dada por $\rho(k)(v) = d_o k(v)$. Recordemos que si $N \subset M$ es una subvariedad de una variedad Riemanniana M y ∇ es la conexión de Levi Civita de M, entonces podemos definir la *conexión normal* $\nabla^{\perp}$ en el fibrado νN mediante la fórmula $\nabla^{\perp}_X \xi = (\nabla_X \xi)^{\nu N}$. La holonomía de $\nabla^{\perp}$ se llama la *holonomía normal* de N. Sabemos que la representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple M es la holonomía de M (Proposición 1.1.15). El siguiente resultado debido a Heintze y Olmos es el análogo para la holonomía normal en el contexto de subvariedades (ver [9] o [1, Theorem 3.1.7]).

Recordemos que una subvariedad N de una variedad Riemanniana M se dice *full* (o *substancial*), si N no está contenida en ninguna subvariedad totalmente geodésica de M.

Teorema 1.1.39. **[9]** *Sea $M = G/K$ espacio simétrico de tipo no compacto, con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Sea $0 \neq v \in T_oM$ y $N = K \cdot v \subset T_oM$ su correspondiente s-órbita. Supongamos que N es una subvariedad full del espacio euclídeo T_oM. Entonces, la holonomía normal de N es la representación slice efectiva de K_v en $\nu_v N$.*

1.2. Sistemas de holonomía y teorema de Simons

En esta sección estudiamos algunos resultados de sistemas de holonomía. Como referencia principal seguimos [1].

Sea V un espacio vectorial con un producto interno $\langle\, ,\, \rangle$. Denotemos por $\mathcal{T}$ al espacio vectorial de todos los tensores de tipo $(1, 3)$ en V. Podemos identificar a $\mathcal{T}$ con el espacio de todas las funciones bilineales $T : V \times V \to End(V)$. Denotamos por $T_{u,v}$ a la imágen de (u, v) por $T \in \mathcal{T}$. El grupo ortogonal $O(V)$ actúa en $\mathcal{T}$ por

$$(gT)_{u,v} = gT_{g^{-1}(u),g^{-1}(v)}g^{-1}.$$

Y derivando esta acción tenemos la acción de $\mathfrak{so}(V)$ en $\mathcal{T}$ por

$$(AT)_{u,v} = AT_{u,v} - T_{Au,v} - T_{u,Av} - T_{u,v}A.$$

Un tensor $R \in \mathcal{T}$ se dice un *tensor algebraico de curvatura* si satisface las siguientes identidades

- $R_{x,y} = -R_{y,x}$;
- $\langle R_{x,y}z, w\rangle = -\langle R_{x,y}w, z\rangle$;
- $\langle R_{x,y}z, w\rangle = \langle R_{z,w}x, y\rangle$;
- $R_{x,y}z + R_{y,z}x + R_{z,x}y = 0$ (Primera identidad de Bianchi).

El conjunto de todos los tensores de curvatura algebraicos de V forman un módulo sobre $SO(V)$.

Si $\{e_1, \cdots , e_n\}$ es una base ortonormal de V y R es un tensor algebraico de curvatura, la curvatura escalar de R no depende de la base ortonormal y esta dada por

$$k(R) = \sum_{i,j}\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle.$$

La curvatura escalar es invariante por la acción de $SO(V)$ sobre todos los tensores algebraicos de curvatura. Un subgrupo compacto G de $O(V)$ se dice un *grupo de holonomía de R*, si $R_{V,V} \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

Definición 1.2.1. *Un sistema de Holonomía es una terna $[V, R, G]$, donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto interno $\langle \, , \, \rangle$, $R : V \times V \to \mathfrak{g}$ es un tensor de curvatura algebraico de V y G es un grupo conexo de holonomía para R. El sistema de holonomía se dice:*

- *Simétrico, si $gR = R$ para todo $g \in G$;*
- *Irreducible, si la acción de G en V es irreducible;*
- *Transitivo, si la acción de G en la esfera unitaria de V es transitiva.*

Si M es una variedad Riemanniana con tensor de curvatura R, se tiene que $[T_pM, R_p, hol^o_p(M)]$ es un sistema de holonomía para todo $p \in M$.

Como el tensor de curvatura en un espacio simétrico es paralelo, se sigue que en un espacio simétrico M el sistema de holonomía $[T_pM, R_p, hol_p(M)]$ es simétrico, para todo $p \in M$.

Recíprocamente si $[V, R, K]$ es un sistema de holonomía simétrico, podemos construir un espacio simétrico como sigue. Consideremos el espacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus V$ y definamos la transformación bilineal antisimétrica $[\, , \,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mediante

$$[A, B] = AB - BA, \quad [x, y] = -R_{x,y}, \quad [A, x] = Ax, \quad A, B \in \mathfrak{k}, x, y \in V.$$

Usando que $[V, R, K]$ es un sistema de holonomía simétrico, es fácil ver que $[\, , \,]$ satisface la ecuación de Jacobi y, por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que satisface las relaciones

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [V, V] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, V] \subset V.$$

La transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dado por $\phi(A+x) = A-x$ es un isomorfismo de álgebras de Lie tal que los autoespacios asociados al autovalor 1 y -1 son $\mathfrak{k}$ y V, respectivamente. Sea G el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\sigma : G \to G$ automorfismo tal que $d\sigma = \phi$. Se sigue que (G, K) es un par simétrico con involución σ y por lo tanto $M = G/K$ es un espacio simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus V$. Tenemos que V es isomorfo a T_KM y bajo esta identificación la curvatura de M en G es el tensor de curvatura algebraico R del sistema de holonomía. Del teorema de descomposición de De Rham es claro que M es irreducible si y sólo si el sistema de holonomía es irreducible. Esta construcción se llama la *construcción de Cartan para el sistema de holonomía* $[V, R, K]$.

Proposición 1.2.2. (Simons [21]) *Sean $[V, R, G]$ y $[V, R', G]$ dos sistemas de holonomía irreducibles y simétricos con $R \neq 0$. Entonces, R' es un múltiplo escalar de R.*

Demostración. De la construcción de Cartan, sabemos que R es el tensor de curvatura de un espacios simétricos irreducible. Como $R \neq 0$, del Corolario 1.1.22 tenemos que $k(R) \neq 0$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que la curvatura escalar de $\bar{R} = R' - cR$ es 0. El sistema de holonomía $[V, \bar{R}, G]$ es irreducible, simétrico y tiene curvatura escalar 0. Del Corolario 1.1.22 concluimos que $\bar{R} = 0$. □

Enunciamos sin demostración el teorema de Simons.

Teorema 1.2.3. (Simons [21]) *Un sistema de holonomía irreducible que no es transitivo es simétrico.*

Como aplicación del teorema de Simons y la Proposición 1.2.2 tenemos el *Slice lemma* para subvariedades totalmente geodésicas de espacios simétricos, debido a Berndt y Olmos [2]. Más adelante veremos que el Slice lemma es de gran utilidad para el estudio de subvariedades reflectivas. Sea $M = G/K$ un espacio simétrico, donde $G = Iso^o(M)$ y K la isotropía de o en G. Si Σ es una subvariedad totalmente geodésica de M, podemos escribir el fibrado tangente de M como $TM = T\Sigma \oplus \nu\Sigma$, donde $\nu\Sigma$ denota el fibrado normal de Σ en M.

Lema 1.2.4. [2, Slice lemma] *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible con rk$(M) \geq 2$. Suponga que Σ es una subvariedad no plana totalmente geodésica de M que contiene a o y sea G' el grupo de transformaciones glide de Σ. Entonces, la representación slice conexa $\rho : (K')^o \to O(\nu_o(\Sigma))$ definida por $\rho(k)(v) = d_o k(v)$ es no trivial.*

Demostración. Supongamos que la representación ρ es trivial y sea R el tensor de curvatura de M. Recordemos que el álgebra de Lie de K' es $\mathfrak{k}' = \{R_{x,y} \mid x, y \in T_o\Sigma\}$. Como la representación slice es trivial, tenemos que $R_{T_o\Sigma, T_o\Sigma}\nu_o\Sigma = \{0\}$. Usando esta igualdad, es fácil ver que podemos definir un nuevo tensor algebraico de curvatura $\bar{R}$ en $T_oM = T_o\Sigma \oplus \nu_o\Sigma$ por

$$\bar{R}_{x,y} = R_{x,y}, \quad \bar{R}_{x,\zeta} = 0, \quad \bar{R}_{\zeta,\eta} = 0; \quad x, y \in T_o\Sigma, \quad \zeta, \eta \in \nu_o\Sigma.$$

Notemos que $\bar{R}$ toma valores en $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}$. El sistema de holonomía $[T_oM, \bar{R}, K]$ es irreducible y como rk$(M) \geq 2$, no es transitivo. Del teorema de Simons $[T_oM, \bar{R}, K]$ es simétrico. Como Σ nos es plana, tenemos que $\bar{R} \neq 0$ y por la Proposición 1.2.2, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $R = \lambda\bar{R}$, lo que es una contradicción, pues $\bar{R}$ es degenerado y R no lo es (M es de tipo compacto o no compacto). □

Tenemos otra consecuencia del teorema de Holonomía de Simons.

Lema 1.2.5. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible con rk$(M) \geq 2$, $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Si $v \in T_oM$, entonces $K = \{A \in O(T_oM) \mid A(K \cdot v) = K \cdot v\}^o$.*

Demostración. Sea $\tilde{K} = \{A \in O(T_oM) \mid A(K \cdot v) = K \cdot v\}^o$. Claramente $K \subset \tilde{K}$ y $\tilde{K} \cdot v = K \cdot v$. Como M es irreducible y rk$(M) \geq 2$, la acción de $\tilde{K}$ en T_oM es irreducible y no transitiva en la esfera. Del teorema de Simons el sistema $[T_oM, R, \tilde{K}]$ es simétrico. Se sigue que el álgebra de Lie de $\tilde{K}$ es generado por todos los tensores de curvatura $R_{x,y}$ y por lo tanto $\tilde{K} = K$. □

Capítulo 2

Subvariedades reflectivas

En este capítulo estudiamos subvariedades reflectivas en espacios simétricos. Una subvariedad Σ de un variedad Riemanniana M se dice *reflectiva* si existe la reflexión en Σ, esto es, existe $s_\Sigma \in Iso(M)$ tal que Σ es una componente conexa del conjunto de puntos fijos de s_Σ y $d_p s_\Sigma|_{\nu_p\Sigma} = -Id_{\nu_p\Sigma}$, para todo $p \in \Sigma$. El siguiente resultado es bien conocido e implica que Σ es totalmente geodésica.

Lema 2.0.1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de isometrías en una variedad Riemanniana M y Σ una componente conexa del conjunto de puntos fijos de $\mathcal{F}$. Entonces Σ es una subvariedad totalmente geodésica. En particular, toda subvariedad reflectiva es totalmente geodésica. Si $\mathcal{F}$ consta de una sola isometría involutiva, entonces Σ es reflectiva.*

Demostración. Sea $p \in \Sigma$. Elijamos $V \subset T_pM$ y U un entorno convexo de p en M tal que $\exp : V \to U$ es un difeomorfismo. Sea $W \subset T_pM$ el subespacio de puntos fijos de la familia $\{d_p f \mid f \in \mathcal{F}\}$. Es fácil ver que $\exp(W \cap V) = U \cap \Sigma$. Por lo tanto $U \cap \Sigma$ es una subvariedad totalmente geodésica de M. Como p es arbitrario, M es totalmente geodésica. Si Σ es el conjunto de puntos fijos de una isometría involutiva f, entonces f es la reflexión en Σ. $\square$

Cuando M es un espacio simétrico podemos dar otra caracterización para subvariedades reflectivas.

Proposición 2.0.2. [18, Theorem 3] *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y $o = K$. Si Σ es una subvariedad reflectiva de M que contiene a o, entonces los subespacios $T_o\Sigma$ y $\nu_o\Sigma$ son sistemas triples de Lie de $\mathfrak{p}$. Recíprocamente, si M es simplemente conexo y $\mathbb{V} \subset \mathfrak{p}$ es un sistema triple de Lie tal que el subespacio ortogonal a $\mathbb{V}$ en $\mathfrak{p}$ también es un sistema triple de Lie, entonces la subvariedad completa y totalmente geodésica definida por $\mathbb{V}$ es una subvariedad reflectiva de M.*

Demostración. Como Σ es totalmente geodésica, $T_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie. Sean s_o la simetría geodésica en o y s_Σ la reflexión en Σ . El conjunto de puntos fijos de $s_\Sigma \circ s_o$ es una subvariedad totalmente geodésica que tiene como espacio tangente $\nu_o\Sigma$. Por lo tanto, $\nu_o\Sigma$ también es un sistema triple de Lie.

Ahora asumamos que M es simplemente conexa. Sea τ la reflexión ortogonal de T_oM en $\mathbb{V}$. Usando que $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}^\perp$ son sistemas triple de Lie es fácil ver que $\tau(R) = R$. Se sigue de la proposición 1.1.1 que existe la reflexión ortogonal s_Σ de Σ en M. $\square$

Por la proposición anterior, diremos que un sistema triple de Lie $\mathbb{V}$ es *reflectivo*, si su complemento ortogonal también es un sistema triple de Lie.

Observación 2.0.3. Si $M = G/K$ y $M^* = G^*/K$ son espacios simétricos irreducibles simplemente conexos duales, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ y $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}+i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ son las correspondientes descomposiciones de Cartan en $o = eK \in M$ y $o' = eK \in M^*$. La representación isotrópica de G/K en $T_oM \cong \mathfrak{p}$ es equivalente a la representación isotrópica de G^*/K en $T_{o'}M^* \cong i\mathfrak{p}$. Note que $\mathbb{V} \subset \mathfrak{p}$ es un sistema triple de Lie en $\mathfrak{p}$ si y sólo si $i\mathbb{V} \subset i\mathfrak{p}$ es un sistema triple de Lie en $i\mathfrak{p}$. De esta forma tenemos una biyección natural entre los sistemas triple de Lie en $\mathfrak{p}$ e $i\mathfrak{p}$. Equivalentemente tenemos una biyección entre las subvariedades conexas, completas y totalmente geodésicas de M y M^*.

Sea Σ subvariedad conexa, completa y totalmente geodésica de M con $o \in \Sigma$ y sea Σ^* la subvariedad conexa, completa y totalmente geodésica de M^* con $T_{o'}\Sigma^* = iT_o\Sigma$. Entonces $K^{\Sigma} = K^{\Sigma^*}$ (vía la representación isotrópica). Más precisamente, si $k \in K^{\Sigma}$, entonces $-i(d_ok)i$ es una isometría lineal de $i\mathfrak{p} = T_{o'}M^*$ que deja invariante a $iT_o\Sigma$ y qué además preserva el tensor de curvatura R^* de M^* en o', pues $R^*(ix, iy)iz = -iR(x, y)z$ para todo $x, y, z \in T_oM$. De la Proposición 1.1.1 $-i(d_ok)i$ es la diferencial de una isometría en M^* que fija o'. En particular, Σ es reflectiva si y sólo si Σ^* es reflectiva.

Ejemplo 2.0.4. *Sea $M = SO_{k+n}/SO_kSO_n$ la Grassmanniana de subespacios orientados de dimensión k en $\mathbb{R}^{k+n}$, donde identificamos SO_kSO_n con la isotropía del subespacio $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, es decir,*

$$SO_kSO_n = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in SO(k), \quad B \in SO(n) \right\}.$$

La descomposición de Cartan de M es $\mathfrak{so}_{k+n} = \mathfrak{so}_k\mathfrak{so}_n \oplus \mathfrak{p}$, donde

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix} \mid X \in M_{k,n}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Note que la representación isotrópica de M está dada por

$$\chi \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AXB^t \\ -(AXB^t)^t & 0 \end{pmatrix}$$

Sea

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in M_{k,n-1}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Un cálculo directo muestra que $\mathbb{V}$ es un sistema triple de Lie reflectivo con

$$\mathbb{V}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix} \mid X = \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Sean Σ y $\Sigma^{\perp}$ las subvariedades totalmente geodésicas asociadas a $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}^{\perp}$, respectivamente. Es fácil ver que Σ es isométrica a $SO_{k,k+n-1}/SO_kSO_{n-1}$ y $\Sigma^{\perp}$ es isométrica a S^k. Note que si k es par y n es impar, entonces la simetría τ en Σ está dada por

$$d_o\tau = \chi \begin{pmatrix} -id_k & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(-id_{n-1}, 1) \end{pmatrix}.$$

En particular, $\tau \in SO_kSO_n$.

2.1. s-órbitas

En esta sección recordamos algunos resultados de subvariedades reflectivas y s-órbitas probados por Olmos y Berndt en [2] y [4]. Por completitud, incluimos las demostraciones de algunos resultados de [4].

Una *s-órbita* es una órbita de la representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple $M = G/K$, donde $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$ es la isotropía en un punto $o \in M$. Las s-órbitas también son llamados R-espacios en la literatura. Es conocido que las s-órbitas son subvariedades del espacio euclídeo T_oM con curvaturas principales constantes (ver [1, Proposition 3.1.6]). Más aún, si M es irreducible las s-órbitas son subvariedades irreducibles y full de T_oM.

Recordemos que una subvariedad S de una variedad Riemanniana M se dice una *subvariedad simétrica*, si para todo punto $p \in S$ existe una isometría $\tau_p \in Iso(M)$ tal que $\tau_p(p) = p$, $\tau_p(S) = S$ y

$$d_p\tau_p(X) = \begin{cases} -X & si \quad X \in T_pS \\ X & si \quad X \in \nu_pS \end{cases} .$$

La simetría τ_p, se llama la *simetría extrínseca* de S en p. Para s-órbitas tenemos los siguientes resultados probados por Olmos y Berndt en [4].

Lema 2.1.1. [4, Lemma 4.1] *Sea $M = G/K$ espacio simétrico semisimple, simplemente conexo, irreducible con $G = Iso^o(M)$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan. Asumamos que $rk(M) \geq 2$ y que $v \in T_oM$ es tal que la órbita $K \cdot v$ es una suvbariedad simétrica del espacio euclídeo $\mathfrak{p}$. Entonces, $T_v(K \cdot v)$ y $\nu_v(K \cdot v)$ son sistemas triples de Lie en $\mathfrak{p}$ y la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ es unidimensional.*

Demostración. Escribamos $N = K \cdot v$. Sea τ la simetría extrínseca de N en v. Denotemos por R el tensor de curvatura de M en o. Por el teorema de Ambrose-Singer y la Proposición 1.1.15, el tensor R toma valores en $\mathfrak{k}$ (pensando a K como subgrupo $SO(T_oM)$). Sea $\bar{K}$ el subgrupo de $SO(T_oM)$ generado por K y $\tau K \tau^{-1}$. Note que $\bar{K} \cdot v = N$ y como $\mathrm{rk}(M) \geq 2$, $\bar{K}$ no es transitivo en la esfera unidad. Se sigue que los sistemas de holonomía $[T_oM, R, \bar{K}]$ y $[T_oM, \tau(R), \bar{K}]$ son irreducibles y no transitivos. Por el teorema de Simons y la Proposición 1.2.2 concluimos que $\tau(R)$ es un múltiplo escalar de R. Como R y $\tau(R)$ tienen la misma curvatura escalar, entonces $R = \tau(R)$. De la Proposición 1.1.1 existe $h \in Iso(M)$ tal que $d_oh = d_v\tau$. Los espacios ν_vN y T_vN son el conjunto de puntos fijos de d_oh y $d_o(s_oh)$, respectivamente. Por lo tanto , ν_vN y T_vN son sistemas triples de Lie.

Veamos que la parte abeliana $\mathfrak{a}$ de $\nu_vN = Z_\mathfrak{p}(v)$ es $\mathbb{R}v$. Claramente $v \in \mathfrak{a}$. Denotemos por $\nabla^\perp$ a la conexión normal de N en $\mathfrak{p}$. Sea K_v la isotropía de v en K. Del Corolario 1.1.30 la acción de K_v^o en $\mathfrak{a}$ es trivial. Por otro lado, del Teorema 1.1.39, la holonomía normal es la parte efectiva de la representación slice de K_v en ν_vN. Por lo tanto la holonomía normal restringida actúa trivialmente en $\mathfrak{a}$. De esto último se sigue que cada $\xi \in \mathfrak{a}$ define un campo local normal $\nabla^\perp$-paralelo $\tilde{\xi}$ en N tal que $\tilde{\xi}_v = \xi$. Denotemos por A_ξ al operador de forma de N en ξ. Como N está contenido en la esfera de radio $\|v\|$, se tiene que $A_v = -Id$.

Supongamos que $\dim(\mathfrak{a}) \geq 2$ y tomemos $\xi_0 \in \mathfrak{a} \setminus \mathbb{R}v$. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ los autovalores de A_ξ. Si $r = 1$, entonces $A_\xi = \lambda Id$ y por lo tanto $A_{\xi - \lambda v} = 0$. En este caso N no es full en $\mathfrak{p}$ (ver [1, Theorem 1.5.1]), lo cual que M es irreducible. Por lo tanto $r \geq 2$.

Como $r \geq 2$, alguno de los λ_i es no nulo. Reordenando los autovalores si hace falta, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Sea $\xi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\xi$ y $w = v + \xi_1$. Note que la órbita $K \cdot w$ es igual a la variedad paralela focal

$$N_{\xi_1} = \{z + \xi_1(z) \mid z \in N\}.$$

De lo anterior tenemos que $T_w(K \cdot w) \subsetneq T_v N$. Escribamos $T_v N = T_w(K \cdot w) \oplus \mathbb{V}$ como suma ortogonal de subespacios. Tenemos que $\nu_w(K \cdot w) = \mathbb{V} \oplus \nu_v N$. La simetría extrínseca de N satisface $\tau(w) = w$, $d_w\tau(x) = -x$ para todo $x \in T_v N = T_w(K \cdot w) \oplus \mathbb{V}$ y $d_w\tau(y) = y$ para todo $y \in \nu_v N$. Sea α la segunda forma fundamental de $K \cdot w$. Si $x, y \in T_w(K \cdot w)$, entonces

$$d_w\tau(\alpha(x, y)) = \alpha(d_w\tau(x), d_w\tau(y)) = \alpha(-x, -y) = \alpha(x, y).$$

Es conocido que la órbita $K \cdot w$ es una subvariedad full (si no fuera full, el espacio lineal generado por $K \cdot w$ es K-invariante) con curvaturas principales constantes del espacio euclídeo $\mathfrak{p}$ (ver [1, Proposition 3.1.6]). Por lo tanto, el primer espacio normal $\mathcal{N}^1_w := \{\alpha(x, y) \mid x, y \in T_w(K \cdot w)\}$ coincide con el espacio normal $\nu_w(K \cdot w)$. Esto implica que $d_w\tau(x) = x$, para todo $x \in \nu_w(K \cdot w)$, lo que contradice que $d_w\tau(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{V}$. Concluimos que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}v$.

□

Un sistema triple de Lie se dice *semisimple*, si la correspondiente subvariedad reflectiva no tiene factor euclídeo.

Proposición 2.1.2. [4, Lemma 4.2] *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible, simplemente conexo con $rk(M) \geq 2$, $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de M y supongamos que $\mathfrak{p} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ donde $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ son sistemas triples de Lie ortogonales. Entonces $\mathbb{W}$ es no semisimple si y sólo si existe $v \in \mathbb{W}$ tal que $K \cdot v$ es una subvariedad simétrica de $\mathfrak{p}$ que satisface $\mathbb{V} = T_v(K \cdot v)$ y $\mathbb{W} = \nu_v(K \cdot v)$. En este caso, la parte abeliana de $\mathbb{W}$ es $\mathbb{R}v$.*

Demostración. Una de la implicaciones y la última parte de la proposición fue probada en el lema anterior. Falta mostrar que si $\mathbb{W}$ es no semisimple, entonces existe v satisfaciendo dichas propiedades. Supongamos que $\mathbb{W}$ es no semisimple y sea $\mathfrak{a}$ la parte abeliana de $\mathbb{W}$. Tomemos $v \in \mathfrak{a}$ no nulo. Claramente $\mathbb{W} \subset Z_{\mathfrak{p}}(v) = \nu_v(K \cdot v)$. Como $\mathbb{W}$ es el espacio tangente en o a una subvariedad reflectiva de M, entonces existe $\tau \in Iso(M)$ tal que $\tau(o) = o$, $d_o\tau|_{\mathbb{V}} = -Id$ y $d_o\tau|_{\mathbb{W}} = Id$. Tenemos que

$$d_o\tau(K \cdot v) = d_o\tau(K \cdot d_o\tau^{-1}v) = (d_o\tau K d_o\tau^{-1}) \cdot v = K \cdot v.$$

Por otro lado, $T_v(K \cdot v) \subset \mathbb{V}$ y por lo tanto $d_o\tau|_{T_v(K\cdot v)} = -Id$. Más aun, si $x, y \in T_v(K \cdot v)$ y α es la segunda forma fundamental de $K \cdot v$ en $T_o M$, tenemos que

$$d_o\tau\alpha(x, y) = \alpha(d_o\tau x, d_o\tau y) = \alpha(-x, -y) = \alpha(x, y).$$

Como en la última parte de la demostración del lema anterior, esto implica que $d_o\tau(x) = x$ para todo $x \in \nu_v(K \cdot v)$. Es decir, $\nu_v(K \cdot v) \subset \mathbb{W}$ y por lo tanto $\nu_v(K \cdot v) = \mathbb{W}$. La isometría lineal $d_o(s_o \circ \tau)$ es la simetría extrínseca de $K \cdot v$ en $\mathfrak{p}$. □

Enunciamos el siguiente resultado de [2] sin demostración (la prueba involucra argumentos geométricos sofisticados).

Teorema 2.1.3. [2, Theorem 4.2] *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y sea Σ una subvariedad totalmente geodésica no semisimple de M. Entonces, Σ es maximal si y sólo si existe un vector $v \in T_oM$ tal que la órbita $K \cdot v$ es simétrica y $T_o\Sigma = \nu_v(K \cdot v)$.*

Ejemplo 2.1.4. *Sea M el espacio simétrico $SL_3(\mathbb{R})/SO_3$. La descomposición de Cartan de M es $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}_3 \oplus Sim_0(3)$, donde $Sim_0(3)$ denota las matrices simétricas con entradas reales y traza nula. La representación isotrópica de M es la conjugación de SO_3 en $Sim_0(3)$. La órbita N de la matriz diagonal*

$$B = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

es el embedding de Veronese de $\mathbb{R}P^2$ en $Sim_0(3) \cong \mathbb{R}^5$ (Ver por ejemplo Section 2.4.3 en [1]). El espacio tangente $T_BN = [\mathfrak{so}_3, B] \subset Sim_0(3)$ es

$$T_BN = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un cálculo directo muestra que T_BN es un sistema triple de Lie con álgebra de transformaciones glide

$$\mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & x \\ -z & 0 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathfrak{so}_{1,2}.$$

Se sigue que la subvariedad totalmente geodésica Σ asociada a T_BN es isométrica a $\mathbb{R}H^2 = SO_{1,2}/SO_2$. El espacio $\mathbb{V}$ ortogonal a T_BN en $Sim_0(3)$ es el sistema triple de Lie

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ z & y & 0 \\ 0 & 0 & -x-y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Los subespacios $\mathbb{V}_1 = \mathrm{Span}\{E_{11} - E_{33}\}$ y $\mathbb{V}_2 = \mathrm{Span}\{E_{22} - E_{33}, E_{12} + E_{21}\}$ son sistemas triple de Lie ortogonales que satisfacen

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2.$$

Es fácil ver que la subvariedad totalmente geodésica $\Sigma^\perp$ asociada $\mathbb{V}$ es isométrica a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}H^2$. La simetría τ en $\Sigma^\perp$ está definida por

$$d_o\tau \begin{pmatrix} a & z & x \\ z & b & y \\ x & y & -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & z & -x \\ z & b & -y \\ -x & -y & -a-b \end{pmatrix}$$

Esto muestra que la subvariedad $N \cong \mathbb{R}P^2$ de $\mathbb{R}^5$ es una órbita simétrica. Note que τ es la conjugación por la matriz diagonal $\mathrm{diag}(1, -1, -1)$ y por lo tanto $\tau \in SO_3$.

2.2. Isometrías de orden 2

En esta sección estudiamos algunas propiedades de subvariedades reflectivas mediante la existencia de isometrías de orden dos. Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible de tipo compacto y simplemente conexo, con $G = Iso^o(M)$. Sea $\gamma_v(t)$ geodésica cerrada por $o = K$ con $\gamma_v'(0) = v$. Rescaldando v podemos asumir que $\gamma_v(t)$ tiene periodo 1. Sea $\phi_1^v = s_{\gamma(1/2)}s_o$ la transvección geométrica a lo largo de γ_v en 1. Como γ_v tiene periodo 1, se tiene que $(\phi_1^v)^2 = \phi_2^v = s_{\gamma(1)}s_o = Id$. Para evitar que ϕ_1^v sea trivial vamos a hacer esta construcción en un cociente simétrico de M.

Definimos en M la relación de equivalencia tal que $p \sim q$ si y sólo si $G_p = G_q$, donde G_p y G_q son los grupos de isotropía de p y q respectivamente. Denotemos por $\bar{M}$ a $M/\sim$ dotado con la topología cociente, por $\pi : M \to \bar{M}$ a la proyección y por $\bar{p}$ la clase de equivalencia de p. Si g es una isometría de M y $p \in M$, se tiene que $G_{g(p)} = gG_pg^{-1}$ y por lo tanto g induce un homeomorfismo $\bar{g} : \bar{M} \to \bar{M}$ tal que $\bar{g}\pi = \pi g$. Se sigue que G actúa transitivamente en $\bar{M}$ por homeomorfismos y por lo tanto $\bar{M}$ es homeomorfo a $G/G_{\bar{o}}$, con $G_{\bar{o}}$ subgrupo compacto de G. Dotemos a $\bar{M}$ con la estructura de variedad diferenciable de $G/G_{\bar{o}}$. Denotemos por $\bar{s}_{\bar{o}}$ el difeomorfismo en $\bar{M}$ inducido por s_o. Note que el par $(G, G_{\bar{o}})$, es un par simétrico con simetría $\sigma : G \to G$ definida por $\sigma(g) = \bar{s}_{\bar{o}}g\bar{s}_{\bar{o}}$. Dotemos a $\bar{M}$ con una métrica simétrica.

Lema 2.2.1. *La componente conexa por la identidad de $G_{\bar{o}}$ es K. Como consecuencia π es un cubrimiento y se puede elegir la métrica en $\bar{M}$ tal que π es una isometría local.*

Demostración. Como la isotropía G_o actúa irreduciblemente en T_oM, entonces en un entorno normal de o el único punto fijo de G_o es o. Por lo tanto, si $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $\pi(\mathrm{Exp}(tX)o) = \pi(o)$ para todo t, se debe tener que $\mathrm{Exp}(tX)o = o$, para todo t suficientemente pequeño. Es decir, el álgebra de Lie de $G_{\pi(o)}$ es $\mathfrak{k}$. Lo que prueba que la componente conexa de la identidad de $G_{\bar{o}}$ es K. Note que mediante las identificaciones de M y $\bar{M}$ con cocientes homogéneos se tiene que $\pi : G/K \to G/G_{\bar{o}}$ está dada por $gK \to gG_{\bar{o}}$ y por lo tanto es un cubrimiento. Como M es irreducible se tiene que la métrica de M y la métrica inducida por π difieren por un múltiplo. De esto último es claro que se puede tomar la métrica en $\bar{M}$ tal que π es una isometría local. □

El espacio $\bar{M}$ es llamado frecuentemente en la literatura como el *bottom space* de M. Como la componente conexa de $G_{\bar{p}}$ es G_p, se sigue que dos puntos distintos de $\bar{M}$ tienen grupos de isotropía distintos. Denotemos por $\mathfrak{k}^p$ el álgebra de Lie de G_p (o de $G_{\bar{p}}$). Sea $\bar{s}_{\bar{p}}$ la simetría geodésica por $\bar{p}$ en $\bar{M}$.

Lema 2.2.2. *El par $(G, G_{\bar{o}})$ es un par simétrico efectivo y $G = Iso^o(\bar{M})$ (con la representación canónica de G en $\bar{M}$). Si $\bar{p} \neq \bar{q}$, entonces $\bar{s}_{\bar{p}} \neq \bar{s}_{\bar{q}}$. En particular, si $\gamma_{\bar{v}}$ es una geodésica cerrada con periodo 1, la isometría $\phi_1^{\bar{v}}$ es no trivial.*

Demostración. El subgrupo

$$N = \{g \in G \mid gG_pg^{-1} = G_p, \text{ para todo } p \in M\}$$

coincide con el núcleo de efectividad de la acción de G en $\bar{M}$. Como N es un subgrupo normal de G contenido en K y el par (G, K) es efectivo, entonces N

tiene que ser trivial. Es decir, la acción de G en $\bar{M}$ es efectiva. La involución $\bar{\sigma} : G \to G$ definida por $\bar{\sigma}(g) = \bar{s}_{\bar{o}} g \bar{s}_{\bar{o}}^{-1}$ coincide con la involución σ inducida por s_o y satisface $(G^{\bar{\sigma}})^o \subset G_{\bar{o}} \subset G^{\bar{\sigma}}$. Por lo tanto, el par $(G, G_{\bar{o}})$ es un par simétrico efectivo y como $\bar{M}$ es semisimple, entonces $G = Iso^o(\bar{M})$.

La diferencial $d\bar{\sigma}_{\bar{p}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una involución tal que el autoespacio asociado al autovalor 1 es $\mathfrak{k}^p$. Si $\bar{s}_{\bar{p}} = \bar{s}_{\bar{q}}$, entonces $\bar{\sigma}_{\bar{p}} = \bar{\sigma}_{\bar{q}}$ y por lo anterior, $\mathfrak{k}^p = \mathfrak{k}^q$. Es decir, $\bar{p} = \bar{q}$.

□

El lema anterior dice que el único punto fijo aislado de $\bar{s}_{\bar{p}}$ es $\bar{p}$.

Supongamos que $\bar{v} = \pi(v)$ es tal que $\gamma_{\bar{v}}$ es una geodésica cerrada en $\bar{M}$ con periodo 1. Por el corolario anterior, la isometría $g^{\bar{v}} := \phi_1^{\bar{v}}$ es no trivial. Vamos a levantar esta isometría a una isometría en M. Sea $l^{\bar{v}} = dg_{\bar{o}}^{\bar{v}}$ y $l^v := (d_o\pi)^{-1} \circ l^{\bar{v}} \circ d_o\pi : T_oM \to T_oM$. Claramente l^v preserva el tensor de curvatura de M en o y como M es simplemente conexo, de la Proposición 1.1.1, existe una isometría g^v de M tal que $d_og^v = l^v$. La isometría g^v satisface $\pi g^v = g^{\bar{v}}\pi$. En general g^v no necesariamente está en $G = Iso^o(M)$. Observe que l^v también induce una isometría en el espacio dual de M, pues el tensor de curvatura en el dual es $-R$.

Observación 2.2.3. *Sea $\bar{F}$ un flat maximal de $\bar{M}$ con $\bar{o} \in \bar{F}$ y $\bar{v} \in T_{\bar{o}}\bar{F}$. Recordemos que este flat es único si $\bar{v}$ es un vector principal. Si M es de tipo compacto, $\bar{M}$ también lo es y por lo tanto $\bar{F}$ es compacto. Se sigue que $\bar{F}$ es isométrico a un toro plano. Tomemos $\bar{v} \in T_oF$ tal que $\gamma_{\bar{v}}$ es una geodésica cerrada con periodo 1. Como $l^{\bar{v}}$ es un transporte paralelo y $\bar{F}$ es totalmente geodésico, tenemos que $l^{\bar{v}}|_{T_{\bar{p}}\bar{F}} : T_{\bar{p}}\bar{F} \to T_{\bar{p}}\bar{F}$ es la identidad.*

Proposición 2.2.4. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible, simplemente conexo con $G = Iso^o(M)$, $o = eK$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ en o. Sea $0 \neq w \in T_oM \cong \mathfrak{p}$. Entonces, existe g isometría no trivial de M que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $g(o) = o$;

(ii) $g^2 = \mathrm{Id}_M$;

(iii) La órbita $K \cdot w \subset \mathfrak{p}$ es invariante por d_og;

(iv) El conjunto de vectores fijos de d_og contiene a $\nu_w(K \cdot w) \cong Z_{\mathfrak{p}}(w)$;

(v) Supongamos que rk$(M) \geq 2$, o equivalentemente, $K \cdot w$ no es una esfera. Entonces, el subespacio $\nu_w(K \cdot w)$ de T_oM coincide con el conjunto de vectores fijos de d_og si y sólo si $K \cdot w$ es una órbita simétrica.

Demostración. Es suficiente probar la proposición cuando M es de tipo compacto. El espacio normal $\nu_w(K \cdot w)$ de $K \cdot w$ en w es $Z_{\mathfrak{p}}(w)$. Sea $\mathcal{A}^w$ el conjunto de todos los abelianos maximales de $\mathfrak{p}$ que contienen a w. Note $Z_{\mathfrak{p}}(w)$ es un sistema triple de Lie y por lo tanto corresponde a una subvariedad totalmente geodésica de M. La parte abeliana de $Z_{\mathfrak{p}}(w)$ es $\mathfrak{a}_0 = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}^w} \mathfrak{a}$. Sea F el flat en M que contiene a o tal que $T_oF = \mathfrak{a}_0$. Como M es compacto, F es un toro plano. Escribamos $K \cdot w = K/K_w$, con K_w la isotropía de w en K y sea K_w^o la componente de la identidad en K_w. Del Corolario 1.1.30 se tiene que K_w^o

actúa trivialmente en F. En otras palabras, la representación Slice conexa de K_ω^o actúa trivialmente en $\mathfrak{a}_0$.

Sean $\bar{M}$ el bottom space de M, $\pi : M \to \bar{M}$ la proyección y $\bar{F} = \pi(F)$. Elijamos $\bar{v} \in T_{\bar{o}}\bar{F}$ tal que la geodésica $\gamma_{\bar{v}}$ es cerrada en $\bar{F}$ con periodo 1 y sea $v = d\pi_o^{-1}(\bar{v})$. Para v lo suficientemente cercano a w las orbitas $K \cdot v$ y $K \cdot w$ son paralelas. Como las geodésicas cerradas en F forman un conjunto denso, podemos elegir v cuya a orbita sea paralela a la orbita de w. Para este v tenemos que $Z_{\mathfrak{p}}(v) = Z_{\mathfrak{p}}(w)$. Sean $\bar{g}^{\bar{v}} \in Iso(M)$ y $g^v \in Iso(\bar{M})$ las isometrías construidas anteriormente. Hagamos $g = g^v$. Claramente g satisface las condiciones (i) y (ii). Como $Z_{\mathfrak{p}}(\bar{v})$ es la intersección de todos los abelianos en $\mathfrak{p}$ que contienen a $\bar{v}$, de la Observación 2.2.3 concluimos que $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}$ es la identidad en $Z_{\mathfrak{p}}(\bar{v})$ y por lo tanto g satisface (iv). Para ver que g satisface (iii), note que $gKg^{-1} = K$ (pues K es la isotropía de o) y $d_og(w) = w$. Por lo tanto, $d_og(K \cdot w) = (d_ogKd_og^{-1}) \cdot d_og(w) = K \cdot w$.

Resta mostrar la condición (v). Si $\nu_w(K \cdot w)$ de T_oM coincide con el conjunto de vectores fijos de d_og, entonces por definición g es la simetría extrínseca en o. Veamos que si $K \cdot w$ es extrínsecamente simétrica, entonces la simetría extrínseca en w coincide con d_og. Del Lema 2.1.1, la parte abeliana $\mathfrak{a}_0$ de $\nu_w(K \cdot w)$ tiene dimensión uno y por lo tanto podemos asumir que $v = w$. Por el Lema 1.2.5 $K = \{A \in O(T_oM) \mid A(K \cdot w) = K \cdot w\}^o$. La simetría extrínseca de $K \cdot w$ en w induce una involución en K tal que (K, K_w) es un par simétrico tal que $K \cdot w = K/K_w$. Como $g = g^w$, entonces $kgk^{-1} = g$, para todo $k \in K_w$. Sea $\mathbb{V} = \{u \in T_w(K \cdot w) \mid d_og(u) = u\}$ el subespacio de puntos fijos de d_og en $T_w(K \cdot w)$. Note que $\mathbb{V}$ es K_w invariante y por lo tanto induce una distribución K-invariante y paralela $\mathcal{D}$ en $K \cdot w$. El complemento ortogonal $\mathbb{V}^\perp$ en $T_o(k \cdot w)$ es el autoespacio de autovalor -1 de d_og en $T_o(k \cdot w)$ e induce la distribución paralela K-invariante $\mathcal{D}^\perp$. Si $\mathcal{D}$ no fuera nulo, tendríamos que para todo $X \in \mathbb{V}$ e $Y \in \mathbb{V}^\perp$

$$\alpha(X, Y) = d_og\alpha(X, Y) = \alpha(d_ogX, d_ogY) = \alpha(X, -Y) = -\alpha(X, Y).$$

Es decir, $\alpha(\mathbb{V}, \mathbb{V}^\perp) = 0$ y por lo tanto $\alpha(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp) = 0$. El lema de Moore implica que $K \cdot w$ es localmente un producto de subvariedades de $\mathfrak{p}$. En este caso, K no actúa irreduciblemente en T_oM. Por lo tanto, $\mathbb{V}$ tiene que ser trivial y d_og es la simetría extrínseca de $K \cdot w$ en w. □

Corolario 2.2.5. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible, simplemente conexo. Asumamos que $w \in T_oM$ es tal que $K \cdot w$ no es una subvariedad simétrica de T_oM. Entonces, $\nu_w(K \cdot w)$ está contenido propiamente en un sistema triple de Lie (propio) de T_oM.*

Demostración. Sea g como la proposición anterior. El conjunto de puntos fijos de d_og es un sistema triple de Lie que contiene a $\nu_w(K \cdot w)$. □

2.3. Puntos fijos de la representación slice

Sea Σ subvariedad completa y totalmente geodésica del espacio simétrico M tal que $o \in \Sigma$. Sea $G^\Sigma = \{g \in Iso(M) \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ subgrupo cerrado de $Iso(M)$ y $K^\Sigma = G_o^\Sigma$ la isotropía de o en G^Σ. En general, G^Σ no es conexo y la acción de G^Σ en Σ no es efectiva. Note que G^Σ contiene al grupo de transformaciones glide

G', es decir, al grupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}' = [T_o\Sigma, T_o\Sigma] \oplus T_o\Sigma$. Consideremos la representación *slice completa* $\rho' : K^\Sigma \to O(\nu_o\Sigma)$ definida por $\rho'(k) = d_ok|_{\nu_o\Sigma}$. Tenemos el siguiente criterio para subvariedades reflectivas. Si Σ es una subvariedad totalmente geodésica de M, denotamos por $G^\Sigma = \{g \in Iso(M) \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ y $K^\Sigma = G^\Sigma_o$. El grupo de transformaciones glide G' de Σ es un subgrupo normal de G^Σ. Supongamos que M es de tipo no compacto. En este caso Σ es simplemente conexo y por lo tanto $K' := G'_o$ es conexo.

Como aplicación del Slice lemma tenemos el siguiente resultado probado por Olmos y Berndt en [2].

Lema 2.3.1. [2, Lemma 3.2] *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible de tipo no compacto. Sea $\Sigma' = G'/K'$ subvariedad reflectiva de M y $\Sigma'' = G''/K''$ la subvariedad reflectiva de M con $T_o\Sigma'' = \nu_o\Sigma''$, donde G' y G'' son el grupo de transformaciones glide de Σ' y Σ'', respectivamente. Denotemos por $\rho' : K' \to SO(\nu_o\Sigma')$ y por $\chi'' : K'' \to SO(T_o\Sigma'')$, la representación slice y la representación de isotropía de Σ' y Σ'', respectivamente. Entonces:*

(i) $\rho'(K')$ es un subgrupo normal de $\chi''(K'')$.

(ii) El subespacio $(\nu_o\Sigma')^{K'} = \{\xi \in \nu_o\Sigma' \mid \rho'(k')\xi = \xi$ para todo $k' \in K'\}$ de $\nu_o\Sigma' = T_o\Sigma''$ es $\chi(K'')$-invariante y $\Sigma'' = \Sigma''_0 \times \Sigma''_1$ (como producto Riemanniano), donde $T_o\Sigma_0 = (\nu_o\Sigma')^{\rho'}$. Mas aún, si $rk(M) \geq 2$, entonces Σ_0 es plana.

Demostración. Primero veamos que $\rho'(K') \subset \chi''(K'')$. Como K' y K'' son conexos, basta ver que $d\rho'(\mathfrak{k}') \subset d\chi''(\mathfrak{k}'')$. Note que $K' \subset K^{\Sigma''}$ y $K'' \subset K^{\Sigma'}$. Por lo tanto, cada $X \in \mathfrak{k}'$ se puede pensar como un campo de Killing en Σ'' con $X_o = 0$ y $(\nabla X)_o = d\chi''(X) = \rho'(X)$. Del Lema 1.1.28 tenemos que X está en el álgebra de transformaciones glide de Σ''. Por lo tanto, $d\rho'(X) \in d\chi''(\mathfrak{k}'')$. Mas áun, si $k'' \in K''$ tenemos que

$$\chi''(k'')\rho'(K')\chi''(k'')^{-1} = \rho'(k'')\rho'(K')\rho'(k'')^{-1} = \rho'(k''K'(k'')^{-1}) = \rho'(K'),$$

donde también denotamos por ρ' a la representación slice de Σ' definida en todo $G^{\Sigma'}$. Lo que prueba la parte (i).

Como $\rho'(K')$ es normal en $\chi''(K'')$, entonces el subespacio $(\nu_o\Sigma')^{K'}$ es invariante por $\chi''(K'')$ y por lo tanto también es invariante por $hol_o(\Sigma'')$. Del teorema de descomposición de de Rham $\Sigma'' = \Sigma''_0 \oplus \Sigma''_1$ con Σ'' totalmente geodésica tal que $T_o\Sigma'' = (\nu_o\Sigma')^{K'}$. Escribamos $\Sigma''_0 = G''_0/K''_0$, donde G'_0 es el subgrupo de G de transformaciones glide de Σ''_0 y K''_0 es la isotropía de o en G''_0.

Notemos que $\nu_o\Sigma''_0 = T_o\Sigma'_1 \oplus T_o\Sigma''_1$. Sean $x_0, y_0 \in T_o\Sigma''_0$, $x', y' \in T_o\Sigma'_1$ y $x \in T_o\Sigma''_1$. Como $\Sigma'' = \Sigma''_0 \oplus \Sigma''_1$ como producto Riemanniano y Σ'' es totalmente geodésica, entonces es claro que $R_{x_0,y_0}x = 0$. Por otro lado, usando que x_0 y y_0 son vectores fijos de la representación slice de Σ' y que $\mathfrak{k}'$ está generado por $\{R_{x',y'} \mid x, y \in T_o\Sigma'_1\}$, tenemos que

$$\langle R_{x_0,y_0}x', y'\rangle = \langle R_{x',y'}x_0, y_0\rangle = 0.$$

Se sigue que la representación slice de Σ''_0 es trivial. Si $\mathrm{rk}(M) \geq 2$, el slice lemma implica que Σ_0 es plana. □

Como corolario del lema anterior se tiene que la parte semisimple de una subvariedad totalmente geodésica en un espacio simétrico de tipo no compacto con factor euclídeo no trivial, nunca es reflectiva.

Corolario 2.3.2. **[2, Corollary 3.3]** *Sea M un espacio simétrico de tipo no compacto con rk$(M) \geq 2$. Supongamos que Σ es una subvariedad totalmente geodésica que se descompone como producto Riemanniano $\Sigma = \Sigma_0 \times \Sigma_1$, donde Σ_0 es el factor plano y Σ_1 el factor semisimple. Si $\dim(\Sigma_0) > 0$ y $\dim(\Sigma_1) > 0$, entonces Σ_1 no es subvariedad reflectiva de M.*

Demostración. Supongamos que Σ_1 es reflectiva. Vamos aplicar el lema anterior para $\Sigma' = \Sigma_1$. Sea Σ'' la subvariedad reflectiva de M tal que $T_o\Sigma'' = \nu_o\Sigma_1$. Usando la notación del lema anterior, tenemos que el álgebra de Lie de K' está generada por los tensores de curvatura $\{R_{x',y'} \mid x', y' \in T_o\Sigma_1\}$. De lo anterior se tiene que la representación slice actúa trivialmente en Σ_0 y por lo tanto $\Sigma_0 \subset (\nu_o\Sigma')^{K'}$. Como $\mathrm{rk}(M) \geq 2$, entonces Σ_0 es una subvariedad del factor plano Σ_0'' de Σ''. Se sigue que $R_{x_0,x''} = 0$, para todo $x_0 \in T_o\Sigma_0$ y $x'' \in \Sigma''$. Por otro lado, es claro que $R_{x_0,x'} = 0$, para todo $x_0 \in T_o\Sigma_0$ y $x' \in \Sigma''$. De lo anterior concluimos que $R_{x_0,x} = 0$, para todo $x \in T_oM$. Esto último es una contradicción, pues M es de tipo no compacto. □

Las s-órbitas simétricas fueron clasificadas por Kobayashi y Nagano en [17]. De esta clasificación se puede probar que la dimensión de una s-órbita simétrica no semisimple $K \cdot v$ de un espacio simétrico $M = G/K$ es la mitad de la dimensión de M y el factor plano (local) de $K \cdot v$ tiene dimensión 1. Utilizamos el Lema 2.3.1 para dar una prueba de este hecho sin utilizar la clasificación de s-órbitas simétricas.

Proposición 2.3.3. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo con rk$(M) \geq 2$. Supongamos que $K \cdot v$ es una órbita simétrica no semisimple de la representación isotrópica de M, con $0 \neq v \in T_oM$. Entonces, existe $k \in K$ tal que $d_ok(T_v(K \cdot v)) = \nu_v(K \cdot v)$. En particular, $\dim T_v(K \cdot v) = \dim \nu_v(K \cdot v) = \frac{1}{2} \dim M$.*

Demostración. Podemos suponer que M es de tipo no compacto. De la Proposición 2.1.2 sabemos que $T_v(K \cdot v)$ y $\nu_v(K \cdot v)$ son sistemas triples de Lie tal que la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}v$. Sea Σ la subvariedad reflectiva de M tal que $T_o\Sigma = \nu_v(K \cdot v)$ y sea K' el grupo de isotropía de las transformaciones glide de Σ, es decir, el subgrupo de Lie conexo de K con álgebra de Lie $[\nu_v(K \cdot v), \nu_v(K \cdot v)]$. Note que K' deja la parte abeliana de Σ invariante y por lo tanto $K' \cdot v = \{v\}$. Como K' es conexo, tenemos que $K' \subset K_v^o$, donde K_v^o es la componente conexa por la identidad del subgrupo de isotropía de v en K. Note que $K \cdot v = K/K_v$, donde (K, K_v) es un par simétrico. Sea w un vector tangente al factor (local) plano de $K \cdot v$. Como $K' \subset K_v^o$ y (K, K_v) es un par simétrico, entonces $K' \cdot w = \{w\}$. Es decir, w es un vector fijo de la representación slice de K' en el espacio $\nu_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$. Del Lema 2.3.1, tenemos que la parte abeliana de $T_v(K \cdot v)$ contiene a w. Es decir, $T_v(K \cdot v)$ no es semisimple y por la proposición 2.1.2 tenemos que

$$T_v(K \cdot v) = \nu_w(K \cdot w) \tag{2.1}$$

y la parte abeliana de $T_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}w$. En particular, la parte abeliana de $T_v(K \cdot v)$ tiene dimensión 1.

Note que el conjunto de puntos fijos de la acción de K' en $T_o\Sigma = \nu_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}v$, la parte abeliana de $T_o\Sigma$. Como $K' \subset K_v^o$, entonces $\mathbb{R}v$ también es el conjunto de vectores fijos de la acción de K_v^o en $\nu_v(K \cdot v)$. Por otro lado, el conjunto de vectores fijos de K_v^o en $T_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}w$, la parte abeliana de $T_v(K \cdot v)$. De lo anterior tenemos que el conjunto de vectores fijos de K_v^o en T_oM es $\mathbb{V} = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$. Podemos suponer que $\|v\| = \|w\|$. Note que $\mathbb{V}$ es un sistema triple de Lie no abeliano de dimensión 2, pues $w \notin Z_{\mathfrak{p}}(v) = \nu_v(K \cdot v)$. De la clasificación de espacios simétricos de rango 1 concluimos que $\mathbb{V}$ es el espacio tangente a una subvariedad totalmente geodésica isométrica al plano hiperbólico real $\mathbb{R}H^2$. Sea $\bar{G}$ el subgrupo conexo de G con álgebra de lie $\bar{\mathfrak{g}} = [\mathbb{V}, \mathbb{V}] \oplus \mathbb{V}$ y $\bar{K}$ el subgrupo de isotropía de o en $\bar{G}$. Note que $\bar{K} = SO_2$ (vía la representación isotrópica). Como $\bar{K}$ actúa transitivamente en la esfera, existe $k \in \bar{K}$ tal que $d_ok(v) = w$. Usando (2.1) tenemos que

$$d_ok(\nu_v(K \cdot v)) = \mathrm{Ad}(k)(Z_{\mathfrak{p}}(v)) = Z_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}(k)(v)) = \nu_w(K \cdot w) = T_v(k \cdot v).$$

□

Supongamos que $K \cdot v$ es una órbita simétrica de la representación isotrópica de K en T_oM. Sea Σ la subvariedad reflectiva de $M = G/K$ con $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$. Recordemos que $G^\Sigma = \{g \in Iso(M) \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ es el grupo de isometrías extrínsecas de Σ en M. En general, G^Σ no es conexo. Note que G^Σ contiene al grupo G' de transformaciones glide de Σ. Denotemos por K^Σ y K' a la isotropía de o en G^Σ y G', respectivamente. Como en en la prueba de la proposición anterior tenemos que $K' \subset K_v$, donde K_v denota el subgrupo de isotropía de v en K.

Lema 2.3.4. *Sea $K \cdot v$ una s-órbita simétrica de $M = G/K$. La componente conexa por la identidad de K', K^Σ y K_v coinciden, es decir, $(K')^o = K_v^o = (K^\Sigma)^o$. En particular, si M es de tipo compacto, los espacios simétricos Σ y $K \cdot v$ son localmente equivalentes.*

Demostración. Note que K^Σ deja invariante a $\nu_o\Sigma = \nu_v(K \cdot v)$. Más aún, como la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}v$, entonces K^Σ deja invariante a v. Por lo tanto, $K^\Sigma \subset K_v$. Por otro lado, K_v deja invariante a $T_v(K \cdot v) = T_o\Sigma$ y por lo tanto $K_v \subset K^\Sigma$. Se sigue que $K_v^o = (K^\Sigma)^o$.

Supongamos por contradicción que $(K')^o$ es un subgrupo propio de K_v^o. Sea H el núcleo de la representación isotrópica $\chi : (K^\Sigma)^o \to SO(T_o\Sigma)$. Notemos que H es no trivial, pues si $k \in (K^\Sigma)^o \setminus (K')^o$, entonces del Corolario 1.1.29 existe $k' \in (K')^o$ tal que $k = k'$ en Σ y, por lo tanto, $Id \neq k'k^{-1} \in H$. Se sigue que H es un subgrupo normal no trivial de K_v^o que actúa trivialmente en $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$. Como cada elemento de H fija v y es la identidad en $T_v(K \cdot v)$, entonces H actúa trivialmente en la órbita simétrica $K \cdot v$. De lo anterior H actúa trivialmente en el subespacio lineal $\mathbb{V}$ generado por $K \cdot v$. Por otro lado, como K actúa linealmente tenemos que $K \cdot \mathbb{V} \subset \mathbb{V}$ y como M es irreducible, debe ser $\mathbb{V} = T_oM$. Se sigue que H debe ser trivial, lo que es una contradicción y por lo tanto $(K')^o = K_v^o$.

□

Del Lema 2.3.4 y la Proposición 2.3.3 tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.5. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo. Supongamos que $K \cdot v$ es una s-órbita simétrica de la representación isotrópica de M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $K \cdot v$ no es semisimple.

(ii) Existe $k \in K$ *tal que* $d_o k(T_v(K \cdot v)) = \nu_v(K \cdot v)$.

(iii) El sistema triple de Lie $T_v(K \cdot v)$ *no es semisimple.*

Demostración. Que *(i)* implica *(ii)*, es la Proposición 2.3.3.

Supongamos que *(ii)* se satisface. De la Proposición 2.1.2 se tiene que el espacio normal $\nu_v(K \cdot v)$ es un sistema triple de Lie no semisimple. De *(ii)* concluimos que $T_v(K \cdot v)$ también es no semisimple y por lo tanto se cumple *(iii)*.

Finalmente supongamos que vale *(iii)*. Sea Σ subvariedad totalmente geodésica de M tal que $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$. Como $T_v(K \cdot v)$ no es semisimple, existe un vector no nulo w fijo por la acción de $(K')^o$ en $T_v(K \cdot v)$. Del Lema 2.3.4 tenemos que $(K')^o = K_v^o$ y por lo tanto w es tangente al factor (local) plano de $K \cdot v$. Por lo tanto, $k \cdot v$ no es semisimple y se tiene *(i)*. $\square$

La siguiente proposición extiende la Proposición 3.4 en [2] que da una condición suficiente para que una variedad totalmente geodésica se reflectiva.

Proposición 2.3.6. *Sea* $M = G/K$ *espacio simétrico irreducible con* $G = Iso^o(M)$ *y* $K = G_o$. *Supongamos que* $rk(M) \geq 2$ *y que* Σ *es una subvariedad semisimple totalmente geodésica de* M *con* $o \in \Sigma$. *Si el núcleo de la representación slice completa* $\rho' : K^\Sigma \to O(\nu_o\Sigma)$ *es no trivial, entonces* Σ *es reflectiva.*

Demostración. Podemos asumir que M es de tipo no compacto y que Σ es completa. Sea $H = \ker \rho' \subset K^\Sigma$ y hagamos

$$\mathbb{V} = \{v \in T_o\Sigma \mid d_o k(v) = v \text{ para todo } k \in H\}.$$

El subespacio $\mathbb{V}$ es un sistema triple de Lie. Como H es normal en K^Σ, el subespacio $\mathbb{V}$ es invariante por K^Σ. En particular, $\mathbb{V}$ es invariante por $K' = G'_o$, el grupo de isotropía bajo las transformaciones glide. Del teorema de descomposición de de Rham tenemos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ con Σ_1 y Σ_2 subvariedades totalmente geodésicas de M con $T_o\Sigma_1 = \mathbb{V}$ y $T_o\Sigma_2 = \mathbb{V}^\perp \cap T_o\Sigma$.

Tenemos que Σ_2 es una subvariedad reflectiva de M, pues el complemento ortogonal de $\mathbb{V} \cap T_o\Sigma$ en T_oM es $\mathbb{V} \oplus \nu_o M$ que corresponde al subespacio de vectores fijos bajo la acción de H en T_oM. Sea Σ_3 la subvariedad reflectiva asociada a $\mathbb{V} \oplus \nu_o M$. Escribamos $\Sigma_2 = G''/K''$, donde $G'' \subset G$ es el grupo de transformaciones glide de Σ_2 y K'' es la isotropía de o en G''. Como $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, entonces K'' actúa trivialmente en $T_o\Sigma_1 = \mathbb{V}$. Por lo tanto, $\mathbb{V}$ es un subespacio del espacio $\mathbb{W}$ de puntos fijos de la acción de K'' en $T_o\Sigma_3 = \mathbb{V} \oplus \nu_o M$. Del Lema 2.3.1, concluimos que $\mathbb{W}$ es un sistema triple de Lie plano y por lo tanto $\mathbb{V}$ también lo es. Como Σ es semisimple, debe ser $\mathbb{V} = 0$. Por lo tanto $\Sigma = \Sigma_2$ es reflectiva. $\square$

Usando el criterio anterior podemos probar que toda subvariedad totalmente geodésica completa que contenga una subvariedad reflectiva es reflectiva.

Proposición 2.3.7. *Sea* M *un espacio simétrico irreducible con* $rk(M) \geq 2$. *Asumamos que* Σ_1 *y* Σ_2 *son subvariedades totalmente geodésicas completas con* $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. *Si* Σ_1 *es reflectiva, entonces* Σ_2 *es reflectiva.*

Demostración. Podemos asumir que M es de tipo no compacto y $o \in \Sigma_1$. Si Σ_1 no es semisimple, de la proposición 2.1.2 tenemos que $T_o\Sigma_1$ es el espacio normal a una órbita simétrica. Por el Teorema 2.1.3, esto es equivalente a que Σ_1 es una subvariedad totalmente geodésica maximal. Por lo tanto, $\Sigma_2 = \Sigma_1$ es reflectiva.

Asumamos que Σ_1 es semisimple y consideremos dos casos.

Caso 1: Supongamos que Σ_2 es semisimple. Sea τ la reflexión de M en la subvariedad reflectiva Σ_1 y s_o la simetría geodésica en o. La isometría $h = s_o \circ \tau$ satisface

$$d_o h|_{T_o\Sigma_1} = -Id_{T_o\Sigma_1}; \qquad d_o h|_{\nu_o\Sigma_1} = Id_{\nu_o\Sigma_1}.$$

Podemos escribir $T_o\Sigma_2 = T_o\Sigma_1 \oplus \mathbb{V}$, donde $\mathbb{V} \subset \nu_o\Sigma_1$. De la anterior descomposición es claro que $d_o h(T_o\Sigma_2) = T_o\Sigma_2$ y por lo tanto $h \in K^{\Sigma_2}$. Más aún, h es un elemento no trivial del núcleo de la representación slice completa de Σ_2. De la Proposición 2.3.6 concluimos que Σ_2 es reflectiva.

Caso 2: Supongamos que Σ_2 no es semisimple. Escribamos $\Sigma_2 = \Sigma_0 \times \Sigma_s$, donde Σ_0 y Σ_s es el factor plano y semisimple de Σ_2, respectivamente. Como Σ_1 es semisimple, tenemos que $\Sigma_1 \subset \Sigma_s$. Del caso 1, concluimos que Σ_s es reflectiva, lo cual contradice el Corolario 2.3.2. □

Por el Teorema 2.1.3 tenemos que el espacio normal $\nu_v(K \cdot v)$ a una s-órbita simétrica $K \cdot v$ de un espacio simétrico $M = G/K$ es un sistema triple de Lie maximal de $\mathfrak{p}$. En la siguiente proposición probamos que el espacio tangente $T_v(K \cdot v)$ también es un sistema triple de Lie maximal.

Proposición 2.3.8. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo con $rk(M) \geq 2$. Supongamos que $K \cdot v$ es una órbita simétrica. Entonces, el espacio tangente $T_v(K \cdot v)$ es un sistema triple de Lie maximal de T_oM.*

Demostración. Podemos suponer que M es de tipo no compacto. Sea $\Sigma = G'/K'$ la subvariedad conexa, totalmente geodésica y maximal con $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$, donde G' es el grupo de transformaciones glide de Σ y K' la isotropía de o en G'. Análogamente escribamos $\Sigma^\perp = G''/K''$ para la subvariedad conexa, totalmente geodésica y maximal con $T_o\Sigma^\perp = \nu_v(K \cdot v)$, donde G'' es el grupo de transformaciones glide de $\Sigma^\perp$. Note que K' y K'' son conexos, pues M es de tipo no compacto. Por otro lado, la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}v$ y como $K^{\Sigma^\perp}$ deja invariante a $T_o\Sigma^\perp = \nu_v(K \cdot v)$, entonces $K^{\Sigma^\perp}$ deja fijo a v y por lo tanto $K^{\Sigma^\perp} \subset K_v^o$. Además, es claro que K_v^o deja invariante a $\nu_v(K \cdot v)$. De lo anterior tenemos que $K^{\Sigma^\perp} = K_v^o$ y por el Lema 2.3.4 concluimos que $K^{\Sigma^\perp} = K'$.

Sean $\rho : K' \to SO(\nu_o\Sigma)$ la representación slice de Σ y $\chi : K'' \to SO(T_o\Sigma^\perp)$ la representación isotrópica de $\Sigma^\perp$. Del Lema 2.3.1 tenemos que $\rho(K')$ es un subgrupo normal de $\chi(K'')$. Más aún, la imagen de la representación isotrópica de K'' coincide con la imagen de la representación isotrópica de $(K^{\Sigma^\perp})^o$ y como $K' = (K^{\Sigma^\perp})^o$, entonces $\rho(K') = \chi(K'')$.

Supongamos que $\hat{\Sigma}$ es una subvariedad propia totalmente geodésica de M que contiene propiamente a Σ. Escribamos $T_o\hat{\Sigma} = T_o\Sigma \oplus \mathbb{V}$, donde $\{0\} \neq \mathbb{V} \subsetneq \nu_o\Sigma$. Como $\mathfrak{k}' = [T_o\Sigma, T_o\Sigma] \subset [T_o\hat{\Sigma}, T_o\hat{\Sigma}]$, entonces $\mathbb{V}$ es invariante por K'. De $\rho(K') = \chi(K'')$, tenemos que $\mathbb{V}$ también es invariante por K'' . Del teorema de descomposición de de Rham se sigue que $\Sigma^\perp = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ como producto Riemanniano con $T_o\Sigma_1 = \mathbb{V}$ y $\dim \Sigma_2 \geq 1$. Note que $\hat{\Sigma}$ y Σ_2 son subvariedades reflectivas de M complementarias. Por otro lado, la isotropía K_2 en o del grupo de transformaciones glide de Σ_2 actúa trivialmente en $\mathbb{V}$ (pues $T_o\Sigma^\perp = T_o\Sigma_1 \times T_o\Sigma_2$ como producto Riemanniano). Es decir, $\mathbb{V}$ es un subespacio del conjunto de vectores fijos de K_2 bajo la representación slice de Σ_2. Por el Lema 2.3.1 tenemos que $\mathbb{V}$ es un sistema triple de Lie abeliano. La Proposición 2.1.2 implica que $\mathbb{V}$ es de la forma $\mathbb{R}v$, para algún $v \in T_oM$. Se sigue que Σ_2 es la parte semisimple de la subvariedad reflectiva $\Sigma^\perp$. Del Corolario 2.3.2 tenemos que Σ_2 no es una subvariedad reflectiva de M, lo cual es una contradicción. Concluimos que tal $\hat{\Sigma}$ no existe y por lo tanto Σ es maximal. $\square$

Para espacios simétricos de rango uno tenemos el siguiente lema.

Lema 2.3.9. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico con rk$(M) = 1$. Sea $\Sigma = G'/K'$ subvariedad totalmente geodésica, con G' el grupo de transformaciones glide y K' la isotropía en o en G'. Supongamos que* $\dim \Sigma \geq 2$ *y que la representación slice conexa $\rho : (K')^o \to SO(\nu_o\Sigma)$ es trivial. Entonces, M es un espacio de curvatura constante.*

Demostración. Por dualidad, podemos suponer que M es de tipo compacto. Supongamos que M no tiene curvatura constante, es decir, M es diferente de la esfera. Es conocido que los espacios simétricos de rango uno distintos de la esfera no admiten cocientes globalmente simétricos. En particular, el bottom space $\bar{M}$ es igual a M, o equivalentemente, las simetrías geodésicas en dos puntos distintos de M son distintas.

Escojamos M espacio simétrico de rango 1 tal que $n = \dim M$ es minimal entre los espacios simétricos de curvatura no constate y rango 1 que admiten una subvariedad totalmente geodésica Σ con $\dim \Sigma \geq 2$ y representación slice conexa $\rho : (K')^o \to SO(\nu_o\Sigma)$ trivial. Fijemos $\Sigma = G'/K'$ subvariedad totalmente geodésica de M con representación slice conexa trivial tal que $m = \dim \Sigma$ es maximal dentro de tales subvariedades. Podemos suponer que $o \in \Sigma$. Por la Proposición 1.1.34, debe ser $2 \leq m \leq n-2$.

Note que Σ es semisimple y por lo tanto $\nu_o\Sigma = \{v \in T_oM \mid K' \cdot v = v\}$. Se sigue que $\nu_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie y por lo tanto Σ es una subvariedad reflectiva de M. Sea $\Sigma^\perp = G''/K''$ la subvariedad reflectiva de M con $T_o\Sigma^\perp = \nu_o\Sigma$. Como $(K'')^o$ es generado por los tensores de curvatura $\{R_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in T_o\Sigma^\perp\}$ y $\langle R_{\xi,\eta}x, y\rangle = \langle R_{x,y}\xi, \eta\rangle$, para todo $x, y \in T_o\Sigma$, $\xi, \eta \in T_o\Sigma^\perp$, entonces la representación slice de $(K'')^o$ en $\nu_o\Sigma^\perp = T_o\Sigma$ también es trivial.

Como las subvariedades totalmente geodésicas de M también son espacios simétricos de rango 1, podemos escoger una geodésica cerrada $\gamma : [0, 1] \to \Sigma^\perp$ de periodo 1 en $\Sigma^\perp$ con $\gamma(0) = o = \gamma(1)$. Sea $g = s_{1/2}s_o$ la transvección geométrica en $1/2$. Como $M = \bar{M}$, la isometría g tiene orde 2. El transporte paralelo a lo largo de la curva γ es la diferencial de $h = d_og$. Note que h deja invariante a $T_o\Sigma$ y por lo tanto también a su complemento ortogonal $T_o\Sigma$.

Sean $\mathbb{V}_{\pm 1}$ los autoespacios de $h|_{T_o\Sigma}$ asociados a los autovalores ± 1. Como K' actúa trivialmente en $T_o\Sigma^\perp$, cada punto de la geodésica $\gamma(t)$ queda fijo por la acción de K' y por lo tanto g conmuta con cada elemento de K'. Se sigue que los espacios $\mathbb{V}_{\pm 1}$ son invariantes por K'. Como Σ es un espacio de rango 1, entonces K' actúa irreduciblemente en $T_o\Sigma$. Por lo tanto, $\mathbb{V}_1 = T_o\Sigma$ ó $\mathbb{V}_{-1} = T_o\Sigma$. Cambiando h por $d(s_o \circ s_{1/2})$, si es necesario, podemos suponer que $\mathbb{V}_1 = T_o\Sigma$.

Sea $\bar{\mathbb{V}}_{\pm 1}$ el autoespacio de $h|_{T_o\Sigma^\perp}$ con autovalor ± 1. El subespacio $\bar{\mathbb{V}}_1$ es no trivial, pues $\gamma'(0) \in \bar{\mathbb{V}}_1$. Como $h \neq \mathrm{id}_{T_oM}$ y $h = \mathrm{id}_{T_o\Sigma}$, entonces $\bar{\mathbb{V}}_1 \neq T_o\Sigma^\perp$. Por lo tanto, el subespacio $\bar{\mathbb{V}}_{-1}$ también es un subespacio de $T_o\Sigma^\perp$ no trivial y

$$T_o\Sigma^\perp = \bar{\mathbb{V}}_1 \oplus \bar{\mathbb{V}}_{-1}.$$

Los subespacios $\mathbb{V}_1 \oplus \bar{\mathbb{V}}_1$ y $\mathbb{V}_{-1}$ son sistemas triples de Lie ortogonales y complementarios. Sean $\tilde{\Sigma}$ y $\bar{\Sigma}$ las subvariedades totalmente geodésicas con $T_o\tilde{\Sigma} = \mathbb{V}_1 \oplus \bar{\mathbb{V}}_1$ y $T_o\bar{\Sigma} = \bar{\mathbb{V}}_1$, respectivamente. Note que $\Sigma \subsetneq \tilde{\Sigma}$, $\bar{\Sigma} \subsetneq \tilde{\Sigma}$ y $\bar{\Sigma} \subsetneq \Sigma^\perp$. La representación slice conexa de $(K')^o$ en el espacio normal $\bar{\mathbb{V}}_1$ de Σ en $\tilde{\Sigma}$, es trivial. Como $\dim(\tilde{\Sigma}) < \dim(M)$, entonces $\tilde{\Sigma}$ es un espacio de curvatura constante y por lo tanto Σ también tiene curvatura constante. Intercambiando el papel de Σ por $\Sigma^\perp$, concluimos que $\Sigma^\perp$ también tiene curvatura constante.

Sea $\bar{\Sigma}_{-1}$ la subvariedad totalmente geodésica con $T_o\bar{\Sigma}_{-1} = \bar{\mathbb{V}}_{-1}$. Las subvariedades $\tilde{\Sigma}$ y $\bar{\Sigma}_{-1}$ son subvariedades reflectivas complementarias. Note que $\dim \bar{\Sigma}_{-1} > 1$, pues en caso contrario $\tilde{\Sigma}$ sería una hipersuperficie de M y por la Proposición 1.1.34 M sería un espacio de curvatura constante. Sea $\bar{K}$ la isotropía glide de $\bar{\Sigma}_{-1}$. Como $\bar{K} \subset K''$, entonces la representación de $(\bar{K})^o$ en $T_o\Sigma$ es trivial. Por otro lado, como $\Sigma^\perp$ tiene curvatura constante, entonces la representación de $(\bar{K})^o$ en el espacio normal $\mathbb{V}_1$ de $\bar{\sigma}_{-1}$ en $\Sigma^\perp$ es trivial. Concluimos que la representación slice de $\bar{\Sigma}_{-1}$ en M es trivial. Esto implica que la representación slice conexa de $\tilde{\Sigma}$ en M también es trivial (por el mismo argumento que la representación slice de $\Sigma^\perp$ es trivial). Sin embargo, $\dim \tilde{\tilde{\Sigma}} > \dim \Sigma$, lo que contradice la maximalidad de $m = \dim \Sigma$. Por lo tanto M es un espacio de curvatura constante.

$\square$

Del Slice lemma y el lema anterior tenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.3.10. *Sea M un espacio simétrico irreducible y supongamos que existe una subvariedad no plana totalmente geodésica Σ de M con representación slice conexa trivial. Entonces, M es un espacio de curvatura constante.*

Proposición 2.3.11. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico con curvatura seccional no positiva y $\Sigma = G'/K'$ una subvariedad totalmente geodésica, completa y no semisimple de M que contiene a $o = eK$, donde $G = Iso^o(M)$ y $G' \subset G$ es el grupo de transformaciones glide de Σ. Sean $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_g$ (M_0 plano posiblemente trivial) y $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_l$ la descomposición de de Rham de M y Σ, respectivamente. Supongamos que la representación slice $\rho : K' \to SO(\nu_o\Sigma)$ de Σ es trivial. Entonces, $l \leq g$ y salvo permutación de los índices $\Sigma_i \subset M_i$, para $1 \leq i \leq l$. Más aún, si $\Sigma_i \subsetneq M_i$, entonces M_i y Σ_i tienen curvatura constante.*

Demostración. Fijemos M_i y sea $z \in M_i$. Escribamos $z = v + w$, donde $v \in T_o\Sigma$ y $w \in \nu_o\Sigma$. Para todo $k' \in K'$ tenemos

$$k'v - v = k'v + w - v - w = k'v + k'w - v - w = k'z - z \in T_o\Sigma \cap T_oM_i.$$

El subespacio afín

$$v + \mathrm{span}\{k'v - v \mid k' \in K'\}$$

de $T_o\Sigma$ coincide con el espacio afín generado por la órbita $K' \cdot v$ y, en particular, es K' invariante. Se sigue que este subespacio afín debe contener al 0, pues en caso contrario el vector $0 \neq u \in v + \mathrm{span}\{k'v - v \mid k' \in K'\}$ de menor norma debería quedar fijo por la acción de K', pero esto contradice la irreducibilidad de M. Por lo tanto, $v \in \mathrm{span}\{k'v - v \mid k' \in K'\} \subset T_oM_i$. Esto muestra que

$$T_oM_i = (T_oM_i \cap T_o\Sigma) \oplus (T_oM_i \cap \nu_o\Sigma).$$

Supongamos que $T_oM_i \cap T_o\Sigma \neq \{0\}$. El subespacio $T_oM_i \cap T_o\Sigma$ es invariante por K' y por lo tanto es una suma de factores de de Rham de Σ. Por otro lado,

$T_oM_i \cap T_o\Sigma$ corresponde a una subvariedad no plana totalmente geodésica de M_i con representación slice trivial y por el slice lemma, M_i es de rango 1 y por lo tanto $T_oM_i \cap T_o\Sigma$ también es de rango 1. En particular, $T_oM_i \cap T_o\Sigma$ es irreducible y reorganizando los índices si hace falta, $T_oM_i \cap T_o\Sigma = T_o\Sigma_i$. Si $\Sigma_i \subsetneq M_i$, el Lema 2.3.9 implica que M_i y Σ_i son espacios de curvatura constante. $\square$

Terminamos esta sección enunciando uno de los resultados principales de este trabajo que resume algunos resultados anteriores. La demostración será dada en la siguiente sección.

Teorema 2.3.12. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible y simplemente conexo con $rk(M) \geq 2$, donde $G = Iso^o(M)$, $K = G_o$ y $o \in M$. Sea $\Sigma = G'/K'$ subvariedad propia totalmente geodésica y completa de M que contiene a o, donde G' denota el grupo de transformaciones glide de Σ y K' la isotropía de o en G'. Denotemos por $\rho : (K')^o \to SO(\nu_o\Sigma)$ la representación slice conexa de Σ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Σ es reflectiva y $\nu_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie no semisimple.

(ii) Existe $v \in T_oM$ tal que $K \cdot v$ es una s-órbita simétrica y $T_o\Sigma = T_v(K \cdot v)$.

Más aún, cualquiera de las afirmaciones anteriores implica la siguiente afirmación:

(iii) Σ es maximal y existe un vector no nulo en $\nu_o\Sigma$ que es fijo por la representación ρ.

Si además $\dim(\Sigma) \geq \frac{1}{2}\dim(M)$, *entonces las tres afirmaciones son equivalentes.*

2.4. Prueba del teorema 2.3.12

En esta sección daremos la demostración del Teorema 2.3.12. Utilizaremos los siguientes lemas.

Lema 2.4.1. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico simplemente conexo y semisimple con descomposición de de Rham $M = M_1 \times \cdots \times M_l$, con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Escribamos $K = K_1 \times \cdots \times K_l$, donde $K_i = Iso(M_i)^o_o$. Para cada conjunto de índices $I \subset \{1, \cdots, l\}$, sea $K_I = \bigoplus_{i \in I} K_i$. Supongamos que V es un subespacio invariante por la representación isotrópica de K_I en M. Entonces, existe un subconjunto $J \subset I$ y un subespacio $\bar{V} \subset \bigoplus_{k \notin I} T_oM_k$ tal que*

$$V = \bar{V} \oplus \bigoplus_{j \in J} T_oM_j.$$

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $V_i = p_i(V) \subset T_oM_i$, donde $p_i : T_oM \to T_oM_i$ denota la proyección canónica. El subespacio W_i es invariante por K_i y por lo tanto $V_i = \{0\}$ ó $V_i = T_oM_i$. Supongamos que $V_i = T_oM_i$. Para $v_i \in T_oM_i$ sea $v \in \mathbb{W}$ tal que $p_i(v) = v_i$. Como Σ_i es semisimple, podemos elegir $k \in K_i$ tal que $d_ok(v_i) \neq v_i$. Por lo anterior, el vector $w := d_ok(v) - v$ es no nulo y satisface $w \in V \cap T_oM_i$. El subespacio lineal $W = \mathrm{span}\{K_i \cdot w\} \subset V \cap T_oM_i$ es invariante por K_i y como M_i es irreducible, debe ser $W = T_oM_i$. Concluimos que $T_oM_i \subset V$. El resultado se tiene tomando $J = \{i \in I \mid V_i = T_oM_i\}$ y $\bar{V}$ el complemento ortogonal de $\bigoplus_{j \in J} T_oM_j$ en V. $\square$

Lema 2.4.2. [1, Lemma 5.2.2] *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico simplemente conexo y semisimple, con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$. Denotemos por $\chi : K \to SO(T_oM)$ la representación isotrópica de M. Entonces,*

$$\chi(K) = N_{SO(T_oM)}(\chi(K)),$$

donde $N_{SO(T_oM)}(\chi(K))$ es el normalizador de $\chi(K)$ en $SO(T_oM)$.

Sea $M = G/K$ un espacio simétrico con $o \in M$, $G = Iso^o(M)$ y K la isotropía de o en G. Supongamos que Σ es una subvariedad totalmente geodésica de M que contiene a o. Sea G' es el grupo de transformaciones glide de Σ y K' la isotropía de o en G'. Escribamos $G^\Sigma = \{g \in Iso(M) \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ y K^Σ la isotropía de o en G^Σ.

Lema 2.4.3. *Con la notación anterior, si Σ es maximal y $\mathfrak{k}'$ es una subálgebra propia de $\mathfrak{k}^\Sigma$, entonces Σ es reflectiva.*

Demostración. Sea $0 \neq X \in \mathfrak{k}^\Sigma \setminus \mathfrak{k}'$. Denotemos por X^Σ al campo de Killing en Σ que se obtiene al restringir y proyectar en Σ el campo X^*. Por el Lema 1.1.28 tenemos que existe $Y \in \mathfrak{g}'$ tal que $X^\Sigma = Y^\Sigma$. Cambiando X por $X - Y$, podemos suponer que X satisface $X^\Sigma = 0 = X^*|_\Sigma$, donde la última igualdad es porque $X \in \mathfrak{k}^\Sigma$ y por lo tanto X^* siempre es tangente a Σ.

La familia monoparamétrica de isometrías $\mathrm{Exp}(tX)$ actúa trivialmente en Σ. Luego, la familia a monoparamétrica de isometrías lineales $\phi^t = d_o(\mathrm{Exp}(tX))$ satisface $\phi^t|_{T_o\Sigma} = \mathrm{id}_{T_o\Sigma}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $T_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie maximal, entonces

$$T_o\Sigma = \{v \in T_oM \mid \phi^t(v) = v, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Se sigue que $\phi^t|_{\nu_o\Sigma}$ es una familia monoparamétrica de transformaciones ortogonales en $\nu_o\Sigma$ sin puntos fijos. Por lo tanto, $\dim \nu_o\Sigma$ es par y existe una base ortonormal $\{e_1, f_1 \cdots, e_d, f_d\}$ de $\nu_o\Sigma$ y números $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_d > 0$ tales que

$$\phi^t(e_i) = \cos(2\pi a_i t)e_i + \sin(2\pi a_i t)f_i \quad \text{y} \quad \phi^t(f_i) = -\sin(2\pi a_i t)e_i + \cos(2\pi a_i t)f_i,$$

para todo $i = 1, \cdots, d$. Supongamos que $a_1 > a_d$ y sea $t_0 = 1/a_1$. El sistema triple de Lie $\mathbb{V} = \{v \in T_oM \mid \phi^{t_0}(v) = v\}$ contiene a $T_o\Sigma \oplus e_1\mathbb{R} \oplus f_1\mathbb{R}$ y es distinto de T_oM, pues es perpendicular a $e_d\mathbb{R} \oplus f_d\mathbb{R}$. Esto último contradice la maximalidad de Σ. Por lo tanto, $a_1 = a_2 = \cdots = a_d$ y escribamos a para el valor común. La isometría lineal $\phi^{\frac{1}{2a}}$ es la reflexión de T_oM en el subespacio $T_o\Sigma$. Concluimos que la isometría $\mathrm{Exp}(\frac{1}{2a}X)$ es la reflexión en Σ y por lo tanto Σ es reflectiva. □

Comenzamos con la demostración del Teorema 2.3.12. La equivalencia de *(i)* y *(ii)* es la Proposición 2.1.2.

Supongamos que vale *(ii)*. De la Proposición 2.3.8 tenemos que Σ es maximal. Más aún, la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ es $\mathbb{R}v$. Como $\rho((K')^o)$ deja invariante la parte abeliana de $\nu_v(K \cdot v)$ y $\rho((K')^o) \subset SO(\nu_v(K \cdot v))$, entonces v es un vector fijo de la representación ρ. Es decir, Σ satisface *(iii)*.

Resta mostrar que *(iii)* implica *(i)* en el caso que $\dim(\Sigma) \geq \frac{1}{2}\dim(M)$. Supongamos que Σ satisface *(iii)*. Solamente debemos probar que Σ es reflectiva. Pues en este caso, la parte *(ii)* del Lema 2.3.1 implica que la subvariedad reflectiva asociada a $\nu_o\Sigma$ no es semisimple. Consideramos varios casos.

Caso 1: Σ no es semisimple. La maximalidad de Σ y el Teorema 2.1.3 implica que $T_o\Sigma$ es el espacio normal a una s-órbita simétrica de M. Del Lema 2.1.1 tenemos que Σ es reflectiva.

Caso 2: Σ es (localmente) irreducible. Podemos asumir que $M = G/K$ es de tipo compacto. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de M. Vamos a utilizar el bottom space $\bar{M} = M/\sim$ definido en la sección 2.2, donde $p \sim q$ si y sólo si $G_p = G_q$. Denotemos por $\pi : M \to \bar{M}$ la proyección canónica y sea $\bar{o} = \pi(o)$. Podemos identificar a $T_{\bar{o}}\bar{M}$ con T_oM mediante el isomorfismo $d_o\pi$. Note que $\bar{\Sigma} = \pi(\Sigma)$ es la subvariedad totalmente geodésica completa de $\bar{M}$ que contiene a $\bar{o}$ y que satisface $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} = d_o\pi(T_o\Sigma)$.

Como en el Lema 2.2.2, podemos identificar $Iso^{\bar{o}}(\bar{M})$ con G. Con esta identificación, la descomposición de Cartan de $\bar{M}$ es $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y $d_o\pi : T_oM \cong \mathfrak{p} \to T_{\bar{o}}\bar{M} \cong \mathfrak{p}$ es la identidad en $\mathfrak{p}$. Se sigue que el sistema triple de Lie $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} = d_o\pi(T_o\Sigma)$ coincide con $T_o\Sigma$ en $\mathfrak{p}$. Por lo tanto, el grupo de transformaciones glide de $\bar{\Sigma}$ es G' y la isotropía del grupo de transformaciones glide de $\bar{\Sigma}$ en o es K'. Como $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} \cong T_o\Sigma$ es un sistema triple de Lie irreducible y maximal, entonces $\bar{\Sigma}$ es una subvariedad totalmente geodésica (localmente) irreducible y maximal.

Sea $\mathbb{V} = \{\xi \in T_{\bar{o}}\bar{M} \mid k' \cdot \xi = \xi \text{ para todo } k' \in K'\}$. Por *(iii)*, el subespacio $\mathbb{V}$ es no trivial. Más aún, como $\bar{\Sigma}$ es irreducible, la acción de $(K')^o$ en $T_{\bar{o}}\bar{M}$ no tiene puntos fijos y por lo tanto $\mathbb{V}$ es ortogonal a $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$.

Sea $\bar{\Sigma}'$ la subvariedad completa y totalmente geodésica de $\bar{M}$ con $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}' = \mathbb{V}$. Tomemos $\bar{v} \in T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}'$ tal que $\gamma_{\bar{v}}(t) = \exp_{\bar{o}}(t\bar{v})$ es una geodésica en $\bar{\Sigma}'$ cerrada con periodo 1. Sea $g^{\bar{v}} = \bar{s}_{\gamma_{\bar{v}}(1/2)}\bar{s}_{\bar{o}} \in Iso(\bar{M})$ la transvección geométrica de $\gamma_{\bar{v}}$ en 1. Como $\bar{v}$ es fijo por $(K')^o$, entonces $g^{\bar{v}}$ conmuta con $(K')^o$ y por lo tanto $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}(T_{\bar{o}}\bar{\Sigma})$ es un subespacio invariante por $(K')^o$. Note que la acción de $(K')^o$ en $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}(T_{\bar{o}}\bar{\Sigma})$ es irreducible. Como $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}(v) = v$ y $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$ es ortogonal a v, entonces $d_og^{\bar{v}}(T_{\bar{o}}\bar{\Sigma})$ también es ortogonal a v. La intersección $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} \cap d_og^{\bar{v}}(T_{\bar{o}}\bar{\Sigma})$ es un subespacio de $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$ invariante por $(K')^o$ y como $\dim T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} \geq \frac{1}{2}\dim \bar{M}$, entonces tal intersección es no nula. Como $\bar{\Sigma}$ es irreducible, debe ser $d_og^{\bar{v}}(T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}) = T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$ y por lo tanto $g^{\bar{v}}(\Sigma) = \Sigma$.

Sean $E_{\pm 1}$ los autoespacios de $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}$ asociados a los autovalores ± 1. Note que E_1 (resp. E_{-1}) es el conjunto de vectores fijos de $d_{\bar{o}}g^{\bar{v}}$ (resp. $d_{\bar{o}}(\bar{s}_{\bar{o}} \circ g^{\bar{v}})$) y por lo tanto son sistemas triples de Lie complementarios. Como $(K')^o$ conmuta con $g^{\bar{v}}$, estos subespacios son invariantes por $(K')^o$. Sean $\bar{\Sigma}_{\pm 1}$ las subvariedades completas y totalmente geodésicas de M con $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}_{\pm 1} = E_{\pm 1}$. Tenemos que $T_{\bar{o}}\bar{M} = E_1 \oplus E_{-1}$ y $T_{\bar{o}}\bar{\Sigma} = \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_{-1}$, donde $\bar{E}_{\pm 1} = E_{\pm 1} \cap T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$. Como $\bar{\Sigma}$ es irreducible y los subespacios $\bar{E}_{\pm 1}$ son invariantes por $(K')^o$, entonces $\bar{E}_1 = T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$ ó $\bar{E}_{-1} = T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$. Si $\bar{E}_1 = T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$, entonces Σ es una subvariedad propia de $\bar{\Sigma}_1$, lo que contradice la maximalidad de $\bar{\Sigma}$. Por lo tanto, $\bar{E}_{-1} = T_{\bar{o}}\bar{\Sigma}$ y $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_{-1}$ es reflectiva.

Caso 3: Σ es semisimple y no (localmente) irreducible. Podemos suponer que M es de tipo no compacto. En este caso, Σ es simplemente conexo y podemos escribir $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_a$, donde cada Σ_i es un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto. Sea $d_i = \dim \Sigma_i$ y organicemos los factores de Σ de tal forma que $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_a$. Sea G_i el grupo de transformaciones glide de Σ_i y $K_i = (G_i)_o$. El grupo de transformaciones glide de Σ es $G' = G_1 \times \cdots \times G_a$

y $K' = G'_o = K_1 \times \cdots \times K_a$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de M y denotemos $\mathbb{V}_i = T_o\Sigma_i$. Por hipótesis existe $0 \neq v \in \nu_o\Sigma$ vector fijo por la representación slice de K'. Usaremos el siguiente lema.

Lema 2.4.4. *Para todo $u \in T_o\Sigma$ y $0 \neq v \in \nu_o\Sigma$ vector fijo por la representación slice de Σ, se tiene que $R_{u,v} \notin \mathfrak{k}'$.*

Demostración. Probamos el lema por contradicción. Supongamos que existe $u \in T_oM$ tal que $R_{u,v} \in \mathfrak{k}'$. Como v es un vector fijo de K' y $R_{u,v} \in \mathfrak{k}'$, entonces $R_{u,v}v = 0$. El Lema 1.1.23 implica que $R_{u,v} = 0$ y para todo $k \in K'$ tenemos

$$R_{d_ok(u),v} = R_{d_ok(u),d_ok(v)} = d_ok \circ R_{u,v} \circ d_ok^{-1} = 0.$$

Se sigue que el subespacio $\mathbb{W}$ de $T_o\Sigma$ generado por $K' \cdot u$ es invariante por K' y satisface $R_{\mathbb{W},v} = 0$.

Del Lema 2.4.1, tenemos que $\mathbb{W}$ es un producto de algunos $T_o\Sigma_i$ y reorganizando los factores, podemos suponer que existe $l \leq a$ tal que

$$\mathbb{W} = \mathbb{V}_1 \times \cdots \times \mathbb{V}_l.$$

Sea $Z_{\mathfrak{p}}(\mathbb{W}) = \{u \in \mathfrak{p} \mid [\mathbb{W}, u] = 0\} = \{u \in \mathfrak{p} \mid R_{\mathbb{W},u} = 0\}$ el centralizador de $\mathbb{W}$ en $\mathfrak{p}$. Claramente $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{V}_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_a \subset Z_{\mathfrak{p}}(\mathbb{W})$. Más aún, el subespacio $\mathbb{W} \oplus Z_{\mathfrak{p}}(\mathbb{W})$ es un sistema triple de Lie (pues $\mathbb{W}$ lo es) que contiene propiamente a $T_o\Sigma$. Esto último contradice la maximalidad de Σ y por lo tanto $R_{u,v} \notin \mathfrak{k}'$, para todo $u \in T_o\Sigma$. □

Para concluir la prueba del Teorema 2.3.12 debemos probar que Σ es reflectiva. Supongamos por contradicción que Σ no es reflectiva. Sea $0 \neq x \in \mathbb{V}_1$ y definamos $B_x = R_{x,v} \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{so}(T_oM)$. Por el Lema 2.4.4, $B_x \notin \mathfrak{k}'$. Sea $h_x^t = \mathrm{Exp}(tB_x)$ el subgrupo a un parámetro de $SO(T_oM)$ generado por B_x y sea H_x^t el correspondiente subgrupo monoparamétrico en K tal que $d_oH_x^t = h_x^t$. Como Σ es maximal y no reflectiva, el Lema 2.4.3 implica que $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}^{\Sigma}$. De lo anterior y del Lema 2.4.4 se tiene que $B_x \notin \mathfrak{k}^{\Sigma}$ y por lo tanto se pude elegir t arbitrariamente pequeño que satisface $h_x^t \notin \chi(K^{\Sigma})$ (χ denota la representación isotrópica). Para este t se tiene que $h_x^t(T_o\Sigma) \neq T_o\Sigma$ y por lo tanto $\Sigma^t := H_x^t(\Sigma) \neq \Sigma$.

Consideremos $\hat{\Sigma}_1 = \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_a$ subvariedad totalmente geodésica de M. El grupo de transformaciones glide de $\hat{\Sigma}_1$ es $\hat{G}_1 = G_2 \times \cdots \times G_a$ y la isotropía glide en o es $\hat{K}_1 = K_2 \times \cdots \times K_a$. Usando que que la representación de $\hat{K}_1$ en $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{V}_1$ es trivial y que R es invariante por K, para todo $A \in \hat{\mathfrak{k}}_1$ tenemos que

$$[B_x, A] = R_{x,v}A - AR_{x,v} = -(A \cdot R)_{x,v} - R_{Ax,v} - R_{x,Av} = 0.$$

Es decir,

$$[B_x, \hat{\mathfrak{k}}_1] = \{0\}.$$

La isotropía glide de la subvariedad totalmente geodésica $\hat{\Sigma}_1^t = H_x^t(\hat{\Sigma}_1)$ es $H_x^t \circ \hat{K}_1 \circ (H_x^t)^{-1}$. Como $[B_x, \hat{\mathfrak{k}}_1] = \{0\}$, entonces la isotropía glide de $\hat{\Sigma}_1^t$ es $\hat{K}_1$. En particular, el sistema triple de Lie $\hat{\mathbb{V}}_1^t = T_o\hat{\Sigma}_1^t$ es invariante por $\hat{K}_1$.

Lema 2.4.5. *Se puede elegir $t \neq 0$ lo suficientemente pequeño tal que $\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que para todo t lo suficientemente pequeño se tiene que $\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma \neq \{0\}$. Dentro de estos valores para t, podemos elegir t arbitrariamente pequeño tal que $h_x^t(T_o\Sigma) \neq T_o\Sigma$. El subespacio $\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma \subset T_o\Sigma$ invariante por $\hat{K}_1$ y por el Lema 2.4.1 existe un conjunto de índices $\emptyset \neq J \subset \{2, \cdots, l\}$ y un subespacio $\mathbb{V}_1^t \subset T_o\Sigma_1$ tal que

$$\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma = \mathbb{V}_1^t \bigoplus_{j \in J} T_o\Sigma_j.$$

Note que $\mathbb{V}_1$ es perpendicular a $\hat{\mathbb{V}}_1^0 = \hat{\mathbb{V}}_1$ y por lo tanto $\mathbb{V}_1^t = \{0\}$ para t suficientemente pequeño. Para tales valores de t se tiene que

$$T_o\Sigma \subset (\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) + Z_{\mathfrak{p}}(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma).$$

Por otro lado, $\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma$ es un subespacio de $\hat{\mathbb{V}}_1^t = T_o\hat{\Sigma}_1^t$ invariante por $\hat{K}_1$ y por el Lema 2.4.1, $\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma$ es un producto de factores de de Rham de $T_o\hat{\Sigma}_1^t$. Se sigue que

$$\hat{\mathbb{V}}_1^t \subset (\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) + Z_{\mathfrak{p}}(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma).$$

Concluimos que $(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) + Z_{\mathfrak{p}}(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma)$ es un sistema triple de Lie que contiene a $\hat{\mathbb{V}}_1^t + T_o\Sigma$ y por lo tanto contiene propiamente a $T_o\Sigma$. De la maximalidad de Σ tenemos

$$(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) + Z_{\mathfrak{p}}(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) = T_oM. \tag{2.2}$$

Note que $(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) \cap Z_{\mathfrak{p}}(\hat{\mathbb{V}}_1^t \cap T_o\Sigma) = \{0\}$, pues en caso contrario, existiría $0 \neq v$ tal que $[v, T_oM] = 0$, lo que contradice que M es de tipo no compacto. Por lo tanto, la suma en (2.2) es directa, lo que contradice la irreducibilidad de M. □

Denotemos por $\pi : T_oM \to \nu_o\Sigma$ a la proyección canónica. Como $\nu_o\Sigma$ es invariante por K' y $\hat{K}_1 \subset K'$, entonces $\nu_o\Sigma$ también es invariante por $\hat{K}_1$. Más aún, π es equivariante respecto a $\hat{K}_1$. Fijemos t como en el Lema 2.4.5. Para este t se tiene que $\pi : T_o\hat{\Sigma}_1^t \to \nu_o\Sigma$ es inyectiva.

La subvariedad totalmente geodésica $\hat{\Sigma}_1^t = H_1^t(\Sigma)$ es isométrica a $\hat{\Sigma}_1^t$ y su espacio tangente es $T_o\hat{\Sigma}_1^t = h_x^t(\mathbb{V}_2) \oplus \cdots \oplus h_x^t(\mathbb{V}_a)$. Como B_x conmuta con $\hat{\mathfrak{k}}^1$, entonces K_i actúa irreduciblemente en $h_x^t(\mathbb{V}_i)$ y trivialmente en $h_x^t(\mathbb{V}_j)$ para $i, j \in \{2, \cdots, a\}$ e $i \neq j$. Usando que $\pi : \hat{\mathbb{V}}_1^t \to \nu_o\Sigma$ es inyectiva y equivariante respecto a la acción de $\hat{K}_1$, tenemos la descomposición

$$\pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t) = \pi(h_x^t(\mathbb{V}_2)) \oplus \cdots \oplus \pi(h_x^t(\mathbb{V}_a)),$$

donde K_i actúa irreduciblemente en $\pi(h_x^t(\mathbb{V}_i))$ y trivialmente en $\pi(h_x^t(\mathbb{V}_j))$, para $i, j \in \{2, \cdots, a\}$ e $i \neq j$. Más aún, la representación de $\hat{K}_1$ en $\pi(h_x^t(\mathbb{V}_i))$ es equivalente a la representación de $\hat{K}_1$ en $\mathbb{V}_i$, para $i \geq 2$.

Como v es un vector fijo por $\hat{K}_1$, entonces v es ortogonal a $\pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t)$. Sea $\mathbb{W}$ el subespacio lineal generado por todos los subespacios V de $\nu_o\Sigma$ invariantes por $\hat{K}_1$ tal que la representación de $\hat{K}_1$ en V es equivalente a la representación de $\hat{K}_1$ en $\mathbb{V}_i$, para algún $i = 2, \cdots, a$. Note que v es perpendicular a $\mathbb{W}$. Si $\pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t)$ es un subespacio propio de $\mathbb{W}$, entonces existiría V y un $i \in \{2, \cdots, a\}$ tal que V es equivalente a la representación de $\hat{K}_1$ en $\mathbb{V}_i$ con $V \not\subseteq \pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t)$. El subespacio $V \cap \pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t)$ es invariante por K_i y como la representación en V es irreducible, debe ser $V \cap \pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t) = \{0\}$. Como $d_i \geq d_1$, tendríamos que

$$\dim \mathbb{W} \geq (d_2 + \cdots + d_a) + d_i \geq \dim \Sigma.$$

Como v es perpendicular a $\mathbb{W}$, entonces $\operatorname{codim} \Sigma \geq \dim \Sigma + 1$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\mathbb{W} = \pi(T_o\hat{\Sigma}_1^t)$ y la representación de $\hat{K}_1$ en $\mathbb{W}$ es una s-representación equivalente a la representación isotrópica del espacio simétrico $\hat{\Sigma}_1$.

Usando la definición de $\mathbb{W}$ y el hecho que K_1 conmuta con $\hat{K}_1$, es fácil ver que $\mathbb{W}$ es invariante por K_1. Más aún, el subgrupo $(K_1)|_{\mathbb{W}} = \{k|_{\mathbb{W}} : \mathbb{W} \to \mathbb{W} \mid k \in K_1\}$ es un subgrupo del centralizador de $(\hat{K}_1)|_{\mathbb{W}}$ en $SO(\mathbb{W})$. Como $(\hat{K}_1)|_{\mathbb{W}}$ actúa como una s-representación, por el Lema 2.4.2, tenemos que

$$(K_1)|_{\mathbb{W}} \subset (\hat{K}_1)|_{\mathbb{W}}.$$

Por otro lado, del Lema 1.1.8, la dimensión del centro de K_1 es 0 ó 1. Supongamos que K_1 no es abeliano. Intercambiando $\hat{\Sigma}_1$ por Σ_1 se puede probar que existe un subespacio $\mathbb{W}_1 \subset \nu_o\Sigma$ invariante por K_1 tal que la representación de K_1 en $\mathbb{W}_1$ es equivalente a la representación de K_1 en $\mathbb{V}_1$. Como $(K_1)|_{\mathbb{W}}$ es un subgrupo del centro de $(\hat{K}_1)|_{\mathbb{W}}$, entonces el núcleo de la representación de K_1 en $\mathbb{W}$ tiene al menos dimensión 1. Como la representación de K_1 en $\mathbb{V}_1$ es casi efectiva, de lo anterior tenemos que $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{W} = \{0\}$. Por lo tanto,

$$\dim \nu_o\Sigma \geq \dim(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{W} \oplus \mathbb{R}v) = \dim \Sigma + 1.$$

Esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, K_1 es abeliano y Σ_1 es isométrico al plano hiperbólico real $\mathbb{R}H^2$. En particular, $\dim \mathbb{W} = \dim \Sigma - 2$ y como $v \notin \mathbb{W}$, entonces $\dim \nu_o\Sigma \geq \dim \Sigma - 1$.

Sea $w \in \nu_o\Sigma$ ($w = 0$, si $\dim \nu_o\Sigma = \dim \Sigma - 1$) ortogonal a $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{W}$ tal que $\nu_o\Sigma = \mathbb{R}w \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{W}$. Note que K deja invariante a $(\mathbb{R}w)^\perp = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{W} \oplus T_o\Sigma$ y por lo tanto, w es un vector fijo de la representación slice de K. Sea $k \in K_1$ no trivial y tomemos $\hat{k} \in \hat{K}_1$ tal que $k\hat{k}^{-1}$ es trivial en $\mathbb{W}$ (recordemos que $(K_1)|_{\mathbb{W}} \subset (\hat{K}_1)|_{\mathbb{W}}$). Como $\hat{k}$ actúa trivialmente en Σ_1, entonces $k\hat{k}^{-1}$ es no trivial. Se sigue que $k\hat{k}^{-1} \in K^\Sigma$ se representa trivialmente en el espacio normal $\nu_o\Sigma$. El Lema 2.3.6 implica que Σ es reflectiva, lo que contradice nuestra suposición y termina la demostración del teorema 2.3.12.

Capítulo 3

Índice de espacios simétricos

En este capítulo estudiamos el índice de espacios simétricos introducido por Onishchik en [23]. El *índice* de un espacio simétrico M se define como la menor codimensión de una subvariedad totalmente geodésica de M y se denota por $i(M)$, es decir,

$$i(M) = \text{mín}\{\text{codim}(\Sigma) \mid \Sigma \text{ es subvariedad totalmente geodésica de } M\}.$$

Análogamente, en [2], Berndt y Olmos definen el *índice reflectivo* de M como

$$i_r(M) = \text{mín}\{\text{codim}(\Sigma) \mid \Sigma \text{ es subvariedad reflectiva de } M\}.$$

En [3] Olmos y Berndt calculan el índice para los espacios simétricos de tipo II, esto es, para los grupos de Lie simples compactos con métrica bi-invariante. En este caso las subvariedades propias totalmente geodésicas de dimensión maximal son embedding de Cartan o subgrupos de Lie maximales. En la Tabla 3.1 resumimos la información obtenida en [3].

Utilizando la clasificación de Leung para subvariedades reflectivas en [19] y [20] , Olmos y Berndt calculan el índice reflectivo para los espacios simétricos irreducibles (ver [2]).

Como toda subvariedad reflectiva es totalmente geodésica, entonces $i_r(M) \geq i(M)$. En [2] se propone la siguiente conjetura.

Conjetura: Para todo espacio simétrico irreducible y simplemente conexo M diferente de $G_2/SO(4)$ y $G_2^2/SO(4)$, se tiene que $i(M) = i_r(M)$.

3.1. Espacios excepcionales

En esta sección damos una respuesta afirmativa a la conjetura para los espacios simétricos excepcionales y para la familia $Sp_r(\mathbb{R})/U_r$ $(r \geq 3)$. Para los siguientes espacios excepcionales la conjetura fue probada en trabajos anteriores:

- $E_6^{-14}/Spin_{10}U_1$ y E_6^{-26}/F_4 (Onishchik [23]).

Cuadro 3.1: índice de espacios simétricos de tipo II y subvariedades totalmente geodésicas Σ con $\mathrm{codim}(\Sigma) = i(M)$ (tabla tomada de [3]).

G	Σ	$\dim(G)$	$i(G)$	
SU_2	$SU_2/S(U_1U_1)$	3	1	
SU_3	SU_3/SO_3	8	3	
SU_{r+1}	$S(U_rU_1)$	$r(r+2)$	$2r$	$r \geq 4$
$Spin_5$	$Spin_4, SO_5/SO_2SO_3$	10	4	
$Spin_{2r+1}$	$Spin_{2r}$	$r(2r+1)$	$2r$	$r \geq 3$
Sp_r	$Sp_{r-1}Sp_1$	$r(2r+1)$	$4r-4$	$r \geq 3$
$Spin_{2r}$	$Spin_{2r-1}$	$r(2r-1)$	$2r-1$	$r \geq 3$
E_6	F_4	78	26	
E_7	E_6U_1	133	54	
E_8	E_7Sp_1	248	112	
F_4	$Spin_9$	52	16	
G_2	$SU_3, G_2/SO_4$	14	6	

- Espacios simétricos excepcionales de tipo II y IV (Berndt, Olmos [3]).
- F_4^4/Sp_3Sp_1 (Berndt, Olmos [2]).
- $F_4^{-20}/Spin_9$ (Wolf [24]).

Los espacios simétricos excepcionales de tipo no compacto restantes son: E_6^6/Sp_4, $E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$, E_7^{-25}/E_6U_1 y E_8^{-24}/E_7Sp_1. Vamos a dar un método que permite verificar la conjetura para estos espacios simétricos.

Sea $M = G/K$ un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto, denotemos por r el rango de M y por n la dimensión de M, donde $G = Iso^o(M)$ y K es la isotropía de un punto o en G. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de M. Sea $\Sigma = G'/K'$ subvariedad totalmente geodésica de M de codimensión d y r_Σ el rango de Σ. Como siempre asumimos que $o \in \Sigma$ y G' denota el grupo de transformaciones glide de Σ. Sea $v \in T_o\Sigma$ un vector principal de la acción isotrópica de K' en $T_o\Sigma$ y K'_v la isotropía de v en K'. El espacio normal $\nu_v(K \cdot v)$ es un subespacio abeliano maximal de $T_o\Sigma$ y por lo tanto

$$\dim K' - \dim K'_v = \dim(K' \cdot v) = n - d - r_\Sigma.$$

Por otro lado $n - d = \dim \Sigma = \dim G' - \dim K'$ y junto con la ecuación anterior tenemos que

$$\dim G' = 2(n-d) - r_\Sigma + \dim(K'_v). \tag{3.1}$$

Sean $M^* = G^*/K^*$ y $\Sigma^* = G'^*/K'^*$ los espacios duales de M y Σ, respectivamente. Note que G'^* es un subgrupo de G^* y, por lo tanto, G'^* también es una subvariedad totalmente geodésica de G^* equipado con una métrica bi-invariante. De lo anterior tenemos que

$$\dim G - \dim G' = \dim G^* - \dim G'^* \geq i(G^*).$$

De (3.1) tenemos

$$n + \dim(K) - 2(n-d) + r_\Sigma - \dim(K'_v) \geq i(G^*),$$

o equivalentemente,

$$d \geq \frac{1}{2}(i(G^*) + n - \dim K - r_\Sigma + \dim(K'_v)). \tag{3.2}$$

Escribiendo la ecuación anterior como

$$d \geq \frac{1}{2}(i(G^*) + n - r - \dim K + (r - r_\Sigma) + \dim(K'_v)),$$

y teniendo en cuenta que $(r - r_\Sigma)$ y $\dim(K'_v)$ son no negativos, tenemos que

$$d \geq \frac{1}{2}(i(G^*) + n - r - \dim K) \tag{3.3}$$

Introducimos la siguiente notación. Denotemos por ℓ_Σ a la dimensión de la doble isotropía K_v, donde v es un vector principal. También definimos los enteros Ω_M y Λ_Σ^M por

$$\Omega_M = i(G^*) + \dim(M) - \mathrm{rk}(M) - \dim(K); \qquad \Lambda_\Sigma^M = (\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}(\Sigma)) + \ell_\Sigma.$$

Utilizando la notación anterior reescribimos las ecuaciones (3.1) y (3.2) en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Sea $M = G/K$ espacio simétrico irreducible de tipo no compacto y Σ una subvariedad totalmente geodésica de M con* $\operatorname{codim}\Sigma \geq 1$. *Entonces*

$$\operatorname{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(\Omega_M + \Lambda_\Sigma^M) \geq \frac{1}{2}(\Omega_M).$$

En la tabla 3.2 resumimos algunos datos de los espacios simétricos irreducibles de tipo no compacto, que utilizaremos para verificar la conjetura para algunos espacios simétricos.

Teorema 3.1.2. *Para los siguientes espacios simétricos, el índice reflectivo coincide con el índice.*

(i) Para $M = E_6^2/SU_6Sp_1$ tenemos $i(M) = 12$.

(ii) Para $M = E_7^7/SU_8$ tenemos $i(M) = 27$.

(iii) Para $M = E_8^8/SO_{16}$ tenemos $i(M) = 56$.

(iv) Para $M = Sp_r(\mathbb{R})/U_r$ $(r \geq 3)$ tenemos $i(M) = 2(r-1)$.

Demostración. Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica de M. En [2] se calcula el índice reflectivo de los espacios simétricos irreducibles y en [3] el índice de los grupos de Lie simples compactos (ver Tabla 3.1). Utilizando estos datos y la Proposición 3.1.1 tenemos:

(i) Para $M = G/K = E_6^2/SU_6Sp_1$ tenemos que $i(E_6) = 26$, $\dim(M) = 40$, $\mathrm{rk}(M) = 4$, $\dim(K) = 38$. Por lo tanto

$$\operatorname{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(26 + 40 - 4 - 38) = 12 = i_r(M).$$

Cuadro 3.2: Dimensión, rango y ℓ_Σ

Σ	dim(Σ)	rk(Σ)	ℓ_Σ	Comments
$SL_{r+1}(\mathbb{R})/SO_{r+1}$	$\frac{1}{2}r(r+3)$	r	0	$r \geq 2$
$SL_{r+1}(\mathbb{C})/SU_{r+1}$	$r(r+2)$	r	r	$r \geq 2$
SU^*_{2r+2}/Sp_{r+1}	$r(2r+3)$	r	$3(r+1)$	$r \geq 2$
E_6^{-26}/F_4	26	2	28	
$SO^o_{1,k+1}/SO_{k+1}$	$k+1$	1	$\frac{1}{2}(k-1)k$	$k \geq 1$
$SO^o_{r,r+k}/SO_rSO_{r+k}$	$r(r+k)$	r	$\frac{1}{2}(k-1)k$	$r \geq 2, k \geq 1$
$SO_{2r+1}(\mathbb{C})/SO_{2r+1}$	$r(2r+1)$	r	r	$r \geq 2$
$Sp_r(\mathbb{R})/U_r$	$r(r+1)$	r	0	$r \geq 3$
$SU_{r,r}/S(U_rU_r)$	$2r^2$	r	$r-1$	$r \geq 3$
$Sp_r(\mathbb{C})/Sp_r$	$r(2r+1)$	r	r	$r \geq 3$
SO^*_{4r}/U_{2r}	$2r(2r-1)$	r	$3r$	$r \geq 3$
$Sp_{r,r}/Sp_rSp_r$	$4r^2$	r	$3r$	$r \geq 3$
E_7^{-25}/E_6U_1	54	3	28	
$SO^o_{r,r}/SO_rSO_r$	r^2	r	0	$r \geq 4$
$SO_{2r}(\mathbb{C})/SO_{2r}$	$r(2r-1)$	r	r	$r \geq 4$
$SU_{r,r+k}/S(U_rU_{r+k})$	$2r(r+k)$	r	k^2+r-1	$r \geq 2, k \geq 1$
$Sp_{r,r+k}/Sp_rSp_{r+k}$	$4r(r+k)$	r	$k(2k+1)+3r$	$r \geq 2, k \geq 1$
SO^*_{4r+2}/U_{2r+1}	$2r(2r+1)$	r	$3r+1$	$r \geq 2$
$E_6^{-14}/Spin_{10}U_1$	32	2	16	
$F_4^{-20}/Spin_9$	16	1	21	
E_6^6/Sp_4	42	6	0	
$E_6(\mathbb{C})/E_6$	78	6	6	
E_7^7/SU_8	70	7	0	
$E_7(\mathbb{C})/E_7$	133	7	7	
E_8^8/SO_{16}	128	8	0	
$E_8(\mathbb{C})/E_8$	248	8	8	
F_4^4/Sp_3Sp_1	28	4	0	
E_6^2/SU_6Sp_1	40	4	2	
$F_4(\mathbb{C})/F_4$	52	4	4	
$E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$	64	4	9	
E_8^{-24}/E_7Sp_1	112	4	28	
G_2^2/SO_4	8	2	0	
$G_2(\mathbb{C})/G_2$	14	2	2	

(ii) Para $M = G/K = E_7^7/SU_8$ tenemos que $i(E_7) = 54$, $\dim(M) = 70$, $\mathrm{rk}(M) = 7$, $\dim(K) = 63$. Por lo tanto

$$\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(54 + 70 - 7 - 63) = 27 = i_r(M).$$

(iii) Para $M = G/K = E_8^8/SO(6)$ tenemos que $i(E_8) = 112$, $\dim(M) = 128$, $\mathrm{rk}(M) = 8$, $\dim(K) = 120$. Por lo tanto

$$\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(112 + 128 - 8 - 120) = 56 = i_r(M).$$

(vi) Para $M = G/K = Sp_r(\mathbb{R})/U(r)$ tenemos $i(Sp(r)) = 4(r-1)$, $\dim(M) = r(r+1)$, $\mathrm{rk}(M) = r$, $\dim(K) = r^2$. Por lo tanto

$$\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(4r - 4 + r^2 + r - r - r^2) = 2r - 2 = i_r(M)$$

□

En lo que resta de esta sección vamos a probar la conjetura para los espacios E_6^6/Sp_4, $E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$, E_7^{-25}/E_6U_1 y E_8^{-24}/E_7Sp_1. En el siguiente lema resumimos la información obtenida por la proposición 3.1.1 para estos espacios simétricos.

Lema 3.1.3. *Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica tal que* $\mathrm{codim}\,\Sigma = i(M)$ *y no reflectiva de M. Supongamos que $i(M) < i_r(M)$. Para el índice $i(M)$ y Λ_Σ^M se tiene:*

(i) Si $M = E_6^6/Sp_4$, entonces $13 \leq i(M) \leq i_r(M) = 14$ y $\Lambda_\Sigma^M = 0$.

(ii) Si $M = E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$, entonces $23 \leq i(M) \leq i_r(M) = 24$ y $0 \leq \Lambda_\Sigma^M \leq 1$.

(iii) Si $M = E_7^{-25}/E_6U_1$, entonces $13 \leq i(M) \leq i_r(M) = 22$ y $0 \leq \Lambda_\Sigma^M \leq 16$.

(iv) Si $M = E_8^{-24}/E_7Sp_1$, entonces $42 \leq i(M) \leq i_r(M) = 48$ y $0 \leq \Lambda_\Sigma^M \leq 10$.

Demostración. El índice reflectivo de espacios simétricos fue calculado en [2].

(i) Si $M = G/K = E_6^6/Sp_4$, entonces $i(E_6) = 26$, $\dim(M) = 42$, $\mathrm{rk}(M) = 6$, $\dim(K) = 36$. Por lo tanto $\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(26 + 42 - 6 - 36) = 13 < 14 = i_r(M)$.

(ii) Si $M = G/K = E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$, entonces $i(E_7) = 54$, $\dim(M) = 64$, $\mathrm{rk}(M) = 4$, $\dim(K) = 69$. Por lo tanto $\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(54 + 64 - 4 - 69) = 22{,}5 < 24 = i_r(M)$.

(iii) Si $M = G/K = E_7^{-25}/E_6U_1$, entonces $i(E_7) = 54$, $\dim(M) = 54$, $\mathrm{rk}(M) = 3$, $\dim(K) = 79$. Por lo tanto $\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(54+54-3-79) = 13 < 22 = i_r(M)$.

(iv) Si $M = G/K = E_8^{-24}/E_7Sp_1$, entonces $i(E_8) = 112$, $\dim(M) = 112$, $\mathrm{rk}(M) = 4$, $\dim(K) = 136$. Por lo tanto $\mathrm{codim}(\Sigma) \geq \frac{1}{2}(112 + 112 - 4 - 136) = 42 < 48 = i_r(M)$.

Las afirmaciones de Λ_Σ^M son inmediatas de las desigualdades en la Proposición 3.1.1 y de los cálculos anteriores.

□

Damos argumentos individuales para cada uno de los espacios simétricos anteriores. Antes de probar la conjetura para los espacios simétricos restantes, vamos a dar algunos resultados teóricos que permiten reducir el número de casos que debemos considerar. El siguiente lema es una generalización de la Proposición 1.1.34 cuando M no es irreducible.

Lema 3.1.4. *Sea M un espacio simétrico con descomposición de de Rham $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_g$, donde M_0 es espacio simétrico plano (posiblemente de dimensión 0) y $M_1, \cdots, M_g$ son espacios simétricos irreducibles semisimples, con $g \geq 1$. Sea Σ una hipersuperficie totalmente geodésica de M. Entonces, existe $j \in \{0, \cdots, g\}$ tal que M_j es un espacio de curvatura constante y $\Sigma = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times \Sigma_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_g$, donde Σ_j es una hipersuperficie totalmente geodésica de M_j.*

Demostración. Podemos asumir todos los espacios involucrados contienen a $o \in M$. Para cada i, la intersección $T_o\Sigma \cap T_oM_i$ es un sistema triple de Lie en T_oM_i de dimensión $\dim(M_i) - 1$ ó $\dim(M_i)$. Por la Proposición 1.1.34 tenemos que $M_i \subseteq \Sigma$, si M_i no es de curvatura constante. Por lo tanto, podemos asumir que M_i es un espacio de curvatura constante, para todo $i \in \{1, \cdots, g\}$.

Denotemos por R^i al tensor de curvatura de M_i, por R al tensor de curvatura de M y por κ_i la curvatura constante de M_i. Sea $Y = Y_0 + \cdots + Y_g \in T_o\Sigma$, donde $Y_i \in T_oM_i$. Tomemos $X \in T_o\Sigma \cap T_oM_i$ un vetor unitario tal que $\langle X, Y \rangle = 0$. . Tenemos que $\kappa_i Y_i = R^i(Y_i, X)X = R(Y, X)X \in T_o\Sigma \cap T_oM_i$ y por lo tanto $Y_i \in T_o\Sigma \cap T_oM_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, g\}$. Esto implica que $T_o\Sigma = (T_o\Sigma \cap T_oM_0) \oplus \cdots \oplus (T_o\Sigma \cap T_oM_g)$ y como Σ es una hipersuperficie debe ser $T_i\Sigma \cap T_iM_i = T_iM_i$ para todo i, salvo para un índice j. Para este j sea Σ_j la hipersuperficie totalmente geodésica de M_j tal que $T_o\Sigma_j = T_o\Sigma \cap T_oM_j$. Se sigue que $\Sigma = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times \Sigma_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_g$. □

Proposición 3.1.5. *Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica reducible y maximal de un espacio simétrico de tipo no compacto M. Supongamos que la descomposición de de Rham de Σ contiene un espacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^k$ ($k \geq 2$), un espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^k$ ($k \geq 2$), el espacio simétrico $SL_3(\mathbb{R})/SO_3$ ó el espacio simétrico $SO^o_{2,2+k}/SO_2SO_{2+k}$ ($k \geq 1$ impar). Entonces $\Sigma = \mathbb{R}H^{k_1} \times \mathbb{R}H^{k_2}$ para algún par $k_1, k_2 \geq 2$ ó existe una subvariedad reflectiva Σ' de M con $\dim(\Sigma') \geq \dim(\Sigma)$.*

Demostración. Escribamos $M = G/K$ con $G = Iso^o(M)$ y $K = G_o$, para $o \in M$. Supongamos que $o \in \Sigma$ y escribamos $\Sigma = G'/K'$, donde G' es el grupo de transformaciones glide de Σ y K' la isotropía de o en G'. Denotemos por $N = G''/K''$ al factor de de Rham de Σ de la hipótesis, donde G'' es el grupo de transformaciones glide de N y K'' la isotropía de o en G''.

De los ejemplos 1.1.32, 1.1.33, 2.0.4 y 2.1.4 tenemos que existe una subvariedad reflectiva P de N de dimensión 2 tal que la reflexión τ en el espacio normal $P^\perp$ es interior, esto es, $\tau \in K'' \subset K' \subset K$. Explícitamente tenemos

- Si $M = \mathbb{R}H^k$, entonces $P = \mathbb{R}H^2$ y $P^\perp = \mathbb{R}H^{k-2}$.
- Si $M = \mathbb{C}H^k$, entonces $P = \mathbb{C}H^1$ y $P^\perp = \mathbb{C}H^{k-1}$.
- Si $M = SL_3(\mathbb{R})/SO_3$, entonces $P = \mathbb{R}H^2$ y $P^\perp = \mathbb{R}H^2 \times \mathbb{R}$.

- Si $M = SO^o_{2,2+k}/SO_2SO_{2+k}$, entonces $P = \mathbb{R}H^2$ y $P^\perp = SO^o_{2,2+(k-1)}/SO_2SO_{2+(k-1)}$.

Si Σ no es semisimple, el teorema 2.1.3 implica que existe $v \in T_oM$ tal que la órbita $K \cdot v$ es simétrica y $T_o\Sigma = \nu_v(K \cdot v)$. Por el Lema 2.1.1 tenemos que Σ es reflectiva y podemos tomar $\Sigma' = \Sigma$. Asumamos que Σ es semisimple y escribamos $\Sigma = N \times \bar{\Sigma}$, donde $\bar{\Sigma}$ es una subvariedad totalmente geodésica y semisimple de M que contiene a o.

Sea T la clausura del subgrupo de $K \subset SO(T_oM)$ (vía la representación isotrópica) generado por $d_o\tau$. Note que $d_o\tau$ actúa como la identidad en $T_oP \oplus T_o\bar{\Sigma}$ y como menos la identidad en $T_oP^\perp$. En particular, el grupo $\{g|_{T_o\Sigma} \mid g \in T\}$ tiene orden 2.

Si $\dim T > 0$, entonces el núcleo T_Σ del homomorfismo $T \to SO(T_o\Sigma)$, $g \to g|_\Sigma$ tiene dimensión positiva. Como K' actúa efectivamente, tenemos que $T_\Sigma \not\subseteq K'$. Sin embargo, $T_\Sigma \subset K^\Sigma$ y por lo tanto $\mathfrak{k}' \subsetneq \mathfrak{k}^\Sigma$. El Lema 2.4.3 implica que Σ es reflectiva y podemos tomar $\Sigma' = \Sigma$.

De ahora en adelante vamos a suponer que $\dim T = 0$, o equivalentemente, que τ tiene orden finito. Por definición τ debe tener orden par de la forma 2^sq con $s \geq 1$, y $q \geq 1$ impar. Reemplazando τ por τ^q podemos suponer que τ tiene orden 2^s. Si $s > 1$, entonces el conjunto de puntos fijos de $\tau^{2^{s-1}}$ es una subvariedad reflectiva de M que contiene a Σ y por maximalidad, debe ser igual a Σ. Es decir, Σ es reflectiva y podemos tomar $\Sigma' = \Sigma$.

Podemos suponer que τ tiene orden 2. Sea $\mathbb{V}$ el conjunto de puntos fijos de $d_o\tau$ en $\nu_o\Sigma$. Si $\mathbb{V} = \{0\}$, entonces el conjunto de puntos fijos de $d_o\tau$ es $T_oP^\perp \times T_o\bar{\Sigma}$. Por lo tanto, $P^\perp \times T_o\bar{\Sigma}$ es una subvariedad reflectiva contenida en Σ y por la Proposición 2.3.7 tenemos que Σ también es reflectiva. En este caso podemos tomar $\Sigma' = \Sigma$.

Supongamos que $\dim \mathbb{V} > 0$. Como τ es una involución, la subvariedad totalmente geodésica $\tilde{\Sigma}$ asociada a $T_oP^\perp \oplus T_o\bar{\Sigma} \oplus \mathbb{V}$ es reflectiva. Si $\dim \mathbb{V} \geq 2$, entonces $\dim \tilde{\Sigma} \geq \dim \Sigma$ y podemos tomar $\Sigma' = \tilde{\Sigma}$.

Resta analizar el caso en que $\dim \mathbb{V} = 1$. En este caso, la subvariedad $\hat{\Sigma} = P^\perp \times \bar{\Sigma}$ es una hipersuperficie de $\tilde{\Sigma}$. Recordemos que $P^\perp$ es irreducible, salvo en el caso en que $N = SL_3(\mathbb{R})/SO_3$, donde $P^\perp = \mathbb{R}H^2 \times \mathbb{R}$. Sea $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_0 \times \hat{\Sigma}_1 \times \cdots \times \hat{\Sigma}_g$ la descomposición de de Rham de $\hat{\Sigma}$. Reordenando los indices si hace falta, podemos suponer que $\hat{\Sigma}_g = P^\perp$, salvo en el caso que $N = SL_3/SO_3$, donde podemos suponer que $\hat{\Sigma}_g = \mathbb{R}H^2$ y $\hat{\Sigma}_o = \mathbb{R}$ (recordar que $\bar{\Sigma}$ es semisimple). Por el Lema 3.1.4, existe $j \in \{0, \cdots, g\}$ tal que $\tilde{\Sigma} = \hat{\Sigma}_o \times \hat{\Sigma}_1 \times \cdots \times \tilde{\Sigma}_j \times \cdots \times \hat{\Sigma}_g$, donde $\hat{\Sigma}_j$ es una hipersuperficie de $\tilde{\Sigma}_j$ y $\tilde{\Sigma}_j$ es un espacio de curvatura constante.

Supongamos que $g \geq 3$ y tomemos $i \in \{1, \cdots, g-1\}$ con $i \neq j$. El subespacio $\mathbb{W} = T_o\hat{\Sigma}_i \oplus Z(T_o\hat{\Sigma}_i)$ es un sistema triple de Lie que contiene a $T_o\Sigma$ y a $T_o\tilde{\Sigma}$. Como M es irreducible, $\mathbb{W}$ es un subespacio propio de T_oM. La maximalidad de Σ implica que $T_o\Sigma = \mathbb{W}$, lo que contradice el hecho de que $T_o\tilde{\Sigma} \not\subseteq T_o\Sigma$. Si $g = 1$, entonces $\bar{\Sigma}$ es trivial y tendríamos que Σ es irreducible, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, debe ser $g = 2$ y $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_0 \oplus \hat{\Sigma}_1 \oplus \hat{\Sigma}_2$.

Supongamos que $j \neq 1$. En este caso, el sistema triple de Lie $T_o\hat{\Sigma}_j \oplus Z(T_o\hat{\Sigma}_j)$ contiene a $T_o\Sigma$ y a $T_o\tilde{\Sigma}$. Igual que en el en el párrafo anterior tenemos una contradicción. Por lo tanto, debemos tener que $j = 1$ y $\tilde{\Sigma}_1 = \bar{\Sigma} = \mathbb{R}H^k_2$, para algún $k_2 \geq 1$. Se sigue que $\Sigma = N \times \mathbb{R}H^{k_2}$. Haciendo el mismo razonamiento con $\mathbb{R}H^{k_2}$ en lugar de N, tenemos que existe una subvariedad reflectiva Σ' tal que $\dim \Sigma' \geq \dim \Sigma$ ó $\Sigma = \mathbb{R}H^{k_1} \times \mathbb{R}H^{k_2}$, para algún $k_1 \geq 1$.

$\square$

Utilizando la proposición anterior y la la tabla 3.2 podemos calcular el índice de los espacios $E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$, E_7^{-25}/E_6U_1 y E_8^{-24}/E_7Sp_1. También vamos a utilizar la propiedad $\ell_{\Sigma_1\times\Sigma_2} = \ell_{\Sigma_1} + \ell_{\Sigma_2}$ y el valor de ℓ_Σ para los espacios hiperbólicos que listamos a continuación:

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{R}H^k} &= \frac{1}{2}(k-2)(k-1), \\ \ell_{\mathbb{C}H^k} &= (k-1)^2, \\ \ell_{\mathbb{H}H^k} &= (k-1)(2k-1)+3, \\ \ell_{\mathbb{O}H^2} &= 21. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.6. *Para $M = E_7^{-5}/SO_{12}Sp_1$ tenemos $i(M) = i_r(M) = 24$.*

Demostración. Del Lema 3.1.3 tenemos que $23 \leq i(M) \leq i_r(M) = 24$. Supongamos que $i(M) = 23$ y tomemos Σ subvariedad totalmente geodésica de M con $\mathrm{codim}(\Sigma) = 23$, es decir, con $\dim(\Sigma) = 41$. Del Lema 3.1.3 también tenemos que $(\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}(\Sigma)) + \ell_\Sigma = \Lambda_\Sigma^M \leq 1$.

Como $\mathrm{rk}(M) = 4$, debe ser $(\mathrm{rk}(\Sigma), \ell_\Sigma) \in \{(4,0),(3,0),(4,1)\}$. De la clasificación de espacios simétricos, se verifica que no existen espacios simétricos irreducibles de rango 3 ó 4 y de dimensión 41. Por lo tanto Σ debe ser reducible.

Primero supongamos que la descomposición de de Rham de Σ contiene un factor Σ_1 de rengo 1. Como $\ell_{\Sigma_1} \leq 1$, tenemos que $\Sigma_1 \in \{\mathbb{R}H^2, \mathbb{R}H^3, \mathbb{C}H^2\}$. De la Proposición 3.1.5 debe existir una subvariedad reflectiva Σ' de M tal que $\dim(\Sigma') \geq \dim(\Sigma)$, lo que contradice que $i_r(M) = 24$.

Finalmente, supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 4$ y $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ con $\mathrm{rk}(\Sigma_i) = 2$ y Σ_i irreducibles. Como $\dim(\Sigma) = 41$, uno de los dos factores debe tener dimensión impar. El único espacio simétrico irreducible de dimensión impar y rango 2 es $SL_3(\mathbb{R})/SO_3$. Usando la Proposición 3.1.5 tenemos que existe una subvariedad reflectiva Σ' de M con $\dim(\Sigma') \geq \dim(\Sigma)$, lo que contradice que $i_r(M) = 24$.

Concluimos que tal Σ no existe y por lo tanto $i(M) = 24 = i_r(M)$. $\square$

Teorema 3.1.7. *Para $M = E_7^{-25}/E_6U_1$ tenemos que $i(M) = i_r(M) = 22$.*

Demostración. Del Lema 3.1.3 tenemos que $13 \leq i(M) \leq 22 = i_r(M)$. Supongamos por contradicción que $i(M) \in \{13, \ldots, 21\}$. Sea Σ subvariedad totalmente goedésica de M tal que $\mathrm{codim}(\Sigma) = i(M)$, es decir $\dim(\Sigma) \in \{33, \ldots, 41\}$. Por el Teorema 2.1.3 podemos asumir que Σ es semisimple. Por el Lema 3.1.3 tenemos $(\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}(\Sigma)) + \ell_\Sigma = \Lambda_\Sigma^M \leq 16$. Como $\mathrm{rk}(M) = 3$, tenemos que $\ell_\Sigma \leq 14$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 1$, $\ell_\Sigma \leq 15$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$ y $\ell_\Sigma \leq 16$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 3$.

Los espacios hiperbólicos $\mathbb{F}H^k$ con $\ell_{\mathbb{F}H^k} \leq 16$ son $\mathbb{R}H^k$ para $k \in \{2,3,4,5,6,7\}$ (donde $\ell_{\mathbb{R}H^k} \in \{0,1,3,6,10,15\}$), $\mathbb{C}H^k$ para $k \in \{2,3,4,5\}$ (donde $\ell_{\mathbb{C}H^k} \in \{1,4,9,16\}$) y $\mathbb{H}H^k$ para $k \in \{2,3\}$ (donde $\ell_{\mathbb{H}H^k} \in \{6,13\}$). Por la Proposición 3.1.5 tenemos que Σ no puede tener un factor hiperbólico real, ni un factor hiperbólico complejo en su descomposición de de Rham. Por otro lado, como $\dim(\Sigma) \geq 33$ y $\ell_\Sigma \leq 16$, Σ tampoco puede ser un producto de espacios hiperbólicos cuaterniónicos. En particular, Σ no puede ser un espacio simétrico de rango 1, ni un producto de espacios simétricos de rango 1.

Supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$. De lo observado anteriormente, tenemos que Σ es irreducible. En la tabla 3.2 es fácil verificar que los únicos espacios simétricos irreducibles Σ con $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$ y $\dim(\Sigma) \in \{33, \cdots, 41\}$ son $SO^o_{2,q}/SO_2SO_q$ ($q \in \{17, 18, 19, 20\}$), $SU_{2,q}/S(U_2U_q)$ ($q \in \{9, 10\}$) y $Sp_{2,5}/Sp_2Sp_5$. En todos estos casos tenemos que $\ell_\Sigma > 15$ y por lo tanto no existe tal Σ.

Supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 3$. Sabemos que Σ no puede ser un producto de tres espacios simétricos de rango 1. Supongamos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, donde Σ_1 tiene rango 1 y Σ_2 tiene rango 2. En este caso Σ_1 debe ser $\mathbb{H}H^2$ ó $\mathbb{H}H^3$. En particular $\dim(\Sigma_1) \in \{8, 12\}$ y por lo tanto $21 \leq \dim(\Sigma_2) \leq 33$ y $\ell_{\Sigma_2} \leq 10$. Usando la tabla 3.2 tenemos que la única posibilidad es $\Sigma_2 = Sp_{2,3}/Sp_2Sp_3$, en este caso tenemos $\dim(\Sigma_2) = 24$ y $\ell_{\Sigma_2} = 9$. Como $\dim(\Sigma) \geq 33$, debe ser $\Sigma_1 = \mathbb{H}H^3$, y por lo tanto $\ell_\Sigma = \ell_{\Sigma_1} + \ell_{\Sigma_2} = 13 + 9 = 22$, lo que es una contradicción. Concluimos que Σ no puede ser un producto de un espacio simétrico de rango 1 y un espacio simétrico irreducible de rango 2.

Finalmente, supongamos que Σ es un espacio simétrico irreducible de rango 3. Usando la tabla 3.2 tenemos que los únicos espacios simétricos irreducibles Σ de rango 3 con $\dim(\Sigma) \in \{33, \ldots, 41\}$ y $\ell_\Sigma \leq 16$ son $\Sigma = SU_{3,6}/S(U_3U_6)$ (con $\dim(\Sigma) = 36$ y $\ell_\Sigma = 11$) y $\Sigma = Sp_{3,3}/Sp_3Sp_3$ (con $\dim(\Sigma) = 36$ y $\ell_\Sigma = 9$). Para $\Sigma = SU_{3,6}/S(U_3U_6)$ tenemos que $\Lambda^\Sigma_M = \ell_\Sigma = 11$. Usando que $\Omega_M = 26$ tenemos que $\mathrm{codim}(\Sigma) = 18 < 18{,}5 = \frac{1}{2}(\Omega_M + \Lambda^\Sigma_M)$, lo que contradice la Proposición 3.1.1. Por lo tanto, $\Sigma = SU_{3,6}/S(U_3U_6)$ no es posible. El sistema de raices de $M = E_7^{-25}/E_6U_1$ es de tipo (C_3), las seis raíces cortas tienen multiplicidad 8 y las tres raíces largas tienen multiplicidad 1. El sistema de raíces de $\Sigma = Sp_{3,3}/Sp_3Sp_3$ también es de tipo (C_3), pero las seis raíces cortas tienen multiplicidad 4 y las tres raíces largas tienen multiplicidad 3 (ver por ejemplo Section 13.1 de [1]). Debido a la multiplicidad de las raíces largas y por la observación 1.1.38, no puede ser $\Sigma = Sp_{3,3}/Sp_3Sp_3$. $\square$

Teorema 3.1.8. *Para $M = E_8^{-24}/E_7Sp_1$ tenemos que $i(M) = i_r(M) = 48$.*

Demostración. Del Lema 3.1.3 tenemos que $42 \leq i(M) \leq 48 = i_r(M)$. Supongamos por contradicción que $i(M) \in \{42, \ldots, 47\}$. Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica maximal de M con $\mathrm{codim}(\Sigma) = i(M)$, es decir, con $\dim(\Sigma) \in \{65, \ldots, 70\}$. Por el Teorema 2.1.3 podemos asumir que Σ es semisimple. Por el Lema 3.1.3 tenemos $(\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}(\Sigma)) + \ell_\Sigma = \Lambda^M_\Sigma \leq 10$. Como $\mathrm{rk}(M) = 4$, tenemos que $\ell_\Sigma \leq 7$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 1$, $\ell_\Sigma \leq 8$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$, $\ell_\Sigma \leq 9$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 3$ y $\ell_\Sigma \leq 10$ si $\mathrm{rk}(\Sigma) = 4$.

Los espacios hiperbólicos $\mathbb{F}H^k$ con $\ell_{\mathbb{F}H^k} \leq 10$ son $\mathbb{R}H^k$ para $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (donde $\ell_{\mathbb{R}H^k} \in \{0, 1, 3, 6, 10\}$), $\mathbb{C}H^k$ para $k \in \{2, 3, 4\}$ (donde $\ell_{\mathbb{C}H^k} \in \{1, 4, 9\}$) y $\mathbb{H}H^2$ (donde $\ell_{\mathbb{H}H^2} = 6$). Por la Proposición 3.1.5 tenemos que Σ no puede tener un factor hiperbólico real, ni un factor hiperbólico complejo en su descomposición de de Rham. Por otro lado, como $\dim(\Sigma) \geq 65$ y $\ell_\Sigma \leq 10$, Σ tampoco puede ser un producto de espacios hiperbólicos cuaterniónicos. En particular, Σ no puede ser un espacio simétrico de rango 1, ni un producto de espacios simétricos de rango 1.

Supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$. De lo observado anteriormente, tenemos que Σ es irreducible. En la tabla 3.2 es fácil verificar que los únicos espacios simétricos irreducibles Σ con $\mathrm{rk}(\Sigma) = 2$ y $\dim(\Sigma) \in \{65, \cdots, 70\}$ son $SO^o_{2,q}/SO_2SO_q$ ($q \in \{33, 34, 35\}$) y $SU_{2,17}/S(U_2U_{17})$. En todos estos casos tenemos que $\ell_\Sigma > 8$ y por lo tanto no existe tal Σ.

Supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 3$. Sabemos que Σ no puede ser un producto de tres espacios simétricos de rango 1. Supongamos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, donde Σ_1 tiene rango 1 y Σ_2 tiene rango 2. En este caso Σ_1 debe ser $\mathbb{H}H^2$. En particular $\dim(\Sigma_1) = 8$ y por lo tanto $57 \leq \dim(\Sigma_2) \leq 62$ y $\ell_{\Sigma_2} \leq 3$. Usando la tabla 3.2 se tiene que tal Σ no existe. Finalmente, se verifica de la tabla 3.2 que no existe Σ irreducible con $\mathrm{rk}(\Sigma) = 3$, $\dim(\Sigma) \in \{65, \ldots, 70\}$ y $\ell_\Sigma \leq 9$.

Supongamos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = 4$. Sabemos que Σ no puede ser un producto de cuatro espacios simétricos de rango 1. Primero supongamos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3$, donde Σ_1, Σ_2 tienen rango 1 y Σ_3 tiene rango 2. Tenemos que $\ell_{\Sigma_1} + \ell_{\Sigma_2} + \ell_{\Sigma_3} = \ell_\Sigma \leq 10$. Se sigue que al menos uno de los dos espacios simétricos de rango 1 es un espacio hiperbólico real o complejo. Por la proposición 3.1.5 tenemos que este caso no puede ocurrir.

Supongamos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, donde Σ_1 tiene rango 1 y Σ_2 tiene rango 3. Por la Proposición 3.1.5 debe ser $\Sigma_1 = \mathbb{H}H^2$, lo que implica $57 \leq \dim(\Sigma_2) \leq 62$ y $\ell_{\Sigma_2} \leq 4$. De la tabla 3.2 se verifica fácilmente que tal Σ no existe.

Supongamos que $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, donde Σ_1 y Σ_2 son irreducibles de rango 2. Uno de los dos espacios debe satisfacer $\dim(\Sigma_i) \geq 33$, $\mathrm{rk}(\Sigma_i) = 2$ y $\ell_{\Sigma_i} \leq 10$. De la tabla 3.2 tenemos que tal Σ no existe.

Finalmente, supongamos que Σ es irreducible con $\mathrm{rk}(\Sigma) = 4$. Tenemos que $\dim(\Sigma) \in \{65, \ldots, 70\}$, $\mathrm{rk}(\Sigma) = 4$ y $\ell_\Sigma \leq 10$. De la tabla 3.2 tenemos que tal Σ no existe.

Como hemos analizado todas las posibilidades para Σ concluimos que $i(M) = i_r(M) = 48$. □

Es posible calcular el índice de $M = E_6^6/Sp_4$ con un análisis similar al anterior. Sin embargo, damos una demostración utilizando la clasificación de subvariedades totalmente geodésicas de E_6^6/Sp_4 con rango maximal.

Teorema 3.1.9. *Para $M = E_6^6/Sp_4$ tenemos $i(M) = i_r(M) = 14$.*

Demostración. De [2] sabemos que $i_r(M) = 14$ y por el Lema 3.1.3 tenemos $i(M) = 13$ ó $i(M) = 14$. Supongamos que $i(M) = 13$. Sea Σ una subvariedad totalmente geodésica de M tal que $\mathrm{codim}(\Sigma) = 13$. El Lema 3.1.3 también implica que $\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}(\Sigma) + \ell_\Sigma = \Lambda_\Sigma^M = 0$. De lo anterior tenemos que $\mathrm{rk}(\Sigma) = \mathrm{rk}(M) = 6$ y $\ell_\Sigma = 0$. Las subvariedades totalmente geodésicas de E_6^6/Sp_4 con rango maximal fueron clasificadas por Chen y Nagano en [7], e independientemente Ikawa por Tasaki en [11]. Salvo equivalencia, estas subvariedades son:

(i) $\Sigma = \mathbb{R} \times SO^o_{5,5}/SO_5SO_5$, que es reflectiva y $\mathrm{codim}(\Sigma) = 16$;

(ii) $\Sigma = \mathbb{R}H^2 \times SL_6(\mathbb{R})/SO_6$, que es reflectiva y $\mathrm{codim}(\Sigma) = 20$;

(iii) $\Sigma = SL_3(\mathbb{R})/SO_3 \times SL_3(\mathbb{R})/SO_3 \times SL_3(\mathbb{R})/SO_3$, que no es reflectiva y $\mathrm{codim}(\Sigma) = 27$.

En todos los casos $\mathrm{codim}(\Sigma) > 14 = i_r(M)$, lo que es una contradicción. Concluimos que $i(M) = i_r(M) = 14$. □

Apéndice A

Teorema de Cartan, Ambrose, Hicks

En esta sección vamos a dar una demostración del teorema de Cartan, Ambrose, Hicks que da condiciones para que una isometría lineal se extienda a una isometría entre variedades Riemannianas. Introducimos algunas notaciones que serán usadas en la prueba del teorema. Sean M y $\tilde{M}$ variedades Riemannianas y $c : [a, b] \to M$ una curva diferenciable a trozos. Una *isometría de M a $\tilde{M}$ a lo largo de c* consiste de una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = b\}$ y una familia de isometrías $\{g_i : U_i \to \tilde{U}_i \mid i = 1, \cdots, s\}$, donde U_i es un abierto de M que contiene a $c([t_{i-1}, t_i])$ y $\tilde{U}_i$ es un abierto de $\tilde{M}$, tales que

- $U_i \cap U_{i+1}$ es conexo.
- $g_i(c(t_i + 1)) = g_{i+1}(c(t_i + 1))$ y $d_{c(t_i+1)}g_i = d_{c(t_i+1)}g_{i+1}$, para todo $i = 1, \cdots, s - 1$.

Note que estas dos condiciones implican que g_i y g_{i+1} coinciden en $U_i \cap U_{i+1}$. Cuando no haga falta especificar los dominios y codominios de g_i, denotamos la isometría de M en $\tilde{M}$ a lo largo de c simplemente por $\{g_i\}$. Denotamos por $\tilde{c} : [a, b] \to M$ la curva diferenciable a trozos definida por $\tilde{c}|_{[t_i,t_{i+1}]} = g_i \circ c|_{[t_i,t_{i+1}]}$. Supongamos que $\{h_j : V_j \to \tilde{V}_j\}$ es otra isometría a lo largo de c y $\bar{c}$ denota la correspondiente curva inducida en $\tilde{M}$. Como las isometrías están determinadas por el valor en un punto y por la diferencial en ese punto, es fácil ver que si $h_1(p) = g_1(p)$ y $d_p h_1 = d_p g_1$, entonces $\tilde{c} = \bar{c}$.

Lema A.0.1. *Sean M y $\tilde{M}$ variedades Riemanniana, con M simplemente conexo. Sean $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y $A : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ una isometría lineal. Supongamos que para toda curva diferenciable a trozos $c : [a, b] \to M$ que satisface $c(a) = p$, existe una isometría $\{g_i\}$ a lo largo de c tal que $\tilde{c}(a) = \tilde{p}$ y $d_p g_1 = A$. Entonces, existe una isometría $h : M \to \tilde{M}$ tal que $d_p h = A$.*

Demostración. Sea $q \in M$ y $c_0 : [a, b] \to M$ una curva diferenciable uniendo p con q. Sea $\{g_i : U_i \to \tilde{U}_i\}$ una isometría a lo largo de c tal que $\tilde{c}(a) = \tilde{p}$ y $d_p g_1 = A$. Definimos $h(q) = \tilde{c}(b)$. Por la observación anterior, h no depende de la isometría de M en $\tilde{M}$ a lo largo de c. Veamos que h tampoco depende de la curva elegida. Sea c_1 otra curva uniendo p con q y tomemos $\{c_s\}_{s\in[0,1]}$ una homotopía con extremos fijos en M de c_0 a c_1. Si s es suficiente pequeño para que $c_s([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, entonces $\{g_i\}$ también es una isometría a lo largo de c_i y por lo tanto $\tilde{c_s}(b) = \tilde{c_0}(b)$. Como la definición de h no depende de la isometría a lo largo de la curva, tenemos que la función $s \to \tilde{c}_s(b)$ es localmente constante y por lo tanto es constante. Es decir, h está bien definida.

Ahora veamos que h es una isometría local. Sean $q \in M$ y $c : [a, b] \to M$ una curva uniendo p con q. Tomemos $\{g_i : U_i \to \tilde{U}_i \mid i = 1, \cdots, l\}$ una isometría de M en $\tilde{M}$ a lo largo de c tal que $g_1(p) = \tilde{p}$ y $d_p g_1 = A$. Sea $q' \in U_l$ y $c' : [b, b'] \to M$ una curva diferenciable uniendo q con q'. La concatenación de c con c' es una curva $c * c' : [a, b'] \to M$ que une p con q' y $\{g_i\}$ es una isometría a lo largo e $c * c'$ y por lo tanto $h(q') = g_i(q')$. Es decir, $h|_{U_l} = g_l$ y por lo tanto h es una isometría local. Finalmente, es claro de la definición de h que $d_p h = A$.

□

Recordamos el lema de Cartan que es la versión local del teorema de Cartan, Ambrose, Hicks. Sean M y $\tilde{M}$ variedades Riemannianas completas de dimensión n y R, $\tilde{R}$ los correspondientes tensores de curvatura. Sean $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y $A : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ isometría lineal. Sean U y $\tilde{U}$ entornos normales de p y $\tilde{p}$, respectivamente, tal que $f := \exp_{\tilde{p}} A \exp_p^{-1} : U \to \tilde{U}$ es un difeomorfismo bien definido. Sea $\gamma : [0, 1] \to U$ geodésica en u en U. Sea $\tilde{\gamma}(t)$ la geodésica por $\tilde{p}$ en $\tilde{U}$ con condición inicial $A(\gamma'(0))$. Para $v \in T_pM$ sea $v(t)$ el campo paralelo a lo largo de γ con condición inicial v y $\tilde{v}(t)$ el campo paralelo a lo largo de $\tilde{\gamma}(t)$ con condición inicial Av.

Lema A.0.2 (Cartan)**.** *Con la notación anterior, supongamos que para toda geodésica $\gamma : [0, 1] \to U$ y vectores $u, v, w, z \in T_qM$ se tiene*

$$\langle R_{u(t),v(t)} w(t), z(t)\rangle = \langle R_{\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)} \tilde{w}(t), \tilde{z}(t)\rangle, \quad t \in [0, 1].$$

Entonces $f : U \to \tilde{U}$ es una isometría tal que $d_p f = A$.

Demostración. Lo único que debemos probar es que $d_q f : T_qM \to T_{f(q)}\tilde{M}$ es una isometría lineal, para todo $q \in U$. Sea $\gamma : [0, 1] \to M$ la geodésica en U uniendo p con q y sea $v = \gamma'(0)$. Sea $u \in T_qM$, $w = d_v(\exp_p)_v^{-1}(u)$ y $J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw)$ el campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $J(0) = 0$ y $J'(0) = w$. Tenemos que $J(1) = u$ y además

$$d_q f(u) = d(\exp_{\tilde{p}}) \circ A \circ d(\exp_p^{-1})(u) = d_{Av}(\exp_{\tilde{p}})(Aw).$$

Es decir, si $\tilde{J}(t)$ es el campo de Jacobi a lo largo de $\tilde{\gamma}$ con $J(0) = 0$ y $J'(1) = Aw$, entonces $d_q f(u) = \tilde{J}(1)$. Por lo tanto, basta mostrar que $\|J(1)\| = \|\tilde{J}(1)\|$.

Sea $E_1, \cdots, E_n$ una base ortonormal de campos paralela a lo largo de γ y $\tilde{E_1}, \cdots, \tilde{E_n}$ la base ortonormal de campos paralela a lo largo de $\tilde{\gamma}$ definida por $\tilde{E}_i(0) = AE_i(0)$. Escribamos $J(t) = \sum_i a_i(t)E_i(t)$ y $\tilde{J}(t) = \sum_i \tilde{a}_i(t)\tilde{E}_i(t)$. Note que $a_i(0) = \tilde{a}_i(0)$ y $a_i'(0) = \tilde{a}_i'(0)$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Por hipótesis,

$$\langle R_{E_j(t),\gamma'(t)} \gamma'(t), E_i(t)\rangle = \langle \tilde{R}_{\tilde{E}_j(t),\tilde{\gamma}'(t)} \tilde{\gamma}'(t), \tilde{E}_i(t)\rangle, \quad i, j = 1 \cdots n.$$

Si llamamos el valor común por $c_{i,j}$, la ecuación de Jacobi para los campos J y $\tilde{J}$ es equivalente al sistema de n ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} &x_i'' + c_{i,j}x_j = 0; \\ &x_i(0) = a_i(0), \quad x_i'(0) = a_i'(0). \end{aligned}$$

Concluimos que $a_i = \tilde{a}_i$ y por lo tanto $\|J(1)\| = \|\tilde{J}(1)\|$. $\square$

Vamos a utilizar el lema de Cartan para probar el teorema de Cartan, Ambrose, Hicks.

Teorema A.0.3 (Cartan, Ambrose, Hicks). *Supongamos que toda geodésica (no necesariamente en U) en p satisface la hipótesis del teorema de Cartan. Si además, M es simplemente conexa, entonces existe $f : M \to \tilde{M}$ isometría local tal que $d_p f = A$. Si $\tilde{M}$ también es simplemente conexo, f es una isometría.*

Demostración. La idea de la demostración es utilizar el lema de Cartan para probar que f satisface las hipótesis del Lema A.0.1. Sea $c : [a, b] \to M$ una curva diferenciable a trozos comenzando en p. Construimos $\{g_i\}$ isometría a lo largo de c tal que $g_1(p) = \tilde{p}$ y $d_p g_1 = A$. Sean $U_1, \cdots, U_l$ bolas convexas y $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b\}$ partición de $[a, b]$ tales que $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$, para $i = 1, \cdots, l$. Construimos recursivamente las isometrías g_i.

Por el lema de Cartan podemos tomar una isometría $g_1 : U_1 \to \widetilde{U}_1$ tal que $g_1(p) = \tilde{p}$ y $d_p g_1 = A$. Supongamos que hemos definido la isometría g_{i-1}. Sea $A_i = d_{c(t_i)} g_{i-1} : U_{i-1} \to \tilde{U}_{i-1}$. Como A_i es el diferencial de una isometría, entonces satisface las hipótesis del lema de Cartan y por lo tanto podemos definir $g_i : U_i \to \tilde{U}_i$ isometría tal que $g_i(c(t_i)) = g_{i-1}(c(t_i))$ y $d_{c(t_i)} g_i = A_i$. Por construcción $\{g_i\}$ es una isometría de M en $\tilde{M}$ a lo largo de c que cumple las hipótesis del Lema A.0.1.

La segunda parte es inmediata, pues toda isometría local es un cubrimiento. $\square$

Bibliografía

[1] J. Berndt, S. Console, C. Olmos: *Submanifolds and holonomy. Second edition.* Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[2] J. Berndt, C. Olmos: Maximal totally geodesic submanifolds and index of symmetric spaces. *J. Differential Geom.* **104** (2016), no. 2, 187–217.

[3] J. Berndt, C. Olmos: The index of compact simple Lie groups. *Bull. London Math. Soc.* **49** (2017), 903–907.

[4] J. Berndt, C. Olmos: On the index of symmetric spaces. *J. Reine Angew. Math.* **737** (2018), 33–48.

[5] J. Berndt, C. Olmos: The Index Conjecture for Symmetric Spaces. arXiv:2003.01393 (2020).

[6] J. Berndt, C. Olmos, J. Rodríguez: The index of exceptional symmetric spaces. arXiv:1905.06250 (2019).

[7] B.Y. Chen, T. Nagano: Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. II. *Duke Math. J.* **45** (1978), 405–425.

[8] J. Eschenburg: J. H. Eschenburg. Lecture notes on symmetric spaces. Preprint, 1997, http://myweb.rz.uni-augsburg.de/ eschenbu/symspace.pdf.

[9] E. Heintze, C. Olmos: Normal Holonomy Groups and s–representations. *Indiana University Mathematics Journal* Vol. 41, No. 3 (Fall, 1992), pp. 869-874.

[10] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[11] O. Ikawa, H. Tasaki: Totally geodesic submanifolds of maximal rank in symmetric spaces. *Japan. J. Math.* **26** (2000), 1–29.

[12] N. Iwahori: On discrete reflection groups on symmetric Riemannian manifolds, in: *Proc. US-Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto 1965)*, Nippon Hyoronsha, Tokyo (1966), 57–62.

[13] S. Klein: Totally geodesic submanifolds of the complex quadric. *Differential Geom. Appl.* **26** (2008), no. 1, 79–96.

[14] S. Klein: Reconstructing the geometric structure of a Riemannian symmetric space from its Satake diagram. *Geom. Dedicata* **138** (2009), 25–50.

[15] S. Klein: Totally geodesic submanifolds of the complex and the quaternionic 2-Grassmannians. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2010), no. 9, 4927–4967.

[16] S. Klein: Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2. *Osaka J. Math.* **47** (2010), no. 4, 1077–1157.

[17] S. Kobayashi, T. Nagano: On filtered Lie algebras and geometric structures. I. *J. Math. Mech.* **13** (1964), 875–907.

[18] D.S.P. Leung: The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces. *J. Differential Geom.* 8 (1973), no. 1, 153–160.

[19] D.S.P. Leung: On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces. *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974/75), 327–339. Errata: *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1975), no. 12, 1199.

[20] D.S.P. Leung: Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds. *J. Differential Geom.* **14** (1979), no. 2, 167–177.

[21] J. Simons, On the transitivity of holonomy systems. Ann. of Math. (2) 76 (1962), 213–234.

[22] T. Nagano, M.S. Tanaka: The involutions of compact symmetric spaces. III. *Tokyo J. Math.* **18** (1995), 193–212.

[23] A.L. Onishchik: O vpolne geodezicheskih podmnogoobraziyah simmetricheskih prostranstv. *Geometricheskie metody v zadachah analiza i algebry* **2** (1980), 64–85.

[24] J.A. Wolf: Elliptic spaces in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.* **7** (1963), 447–462.

[25] W. Ziller: Lie Groups, Representation Theory and Symmetric Spaces, notes class, University of Pennsylvania, Fall 2010, https://www.math.upenn.edu/ wziller/math650/LieGroupsReps.pdf.