Análisis armónico en nilvariedades

por Lic. Andrea Gallo

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Julio, 2020

Directora: Dra. Linda V. Saal

Resumen

Sea M una variedad diferenciable y sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre M. Si K denota el subgrupo de isotropía de M, entonces M es difeomorfa a G/K, y la acción de G induce una nueva acción sobre $L^2(G/K)$ dada por

$$\rho(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x),\ g \in G,\ x \in G/K,$$

llamada usualmente la representación regular a izquierda. Notemos que M admite una medida G-invariante y por lo tanto la acción en $L^2(G/K)$ es unitaria.

Una pregunta natural es cómo se descompone esta acción como suma o integral directa de representaciones irreducibles de la forma

$$L^2(G/K) = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\lambda H_\lambda \, d\mu(\lambda),$$

donde $\widehat{G}$ denota el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles unitarias de G, $d\mu$ es una medida boreliana sobre $\widehat{G}$ y m_λ es la multiplicidad de H_λ en $L^2(G/K)$. Más aún, nos preguntamos bajo qué condiciones la descomposición es libre de multiplicidad, esto es $m_\lambda = 1$ pp$\mu(\lambda)$. La noción de que (G, K) sea un par de Gelfand está intimamente relacionada con el hecho de que la descomposición de $L^2(G/K)$ en representaciones irreducibles sea libre de multiplicidad.

En esta tesis estudiaremos ejemplos de pares de Gelfand obteniendo la correspondiente descomposición de $L^2(G/K)$. Luego profundizaremos en la teoría de pares de Gelfand generalizados, estudiando particularmente ciertos ejemplos.

Más precisamente, por un lado consideraremos una familia de pares de Gelfand $(K \ltimes N, N)$ (ó abreviadamente (K, N)) donde N es un grupo de Lie 2-pasos nilpotente y K es el grupo de automorfismos ortogonales de N. Descompondremos la acción regular de $K \ltimes N$ sobre $L^2(N)$ buscando la medida de Plancherel y describiremos el conjunto de funciones esféricas genéricas. En el caso del grupo de Heisenberg H_n, obtendremos la descomposición de $L^2(H_n)$ bajo la acción de $K \ltimes H_n$ para todo $K \subseteq U(n)$ tal que (K, H_n) es un par de Gelfand.

Por otro lado introducimos la noción de par de Gelfand generalizado (G, K) donde K no es un grupo necesariamente compacto y desarrollamos la teoría correspondiente, la cual es análoga al caso donde (G, K) par de Gelfand clásico. Un resultado central garantiza que, si (K, N) es un par de Gelfand con N grupo de Lie nilpotente y K subgrupo de $Aut(N)$, entonces N es, a lo sumo, 2-pasos nilpotente. Buscaremos ejemplos de pares de Gelfand generalizados (K, N) en los cuales N sea 3-pasos nilpotente.

Abstract

Let M be a differential manifold and let G be a Lie group acting transitivelly on M. If K denotes the isotropy subgroup of M, then M es diffeomorphic to G/K, and the action of G induces a new action on $L^2(G/K)$ given by

$$\rho(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x),\ g \in G,\ x \in G/K,$$

called usually as left regular representation. Notice that M admits a G-invariant measure and hence the action on $L^2(G/K)$ is unitary.

A natural task, in this area, is the study of decomposition of this action as sum or direct integral of irreducible representations as follows

$$L^2(G/K) = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\lambda H_\lambda \; d\mu(\lambda),$$

where $\widehat{G}$ denotes the set of equivalence classes of unitary irreducible representations of G, $d\mu$ is a Borel measure on $\widehat{G}$ and m_λ is the multiplicity of H_λ on $L^2(G/K)$. Moreover, we are interested in conditions which assure that the descomposition is multiplicity free, i.e $m_\lambda = 1$ a.e. $\mu(\lambda)$. The notion of Gelfand pair is intimately related with the fact to find decompositions of $L^2(G/K)$ being multiplicity free.

In this thesis, we will study examples of Gelfand pairs by obtaining the correspond decomposition of $L^2(G/K)$. Thus, we will study deeply the theory of generalized Gelfand pairs.

More precisely, on the first hand we will consider a family of Gelfand pair $(K \ltimes N, N)$ ((K, N) for short) where N is 2-step nilpotent group and K is the group of orthogonal automorphisms of N. We will decompose the regular action of $K \ltimes N$ over $L^2(N)$ by searching the correspond Plancherel measure and thus we will describe the set of generic spherical funtions. In the Heisenberg case H_n, we will obtain the decomposition of $L^2(H_n)$ under the action of $K \ltimes H_n$ for any $K \subseteq U(n)$ such that (K, H_n) is a Gelfand pair.

On the other hand, we will introduce the notion of generalized Gelfand pair (G, K) where K non-compact and we will developed the correpond theory. A well-known result assures that, if (K, N) is a classic Gelfand pair where N is a nilpotent lie group and K is a subgroup of $Aut(N)$, then N is t-step nilpotent with $t \leq 2$. We will find examples of generalized Gelfand pairs (K, N) with N a 3-step nilpotent Lie group.

Agradecimientos y algunas reflexiones

Confieso que me gusta que las cosas tengan movimiento y un poco de incertidumbre. Que me aburre la monotonía, me desespera la cotidianidad. Prueba de ello son las cuatro casas en las que viví a lo largo de estos cinco años de doctorado (y ya me estoy queriendo volver a mudar!). Y el hecho de que las cosas no siempre se hayan dado como esperaba me ha hecho crecer. Pero confieso también que me inquieta (un poco) la cantidad de cosas que ocurrieron durante un mismo doctorado. Básicamente, se fue al carajo.

Desde mi punto de vista, la madurez de las ideas y pensamientos (incluídos los matemáticos) tienen que ver con como uno ve la vida, con las cosas que nos van pasando mientras hacemos matemática.

Y es así como parte de lo expresado en esta tesis tiene que ver con haber desaprobado un examen por primera vez. Con conocer a Denis (aunque el sostiene que nos conocemos desde antes) y transcurrir dos embarazos: si, dos en un mismo doctorado. Con pasar a ser parte de otra familia distinta a la de origen. Con distanciarme de amigos que se fueron a vivir a otro país y con acercarme a otros que coinciden en el camino que uno va armando. Con perder a mis abuelos y ver nacer a mi primo Camilo. Y justo cuando me estoy por recibir: pum! Pandemia. Así que también tiene que ver con aprender a valorar lo que uno hace y tiene, porque mientras esta pandemia pone en jaque a todos, los que trabajamos pensando pudimos seguir haciéndolo.

Políticamente durante mi doctorado las cosas también tuvieron movimiento. Así que aprendí a ser más tolerante y a convivir con los momentos de crisis y desesperanza. Como en la matemática, aquí también aprendí a ser más paciente.

Y estas reflexiones son por que me parece que toda la matemática aquí expuesta per se no refleja todo lo aprendido en este doctorado. Ahora si quiero agradecer a aquellas y aquellos que formaron parte de este proceso.

Primero que nada, quiero agradecer a Linda. No sólo por guiarme y compartir sus amplios conocimientos matemáticos, sino también por su generosidad. Nunca conocí a nadie que hiciera tanto honor a su nombre. Linda siempre está atenta a que las personas que la rodean estén bien. En lo personal, siempre se interesó por saber cómo estaba, me escuchó y me aconsejó. Y eso que le tocaron momentos difíciles, entre ellos, mis dos embarazos. Y además, por suerte, agradezco haber podido compartir nuestras desesperanzas políticas en momentos de crisis y alegrías en momentos de victorias.

Quiero agradecer al tribunal especial: Fernando Levstein, Pablo Rocha e Inés pacharoni, quienes dedicaron su tiempo a leer y corregir este trabajo. Agradezco todas las correcciones que propusieron. También a Rocío Diaz, quien fue tribunal suplente, pero también aportó mucho para mejorar este trabajo.

También quiero agradecer a Pablo Román, con quién compartí muchos espacios, además de ser su alumna en materias de doctorado. Por su generosidad y paciencia.

A Adrián Andrada y Silvina Riveros, siempre dispuestos a dar una mano.

A Fernando Levstein, Tomás Godoy, Marcos Salvai, Roberto Miatello y Leandro Cagliero, quienes han sido personas de consulta en los diversos problemas matemáticos o de inglés que nos han surgido.

A mi nueva familia. A Denis, por ser mi compañero en todos los sentidos. Santi y Agos, por ser mi motor todos los días e impulsarme hacia adelante. A mi papá, mi mamá, Pablo y Titi gracias por estar siempre, bancarme y ser contención en esos momentos de hartazgo. A mi tios Laura y Gabriel, y a mi primo Camilo. A mi nueva familia por parte de Denis: Sandra, Nestor, Eric, Yami, Cata, Bau, Matias y la nona (y paro ahí porque son un millón!).

A los amigos y compañeros: Dahy, Martín, Gon, Meli, Andru, Ro, Jose, Eva, Lucas, Facu. Y a todos aquellos y aquellas con quienes no compartimos tantos espacios pero alegraron y alegran los pasillos preguntando cómo anda una: Edison, Uriel, María, Euge, Sonia, Ceci, Ale Salvatori, Cesar, Luis, Taylor, etc. A Sonia y Gustavo.

A mi viejo, por demostrarme constantemente que la ciencia no sólo se hace en las oficinas. En este mismo sentido, a Pancho Tamarit y Esther Galina, a quién conozco desde muchos años antes de entrar a la facultad.

Al grupo de análisis y ecuaciones, en particular a Raúl, quién fue miembro de mi comisión asesora.

A Nancy y Claudia, creo que no hace falta aclarar, a más de uno nos han ayudado a resolver cuanto problema aparezca, siempre muy amablemente.

A posgrado, quienes facilitaron que me reciba en tiempos de cuarentena.

A la universidad pública, al pueblo y los gobiernos que la defienden. A Conicet. A FaMAF.

A todos ellos y todas ellas: Gracias! Los logros son compartidos.

Índice general

Introducción

El análisis de Fourier en el toro unidimensional T trata, esencialmente, sobre la descomposición de $L^2(T)$ en suma directa de subespacios minimales invariantes por traslaciones, esto es,

$$L^2(T) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\varphi_n \tag{1}$$

donde $\varphi_n(\theta) = e^{in\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

Análogamente, un resultado básico del análisis de Fourier en $\mathbb{R}$ da la descomposición de $L^2(\mathbb{R})$ como una integral directa de espacios minimales invariantes por traslaciones, pero no ya de $L^2(\mathbb{R})$, sino de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Explícitamente,

$$L^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}\varphi_\xi \; d\xi \tag{2}$$

donde $\varphi_\xi(x) = e^{ix\xi}, x \in \mathbb{R}$, y $d\xi$ denota la medida de Lebesgue.

La diferencia crucial entre las dos descomposiciones se debe a la no compacidad de $\mathbb{R}$.

Consideremos ahora una variedad diferenciable M y sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre M. Si K denota el subgrupo de isotropía de M, entonces M es difeomorfa a G/K, y la acción de G induce una nueva acción sobre $L^2(G/K)$ dada por

$$\rho(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x), \;\; g \in G, \;\; x \in G/K,$$

llamada usualmente la representación regular a izquierda de G en $L^2(G/K)$. Notemos que M admite una medida G-invariante y por lo tanto la acción sobre el espacio $L^2(G/K)$ es unitaria.

Una pregunta natural que surge es cómo se descompone esta acción como suma o integral directa de representaciones irreducibles de la forma

$$L^2(G/K) = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\lambda H_\lambda \; d\mu(\lambda),$$

donde $\widehat{G}$ denota el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles unitarias de G, $d\mu$ es una medida boreliana sobre $\widehat{G}$ y m_λ es la *multiplicidad* de H_λ en $L^2(G/K)$. Más aún, nos preguntamos bajo qué condiciones la descomposición es *libre de multiplicidad*, esto es $m_\lambda = 1$ pp$\mu(\lambda)$, como en (1) y (2).

Otro resultado básico del análisis de Fourier en $\mathbb{R}$ establece que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ definida en $L^1(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{F}f\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\,(x)\,e^{-ix\xi}dx$$

es un homomorfismo de álgebras de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$, donde en $L^1(\mathbb{R})$ el producto está dado por la convolución de funciones y en $L^\infty(\mathbb{R})$ por el producto puntual, i.e.

$$\mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(h)$$

con $(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)h(x-y)\;dy$.

Consideremos, para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$, el operador $T_f : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ definido por

$$T_f(h) = h * f,\;\; h \in L^1(\mathbb{R}).$$

Es inmediato comprobar que el álgebra de operadores

$$\{T_f : f \in L^1(\mathbb{R})\}$$

es conmutativa ya que el álgebra de convolución $(L^1(\mathbb{R}), *)$ lo es. Luego, podemos pretender "*diagonalizar simultáneamente*" los operadores T_f respecto de alguna "*base adecuada*", y esto nuevamente lo garantiza la transformada de Fourier: debido a la fórmula clásica de inversión obtenemos que

$$T_f(h)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\;d\xi,\;\; x \in \mathbb{R},$$

siendo $\{\varphi_\xi(x) := e^{ix\xi}\}_{\xi\in\mathbb{R}}$ la "*base*" buscada.

Más aún, el Teorema del núcleo de Schwartz nos asegura que todo operador lineal

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

continuo con las topologías naturales, y que conmuta con traslaciones, viene dado por la convolución con una distribución temperada ϕ, esto es

$$T(h) = h * \phi, \quad h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mediante aproximaciones de la identidad podemos probar la densidad de $L^1(\mathbb{R})$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, y fácilmente obtener que el álgebra de operadores lineales, continuos y que conmutan con traslaciones es conmutativa!

Volviendo al caso general, denotemos por $\mathcal{D}(G/K)$ al espacio de funciones C^∞ definidas sobre G/K de soporte compacto munido con su topología usual y por $\mathcal{D}'(G/K)$ a su espacio dual.

Observemos que una función cuyo dominio es G/K se identifica naturalmente con una función definida sobre G invariante a derecha por K. Si $P : G \to G/K$ denota la proyección natural, denotamos $\widetilde{f} := f \circ P$.

En este contexto, una versión adaptada del Teorema del núcleo de Schwartz asegura que, dado un operador lineal

$$T : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{D}'(G/K)$$

continuo con las topologías naturales y que conmuta con la acción de G, existe una *distribución K-bi-invariante* $\phi \in \mathcal{D}'(G)$ tal que para toda $f \in \mathcal{D}(G/K)$

$$\widetilde{T(f)} = \widetilde{f} * \phi,$$

donde $*$ es la convolución entre la función $\widetilde{f} \in \mathcal{D}(G)$ y la distribución $\phi \in \mathcal{D}'(G)$.

Supongamos que K es *compacto* y que el álgebra de convolución de las funciones definidas sobre G integrables K-bi-invariantes es conmutativa. Entonces podemos esperar diagonalizar simultaneamente estos operadores en una *"base adecuada"*.

Estos problemas dan lugar a la definición de par de Gelfand, ya que son equivalentes. Más precisamente, sea G un grupo de Lie y sea K un subgrupo compacto de G. Diremos que (G, K) es un **par de Gelfand** si vale alguna de las siguientes afirmaciones

(I) El álgebra de convolución $(L^1(G)^K, *)$ de funciones definidas sobre G integrables y K-bi-invariantes es conmutativa.

(II) La acción regular a izquierda de G sobre $L^2(G/K)$ se descompone en componentes irreducibles libre de multiplicidad.

Por supuesto que en esta introducción sólo queremos motivar los problemas que hasta ahora hemos considerado, aunque todos los resultados requieren una cuidadosa demostración.

Notemos que en las expresiones (1) y (2) el grupo G es conmutativo y podemos considerar como K al conjunto conformado por el elemento identidad e de G.

Si el algebra $L^1(G)^K$ es conmutativa, una herramienta poderosa que podemos utilizar es la transformada de Gelfand (la transformada de Fourier es sólo un caso particular de ella) definida del siguiente modo:

Sea Δ el espacio de los homomorfismos *continuos* no nulos de $L^1(G)^K$ en $\mathbb{C}$. Entonces el Teorema de representación de Riesz nos asegura que dado $\chi \in \Delta$ existe una funcion K-bi-invariante $\varphi \in L^\infty(G)$ tal que

$$\chi(f) = \int_G f(g)\varphi(g^{-1})\, dg,$$

para toda $f \in L^1(G)^K$. La función φ recibe el nombre de *función esférica* y denotamos por χ_φ al homomorfismo representado por φ. Más aún, para simplificar la notación, supondremos que el conjunto de funciones esféricas está parametrizado por un conjunto Λ y escribiremos $\Delta := \{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Δ es un espacio topológico localmente compacto munido con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Denotemos por $\mathcal{C}_0(\Delta)$ al espacio de funciones continuas sobre Δ que se anulan en ∞.

Entonces la transformada de Gelfand

$$\widehat{\ } : L^1(G)^K \to \mathcal{C}_0(\Delta)$$

dada por

$$\widehat{f}(\lambda) = \chi_{\varphi_\lambda}(f)$$

es un homomorfismo de álgebras entre el álgebra de convolución $(L^1(G)^K,*)$ y $(\mathcal{C}_0(\Delta),\cdot)$ con el producto puntual de funciones .

Como en el caso real, disponemos de las fórmulas de inversión y de Plancherel: *existe una medida boreliana dv sobre Δ, llamada medida de Plancherel, tal que si $f \in L^1(G)^K \cap L^2(G)^K$ entonces*

$$f(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\ dv(\lambda)$$

y

$$||f||_2^2 = \int_G |f(x)|^2\ dg = \int_\Delta |\widehat{f}(\lambda)|^2\ dv(\lambda).$$

En particular, en un par de Gelfand, los operadores $T_f : L^1(G)^K \to L^1(G)^K$ dados por

$$T_f(h) = h * f$$

con $f \in L^1(G)^K$ *diagonalizan simultáneamente en términos de las funciones esféricas* ya que

$$T_f(h)(x) = \int_\Delta \widehat{h}(\lambda)\widehat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\ dv(\lambda). \tag{3}$$

Ahora, teniendo presente que una función K-bi-invariante f sobre G es identificable con una función sobre G/K invariante a izquierda por la acción de K, podemos preguntarnos cómo se descompone el operador T_f en $L^2(G/K)$. No podemos esperar una descomposición tan bonita como en (3), pero veamos:

Por la fórmula de inversión, $f(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\ dv(\lambda)$, y para $h \in L^2(G/K)$ obtenemos

$$T_f(h)(x) = h * f(x) = \int_\Delta \widehat{f}(\lambda)(h * \varphi_\lambda)(x)\ dv(\lambda).$$

Por el Teorema del núcleo de Schwartz podemos intuir que si (G,K) es un par de Gelfand, y T es un operador lineal dado, $T : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{D}'(G/K)$, continuo con las topologías naturales y que conmuta con la acción de G, entonces T es del tipo

$$T(h) = \int_\Delta c\,(\lambda)(h * \varphi_\lambda)\ dv(\lambda),$$

donde el *"multiplicador"* c es una función acotada.

Eso es exactamente lo que se puede demostrar en forma rigurosa y que tiene una perfecta analogía con los resultados del análisis armónico real.

Asimismo, esto nos permite descomponer la acción regular a izquierda en $L^2(G/K)$ en representaciones irreducibles. En efecto

$$L^2(G/K) = \int H_\lambda\ dv(\lambda)$$

donde la proyección $P_\lambda : L^2(G/K) \to H_\lambda$ viene dada por $P_\lambda(h) = h * \varphi_\lambda$. El problema en cada caso es determinar la medida de Plancherel dv y el conjunto de funciones esféricas con medida de Plancherel no nula, también llamadas *genéricas.*

Ejemplos de pares de Gelfand son los pares simétricos de tipo compacto y no compacto y una excelente exposición del correspondiente análisis esférico está desarrollada en [17].

Más recientemente fueron clasificados los pares de la forma $(K \ltimes N, K)$ (tambien denotados (K, N)) donde N es un grupo de Lie nilpotente y K es un subgrupo del grupo $Aut(N)$ de automorfismos de N. Uno de los primeros resultados asegura que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o 2-pasos nilpotente (ver [5]).

En esta tesis consideraremos una familia de pares de Gelfand introducidas por J. Lauret en [23], donde K es el grupo de automorfismos ortogonales de N. Destacamos que estos ejemplos son todos los pares (K, N) que aparecen en la clasificación dada por E. Vinberg donde K es el subgrupo compacto maximal de $Aut(N)$, con excepción de tres casos.

Esta familia tiene una propiedad muy sorprendente: casi todos los grupos de Lie 2-pasos nilpotentes que la conforman (con excepción de dos casos) admiten *representaciones de cuadrado integrables*. Para estos pares, siguiendo la teoría de Moore-Wolf, encontraremos una expresión implícita para la fórmula de inversión de N, y como una consecuencia, determinaremos completamente la descomposición de la acción regular a izquierda de $K \ltimes N$ sobre $L^2(G/K)$ en componentes irreducibles, la medida de Plancherel dv y el conjunto de funciones esféricas que aparecen en la descomposición. Cuando sea posible, hallaremos una expresión explícita para tales funciones esféricas. Cabe destacar que estos resultados completan el análisis realizado por J. Wolf en [35] para aquellos N que no admitan representaciones de cuadrado integrable.

Una atención especial merecerá el grupo de Heisenberg. Si H_n es el grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional, también obtendremos una descomposición de la acción regular a izquierda de $K \ltimes H_n$ sobre $L^2(N)$ en componentes irreducibles, pero en este caso dicha descomposición será *para todo* $K \subseteq U(n)$ subgrupo de automorfismos de H_n tal que (K, H_n) es par de Gelfand (el listado de todos los pares de Gelfand de la forma (K, H_n) se encuentra en [4]).

Posteriormente, nos interiorizaremos en la teoría de **pares de Gelfand generalizados** donde K ya no será necesariamente compacto.

Generalizando la teoria de pares de Gelfand, las siguientes afirmaciones son equivalentes (ver [6]):

(I) Toda representación unitaria (π, H) de G que se realiza en $\mathcal{D}'(G/K)$ es libre de multiplicidad.

(II) Toda representación unitaria irreducible de G tiene (salvo múltiplos escalares) a lo más un vector distribución fijo por K.

(III) Dada una representación unitaria (π, H) de G que se realiza en $\mathcal{D}'(G/K)$, el álgebra de operadores de entrelazamiento es conmutativa.

Notemos que estos operadores son lineales, continuos y conmutan con la acción a izquierda de G, y por el Teorema del núcleo de Schwartz vienen dados como operadores de convolución con elementos de $\mathcal{D}'(G)$ K-bi-invariantes.

Así como en los pares simétricos (G, K) se tiene que K es precisamente el grupo de puntos fijos de la involución de Cartan, en numerosos ejemplos de pares de Gelfand generalizados K es el grupo de puntos fijos de una involución de G (ver [31]).

Por otra parte, ejemplos del tipo $(K \ltimes N, K)$ fueron construidos tomando como N el grupo de Heisenberg (ver [24]).

Una pregunta que nos surgió naturalmente es si un par de Gelfand generalizado del tipo (K, N) implica necesariamente que N es a lo sumo 2-pasos nilpotente y la respuesta es no. Aquí daremos un ejemplo de un par generalizado donde N es 3-pasos nilpotente, lo cual a nuestro entender abre un abanico de preguntas.

Esta tesis está organizada en siete capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se introducirán los conceptos básicos sobre teoría de Lie y teoría de representaciones. Comenzaremos mencionando algunas propiedades relevantes de los espacios en los cuales realizaremos el análisis armónico, los grupos topológicos. Mostraremos como construir espacios topológicos nuevos a partir de dos espacios topológicos dados y presentaremos una familia de ejemplos muy destacada: los grupos lineales. Luego nos concentraremos en otra familia de grupos topológicos sobre la cual trabajaremos en esta tesis: los grupos de Lie. Daremos las definiciones y propiedades básicas e introduciremos el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie dado. Dotaremos a estos espacios de una medida invariante por traslaciones: la medida de Haar, y de una noción de integral. Finalmente nos dedicaremos al estudio de las representaciones de grupos y álgebras de Lie. Una sección aparte estará destinada a representaciones sobre grupos de Lie compactos. En este capítulo nos basaremos, principalmente, en los siguientes materiales bibliográficos: [16], [19], [32] y [34].

En el segundo capítulo presentaremos las principales definiciones y propiedades del análisis armónico sobre grupos de Lie. Daremos las definiciones de funciones de tipo positivo y funciones esféricas y luego recordaremos su relación con las representaciones unitarias e irreducibles. Introduciremos la noción de par de Gelfand y recordaremos diferentes equivalencias con la definición. Recordaremos la fórmula de inversión y de Plancherel para funciones K-bi-invariantes. Formalizaremos la noción de integral directa de espacios de Hilbert y de representaciones. Presentaremos el Teorema del núcleo de Schwartz para el caso $G = \mathbb{R}^n$, y su generalización para el caso de grupos de Lie no necesariamente conmutativos. Finalmente enunciaremos la fórmula de inversión y de Plancherel para funciones K-invariantes a izquierda, la cual permitirá demostrar un resultado conocido que será muy útil en el resto del trabajo: (G, K) es un par de Gelfand si y sólo si la representación metapléctica se descompone libre de multiplicidad como K-módulo. En este capítulo nos basaremos principalmente en [32].

En el tercer capítulo desarrollaremos el análisis armónico en el grupo de Heisenberg. Para comenzar presentaremos el grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional H_n y su correspondiente álgebra de Lie $\mathfrak{h}_n$. El objetivo principal de este capítulo será descomponer el espacio $L^2(H_n)$ como una integral directa de espacios irreducibles y minimales bajo la acción de $K \ltimes H_n$ donde (K, H_n) sea un par de Gelfand (la lista de todos los pares de Gelfand (K, H_n)

a los cuales podemos aplicarle esta descomposición se encuentra en [4]). Para ello, la fórmula de inversión de funciones definidas sobre H_n será la herramienta principal, y para obtener una formulación explícita primero describiremos $\widehat{H_n}$, el conjunto de clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de H_n. Nos basaremos en la teoría desarrollada por Kirillov para grupos de Lie nilpotentes, que se encuentra por ejemplo en [35]. También daremos una descripción explícita de $\widehat{K \ltimes H_n}$ basada en la teoría de Mackey, teoría que también se encuentra desarrollada en [35]. Uno de nuestros trabajos originales es encontrar una parametrización y una expresión (lo más explícita posible) de las funciones esféricas asociadas al par de Gelfand (K, H_n) en términos de la descomposición de la representación metapléctica en componentes irreducibles como K-módulo. Luego probaremos la descomposición del espacio $L^2(H_n) = \int_{\Sigma}^{\oplus} H_{\lambda,j} d\lambda$, donde la proyección $P_{\lambda,j} : L^2(H_n) \to H_{\lambda,j}$ viene dada por la convolución contra una función esférica, $P_{\lambda,j} f = f * \phi_{\lambda,j}$. Este resultado está enunciado en el Teorema 3.6.9. Finalmente describiremos el conjunto de funciones esféricas asociadas al par (T_1, H_n) donde T_1 es un toro unidimensional y luego las funciones esféricas asociadas al par $(U(n), H_n)$. Este conjunto de funciones esféricas fueron descriptas en [4]. Estas funciones involucran una familia clásica de funciones: los polinomios de Laguerre y polinomios de Laguerre generalizados. Daremos su definición.

En el cuarto capítulo desarrollaremos la teoría de álgebras de Lie solubles, nilpotentes y semisimples. Para álgebras de Lie complejas semisimples definiremos subálgebra de Cartan y desarrollaremos la descomposición en espacios de raíces, que luego extenderemos para el caso de álgebras de Lie compactas. Presentaremos las definiciones principales de pesos concluyendo con el Teorema del peso máximo. Para esta primera parte del capítulo nos basaremos en [19]. Luego daremos algunos ejemplos en los que se muestran explícitamente la subálgebra de Cartan, el sistema de raíces y los pesos dominantes para ciertos grupos de matrices, siguiendo [16]. Finalmente enunciaremos algunos resultados acerca de descomposiciones de productos tensoriales de representaciones irreducibles para algunos grupos de matrices concretos.

En el quinto capítulo comenzaremos repasando una construcción de una familia de pares de Gelfand $(K, N(\mathfrak{g}, V))$ descripta por J. Lauret en [23], donde K es un subgrupo compacto del grupo de automorfismos de N, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compacta y (π, V) es una representación real de $\mathfrak{g}$. Luego, basándonos nuevamente en la teoría de Kirillov, describiremos el conjunto de representaciones unitarias e irreducibles correspondiente a grupos de Lie nilpotentes. Dado N nilpotente y K subgrupo compacto, mediante la teoría de Mackey, describiremos $\widehat{K \ltimes N}$ y enunciaremos un resultado que se encuentra en [3] análogo al criterio de Carcano pero ahora para grupos de Lie nilpotentes. Para continuar resumiremos brevemente la teoría desarrollada por Moore-Wolf en [25], en la cual se define el Pffafiano P, y se establece una correspondencia entre conjuntos de clases de equivalencias de representaciones de cuadrado integrable y órbitas coadjuntas O_λ tal que $P(\lambda) \neq 0$. Esta teoría nos permitirá deducir una fórmula de inversión para $N(\mathfrak{g}, V)$. Finalmente, dado un grupo de Lie compacto con toro maximal T, probaremos un isomorfismo entre $G/T \times C$ y $\mathfrak{g}_r$, donde C es una cámara de Weyl en $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, y encontraremos el determinante de su diferencial. Para probar este isomorfismo utilizamos toda la teoría desarrollada en la Sección 5.6. Luego enunciaremos y probaremos nuestro resultado principal, el Teorema 5.7.4, en el cual encontraremos la descomposición de $L^2(N)$ en componentes irreducibles bajo la acción de $K \ltimes N$, describimos la proyección sobre cada componente irreducible y hallamos la medida de Plancherel correspondiente.

En el sexto capítulo encontraremos expresiones explícitas de las funciones esféricas correspondientes al conjunto de representaciones genéricas (o con medida de Plancherel full) de $N(\mathfrak{g}, V)$. Describiremos el conjunto $\mathfrak{B}$ de funciones esféricas genéricas asociadas a los pares de Gelfand $(K, N(\mathfrak{g}, V))$ de la lista de Lauret. Esta computación involucra integrales sobre G'/T (donde G' es el grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$), lo cual es difícil de calcular con excepción de algunos pocos casos. Sin embargo, obtendremos una parametrización de $\mathfrak{B}$.

En el último capítulo estudiaremos pares de Gelfand generalizados (G, K). Primero nos avocaremos a entender como se extiende la definición de par de Gelfand a casos en los cuales K no es un necesariamente un grupo compacto. En la primera sección introduciremos algunos preliminares acerca de distribuciones K-bi-invariantes de tipo positivo y su correspondencia con representaciones unitarias que se realizan en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(G/K)$. Luego daremos algunas equivalencias de la definición de par de Gelfand generalizado dadas por Thomas en [6]. En la segunda sección mostraremos un ejemplo que definió Racliff en [27] de un grupo de Lie N 3-pasos nilpotente y un subgrupo K de $Aut(N)$ no compacto tal que (K, N) es un par de Gelfand generalizado. Este resultado está enunciado en el Teorema 7.2.3. En la última sección daremos un ejemplo de otro par (K, N) donde encontramos que la representación metapléctica se descompone en representaciones irreducibles con multiplicidad 2. Este ejemplo fue definido por L. Barberis y I. Dotti en [35]. En este capítulo nos basaremos principalmente en los siguientes libros y artículos: [6], [24] y [32].

Los capítulos 3, 5 y 6 están basados en el artículo: *Andrea L. Gallo and Linda V. Saal "Some harmonic analysis on commutative nilmanifolds", Journal of Lie Theory, en prensa.*
Link: https://arxiv.org/abs/1909.09873.

El capítulo 7 está basado en el artículo: *Andrea L. Gallo y Linda V. Saal "A generalized Gelfand pair attached to a 3-step nilpotent Lie group", Journal of Fourier Analysis and applications, en prensa.*
Link:https://arxiv.org/abs/2005.06362.

Capítulo 1

Acciones, grupos y álgebras

En este capítulo se introducirán los conceptos básicos sobre teoría de Lie y teoría de representaciones.

De la mayoría de los resultados conocidos que enunciemos en este capítulo no pondremos su demostración. Para profundizar en estos temas existe mucho material bibliográfico clásico, como por ejemplo [16], [19], [32] y [34].

1.1. Grupos Topológicos

Comencemos! En cuanto a grupos topológicos sólo daremos la definición y algunos ejemplos pues trabajaremos en una familia particular de ellos: los *grupos de Lie*. En esta familia de grupos nos detendremos más detalladamente en la proxima sección.

Definición 1.1.1. Un *grupo topológico* es una terna $(G, \tau, \cdot)$ que satisface:

- (G, τ) es un espacio topológico.
- $(G, \cdot)$ es un grupo.
- La aplicación $\Phi : G \times G \to G$ que manda $(g, h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$ es continua.
- Los singuletes son subconjuntos cerrados (es decir, el espacio topológico (G, τ) es T_1).

De la definición anterior se deduce que, si $(G, \tau, \cdot)$ es un grupo topológico, entonces la traslación a izquierda definida por $L_g(h) := g^{-1} \cdot h$ y la traslación a derecha $R_g(h) := g \cdot h$ son homeomorfismos de G.

A partir de dos grupos topológicos $(G, \cdot_G, \tau_G)$ y $(H, \cdot_H, \tau_H)$ podemos construir otros nuevos. Para ello, primero necesitamos introducir la noción de acción.

Definición 1.1.2. Una *acción* de un grupo G sobre un conjunto S es una función

$$\alpha : G \times S \to S,$$

usualmente denotada por $\alpha(g, s) = g \cdot s$, tal que para todo $s \in S$ y $g_1, g_2 \in G$ se satisface

$$e \cdot s = s, \qquad (g_1 g_2) \cdot s = g_1 \cdot (g_2 \cdot s),$$

donde e es la identidad del grupo G.

Ejemplo 1.1.3. Ejemplos de acciones y algunas definiciones:

1. Si H es un subgrupo de un grupo G, definimos la acción

   $$h \cdot_t g = hg,$$

   donde hg es el producto en G. Esta acción es llamada traslación a izquierda del grupo H en G.

   También podemos definir la acción por conjugación,

   $$h \cdot_c g = hgh^{-1}.$$

   • Si H actúa por conjugación sobre G, dado $g \in G$ llamamos *grupo de isotropía o centralizador de g en H* a $H_g := \{h \in H : hgh^{-1} = g\}$ y lo denotamos por $C_H(g)$. Si $H = G$, $C_G(g)$ es llamado el *centralizador de g*.

   Estas mismas acciones pueden generalizarse sobre el conjunto de todos los subgrupos de G.

2. Dado K un subgrupo de G definimos

   $$h \cdot_t gK = (hg)K, \qquad h \cdot_c gK = (hgh^{-1})K$$

   las acciones traslación a izquierda y conjugación respectivamente del grupo G sobre el conjunto G/K.

   En particular, si G actúa por conjugación en el conjunto de grupos de G, llamamos el *normalizador de K en G* al subgrupo que fija a los elementos de K, esto es,

   $$N_G(K) = \{g \in G : gKg^{-1} = K\}.$$

   Decimos que un subgrupo N es *normal* en G si $N = N_G(K)$, y en tal caso lo denotamos por $N \lhd G$.

Ahora sí daremos tres ejemplos de grupos topológicos construidos a partir de dos grupos topológicos $(G, \cdot_G, \tau_G)$ y $(H, \cdot_H, \tau_H)$ dados.

• El primer ejemplo es el producto directo de grupos topológicos. En este caso el conjunto a considerar es

$$G \times H := \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$$

con el producto coordenada a coordenada

$$(g,h) \cdot_d (g',h') = (g \cdot_G g', h \cdot_H h').$$

Notemos que si e_G y e_H son los elementos neutros de G y H respectivamente, entonces (e_G, e_H) es el elemento neutro de $G \times H$, y si g^{-1}, h^{-1} son los inversos de $g \in G$ y $h \in H$ respectivamente, entonces (g^{-1}, h^{-1}) es el elemento inverso de (g,h).

La topología τ_d de $G \times H$ es la topología producto. Entonces $(G \times H, \cdot_d, \tau_d)$ resulta un grupo topológico, llamado *grupo producto.*

• En el caso en que H es un subgrupo normal y cerrado de G, consideremos la acción de H sobre G dada por la traslación a izquierda. Esta acción divide a G en clases de equivalencias. Denotamos por G/H al conjunto de clases de equivalencias. Si gH y $g'H$ son dos representantes en G/H, definimos el producto $\cdot_c$ en G/H por

$$gH \cdot_c g'H = (g \cdot_G g')H.$$

Por ser H normal, $(G/H, \cdot_c)$ resulta un grupo, más aún, si e es el elemento neutro de G, entonces eH es el elemento neutro de G/H, y $g^{-1}H$ es el inverso de gH, si g^{-1} es el inverso de $g \in G$. Si dotamos a G/H con la topología cociente τ_d, entonces $(G/H, \cdot_c, \tau_c)$ es un grupo topológico.

• El último ejemplo es el producto semidirecto. Dados dos grupos topológicos $(G, \cdot_G)$ y $(K, \cdot_K)$ y una acción de K sobre G podemos definir un nuevo grupo topológico, que llamaremos el *producto semidirecto* de K con G y que denotaremos como $K \ltimes G$. Para definirlo debemos dar un conjunto y una operación que satisfaga la definición de grupo. Consideremos el conjunto

$$K \times G = \{(k,g) : k \in K, g \in G\}.$$

La operación $\cdot_s$ está dada por

$$(k,g) \cdot_s (k',g') = (k \cdot_K k', g \cdot_G (k \cdot g')).$$

El elemento neutro es (e_K, e_G) donde e_K y e_G son los elementos neutros de K y G respectivamente, y $(k,g)^{-1} = (k^{-1}, (k \cdot g)^{-1})$, para todo $k \in K, g \in G$. La topología τ_s de $K \ltimes N$ es la topología producto. Con esta topología $(K \ltimes G, \cdot_s, \tau_s)$ es un grupo topológico.

En este trabajo será de utilidad saber cuando un grupo G puede realizarse como el producto semidirecto (interno) de dos subgrupos de G.

Teorema 1.1.4. *Dado H un subgrupo de G y $N \lhd G$. Son equivalentes:*

1. *$G = NH$ y $H \cap N = \{e\}$.*
2. *Dado $g \in G$ existen únicos $n \in N$ y $h \in H$ tal que $g = nh$.*
3. *Dado $g \in G$ existen únicos $n \in N$ y $h \in H$ tal que $g = hn$.*

Si alguno de los anteriores se cumple, decimos que G es el producto semidirecto interno de N con H, y lo denotamos por $G = H \ltimes N$.

Observación 1.1.5. Notar que la acción que estamos considerando para el caso del producto semidirecto interno es la conjugación

$$\begin{aligned} \cdot \ : \ & H \times N \to N \\ & (h, n) \mapsto hnh^{-1}. \end{aligned}$$

Otra gran familia de grupos topológicos está corformada por los grupos lineales (de hecho, todo grupo de Lie compacto es un grupo lineal).

Nota. De ahora en más, a la acción de x sobre y definida por alguna de las anteriores las denotaremos por $x \cdot y$, o directamente por yuxtaposición de los elementos xy, y se distingirá según el contexto. De igual manera, se denotará por $x \cdot y$ o por yuxtaposición de dos elementos xy a la operación de grupo entre x e y, y también se distinguirá según el contexto.

1.1.1. Grupos lineales

Los grupos lineales G son grupos de transformaciones lineales de un espacio vectorial V de dimensión finita, que a su vez están definidos por ecuaciones polinómicas en sus entradas matriciales. Podemos ver a G como un subconjunto de matrices.

Sea $\mathbb{F}$ el cuerpo de los números reales, complejos ó el anillo de división de los cuaterniones, y consideremos V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión n con base $\mathcal{B}$. Sea $M_n(\mathbb{F})$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$, el cual se puede identificar con $\mathbb{F}^{n^2}$. Dotamos al espacio $M_n(\mathbb{F})$ con la topología de $\mathbb{F}^{n^2}$, y a sus subgrupos con la topología restringida.

- $GL(n, \mathbb{F})$ es el **grupo general lineal**

$$GL(n, \mathbb{F}) := \{[T]_{\mathcal{B}} : T \text{ es transformación } \mathbb{F}\text{-lineal e inversible de } V\}.$$

Para mayor detalle de como se define $GL(n, \mathbb{H})$ ver [28], páginas 5 y 6.

En $GL(n, \mathbb{F})$ definimos un automorfismo involutivo, que llamamos involución de Cartan,

$$\theta(g) := \overline{(g^t)^{-1}}, \tag{1.1}$$

donde la barra denota conjugación.

Ahora consideremos el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. La involución θ tiene un conjunto distinguido de puntos fijos,

$$\{g \in GL(n, \mathbb{C}) : \theta(g) = g\} := U(n, \mathbb{C}),$$

al cual llamamos el **grupo de matrices unitarias**, que también denotamos por $U(n)$.

Este subgrupo es cerrado en $GL(n, \mathbb{C})$, y como las columnas de una matriz unitaria tienen norma 1, $U(n)$ es acotado y por lo tanto, compacto.

El resto de los grupos lineales los definiremos mediante formas bilineales.

De ahora en más sea $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Sea B una forma $\mathbb{F}$-bi-lineal en V, esto es una aplicación $B : V \times V \to \mathbb{F}$ lineal en cada entrada. Fijada una base $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ de V obtenemos la matriz de la forma bilineal B, $[B]_{i,j} := B(e_i, e_j)$. La matriz $[B]$ satisface

$$B(u, v) = u^t[B]v,$$

donde identificamos el vector $v = \sum_i v_i e_i$ con el vector columna $(v_1, \cdots, v_n)^t$. Decimos que B es una forma no degenerada si $B(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ implica $u = 0$; decimos que B es una forma simétrica (resp. antisimétrica) si $B(u, v) = B(v, u)$ (resp. $B(u, v) = -B(v, u)$).

Definimos

$$O(V, B) := \{g \in GL(V) : B(gu, gv) = B(u, v)\ \forall u, v \in V\}, \tag{1.2}$$

y lo denotaremos equivalentemente por $O(n, \mathbb{F}) = \{g \in GL(n, \mathbb{F}) : g^t[B]g = B\}$.
Cuando B es una forma bilineal simétrica no degenerada, $O(V)$ es llamado el grupo ortogonal de B, y cuando B es una forma antisimétrica no degenerada, $O(V)$ se llama el grupo simpléctico de V. $O(V)$ es un subgrupo cerrado de $GL(V)$, y al igual que en el caso del grupo unitario, $O(V)$ es compacto.

• Supongamos que B es una forma bilineal simétrica no degenerada, entonces si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, existe una base en V tal que $[B] = I$, la matriz identidad, en cuyo caso el **grupo ortogonal complejo** es:

$$O(n, \mathbb{C}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C} : g^t g = I)\}. \tag{1.3}$$

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, existe una base de V en la cual $[B] = I_{p,q}$, donde

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

donde $0 \leq p \leq n$ y $p + q = n$. Los correspondientes grupos se llaman **grupos ortogonales reales de signatura** $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$O(p, q) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^t I_{p,q} g = I_{p,q}\}. \tag{1.4}$$

Si $p = 0$ o $q = 0$, $O(p, q)$ es el grupo ortogonal ordinario $O(n)$ y la condición anterior se simplifica a la fórmula $g^t g = I$. Los grupos $O(p, q)$ no son compactos, con excepción de $O(n)$.

• Tomando determinante en las condiciones (1.3) y (1.4), obtenemos que $\det(g)^2 = 1$, los cuales nos lleva a definir nuevos subgrupos. Definimos

$$SO(n, \mathbb{C}) := \{g \in O(n, \mathbb{C}) : \det(g) = 1\},$$

$$SO(p, q) := \{g \in O(p, q) : \det(g) = 1\},$$

$$SU(n) := \{g \in U(n) : \det(g) = 1\}.$$

Notemos que $SO(n)$ y $SU(n)$ son subgrupos cerrados en $O(n)$ y $U(n)$ respectivamente, y por lo tanto son compactos.

• Supongamos ahora que B es una forma bilineal antisimétrica no degenerada, entonces $\dim(V)_{\mathbb{F}} = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[B] = J$ con

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

El correspondiente grupo es el **grupo simpléctico complejo**

$$Sp(n, \mathbb{C}) := \{g \in GL(n, \mathbb{C}) : g^t J g = J\},$$

y el **grupo simpléctico real** es

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^t J g = J\}.$$

Notemos que el grupo $Sp(m, \mathbb{R})$ consiste de las matrices reales de $Sp(n, \mathbb{C})$, es decir, la complexificación de $Sp(m, \mathbb{R})$ es $Sp(m, \mathbb{C})$.

• Por último definimos el **grupo simpléctico compacto**, que es el único subgrupo sobre el álgebra de división de los cuaterniones que presentaremos. Definimos

$$Sp(n) := \{g \in GL(n, \mathbb{H}) : g^* g = I\},$$

donde g^* es la transpuesta conjugada de g. El grupo $Sp(n)$ es un grupo compacto.

Si G es alguno de los casos anteriores, la involución θ definida en (1.1) es estable en G. Sea $\theta_{|G}$ la restricción de la involución de Cartan a G, entonces $\theta_{|G}$ tiene los siguientes conjuntos de puntos fijos:

$$\begin{array}{rcc}
\{g \in O(n, \mathbb{C}) : \theta(g) = g\} = & O(n, \mathbb{C}) \cap GL(n, \mathbb{R}) = & O(n), \\
\{g \in O(p, q) : \theta(g) = g\} = & O(p, q) \cap O(n) = & O(p) \times O(q), \\
\{g \in Sp(2n, \mathbb{C}) : \theta(g) = g\} = & Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n) = & Sp(n), \\
\{g \in Sp(2n, \mathbb{R}) : \theta(g) = g\} = & Sp(2n, \mathbb{R}) \cap O(2n) = & U(n).
\end{array}$$

Estos grupos son subgrupos compactos maximales de $O(n, \mathbb{C})$, $O(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ y $Sp(2n, \mathbb{R})$, respectivamente.

Además tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.6. *Los grupos lineales compactos $SO(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ son conexos. Más aún,*

- *$SU(n)$ es simplemente conexo para $n \geq 2$ y $Sp(n)$ es simplemente conexo para $n \geq 1$.*
- *$Sp(1)$ y $SU(2)$ son isomorfos, y son el doble cubrimiento simplemente conexo de $SO(3)$.*

1.2. Grupos de Lie y álgebras de Lie

Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable con estructura de grupo $(G, \cdot)$ tal que la aplicación $(g, h) \to gh^{-1}$ es C^∞. En este trabajo nos concentraremos en grupos de Lie de matrices, para lo cual es de gran utilidad el siguiente resultado:

Teorema 1.2.1. *Sea G un grupo de Lie y A un subgrupo cerrado de G. Entonces A tiene una única estructura de variedad diferenciable con la cual es un subgrupo de Lie de G.*

En particular, cualquier subgrupo cerrado de matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo de Lie.

Nota. Denotaremos con letras minúsculas x, y, z a los elementos del álgebra de Lie. Si bien en general en la bibliografía suelen utilizarse dichas letras en mayúscula, priorizaremos ser coherentes con la notación utilizada en el resto del trabajo, y en particular en el Capítulo 5 es conveniente usar esta notación. La excepción será cuando el álgebra de Lie esté conformada por matrices u operadores. En tal caso, usaremos las letras A, B.

Reservaremos las letras g, h, n para elementos de grupos de Lie.

Cada grupo de Lie tiene asociada un álgebra de Lie. Un *álgebra de Lie* es un par $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ donde $\mathfrak{g}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $[\cdot, \cdot]$ es una forma bilineal sobre $\mathfrak{g}$ que satisface

1. $[x, x] = 0$ para toda $x \in \mathfrak{g}$
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (identidad de Jacobi).

A dicha forma bilineal se le llama *corchete de Lie*.

La correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie es la siguiente. Dado G un grupo de Lie, sea $\tau(G)$ el espacio vectorial de campos vectoriales diferenciales de G. Definimos un corchete en $\tau(G)$ por

$$[\tilde{x}, \tilde{y}]f(p) = \tilde{x}_p(\tilde{y}f) - \tilde{y}_p(\tilde{x}f)$$

para todo $f \in C_c^\infty(G)$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tau(G)$. Luego $(\tau(G), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie. Si $\mathfrak{g}$ es el subespacio vectorial de $\tau(G)$ conformado por los campos vectoriales diferenciales invariantes a izquierda, entonces $\mathfrak{g}$ es un subespacio de $\tau(G)$ cerrado por el corchete $[\cdot, \cdot]$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada el *álgebra de Lie del grupo de Lie G* (o el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G), y se denota por $Lie(G)$. Además, es bien sabido que el mapa evaluación $\mathfrak{g} \to T_eG$ definido por $\tilde{x} \mapsto \tilde{x}_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, por lo tanto si denotamos por $x = \tilde{x}_e$, podemos identificar a $\mathfrak{g}$ con el álgebra de Lie T_eG con corchete $[x, y] = [\tilde{x}, \tilde{y}]_e$. Luego $\mathfrak{g}$ es finitamente dimensional y tiene la misma dimensión que G.

Observación 1.2.2. Dada G un grupo de Lie de matrices, el corchete en $Lie(G)$ es

$$[x, y] = xy - yx.$$

Ejemplo 1.2.3.

G	$\mathfrak{g}$
$SL(n,\mathbb{R}) := \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$	$sl(n,\mathbb{R}) := \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(x) = 0\}$
$O(n) := \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid gg^t = I\}$	$o(n) := \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid x + x^t = 0\}$
$SO(n) := \{g \in O(n) \mid \det(g) = 1\}$	$so(n) := \{x \in o(n) \mid tr(x) = 0\}$
$U(n) := \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid gg^* = I\}$	$u(n) := \{x \in M_n(\mathbb{C}) \mid x + x^* = 0\}$

Definición 1.2.4. Dados G, H dos grupos de Lie, un *morfismo de grupos de Lie* es una aplicación $\Phi : G \to H$ C^∞ tal que $\Phi(gg') = \Phi(g)\Phi(g')$ para todo $g, g' \in G$. Un *isomorfismo de grupos de Lie* es un morfismo de grupos de Lie biyectivo. Si $G = H$, los morfismos son llamados *endomorfismos*, y denotamos a su conjunto por $End(G)$. Un *automorfismo de un grupo de Lie* es un isomorfismo de G en G. Denotamos por $Aut(G)$ al grupo de automorfismos de G.

Definición 1.2.5. Dadas $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie, un *morfismo de álgebras de Lie* ϕ es una aplicación lineal tal que $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Si ϕ es un morfismo de álgebras de Lie biyectivo, entonces lo llamamos *isomorfismo de álgebras de Lie*. En el caso particular $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, un morfismo ϕ es llamado *endomorfismo del álgebra de Lie*, y si ϕ es biyectivo decimos que es un *automorfismo del álgebra de Lie*. Denotamos por $End(\mathfrak{g})$ al álgebra de endomorfismos de $\mathfrak{g}$ y por $Aut(\mathfrak{g})$ al grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos de morfismos son:

1. Dado G un grupo de Lie y $g \in G$ definimos el morfismo de grupos de Lie $I_g : G \to G$ por $I_g(h) = ghg^{-1}$.

2. Definimos $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ como la diferencial de I_g en el punto e, $Ad(g) = dI_{g_{|e}}$. Entonces Ad es un morfismo de grupos de Lie.

3. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $x \in \mathfrak{g}$, definimos el morfismo de álgebras de Lie dado por
$$ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$$
$$ad(x)(y) = [x, y].$$
Si consideramos el corchete en $End(\mathfrak{g})$ definido por $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, donde la operación $\circ$ es la composición de operadores, entonces ad resulta un morfismo de álgebras de Lie. Notemos que por la identidad de Jacobi, ad sartisface:
$$ad(z)[x, y] = [x, ad(z)y] + [ad(z)x, y].$$
Si $D \in End(\mathfrak{g})$ satisface $D(z)[x, y] = [x, D(z)y] + [D(z)x, y]$, a D lo llamamos una derivación, y denotamos al conjunto de derivaciones de $\mathfrak{g}$ como $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$. Luego tenemos que $ad(x) \in \mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Observación 1.2.6. $Aut(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie con el producto dado por la composición, y $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ es su respectiva álgebra de Lie, con el corchete dado por $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.

Una herramienta que nos permite relacionar los morfismos de grupos y álgebras de Lie es la aplicación exponencial.

Dado G un grupo de Lie, sea $\gamma_x : \mathbb{R} \to G$ la curva integral de x comenzando en la identidad, esto es, la curva que satisface

$$\gamma_x'(0) = x, \qquad \gamma_x(0) = e.$$

Definimos el *mapa exponencial*,

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \qquad \exp(x) := \gamma_x(1).$$

Observación 1.2.7. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de matrices, la función exponencial es

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{A^n}{n!}.$$

Teorema 1.2.8. *Sean G y H grupos de Lie de matrices con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Sea $\Phi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie y sea $d\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ el diferencial de la función Φ. Entonces se cumple que $\Phi(\exp(x)) = \exp(d\Phi(x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, ó equivalentemente, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\Phi"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & H \end{tikzcd}$$

donde $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ y $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$ son las funciones exponenciales de G y H, respectivamente.

Si G es un grupo de Lie simplemente conexo, tenemos un resultado más fuerte.

Teorema 1.2.9. *Sean G y H grupos de Lie, con álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ respectivamente, G simplemente conexo. Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie, existe un único morfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ tal que $d\Phi = \phi$.*

Más aún dos grupos de Lie simplemente conexos son isomorfos si y sólo si sus álgebras de Lie lo son.

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son subconjuntos de $\mathfrak{g}$, denotamos por

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \operatorname{span}\{[x, y] : x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}.$$

Una *subálgebra* de Lie $\mathfrak{h}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Un subespacio $\mathfrak{i}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si satisface $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{i}$; un ideal es automáticamente una subálgebra. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice abeliana si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Dado $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie tenemos las siguientes subálgebras de Lie:

- Dado $\mathfrak{s}$ un subconjunto de $\mathfrak{g}$, el centralizador de $\mathfrak{s}$ en $\mathfrak{g}$ es,

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{s}\}.$$

- Dada $\mathfrak{s}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, definimos el normalizador de $\mathfrak{s}$ en $\mathfrak{g}$,

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] \in \mathfrak{s} \text{ para todo } y \in \mathfrak{s}\}.$$

Ejemplos de ideales son:

- El centro de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}.$$

  En particular, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ es el centralizador de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$,

- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1.2.1. Complexificación de álgebras de Lie reales

Algunas de nuestras álgebras de Lie son obtenidas de otras vía un proceso que se llama complexificación. Por ejemplo, el álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es la complexificación de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Estas álgebras son muy importantes en este trabajo, porque muchos resultados y descomposiciones conocidas se pueden aplicar a álgebras de Lie complejas, y mediante este método de complexificación podemos hallar resultados similares transformando nuestras álgebras de Lie reales en álgebras de Lie complejas. No profundizaremos en la definición ya que usaremos sólo algunos ejemplos que mencionaremos en esta sección.

Dado W un $\mathbb{R}$-espacio vectorial definimos su complexificación como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

que denotamos $W^{\mathbb{C}}$. A W podemos incluirlo en $W^{\mathbb{C}}$ vía la aplicación $w \mapsto w \otimes_{\mathbb{R}} 1$.

Por otra parte, si definimos un producto por escalares complejos sobre $W \oplus W$ como

$$(a + ib)(w_1, w_2) = (aw_1 - bw_2, bw_1 + aw_2),$$

es fácil verificar que $W \oplus W$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, e identificamos $W \oplus W$ con $W + iW$ vía el mapa $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + iw_2$. Denotamos a este espacio por $W_{\mathbb{C}}$. A W podemos incluirlo en $W_{\mathbb{C}}$ vía la aplicación natural $w \mapsto (w, 1)$. El siguiente teorema relaciona $W_{\mathbb{C}}$ con $W^{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.2.10. *Sea W un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces existe un único isomorfismo de espacios vectoriales complejos $f_W : W_{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[dr] & W^{\mathbb{C}} \\ & W_{\mathbb{C}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

A este espacio queremos darle una estructura de álgebra de Lie. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, definimos un corchete en $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ como:

$$[x \otimes a, y \otimes b] := [x, y] \otimes ab.$$

Denotamos a la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Además tenemos que vía la identificación $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \otimes 1$, $\mathfrak{g}$ está contenida en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}} = [\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$. Algunos ejemplos de complexificaciones de álgebras de Lie son:

$$\begin{array}{cc}
\mathfrak{g} & \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \\
\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \\
\mathfrak{u}(n) & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \\
\mathfrak{su}(n) & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \\
\mathfrak{so}(n) & \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \\
\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) & \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}), \\
\mathfrak{sp}(n) & \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}),
\end{array}$$

1.3. Análisis armónico en grupos de Lie

Sea G un grupo topológico localmente compacto. Para desarrollar análisis armónico sobre estos grupos necesitamos introducir una noción de integración. La medida de Haar invariante a izquierda (respectivamente a derecha) que presentaremos a continuación cumple la propiedad de efectivamente ser invariante por traslaciones a izquierda (respectivamente a derecha) sobre subconjuntos medibles.

1.3.1. Medida de Haar y espacios de Lebesgue

Definición 1.3.1. Decimos que una medida μ definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}$ es regular si:

- Es finita sobre conjuntos compactos, es decir, $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subseteq G$ compacto.
- Todo boreliano se puede aproximar internamente en medida por conjuntos compactos, es decir, dado $E \in \mathfrak{B}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \text{ es compacto}, \ K \subseteq E\}$.
- Todo boreliano se puede aproximar externamente en medida por conjuntos abiertos, es decir, dado $E \in \mathfrak{B}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(A) \ : \ A \text{ es abierto}, \ E \subseteq A\}$.

Una medida μ se dice invariante por traslaciones a izquierda si satisface

$$\mu(gE) = \mu(E) \quad \text{para todo } g \in G, E \in \mathfrak{B},$$

donde $gE := \{gh \mid h \in E\}$.
Análogamente, se dice invariante a derecha si

$$\mu(Eg) = \mu(E) \quad \text{para todo } g \in G, E \in \mathfrak{B},$$

donde $Eg := \{hg \mid h \in E\}$.

Una *medida de Haar* invariante a izquierda (respectivamente a derecha) sobre un grupo topológico G es una medida regular no nula μ definida en la σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}$ de G que es invariante a izquierda (respectivamente derecha) por traslaciones.

Teorema 1.3.2. *Si G es un grupo topológico entonces existe una única (salvo múltiplos positivos) medida de Haar μ invariante a izquierda (respectivamente a derecha) definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathfrak{B}$ de G.*

Proposición 1.3.3. *Sea μ una medida no nula, regular, localmente finita de G, entonces μ es una medida de Haar invariante a izquierda si y sólo si*

$$\int_G L_g f d\mu = \int_G f d\mu, \text{ para toda } f \in C_c^+(G)$$

donde $C_c^+(G) := \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \geq 0, \ f \neq 0\}$.

A continuación daremos algunos ejemplos de medida de Haar.

Ejemplo 1.3.4. $(\mathbb{R}^n, +)$ con la medida de Lebesgue.

Ejemplo 1.3.5. $\mathbb{R}_{>0}$ con el producto y la topología usual, la medida de Haar es $\mu(x) = \frac{dx}{x}$, donde dx es la medida de Lebesgue.

Ejemplo 1.3.6. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el grupo $H_n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ con producto

$$(x, y, t)(x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' - \tfrac{1}{2}\left((x, y') - (x', y)\right)\right) \tag{1.5}$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ y $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Este grupo es llamado el grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional. Como las medidas de Lebesgue dx y dy de $\mathbb{R}^n$ son invariantes a izquierda y a derecha para todo n, y la medida de Lebesgue dt definida sobre $\mathbb{R}$ también, se puede ver que la medida de Haar de H_n es el producto de las medidas $dx\, dy\, dt$ para todo n.

Ejemplo 1.3.7. Sea $\mathfrak{n}$ la suma directa de dos espacios vectoriales, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus V$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compacta, esto es, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{c}$ con $\mathfrak{c}$ el centro de $\mathfrak{g}$, y (π, V) es una representación real de $\mathfrak{g}$. Entonces G, el grupo de Lie conexo y simplemente conexo de $\mathfrak{g}$, es compacto. Consideramos $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}})$ un espacio producto interno tal que $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ sea una representación unitaria, y $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ un espacio producto interno tal que (π, V) sea una representación unitaria. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ son productos internos $ad(\mathfrak{g})$-invariante y $\pi(\mathfrak{g})$-invariante respectivamente. El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}$ en $\mathfrak{n}$ se obtiene asumiendo que $\mathfrak{g}$ y V son espacios ortogonales, es decir, $\langle \mathfrak{g}, V \rangle = 0$. Este producto interno definido sobre $\mathfrak{n}$ es llamado $\mathfrak{g}$-invariante.

Definimos sobre $\mathfrak{n}$ una forma bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}$ por

$$[x, n] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}, \ n \in \mathfrak{n},$$

$$\langle x, [u,v]\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \pi(x)u, v\rangle_V, \quad u, v \in V,\ x \in \mathfrak{g}.$$

El corchete $[\cdot,\cdot]$ resulta una aplicación bilineal, antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi. Por lo tanto, $[\cdot,\cdot]$ es un corchete de Lie, y $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie que satisface $[x,[y,z]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$, esto es, $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie 2-*pasos nilpotente*. Además su centro es $\mathfrak{g}$.

Denotamos por $N(\mathfrak{g}, V)$ al grupo de Lie conexo y simplemente conexo que tiene a $\mathfrak{n}$ como álgebra de Lie. Podemos darle a $N(\mathfrak{g}, V)$ una métrica invariante a izquierda determinada por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}}$. En [23] se prueba que esta construcción no depende de la elección del producto interno $\mathfrak{g}$-invariante, salvo isomorfismos de grupos de Lie. Más aún, si (π, V), (ρ, W) son dos representaciones de $\mathfrak{g}$, existe un automorfismo Ψ de $\mathfrak{g}$ y un isomorfismo lineal $T : V \to W$ tales que $T \circ \pi(x) \circ T_{-1} = \rho(\Psi(x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, entonces $N(\mathfrak{g}, V)$ y $N(\mathfrak{g}, W)$ son dos grupos de Lie isomorfos.

Por otra parte, sea N un grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie 2-pasos nilpotente $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{g}$ es el centro de $\mathfrak{n}$ y V es un complemento directo (como espacio vectorial) de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{n}$, entonces

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus V.$$

Luego, si $[\cdot,\cdot]$ es el corchete de Lie de $\mathfrak{n}$, definimos

$$B : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad B(u,v) = [u,v]. \tag{1.6}$$

Entonces B resulta una forma bilineal antisimétrica no degenerada.

Por lo tanto, podemos concluir que dados dos espacios vectoriales Z y V y una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{R}$ queda determinada un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente con centro Z. Recíprocamente, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente, $\mathfrak{c}$ su centro y V un complemento directo del centro, queda determinada una forma bilineal no degenerada sobre $V \times V$.

La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para el caso de álgebras de Lie $\mathfrak{n}$ 2-pasos nilpotente establece que

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + \tfrac{1}{2}[x,y]) \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{n}.$$

Como $N(\mathfrak{g}, V)$ es conexo y nilpotente, es sabido que la aplicación exp es un difeomorfismo (será enunciado más adelante en el Lema 4.1.5), por lo que podemos identificar los elementos de $\mathfrak{n}$ y $N(\mathfrak{g}, V)$ con pares ordenados de la forma (x, v). Vía esta identificación, el producto en $N(\mathfrak{g}, V)$ está dado por

$$(x,v)(x_0,v_0) = (x + x_0 + \tfrac{1}{2}[v,v_0], v + v_0), \quad x, x_0 \in \mathfrak{g},\ v, v_0 \in V. \tag{1.7}$$

Como las medidas de Lebesgue $\mathfrak{g}$ y V son ambas invariantes a izquierda y a derecha, y el producto en $N(\mathfrak{g}, V)$ está determinado por la ecuación (7.7), entonces la medida de Haar invariante a izquierda dn de $N(\mathfrak{g}, V)$ es $dn = dx\,dv$ donde dx y dv son las medidas de Lebesgue de $\mathfrak{g}$ y V, respectivamente.

Sea G un grupo topológico, H un subgrupo normal cerrado de G y consideremos G/H el grupo cociente. Si μ, ν y λ las medidas de Haar invariantes a izquierda de G, H y G/H respectivamente, se puede ver que existe una constante no nula c tal que

$$\int_G f(g)\ d\mu(g) = c \int_{G/H} \left(\int_H f(gh)\ d\nu(h) \right)\ d\lambda(gH).$$

Por lo tanto, la medida $d\lambda$ definida sobre G/H resulta G-invariante a izquierda.

Dado G un grupo topológico con medida de Haar μ invariante a izquierda, para todo A boreliano definimos $\mu_g(A) = \mu(Ag)$. La medida μ_g resulta una medida de Haar invariante a izquierda, y por lo tanto, para todo $g \in G$ existe $\Delta(g) \in \mathbb{C}^{\times}$ tal que $\mu_g(A) = \Delta(g)\mu(A)$ para todo A boreliano, donde $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esta función Δ es llamada *función modular* de G. Usando un argumento de densidad se puede probar que si $f \in C_c(G)$ y μ es una medida de Haar invariante a izquierda, entonces

$$\int_G f(g^{-1})\Delta(g^{-1})d\mu(x) = \int_G f(g)d\mu(g). \tag{1.8}$$

Es fácil ver que μ es invariante a derecha si y sólo si $\Delta \equiv 1$. En tal caso, el grupo G se dice *unimodular* y denotamos por dg a su medida de Haar. La familia de grupos unimodulares contienen a muchas clases conocidas de grupos como por ejemplo los abelianos, compactos, discretos y los simples. Los Ejemplos (1.3.6) y (1.3.7) definidos anteriormente también son ejemplos de grupos unimodulares.

La medida de Haar permite caracterizar la compacidad de un grupo. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.8. *Un grupo topológico localmente compacto G tiene medida de Haar finita si y sólo si G es compacto.*

1.3.2. Espacios de Lebesgue

Al igual que en $\mathbb{R}^n$, para un grupo de Lie G podemos definir los espacios de Lebesgue $L^p(G)$ y el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(G)$. Las propiedades que cumplen estos espacios son similares a las de los espacios usuales con $G = \mathbb{R}^n$. La diferencia radica en que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo unimodular, mientras que para probar algunas propiedades para cualquier grupo de Lie G debemos usar la función modular.

Sea G un grupo topológico localmente compacto y μ su medida de Haar invariante a izquierda (se puede definir también para medida de Haar invariante a derecha pero habrá algunas modificaciones en las propiedades). Dado $1 \leq p < \infty$, consideremos la p-norma

$$||f||_p = \left(\int_G |f(g)|^p d\mu(g) \right)^{\frac{1}{p}}$$

y para $p = \infty$ consideremos la norma

$$||f||_\infty := \text{ínf}\{C \geq 0 : |f(g)| \leq C \text{ pp}g \in G\}.$$

Si $p \geq 1$, definimos

$$\mathcal{N}_p := \{f \text{ medible } : ||f||_p = 0\},$$

y definimos el espacio $L^p(G)$ como el conjunto de clases de equivalencias:

$$L^p(G) := \{f \text{ medible } : ||f||_p < \infty\}/\mathcal{N}_p.$$

Recordemos algunas propiedades de estos espacios:

- Son espacios de Banach con la norma $||\cdot||_p$.
- Si $f \in L^p, h \in L^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $||fh||_1 \leq ||f||_p||h||_q$.
- $L^2(G)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle f, h\rangle := \int_G f(g)\overline{h(g)}d\mu(g)$.
- La acción regular a izquierda L_g y a derecha R_g preservan el espacio $L^p(G)$ y son continuas para todo $p \geq 1$.

Nota: en las propiedades anteriores estamos usando la convención $\frac{1}{\infty} = 0$.

Dadas $f_1, f_2 \in C_c(G)$, definimos la convolución de f_1 y f_2 como

$$(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(h)f_2(h^{-1}g)d\mu(h).$$

Es sabido que para $p \geq 1$, si $f_1 \in L^1(G)$ y $f_2 \in L^p(G)$, entonces

$$f_1 * f_2 \in L^p(G) \;\text{ y }\; ||f_1 * f_2||_p \leq ||f_1||_1||f_2||_p.$$

En particular, si $f_1, f_2 \in L^1(G)$, entonces

$$f_1 * f_2 \in L^1(G) \quad \text{y} \quad ||f_1 * f_2||_1 \leq ||f_1||_1||f_2||_1.$$

Más aún, $(L^1(G), *)$ es un álgebra de Banach asociativa, cuya norma preserva la involución

$$f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}\ \overline{\Delta(g^{-1})}.$$

Esta *-álgebra es llamada el álgebra grupo de $L^1(G)$ (generaliza la noción de álgebra grupo de grupos finitos).

Proposición 1.3.9. *El álgebra grupo $(L^1(G), *)$ es conmutativa si y sólo si el grupo G es conmutativo.*

Daremos esta demostración porque es muy simple e ilustra como se trabaja con la función modular.

Demostración. Si G es un grupo abeliano, entonces G es unimodular. Sea dh su medida de Haar. Luego, para $f_1, f_2 \in L^1(G)$ se cumple

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(g) &= \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) dh \\ &= \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h) dh \\ &= \int_G f_2(h) f_1(h^{-1}g) dh \\ &= (f_2 * f_1)(g). \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que el álgebra $L^1(G)$ es conmutativa. Sea μ su medida de Haar invariante a izquierda, y sean $f_1, f_2 \in C_c(G)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (f_1 * f_2)(g) - (f_2 * f_1)(g) = \int_G |f_1(h) f_2(h^{-1}g) - f_2(gh) f_1(h^{-1})| d\mu(h) \\ &= \int_G f_1(h) |f_2(h^{-1}g) - f_2(gh^{-1}) \Delta(h^{-1})| dh. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para toda $f_1 \in C_c(G)$, tenemos que

$$f_2(h^{-1}g) = f_2(gh^{-1}) \Delta(h^{-1}),$$

para toda $g, h \in G$ y toda $f_2 \in C_c(G)$. Luego, tomando $g = e$ tenemos que $\Delta \equiv 1$, entonces $f_2(gh) = f_2(hg)$ para toda $g, h \in G$, y para toda $f_2 \in C_c(G)$. Como $C_c(G)$ separa puntos de G, tenemos que $gh = hg$ para toda $g, h \in G$. Por lo tanto G es abeliano, como queríamos demostrar. □

Definición 1.3.10. Decimos que un elemento $f_1 \in L^2(G)$ es *central* si $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ para toda $f_2 \in L^2(G)$.

Proposición 1.3.11. *El álgebra* $(L^1(G), *)$ *tiene unidad si y sólo si* G *es discreto.*

1.4. Representaciones de grupos y álgebras de Lie

Sea X un espacio de Banach, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ al álgebra de operadores lineales y continuos sobre X dotado con la topología fuerte.

Definición 1.4.1. Una *representación* (π, X) de un grupo topológico G es una aplicación

$$\pi : G \to \mathcal{B}(X)$$

donde X es un espacio de Banach y π es un morfismo de grupos tal que para cada $\mathrm{x} \in X$ la aplicación de G en X dada por $g \longmapsto \pi(g)\mathrm{x}$ es continua.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ la subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores unitarios.

Definición 1.4.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Decimos que una representación $(\pi, \mathcal{H})$ es una *representación unitaria* si $\pi(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ para todo $g \in G$.

Proposición 1.4.3. *Si (π, X) es una representación unitaria de G y $\Phi : G \to G$ es un homomorfismo de grupos, entonces $(\pi \circ \Phi, X)$ resulta también una representación de G.*

Demostración. Claramente $\pi \circ \Phi$ es un homomorfismo de grupos por ser composición de homomorfismos y $||\pi \circ \Phi(g)|| = 1$ para todo $g \in G$. Luego, basta ver que es continuo.

Sea $\mathrm{x} \in X$ fijo, dados $g \in G$ y $\varepsilon > 0$ existe W entorno de $\Phi(g)$ tal que si $\Phi(g') \in W$ entonces

$$||\pi(\Phi(g))\mathrm{x} - \pi(\Phi(g'))\mathrm{x}|| < \varepsilon.$$

Tomando $V = \Phi^{-1}(W)$, si $g, g' \in V$ entonces $||\pi \circ \Phi(g) - \pi \circ \Phi(g')|| < \varepsilon$. Por lo tanto, $(\pi \circ \Phi, X)$ es una representación de G. $\square$

Lema 1.4.4. *Sea π un homomorfismo de G en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La aplicación $(\mathrm{x}, v) \mapsto \pi(\mathrm{x})v$ de $G \times \mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ es continua.

(b) La aplicación $\mathrm{x} \mapsto \pi(\mathrm{x})v$ de G en $\mathcal{H}$ es continua para todo $v \in \mathcal{H}$,

(c) La aplicación $\mathrm{x} \mapsto \langle \pi(\mathrm{x})v, w\rangle$ de G en $\mathbb{C}$ es continua para todo $v, w \in \mathcal{H}$.

Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. El par $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ si la aplicación

$$\pi : \mathfrak{g} \to End(\mathcal{H})$$

es un morfismo de álgebras de Lie para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Observación 1.4.5. Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de **dimensión finita** de un grupo de Lie G, esto es,

$$\pi : G \to Aut(\mathcal{H}),$$

es un morfismo continuo de grupos tal que $\pi(g)$ es un operador unitario para todo $g \in G$ y se cumple que $dim(\mathcal{H}) < \infty$. En este caso, las representaciones de grupos y de álgebras están relacionadas por la función exponencial. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, entonces existe una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

$$d\pi : \mathfrak{g} \to End(\mathcal{H})$$

tal que hace conmutar el diagrama exponencial (ver Teorema 1.2.8). Además, $d\pi(x)$ resulta un operador antisimétrico para todo $x \in \mathfrak{g}$. $d\pi$ es la representación diferencial de π. Por abuso de notación también la denotaremos por π.

Ejemplo 1.4.6. (I) Ad y ad son representaciones de grupos y álgebras de Lie respectivamente. Más aún, $Ad(\exp(x)) = \exp(ad(x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

(II) Dado G un grupo de Lie, definimos

$$L : G \to \mathcal{U}(L^2(G)) \quad \text{por} \quad (L(g)f)(h) = f(g^{-1}h).$$

Si Δ es la función modular de G, también definimos

$$R : G \to \mathcal{U}(L^2(G)), \qquad (R(g)f)(h) = \Delta^{-\frac{1}{2}}(g)f(hg).$$

Entonces L y R son representaciones de grupos de G llamadas *representaciones regular a izquierda y derecha*, respectivamente.

Decimos que $W \subset \mathcal{H}$ es un *subespacio π-invariante* si $\pi(g)W \subset W$ para todo $g \in G$; y decimos que una representación π es *irreducible* si no posee subespacios cerrados invariantes no triviales, esto es, si no posee subespacios invariantes distintos de $\mathcal{H}$ y $\{0\}$. Equivalentemente, una representación $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible si todo $v \neq 0$ en $\mathcal{H}$ es cíclico, es decir, la clausura del espacio $< \pi(g)v >$ es $\mathcal{H}$.

Lema 1.4.7. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G. Si W es un subespacio invariante de $\mathcal{H}$, entonces $W^\perp$ también lo es.*

Si $(\pi, \mathcal{H}_1), (\sigma, \mathcal{H}_2)$ son dos representaciones unitarias de un grupo de Lie G, denotamos por $Hom_G(\pi, \sigma)$ al espacio de todos los operadores acotados

$$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

que satisfacen $A\pi(g) = \sigma(g)A$ para todo $g \in G$. Tales operadores son llamados *operadores de entrelazamiento*. Equivalentemente, A es un operador de entrelazamiento si para todo $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\sigma(g)."] \\
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "A"] & \mathcal{H}_2
\end{tikzcd}$$

Denotamos por A_π a $Hom_G(\pi, \pi)$.

Dos representaciones unitarias $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$, $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ se dicen *equivalentes* si existe un operador T de entrelazamiento $T : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\rho$ tal que T es un isomorfismo; y si además T es un operador unitario, las dos representaciones se dicen *unitariamente equivalentes*.

Vía la descomposición polar de matrices, se puede probar que si existe un isomorfismo que entrelaza a dos representaciones unitarias, entonces existe un operador unitario que las entrelaza. Luego representaciones unitarias equivalentes son unitariamente equivalentes.

En otras palabras, dos representaciones unitarias se dicen unitariamente equivalentes si se puede obtener una representación a partir de la otra vía la conjungación por un operador unitario.

Teorema 1.4.8. *(Lema de Schur)*

(1) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo de Lie (resp. álgebra de Lie). Entonces $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación irreducible si y sólo si A_π está conformado por múltiplos del operador identidad I.

(2) Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert complejos, y sean $(\pi, \mathcal{H}_1)$, $(\rho, \mathcal{H}_2)$ representaciones unitarias irreducibles de un grupo de Lie. Si $(\pi, \mathcal{H}_1)$, $(\rho, \mathcal{H}_2)$ son representaciones equivalentes, y $U \in \mathrm{Hom}(\pi, \rho)$ es un operador unitario de entrelazamiento, entonces $\mathrm{Hom}(\pi, \rho) = \mathbb{C}U$. Si $(\pi, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho, \mathcal{H}_2)$ son representaciones no equivalentes entonces $\mathrm{Hom}(\pi, \rho) \equiv 0$.

Esta relación de equivalencia entre representaciones unitarias irreducibles divide al conjunto de representaciones de G en clases de equivalencias. Al conjunto de dichas clases lo llamamos *espacio dual unitario* de G, y lo denotamos por $\widehat{G}$.

Ejemplo 1.4.9. Sea G un grupo de Lie. Dado $g \in G$, sean L_g y R_g definidas como antes, esto es:

$$L_g f(h) = f(g^{-1}h) \qquad R_g f(h) = \Delta(h)^{-\frac{1}{2}} f(hg), \quad f \in L^2(G),\ h \in G.$$

Definimos la representación L dada por la aplicación $L : g \mapsto L_g$ y por R la aplicación $R : g \mapsto R_g$, y sea

$$Af(h) = \Delta(h)^{-\frac{1}{2}} f(h^{-1}).$$

Entonces A es un operador unitario de $L^2(G)$ en $L^2(G)$ y $A \in Hom_G(L, R)$.

Como corolario del Lema de Schur tenemos el siguiente resultado acerca de representaciones irreducibles de grupos de Lie conmutativos.

Corolario 1.4.10. *Una representación $(\pi, \mathcal{H})$ unitaria compleja irreducible de un grupo de Lie conmutativo G es unidimensional.*

Demostración. La demostración de este corolario se basa en que dado $g \in G$, $\pi(g) \in A_\pi$. Luego $\pi(g) = \lambda(g)I$. Luego si $v \in \mathcal{H}$, entonces $< v >$, el espacio generado por el vector v es π-invariante. Luego $\mathcal{H} = < v >$. □

Notemos que si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación de un grupo de Lie abeliano, entonces uno puede escribir $\pi(g) = \chi(g)I$ para todo $g \in G$, donde

$$\chi : G \to T_1$$

es un homomorfismo continuo y T_1 es el toro unidimensional. La aplicación χ es llamada un *caracter* de G. En el caso $G = \mathbb{R}$, los caracteres vienen dados por $\chi_y(x) = e^{2\pi i x y}$, donde $y \in \mathbb{R}$.

Otro aspecto interesante de las representaciones es que a partir de dos de ellas podemos construir otras nuevas.

Construcción de nuevas representaciones:

1. Suma directa de dos representaciones: dadas $(\pi, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones de G, entonces $(\pi \oplus \rho, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ se define como $\pi \oplus \rho(g)(v \oplus w) = \pi(g)(v) \oplus \rho(g)(w)$. Si $(\pi, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho, \mathcal{H}_2)$ son unitarias entonces $(\pi \oplus \rho, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ también lo es.

2. Producto tensorial de dos representaciones: dadas $(\pi, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones de G, definimos $(\pi \otimes \rho, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ como $\pi \otimes \rho(g)(v \otimes w) = \pi(g)(v) \otimes \rho(g)(w)$. Si $(\pi, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho, \mathcal{H}_2)$ son representaciones unitarias, entonces $(\pi \otimes \rho, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ también lo es.

3. Representación dual: dada $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de G definimos $\mathcal{H}^*$ el espacio dual de $\mathcal{H}$. Notemos que $\mathcal{H}^*$ se identifica con $\mathcal{H}$ vía el Teorema de Riesz. Definimos la representación dual $(\pi', \mathcal{H}^*)$ de $(\pi, \mathcal{H})$ por $(\pi'(g)T)(v) = T(\pi(g)(v))$. Si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria e irreducible, entonces $(\pi', \mathcal{H}^*)$ también lo es.

Las siguiente propiedad relaciona representaciones complejas y reales, y será de utilidad para los capítulos que siguen.

Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de un grupo de Lie G. Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, decimos que $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ es una *forma real* de $\mathcal{H}$. Si además $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ es $\pi(G)$-invariante, decimos que π es una *representación real.* Si π es una representación real escribimos

$$\pi = \pi_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$$

donde $\pi_\mathbb{R} = \pi_{|\mathcal{H}_\mathbb{R}}$. En este caso, decimos que $(\pi, \mathcal{H})$ es la complexificación de $(\pi_\mathbb{R}, \mathcal{H}_\mathbb{R})$, y tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.4.11. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de un grupo de Lie G. Entonces $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible si y sólo si $(\pi_\mathbb{R}, \mathcal{H})$ es irreducible.*

1.4.1. Representación de $L^1(G)$

Sea G un grupo de Lie unimodular. Denotamos por dg su medida de Haar.

Consideremos $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo localmente compacto G y $f \in C_c(G)$. Dados $v, w \in \mathcal{H}$ la integral

$$\int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle dg$$

es finita y se cumple que

$$|\int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle dg| \leq ||f||_1 |v||w|.$$

Luego existe $\pi(f) \in End(\mathcal{H})$ tal que $||\pi(f)|| \leq ||f||_1$ y

$$\langle \pi(f)v, w\rangle = \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle dg \quad v, w \in \mathcal{H}. \tag{1.9}$$

También denotamos a $\pi(f)$ por $\hat{f}(\pi)$.

Definición 1.4.12. Sea G un grupo de Lie. Una representación $(\pi, \mathcal{H})$ se dice *no degenerada* si el único vector $v \in \mathcal{H}$ que satisface $\pi(g)v = 0$ para todo $g \in G$ es el vector $v = 0$.

Teorema 1.4.13. *Una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ de un grupo de Lie G induce, mediante la ecuación* (1.9)*, una representación de $L^1(G)$ sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ no degenerada. Recíprocamente, dada una representación no degenerada de $L^1(G)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ existe una única representación unitaria de G que satisface la ecuación* (1.9)*.*

Un resultado importante es el siguiente:

Teorema 1.4.14. *Sea G un grupo de Lie. La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación irreducible de G si y sólo si la representación $(\pi, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ definida por* (1.9) *es una representación irreducible de $L^1(G)$.*

1.4.2. Representaciones de grupos de Lie compactos

Consideremos ahora K un grupo de Lie compacto y sea dk su medida de Haar normalizada, esto es, que dk satisface $\int_K dk = 1$. Si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación de K de dimensión finita, entonces existe un producto interno definido sobre $\mathcal{H}$ con el cual $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria.

En efecto, sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación del grupo K y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno definido sobre $\mathcal{H}$. Definimos

$$(u, v) := \int_K \langle \pi(k)u, \pi(k)v \rangle dk, \quad \text{para } u, v \in \mathcal{H}$$

Se puede ver que $(\cdot, \cdot)$ resulta un producto interno y que $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria sobre K respecto a este producto interno.

Existen dos resultados muy importantes en la teoría de representaciones de grupos compactos, que los enunciaremos en los siguientes teoremas.

Teorema 1.4.15. *Sea K un grupo de Lie compacto y sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria e irreducible de K. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

1. *$(\pi, \mathcal{H})$ es finitamente dimensional.*
2. *La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es equivalente a una sub-representación de la representación regular a izquierda $(L, L^2(K))$.*

Nota. Como las representaciones sobre un grupo compacto son finitamente dimensionales, usaremos la notación (π, V) para representaciones de grupos de Lie compactos.

Definición 1.4.16. Una representación (π, V) de K se dice *completamente reducible* si es equivalente a $(\oplus_i \pi_i, \oplus_i V_i)$ donde (π_i, V_i) es una representación irreducible de K.

Teorema 1.4.17. *Toda representación unitaria de un grupo de Lie K compacto es completamente reducible.*

Definición 1.4.18. Dada (π, V) una representación de dimensión finita de un grupo de Lie G. Sean $v, w \in V$ fijos, llamaremos *entrada matricial* $e_\pi(v, w)$ a la aplicación

$$g \longmapsto \langle \pi(g)v, w \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno definido sobre V que hace unitaria a la representación (π, V).

Es sabido que $e_\pi(v, w)$ es una aplicación C^∞. Luego, si K es un grupo de Lie compacto entonces $e_\pi(v, w) \in L^p(K)$ para todo $p > 1$.

Veamos cómo la acción regular a izquierda $(L, L^2(K))$ y la acción regular a derecha $(R, L^2(K))$ actúan sobre los coeficientes matriciales.

$$\begin{aligned} L_g R_{g'} e_\pi(u, v)(k) &= \Delta(g')^{\frac{1}{2}} e_\pi(u, v)(g^{-1}kg') \\ &= \Delta(g')^{\frac{1}{2}} \langle \pi(g^{-1}kg')u, v \rangle_V \\ &= \Delta(g')^{\frac{1}{2}} \langle \pi(k)\pi(g')u, \pi(g)v \rangle_V \\ &= \Delta(g')^{\frac{1}{2}} e_\pi(\pi(g')u, \pi(g)v)(k). \end{aligned}$$

En particular tenemos el siguiente lema.

Lema 1.4.19. *Sea K un grupo de Lie compacto y (π, V) una representación unitaria de K. Si $V \neq 0$, entonces existen $v \in V$ no nulo y un operador de entrelazamiento inyectivo $T : V \hookrightarrow L^2(K)$ dependiendo de v que entrelaza las representaciones (π, V) y $(L, L^2(K))$. Este operador T viene dado por*

$$u \mapsto e_\pi(v, u).$$

Sea K un grupo de Lie compacto y (π, V) una representación unitaria e irreducible de K. Denotamos por M_π la clausura del espacio generado por las entradas matriciales $\{e_\pi(u, v)\}_{u,v \in V}$ respecto de la topología $L^2(K)$. Entonces M_π es un ideal cerrado en el álgebra de convolución $L^2(K)$.

Además tenemos el siguiente resultado que utilizaremos en la demostración del Teorema 1.4.15.

Proposición 1.4.20. *Sea K un grupo de Lie compacto y (π, V) una representación unitaria e irreducible de K. Entonces M_π contiene un elemento central de $L^2(K)$.*

Ahora si podemos dar la demostración del Teorema 1.4.15.

Demostración. (del Teorema 1.4.15) Ya vimos que podemos realizar la representación (π, V) como una sub-representación de la representación regular a izquierda $(L, L^2(K))$.

Sea $0 \neq h \in M_\pi$ un elemento central de $L^2(K)$. Entonces:

$$\pi(f)\pi(h) = \pi(h)\pi(f)$$

para toda función f en $C(K)$, ya que $L(f)L(h) = L(h)L(f)$ para toda $f \in C(K)$. Como π es una representación irreducible, por Lema de Schur, $\pi(h) = \lambda(h)I$ donde $\lambda(h)$ es un escalar no nulo, pues $L(h) \neq 0$. Por otra parte, notemos que $L(h)(\phi) = h * \phi$, por lo que el operador $L(h)$ es un operador compacto (resulta ser un operador definido por la integral contra un núcleo). Luego $\pi(h)$ también es un operador compacto dado por un múltiplo no nulo del operador identidad. Luego, el espacio V debe ser finitamente dimensional. $\square$

Del Teorema 1.4.15 y del Lema 1.4.7 se deduce la demostración del Teorema 1.4.17.

El Teorema de ortogonalidad de Schur da una relación entre las entradas matriciales de representaciones unitarias e irreducibles de K. Sean (π, V), (π', W) dos representaciones irreducibles de un grupo de Lie compacto K. Si π y π' no son equivalentes, entonces todos los coeficientes matriciales de π son ortogonales a todos los coeficientes matriciales de π'. Concretamente el teorema dice lo siguiente.

Teorema 1.4.21. *(Teorema de Ortogonalidad de Schur) Sea K un grupo de Lie compacto y (π, V) una representación unitaria e irreducible de K. Denotamos por $deg(\pi)$ a la dimensión de V. Si π, π' son representaciones no equivalentes de K, $f \in M_\pi, f' \in M_{\pi'}$, entonces*

$$f * f' = 0 \quad y \quad f \perp f' \text{ en } L^2(K).$$

Si $u, v, u', v' \in V$ entonces

$$e_\pi(u, v) * e_\pi(u', v') = \tfrac{1}{deg(\pi)} \langle u', v\rangle e_\pi(u, v'),$$

y

$$\langle e_\pi(u, v), e_\pi(u', v')\rangle_{L^2(K)} = \tfrac{1}{deg(\pi)} \langle u, u'\rangle \overline{\langle v, v'\rangle}.$$

Definición 1.4.22. Sea (π, V) una representación finitamente dimensional de un grupo de Lie G. Entonces su *caracter* es $\chi_\pi = tr(\pi(g)) = \sum_i \langle \pi(g)v_i, v_i\rangle$ donde $\{v_i\}$ es una base ortonormal de V.

Sea K un grupo de Lie compacto, $(\pi, V), (\pi, V')$ dos representaciones irreducibles de K y $\chi_\pi, \chi_{\pi'}$ sus correspondientes caracteres. Entonces valen las siguientes afirmaciones.

- Si $\pi \sim \pi'$ entonces $\chi_\pi = \chi_{\pi'}$.
- $\chi_{\pi\oplus\pi'} = \chi_\pi + \chi_{\pi'}$.
- $\chi_{\pi\otimes\pi'} = \chi_\pi \chi_{\pi'}$.
- $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'}\rangle_{L^2(K)} = 0$ si $\pi \nsim \pi'$, y $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'}\rangle_{L^2(K)} = 1$ si $\pi \sim \pi'$.
- $\overline{\chi_\pi} * f = f * \overline{\chi_\pi}$ para toda $f \in L^2(K)$.
- $f \mapsto f * \overline{\frac{1}{deg(\pi)}\chi_\pi}$ es la proyección ortogonal de $L^2(K)$ en el ideal cerrado M_π.

Supongamos que (π, V) es una representación unitaria de un grupo de Lie compacto K y que (ρ, W), (σ, W_i) son representaciones irreducibles de K. Sea

$$\pi = n\rho \oplus \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_m$$

la descomposición en componentes irreducibles de (π, V) (donde $n\rho = \rho \oplus \cdots \oplus \rho$ n-veces, y $\rho \nsim \sigma_i$ para todo i). Luego

$$V = W \oplus \cdots \oplus W \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_m.$$

Sea $T : V \to W$ un operador de entrelazamiento entre π y ρ, el Lema de Schur implica que $T_{|W_1 \oplus \cdots \oplus W_m} \equiv 0$. Luego $Hom_G(\pi, \rho) \equiv Hom_G(n\rho, \rho)$. Por otro lado, $T_{|W}$ es un múltiplo de la identidad, y por lo tanto $\dim(Hom_G(\pi, \rho)) = \dim(Hom_G(n\rho, \rho)) = n$. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.23. Dadas (π, V_π) y (σ, V_σ) dos representaciones de un grupo de Lie G, definimos $[\pi : \sigma] := \dim(Hom_G(\pi, \sigma))$ la *multiplicidad de σ en π*.

Lema 1.4.24. *Sea K un grupo de Lie compacto. Entonces*

$$\pi \sim \sum_{\theta \in \widehat{K}} [\pi : \theta]\theta,$$

donde la multiplicidad $[\pi : \theta]$ satisface

$$[\pi : \theta] = \langle \chi_\pi, \chi_\theta \rangle_{L^2(K)}.$$

Dado $K \subseteq G$, se dice que (π, V_π) se descompone *libre de multiplicidad* respecto a K si $[\pi_{|K} : \sigma] \leq 1$ para toda (σ, V_σ) representación irreducible de K.

Proposición 1.4.25. *Dada (π, V_π) una representación de un grupo de Lie compacto K, existe una descomposición bien definida $V_\pi = \sum_{\sigma \in \widehat{K}} V_{(\sigma)}$, la cual es una suma directa ortogonal de subespacios cerradas $\pi(K)$-invariantes, tal que la sub-representación de π en $V_{(\sigma)}$ es $[\pi : \sigma]\sigma$. El álgebra A_π es L^∞-suma directa de los ideales cerrados $A_{[\pi:\sigma]\sigma}$.*

El espacio $V_{(\sigma)}$ es llamado el subespacio primario de V_π, y las representaciones $[\pi : \sigma]\sigma$ son llamadas las sub-representaciones primarias de π. La representación π es llamada una *representación primaria* si π es igual a una de sus sub-representaciones primarias.

Proposición 1.4.26. *Sea (π, V) una representación unitaria de K grupo de Lie compacto. Entonces π es libre de multiplicidad si y sólo si A_π es un álgebra conmutativa.*

El resultado más importante para grupos de Lie compactos es el Teorema de Peter-Weyl, que nos permite descomponer una representación (π, V) en componentes irreducibles invariantes por traslaciones.

Teorema 1.4.27. *(Teorema de Peter-Weyl) Sea K un grupo de Lie compacto. Luego valen las siguientes sentencias.*

1. *El álgebra $L^2(K) = \sum_{\pi\in\widehat{K}} deg(\pi) M_\pi$ donde la suma es una suma ortogonal de ideales biláteros.*

2. *Sea $\{v_1, \cdots, v_{deg(\pi)}\}$ una base ortonormal de V. Definimos los coeficientes*

$$h_{\pi,i,j} = \sqrt{deg(\pi)} e_\pi(v_i, v_j).$$

Entonces $\{h_{\pi,v_i,v_j}\}_{i,j=1}^{deg(\pi)}$ es una base ortonormal de M_π y $h_{\pi,i,j} * h_{\pi,i,l} = \delta_{j,l}\ h_{\pi,i,l}$.

3. *El grupo $G \times G$ con el producto coordenada a coordenada actúa en $L^2(K)$ por*

$$((g_1, g_2) \cdot f)(k) \mapsto f(g_1^{-1} k g_2).$$

Esta resulta una representación unitaria libre de multiplicidad de $L^2(K)$, donde M_π son los espacios invariantes minimales y la sub-representación de M_π es el producto tensorial $\pi \otimes \pi^*$.

4. *El centro de $L^2(K)$ es el subespacio cerrado generado por los caracteres de $L^2(K)$, y el conjunto de caracteres $\{\chi_\pi\}_{\pi\in\widehat{K}}$ es un conjunto ortonormal completo en el centro de $L^2(K)$.*

Corolario 1.4.28. *Sean K_1, K_2 grupos de Lie compactos. Entonces*

$$\widehat{K_1 \times K_2} = \{\pi_1 \otimes \pi_2 : \pi_1 \in \widehat{K_1}, \pi_2 \in \widehat{K_2}\}.$$

La consecuencia más importante del Teorema de Peter-Weyl es la fórmula de Plancherel

Teorema 1.4.29. *(Fórmula de Plancherel para grupos compactos) Sea K un grupo de Lie compacto. Entonces valen las siguientes:*

1. *Si $f, f' \in L^2(K)$ entonces $\sum_{\pi\in\widehat{K}} \langle \pi(f), \pi(f')\rangle_{HS}$ converge absolutamente y*

$$\langle f, f'\rangle_{L^2(K)} = \sum_{\pi\in\widehat{K}} \langle \pi(f), \pi(f')\rangle_{HS}\ deg(\pi),$$

donde $||T||_{HS} = (\sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}$ con $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\{e_i\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$. En particular, si $f \in L^2(K)$ entonces

$$||f||_{L^2(K)} = \sum_{\pi\in\widehat{K}} ||\pi(f)||_{HS}\ deg(\pi).$$

2. *Si $f = f_1 * f_2$ con $f_1, f_2 \in L^2(K)$, $k \in K$, entonces $\sum_{\pi\in\widehat{K}} tr(\pi(R(k)f))\ deg(\pi)$ converge absolutamente y*

$$f(k) = \sum_{\pi\in\widehat{K}} tr(\pi(R(k)f))\ deg(\pi). \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.4.30. Consideremos el grupo $U(1) := \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, donde usamos la identificación de escalares con matrices de tamaño 1×1. Se puede ver que

$$\widehat{U(1)} = \{\pi_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

donde $\pi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. Las funciones sobre $U(1)$ se pueden identificar como funciones $f(\theta)$ 2π-periódicas. De la fórmula de Plancherel (1.10) se deduce que

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}, \quad \text{donde } c_n = \int_0^{2\pi} f(\phi)e^{-in\phi}d\phi \tag{1.11}$$

para ciertas funciones f. Es claro que la fórmula (1.11) coincide con la expansión en series de Fourier. Esta fórmula se obtiene para funciones continuas de $U(1)$, y se extiende por densidad a funciones de $L^2(U(1))$.

Dado G grupo de Lie compacto, $K \subseteq G$ queremos saber que relación existe entre las representaciones de ambos grupos. Es fácil obtener una representación de K a partir de una representación (π, W) de G vía la restricción de la función π a K, obteniendo la *representación restringida*.

Para obtener una representación de G a partir de una representación (σ, V) de K definimos el espacio vectorial

$$C(G,V)^\sigma := \{f : G \to V \text{ continua} \mid f(xk) = \sigma(k^{-1})f(x)\}.$$

La representación regular a izquierda L preserva el espacio $C(G,V)^\sigma$ y $(L, C(G,V)^\sigma)$ define una representación de G que llamamos la *representación inducida*, la cual es denotada por $Ind_K^G(\sigma)$.

La relación entre la representación inducida y la restringida viene dada por el Teorema de reciprocidad de Frobenius.

Teorema 1.4.31. *(Teorema de reciprocidad de Frobenius) Sea $K \subseteq G$ grupos de Lie compactos. Sean (π, V), (σ, W) representaciones de G y K respectivamente, se tiene que:*

(1) $End_G(V, C_G(V,W)^\sigma) \simeq End_K(V,W)$.

(2) $[Ind_K^G(\sigma) : \pi] = [\pi_{|_K} : \sigma]$.

1.4.3. Representaciones de cuadrado integrable

Finalmente definimos representaciones de cuadrado integrable. En el caso en que G es un grupo de Lie compacto, sabemos que las entradas matriciales son de cuadrado integrable, es decir, pertenecen a $L^2(G)$.

Cuando quitamos la hipótesis de compacidad, ese hecho no necesariamente se cumple. En particular, en este trabajo aparecerán grupos de Lie como los definidos en los Ejemplos (1.3.6) y (1.3.7). Estos grupos tienen la particularidad de poder escribirse de la forma $G = G' \times Z$, donde Z es el centro de G y G' es el grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Este hecho se debe a que son grupos de Lie conexos y simplemente conexos asociados a álgebras que se descomponen como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Si consideramos $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de G, y si a un elemento $g \in G$ lo escribimos como $g = g'z$ con $g \in G'$ y $z \in Z$, entonces $\pi(g) = \pi(g')\pi(z)$. Por otra parte, sabemos que como Z es abeliano, $\pi_{|Z}$ es un caracter de G, que denotaremos por ζ. Entonces,

$$\zeta : G \to T_1,$$

y por lo tanto,

$$\zeta(z) = e^{i\kappa(z)} I, \qquad \text{para algún } \kappa \in \mathfrak{c}^*.$$

Por lo tanto las entradas matriciales asociadas a la representación $(\pi, \mathcal{H})$ tienen un factor $e^{i\kappa(z)}$, por lo cual no pertenecen a $L^2(G)$. Sin embargo, podemos preguntarnos cuando las entradas matriciales asociadas a una representación $(\pi, \mathcal{H})$ pertenecen a $L^2(G/Z)$.

Definición 1.4.32. Sea $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria e irreducible de G, donde G es un grupo topológico localmente compacto unimodular con centro Z. Decimos que G es de *cuadrado integrable* si existen $u, v \in \mathcal{H}$ tal que

$$\int_{G/Z} |\langle \pi(g)u, v\rangle|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty \tag{1.12}$$

donde μ es una medida G-invariante definida sobre G/Z.

Esta fórmula requiere alguna explicación. Dado $h \in Z$, por la irreducibilidad de $(\pi, \mathcal{H})$, $\pi(h) = \lambda(\pi)(h)1$, donde $\lambda(\pi)$ es un homomorfismo continuo de Z sobre el circulo unitario T_1. Se sigue que $\langle \pi(gh)u, v\rangle = \lambda(\pi)(h)\langle \pi(g)u, v\rangle$, y entonces el integrando de (1.12) es una función de G invariante bajo traslación por elementos de Z, es decir, una función de G/Z.

Entonces tenemos el siguiente resultado, que es una generalización del Teorema de ortogonalidad de Schur en el caso compacto.

Teorema 1.4.33. *Sea G un grupo de Lie y $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G de cuadrado integrable. Entonces existe $d(\pi) \in \mathbb{R}$ tal que para todo $u, u', v, v' \in \mathcal{H}$ se cumple*

$$\int_G \langle \pi(g)v, u\rangle \overline{\langle \pi(g)v', u'\rangle}\ dg = d(\pi)\langle v, v'\rangle \overline{\langle u, u'\rangle}.$$

El número $d(\pi)$ es llamado el grado formal de la representación $(\pi, \mathcal{H})$.

Capítulo 2

Análisis armónico en pares de Gelfand

En este capítulo introduciremos la definición de par de Gelfand. También veremos la relación existente entre funciones esféricas de tipo positivo asociadas a pares de Gelfand y clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles. De algunos resultados daremos sus pruebas, y a modo de motivación daremos varios ejemplos de pares de Gelfand y de cómo hallar las correspondientes funciones esféricas.

En el capítulo anterior vimos en el Teorema de Peter-Weyl, que si G es un grupo de Lie compacto, $L^2(G) = \oplus_{\pi \in \widehat{G}} deg(\pi) M_\pi$ donde cada M_π es un subespacio invariante e irreducible por la representación regular a izquierda. Más aún, vimos que el centro del álgebra de convolución $L^2(G)$ está generado por los caracteres de $L^2(G)$, y dado un caracter, la proyección sobre su subespacio generado viene dada por la convolución contra el caracter. El objetivo de este capítulo es sintetizar todos los resultados de [31] que generalizan esta idea para el caso G no compacto, pero con un ingrediente extra: el espacio de funciones que vamos a descomponer, además de ser conmutativo respecto de la convolución, es K-bi-invariante, donde K es un subgrupo compacto de $Aut(G)$ (en el caso compacto podemos pensar que K está conformado por el elemento identidad).

El resultado central de este capítulo será el siguiente: dado un par de Gelfand, el espacio de funciones de G K-bi-invariantes $L^2(G)^K$ es la integral directa de ciertos espacios, los cuales vienen generados por la convolución contra una función esférica. En este caso, las funciones esféricas cumplen el rol de los caracteres para grupos compactos.

Finalmente, buscaremos generalizar esta idea para el espacio de funciones K-invariantes a izquierda $L^2(G/K)$.

2.1. Funciones de tipo positivo

Las funciones que estudiaremos a continuación se llaman funciones de tipo positivo. La importancia de estas funciones radica en que, aquellas que son continuas, están en correspondencia biunívoca con las entradas matriciales de representaciones unitarias; más aún, las funciones de tipo positivo que definiremos como elementales están en correspondencia biunívoca con clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles.

De ahora en más G será un grupo de Lie con medida de Haar dg.

Definición 2.1.1. Decimos que una función $\phi : G \to \mathbb{C}$ es de *tipo positivo* si es medible, $\phi \in L^1_{loc}(G)$ y para toda $f \in C_c(G)$ se satisface

$$\int_{G\times G} \phi(g^{-1}h)f(g)\overline{f(h)}\, dgdh \geqslant 0,$$

donde la integración es respecto de la medida de Haar de G.

Dada ϕ una función de tipo positivo, $f_1, f_2 \in C_c(G)$ definimos

$$\langle f_1, f_2\rangle_\phi = \int_{G\times G} \phi(g^{-1}h)f_1(g)\overline{f_2(h)}\, dg\, dh. \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) define una forma sesqui-lineal positiva sobre $C_c(G)$. Sea

$$\mathcal{N}_\phi := \{f_1 \in C_c(G) : \langle f_1, f_2\rangle_\phi = 0 \text{ para toda } f_2\}.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se sigue que $\mathcal{N}_\phi$ es un subespacio lineal de $C_c(G)$. Podemos inducir un producto escalar genuino sobre $C_c(G)/\mathcal{N}_\phi$. Sea H_ϕ la completación de $C_c(G)/\mathcal{N}_\phi$ con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$.

Observemos que (L, H_ϕ) es una representación unitaria de G, donde L es la representación regular a izquierda $L_g f(h) = f(g^{-1}h)$. Es claro que

$$\langle L_g f_1, L_g f_2\rangle_\phi = \langle f_1, f_2\rangle_\phi \quad \text{para toda } f_1, f_2 \in C_c(G).$$

Entonces L_g se puede extender a un operador unitario sobre H_ϕ. Esta extensión resulta una representación unitaria de G. Para mostrar la continuidad de esta representación, es suficiente probar que la aplicación

$$g \mapsto \langle L_g f_1, f_2\rangle_\phi$$

es continua para $f_1, f_2 \in C_c(G)$. Además, es suficiente con mostrar su continuidad en el punto e. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned}
|\langle L_g f_1 - f_1, f_2\rangle_\phi| &= |\int_G\int_G \phi(h^{-1}n)L_g f_1(h) - f_1(h)\overline{f_2(n)}\, dhdn| \\
&= |\int_G\int_G \phi(n)L_g f_1(h) - f_1(h)\overline{f_2(hn)}\, dhdn| \\
&\leq ||L_g f_1 - f_1||_1 ||f_2||_\infty \left(\int_K |\phi(n)|\, dn\right),
\end{aligned}$$

donde K es un subconjunto compacto de G, dependiendo del soporte de f_1 y de f_2.

Teorema 2.1.2. *Sea ϕ una función de tipo positivo y acotada (es decir, $\phi \in L^\infty$). Entonces ϕ coincide ppg $\in G$ con una función continua de tipo positivo.*

Incluímos la demostración de este teorema porque en la prueba aparecen resultados centrales para nuestro trabajo. Para ello primero definamos aproximación de la identidad.

Definición 2.1.3. Sea V_n una base de entornos simétricos y compactos de e tal que $V_n \subseteq V_{n+1}$ para todo n natural. Definimos

$$\psi_n := \frac{1}{m(V_n)} \chi_{V_n},$$

donde m es la medida de Haar de G y χ_{V_n} es la función característica de V_n. Entonces $\{\psi_n\}$ es una *aproximación de la identidad* en el álgebra $(L^1(G), *)$, es decir que satisface:

- Existe $C \geq 0$ tal que $||\psi_n|| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- Para cualquier $f \in L^1(G)$, $f * \psi_n \to f$, $\psi_n * f \to f$ en $L^1(G)$ cuando $n \to +\infty$.

Demostración. (del Teorema 2.1.2) Elegimos $\{\psi_n\}$ una aproximación de la identidad. Para $f \in C_c(G)$ se tiene

$$\langle f, \psi_n \rangle_\phi \to \int_G f(g)\overline{\phi(g)}\, dg \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_n \rangle_\phi &= \int_G \int_G f(g)\overline{\psi_n(h)}\phi(g^{-1}h)\, dgdh \\
&= \int_G \int_G \overline{\psi_n(g)} f(h)\overline{\phi(g^{-1}h)} dgdh \\
&= \int_G \overline{\psi_n(g)} f * \tilde{\phi}(g)\, dg \to f * \tilde{\phi}(e) \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

ya que $f * \tilde{\phi}$ es continua, donde $\tilde{\phi}(g) = \overline{\phi(g^{-1})}$. Pero, para $f \in C_c(G)$ se tiene que

$$\left| \int_G f(g)\overline{\phi(g)}\, dg \right| \leq ||\phi||_\infty^{\frac{1}{2}} ||f||_\phi.$$

En efecto,

$$|\langle f, \psi_n \rangle_\phi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\phi \langle \psi_n, \psi_n \rangle_\phi \leq ||\phi||_\infty ||f||_\phi^2,$$

para todo n. Entonces podemos extender el funcional

$$f \mapsto \int_G f(g)\overline{\phi(g)}\, dg$$

a un funcional lineal acotado de H_ϕ. Por lo tanto existe $\epsilon \in H_\phi$ tal que

$$\langle f, \epsilon \rangle = \int_G f(g)\overline{\phi(g)}\, dg \quad \text{para } f \in C_c(G).$$

Entonces

$$\langle L_{h^{-1}} f, \epsilon \rangle_\phi = \int_G f(h^{-1}g)\overline{\phi(g)}\, dg,$$

y

$$\langle f, L_h \epsilon \rangle_\phi = \int_G f(g)\overline{\phi(h^{-1}g)}\, dg$$

para $f \in C_c(G)$. Luego tenemos que

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\phi = \int_G \langle f_1, L_h \epsilon \rangle_\phi \overline{f_2(h)}\, dh$$

para toda $f_1, f_2 \in C_c(G)$. Ambos lados de la última igualdad son continuos en f_1, por lo tanto la igualdad anterior se cumple para toda $f_1 \in H_\phi$ y $f_2 \in C_c(G)$. En particular,

$$\begin{aligned}\langle \epsilon, f_2 \rangle_\phi &= \int_G \langle \epsilon, L_h \epsilon \rangle_\phi \overline{f_2(h)}\, dh = \overline{\langle f_2, \epsilon \rangle_\phi} \\ &= \int_G \phi(h)\overline{f_2(h)}\, dh\end{aligned}$$

para todo $f_2 \in C_c(G)$. Podemos concluir que $\phi(h) = \langle \epsilon, L_h \epsilon \rangle_\phi$ pp$h$. El lado derecho de la última igualdad se corresponde con una función continua de tipo positivo. □

Observación 2.1.4. De la demostración del teorema anterior podemos deducir las siguientes aseveraciones:

1. Una función continua de tipo positivo acotada ϕ es de la forma $\phi(g) = \langle \epsilon, \pi(g)\epsilon \rangle$ para toda $g \in G$, donde $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G, $\epsilon \in \mathcal{H}$.

2. El vector $\epsilon \in H_\phi$ es cíclico: si $\langle f, L_h \epsilon \rangle_\phi = 0$ para todo $h \in G$ entonces $f = 0$.

3. Dada una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ de G y $\epsilon \in \mathcal{H}$, la función $\phi(g) := \langle \epsilon, \pi(g)\epsilon \rangle$ es una función continua de tipo positivo. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_G \int_G f(g)\overline{f(h)}\langle \epsilon, \pi(g^{-1}h)\epsilon \rangle\, dgdh &= \int_G \int_G f(g)\overline{f(h)}\langle \pi(g)\epsilon, \pi(h)\epsilon \rangle\, dgdh \\ &= ||\pi(f)\epsilon||^2 \geq 0\end{aligned}$$

   para toda $f \in C_c(G)$.

4. Sea $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G con un vector cíclico v. Consideremos la función continua de tipo positivo $\phi(g) = \langle v, \pi(g)v \rangle_\mathcal{H}$, $g \in G$. Entonces $(\pi, \mathcal{H})$ es unitariamente equivalente a (L, H_ϕ), esto es, existe $A : \mathcal{H} \to H_\phi$ operador de entrelazamiento unitario que manda v en ϵ, donde ϵ es un vector cíclico de H_ϕ tal que $\phi(g) = \langle \epsilon, L_g \epsilon \rangle_{H_\phi}$.

5. Una función continua de tipo positivo es también de tipo positivo en el siguiente sentido: dado n natural, una n-upla $(g_1, \cdots, g_n) \in G$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \phi(g_i^{-1} g_j) \geq 0.$$

La recíproca es también cierta.

Lema 2.1.5. *Sea ϕ una función continua de tipo positivo. Entonces*

(a) $\phi(e) \geq 0$,

(b) $\phi = \phi^\sharp$ *donde* $\phi^\sharp(g) = \overline{\phi(g^{-1})}$,

(c) $|\phi(g)| \leq \phi(e)$ *para toda* $x \in G$.

En particular, una función continua de tipo positivo es siempre acotada por $\phi(e)$.

Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado complejo con espacio dual X^*. La topología débil sobre X, denotada por $\sigma(X, X^*)$, es la topología más débil que hace continuos a los funcionales de la forma $\mathrm{x} \mapsto \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}^* \rangle$, para todo $\mathrm{x}^* \in X^*$ (donde $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}^* \rangle = \mathrm{x}^*(\mathrm{x})$). Provisto con esta topología, X es un espacio vectorial topológico. Una sucesión $\{\mathrm{x}_n\}$ de elementos en X converge débilmente a $\mathrm{x} \in X$ si $\lim_{\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}} \langle \mathrm{x}_n, \mathrm{x}^* \rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}^* \rangle$.

La topología dada por la norma $||\cdot||$ es más fuerte que la topología débil, entonces un subespacio lineal de X débilmente cerrado es fuertemente cerrado. Además se puede probar que un subespacio lineal fuertemente cerrado en X es también débilmente cerrado.

Dotemos a X^* con la topología débil $\sigma(X^*, X)$. Esta topología es la más débil que hacen a las formas $\mathrm{x}^* \mapsto (\mathrm{x}, \mathrm{x}^*)$ continuas, con $\mathrm{x}^* \in X^*$, $\mathrm{x} \in X$. Notemos la diferencia entre la definición de $\sigma(X, X^*)$ y $\sigma(X^*, X)$. Si X es reflexivo ambas definiciones coinciden.

Sea $\mathcal{P}_0$ el conjunto de todas las funciones ϕ continuas de tipo positivo definidas sobre G que satisfacen $\phi(e) \leq 1$. Identificamos $\mathcal{P}_0$ con el subconjunto de $L^\infty(G)$ de funciones de tipo positivo tal que $||f||_\infty \leq 1$. Claramente $\mathcal{P}_0$ es débilmente cerrado, es decir, cerrado con la topología $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Alaoglu)**.** *Dado X un espacio vectorial normado la bola unitaria $S^* = \{\mathrm{x}^* : ||\mathrm{x}^*|| \leq 1\}$ es débilmente compacta en X^* con la topología débil $\sigma(X^*, X)$.*

Como $\mathcal{P}_0$ es débilmente cerrado, por Teorema de Alaoglu, $\mathcal{P}_0$ es débilmente compacto. Luego debido al Teorema de Kreim-Milman, $\mathcal{P}_0$ es un subconjunto compacto y convexo del espacio $L^\infty(G)$, el cual es localmente convexo con la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$. Luego $\mathcal{P}_0$ es la clausura de la cápsula convexa de sus puntos extremales.

El siguiente lema caracteriza el conjunto de funciones de tipo positivo extremales.

Lema 2.1.7. *Los puntos extremales de $\mathcal{P}_0$ se clasifican en:*

1. *La función cero,*

2. Las funciones $\phi \in \mathcal{P}_0$ con $\phi(e) = 1$, ϕ continuas que satisfacen la condición:

si $\phi = \phi_1 + \phi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$, entonces existe $\lambda \geq 0$ tal que $\phi_1 = \lambda\phi$, $\phi_2 = (1-\lambda)\phi$.

Las funciones de tipo (2) *son llamadas funciones de tipo positivo elementales o extremales.*

Recordemos que las funciones de tipo positivo continuas vienen dadas por entradas matriciales asociadas a representaciones unitarias. El siguiente teorema caracteriza las funciones de tipo positivo elementales mediante representaciones irreducibles.

Teorema 2.1.8. *Sea ϕ una función de tipo positivo continua definida sobre G tal que $\phi(e) = 1$. Entonces, la función ϕ es elemental si y sólo si la representación unitaria asociada de G en H_ϕ es irreducible.*

Demostración. Sea ϕ una función de tipo positivo elemental con $\phi(e) = 1$ y sea (L, H_ϕ) la representación construida anteriormente. Entonces $\phi(g) = \langle \epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi$, donde $g \in G$ y ϵ es un vector cíclico con $||\epsilon||_\phi = 1$.

Veremos que (L, H_ϕ) es una representación irreducible. Sea P una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado $\{0\} \subsetneq W$ de H_ϕ, tal que P conmuta con L_g para todo $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi(g) = \langle \epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi &= \langle P\epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi + \langle \epsilon - P\epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi \\
&= \langle P\epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi + \langle \epsilon - P\epsilon, L_g(\epsilon - P\epsilon)\rangle_\phi \\
&= \langle P\epsilon, L_gP\epsilon\rangle_\phi + \langle (I-P)\epsilon, L_g(I-P)\epsilon\rangle_\phi \\
&= \phi_1 + \phi_2,
\end{aligned}$$

donde $\phi_1 = \langle P\epsilon, L_gP\epsilon\rangle_\phi$ y $\phi_2 = \langle (I-P)\epsilon, L_g(I-P)\epsilon\rangle_\phi$ son funciones de tipo positivo con $P\epsilon$ y $(I-P)\epsilon$ vectores cíclicos en W y en $W^\perp$ respectivamente.

Como ϵ vector cíclico, $\{0\} \subsetneq W$ y $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$, entonces $\langle P\epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi = \lambda\langle \epsilon, L_g\epsilon\rangle_\phi$ para algún $\lambda \geq 0$ y para todo $g \in G$, y por lo tanto $P\epsilon = \lambda\epsilon$. Como ϵ es un vector cíclico, y L_g conmuta con P para todo g, $P = \lambda I$. Como $\{0\} \subsetneq W$, $\lambda \neq 0$ y por lo tanto $W = H_\phi$. Esto prueba la irreducibilidad de (L, H_ϕ).

Ahora, consideremos ϕ una función continua de tipo positivo tal que $\phi(e) = 1$, y sea (L, H_ϕ) irreducible. Supongamos que $\phi = \phi_1 + \phi_2$, para algunas $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$. Es claro que $\langle f, f\rangle_{\phi_1} \leq \langle f, f\rangle_\phi$ para toda $f \in C_c(G)$. Como

$$|\langle f_1, f_2\rangle_{\phi_1}|^2 \leq \langle f_1, f_1\rangle_\phi \langle f_2, f_2\rangle_\phi \quad \text{para } f_1, f_2 \in C_c(G),$$

se sigue que $\langle f_1, f_2\rangle_{\phi_1}$ define una forma sesqui-lineal acotada sobre H_ϕ. Luego, existe un operador autoadjunto $A \in End(H_\phi)$ tal que

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\phi_1} = \langle Af_1, f_2\rangle_\phi,$$

para toda $f_1, f_2 \in C_c(G)$, entonces

$$\langle AL_gf_1, f_2\rangle_\phi = \langle L_gf_1, f_2\rangle_{\phi_1} = \langle f_1, L_{g^{-1}}f_2\rangle_{\phi_1} = \langle Af_1, L_{g^{-1}}f_2\rangle_\phi = \langle L_gAf_1, f_2\rangle_\phi$$

para todo $g \in G$. Luego, por Lema de Schur tenemos que $A = \lambda I$ para algún $\lambda \geq 0$. Consecuentemente, $\langle f_1, f_2\rangle_{\phi_1} = \lambda\langle f_1, f_2\rangle_\phi$ para toda $f_1, f_2 \in C_c(G)$, y entonces $\phi_1 = \lambda\phi$. $\square$

Para finalizar esta sección caracterizaremos los caracteres de un grupo abeliano G vía funciones de tipo positivo elementales.

Teorema 2.1.9. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Las funciones elementales de tipo positivo son los caracteres de G.*

Demostración. Sea χ un caracter de G, entonces $\chi(e) = 1$ y

$$\int_G \int_G \chi(g^{-1}h) f(g)\overline{f(h)}\, dxdy = |\int_G \overline{\chi(g)} f(g) dg|^2 \geq 0 \quad f \in C_c(G),$$

entonces χ es de tipo positivo, y es fácil ver que H_χ es unidimensional. Luego (L, H_χ) es irreducible. Recíprocamente, sea ϕ una función de tipo positivo elemental. Entonces el espacio H_ϕ es unidimensional, $L_g = \chi(g)I$, donde χ es un caracter unitario de G. Más aún, $\phi(g) = \langle \epsilon, L_g \epsilon \rangle_\phi = \overline{\chi(g)}$ para toda $g \in G$, ya que $||\epsilon||_\phi = 1$. □

2.2. Pares de Gelfand

Sea G un grupo de Lie unimodular con medida de Haar dg, y sea K un subgrupo compacto de G con medida de Haar normalizada dk. Denotamos al espacio de funciones K-bi-invariantes de soporte compacto por

$$C_c^K(G) = \{f \in C_c(G) : f(k_1 g k_2) = f(g) \ \forall\ k_1, k_2 \in K, \forall\ g \in G\},$$

y al espacio de funciones K-bi-invariantes integrables por

$$L^1(G)^K = \{f \in L^1(G) : f(k_1 g k_2) = f(g) \ \forall\ k_1, k_2 \in K, \forall\ g \in G\}.$$

Los espacios $C_c^K(G)$ y $L^1(G)^K$ son subálgebras del álgebra de convolución $(L^1(G), *)$.

Definimos la proyección

$$P : C_c(G) \to C_c^K(G)$$
$$P(f)(g) = \int_K \int_K f(kgk')dk\, dk'.$$

Definición 2.2.1. El par (G, K) se dice que es un *par de Gelfand* si el álgebra de convolución $L^1(G)^K$ es conmutativa.

El ejemplo más simple de par de Gelfand es con G un grupo conmutativo y $K = \{e\}$.

Observación 2.2.2.

- Por proposición (1.3.9), el par (G, K) es de Gelfand si y sólo si para todo $g, g' \in G$ se tiene que $KgK\ Kg'K = Kg'K\ KgK$ (multiplicación de conjuntos).

Observación 2.2.3. En el caso en que G sea un producto semidirecto de la forma $G = K \ltimes N$ con K subgrupo compacto de $Aut(N)$, el espacio $L^1(G)^K$ se identifica con

$$L^1_K(N) = \{f \in L^1(N) : f(kn) = f(n)\ \forall k \in K\},$$

donde kn denota la acción de K sobre N. En efecto, sean 1 y e los elementos neutros de K y N respectivamente, y sea $f \in L^1(G)^K$,

$$\begin{aligned} (k,n) &= (1,n)(k,e), \qquad \text{entonces} \\ f(k,n) &= f((1,n)(k,e)) = f(1,n). \end{aligned}$$

Luego f es una función que depende sólo de la variable n, y la podemos identificar con la función $f_0(n) := f(1,n)$. Por otra parte,

$$f_0(kn) = f(1,kn) = f(k,kn) = f((k,e)(1,n)) = f(1,n) = f_0(n),$$

luego $f_0(n) = f_0(kn)$, entonces f_0 es una función definida sobre N invariante a izquierda por K.

Por lo tanto, podemos identificar a $f \in L^1(G)^K$ con una función de $L^1_K(N)$. La recíproca también es cierta.

Concluímos que el par $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand si y sólo si el espacio $L^1_K(N)$ es un álgebra conmutativa con el producto dado por la convolución. En tal caso, al par de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ lo denotaremos por (K, N).

Ejemplo 2.2.4. $(U(n) \ltimes \mathbb{R}^{2n}, U(n))$ es un par de Gelfand. En efecto, las funciones $U(n)$-bi-invariantes definidas sobre $\mathbb{R}^{2n}$ se identifican con las funciones $U(n)$-invariantes sobre $\mathbb{C}^n$, es decir con las funciones radiales o funciones definidas sobre S^1. Como $L^1(S^1)$ es un álgebra conmutativa con el producto dado por la convolución, el par $(U(n), \mathbb{R}^{2n})$ es de Gelfand.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual

$$(x,y) = x_1y_1 + \cdots x_ny_n, \tag{2.2}$$

donde $(x_1, \cdots, x_1)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Consideremos un subgrupo del grupo $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ de movimientos Euclideos de $\mathbb{R}^n$ (o grupo de movimientos rígidos) dado por el producto semidirecto $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$, donde $K = SO(n)$. Los elementos de G pueden escribirse como $g = (k,a)$ con $k \in K$, $a \in \mathbb{R}^n$. Este par puede ser visto como el producto de una rotación k y una traslación por a, que operan sobre $\mathbb{R}^n$ como

$$g \cdot x = kx + a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego el producto en G viene dado por

$$(k,a)(k',a') = (kk', ka' + a).$$

Las funciones sobre G que son K-bi-invariantes pueden identificarse con funciones f sobre $\mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$f(kx) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in K,$$

donde kx es el producto matriz vector entre k y x. Estas funciones son llamadas *funciones radiales*, y el producto de convolución de estas funciones se corresponde con el producto de convolución en $\mathbb{R}^n$. Luego $C_c^K(G)$ es un álgebra de convolución conmutativa, y por lo tanto $(K, \mathbb{R}^n)$ es un par de Gelfand.

Proposición 2.2.6. *Sea (G, K) un par de Gelfand. Entonces G es unimodular.*

Además existe un criterio muy útil para saber cuando un par (G, K) es de Gelfand. Para ello primero definimos involución.

Definición 2.2.7. Un automorfismo involutivo de G es un automorfismos θ tal que $\theta^2 = 1$.

Proposición 2.2.8. *Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G. Asumamos que existe un automorfismo involutivo continuo θ de G tal que*

$$\theta(g) \in Kg^{-1}K$$

para todo $g \in G$. Entonces (G, K) es un par de Gelfand.

Ejemplo 2.2.9. En este ejemplo probaremos con el criterio del par de Gelfand que el par $(K, \mathbb{R}^n)$ del Ejemplo (2.2.5) es un par de Gelfand. Recordemos que el producto en G viene dado por

$$(k, a)(k', a') = (kk', ka' + a).$$

Claramente $(k, a) = (k, 0)(1, a)$. Definimos el mapa θ por

$$\theta(k, a) := (k, -a).$$

Entonces θ es un automorfismo involutivo continuo de G y

$$\theta(k, a) = \theta((k, 0)(1, a)) = (k, 0)(1, -a) = (k, 0)(k, a)^{-1}(k, 0).$$

Luego $\theta(g) \in Kg^{-1}K$ para toda $g \in G$, y $(K, \mathbb{R}^n)$ es un par de Gelfand.

Ejemplo 2.2.10. Para $m \geq 2$, sea $G = SO(m)$, el grupo ortogonal especial real de la forma cuadrática (2.2). Este grupo actúa transitivamente en la esfera $S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$, y el estabilizador del punto $e_1 = (1, 0, \cdots, 1)$ es isomorfo a $K = SO(m-1)$.

Sea $x = (x_1, \cdots, x_m) = ge_1$ un elemento de S^{m-1}. Claramente podemos encontrar $k \in K$ tal que $kx = (x_1, 0, \cdots, 0, y)$ con $y^2 = x_2^2 + \cdots + x_m^2$. Sea A el subgrupo de G consistente de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & I_{m-2} & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Aquí I_{m-2} es la matriz identidad de tamaño $(m-2) \times (m-2)$ y 0 denota la matriz de entradas nulas de tamaño correspondiente.

Luego existe $a \in A$ tal que $a(x_1, 0, \cdots, 0, y) = e_1$. Por lo tanto $ge_1 = k^{-1}(a^{-1}e_1)$, o $g = k^{-1}a^{-1}l$ para algún $l \in K$. En otras palabras, $G = KAK$.

Definimos la involución σ por

$$\sigma(g) = JgJ, \quad g \in G,$$

donde J es la matriz diagonal
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$
Claramente σ deja a G invariante, y luego también a K, y además $\sigma(a) = a^{-1}$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\sigma(g) \in Kg^{-1}K$ para todo $g \in G$ y (G, K) es un par de Gelfand.

2.3. Funciones Esféricas asociadas a pares de Gelfand

A continuación definiremos las *funciones esféricas*. Su importancia radica en que estas funciones generalizan la noción de caracteres en los grupos compactos o abelianos a pares de Gelfand (G, K), descomponiendo el espacio $L^2(G)^K$.

Definición 2.3.1. Dado (G, K) un par de Gelfand se dice que $\Phi : G \to \mathbb{C}$ es una *función esférica* si es una función continua, K-bi-invariante tal que la aplicación
$$\chi_\Phi(f) = \int_G f(y)\Phi(y^{-1})\, dy$$
es un homomorfismo de álgebras, es decir,
$$\chi_\Phi(f * g) = \chi_\Phi(f)\chi_\Phi(g)\ \forall\ f, g \in C_c^K(G).$$

Ejemplo 2.3.2. Si $G = \mathbb{R}$ y $K = \{e\}$, las funciones esféricas son los mapas exponenciales
$$\phi(x) = e^{i\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Las funciones esféricas cumplen la siguiente propiedad llamada propiedad exponencial. En mucha bibliografía las funciones esféricas se definen por ser las funciones que satisfacen la propiedad exponencial.

Proposición 2.3.3. *Sea ϕ una función continua definida sobre G, K-bi-invariante tal que $\phi \neq 0$. Entonces ϕ es esférica si y sólo si para todo $g, h \in G$ se satisface*
$$\int_K \phi(gkh)dk = \phi(g)\phi(h),$$
donde dk es la medida de Haar definida sobre K. En particular, $\phi(e) = 1$.

Proposición 2.3.4. *Sea $\Phi \in C_c^K(G)$. Entonces Φ es una función esférica si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\Phi(e) = 1$.
- *Para toda $f \in C_c^K(G)$ existe $\chi(f) \in \mathbb{C}$ tal que $f * \Phi = \chi(f)\Phi$.*

Ejemplo 2.3.5. En este ejemplo computaremos las funciones esféricas del par de Gelfand $(K, \mathbb{R}^n)$ con $K = SO(n)$. En el Ejemplo (2.2.5) vimos que $(K, \mathbb{R}^n)$ es un par de Gelfand. Denotemos por Δ el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Este operador diferencial es invariante bajo la acción del grupo $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$, es decir, que dado $g \in G$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\Delta(L_g f) = L_g(\Delta f),$$

donde $(L_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, ya que el Laplaciano es invariante tanto por traslaciones como por rotaciones. Además, si f_1, f_2 son dos funciones de clase C^2 en $\mathbb{R}^n$ con soporte de f_1 compacto, entonces

$$\Delta(f_1 * f_2) = \Delta f_1 * f_2 = f_1 * \Delta f_2.$$

Teorema 2.3.6. *Sea ϕ una función K-bi-invariante definida sobre G, la cual podemos considerar por lo visto en el Ejemplo* (2.2.5) *como una función radial definida sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces ϕ es una función esférica si y sólo si:*

1. *ϕ es C^∞,*
2. *existe un número complejo λ tal que $\Delta\phi = \lambda\phi$,*
3. *$\phi(0) = 1$.*

Este resultado se puede generalizar para una gran clase de pares de Gelfand considerando el álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$, el álgebra de operadores diferenciales G-invariantes sobre $\mathfrak{g}$ e invariantes a izquierda por la acción de K, en lugar del operador Laplaciano. Dada la relevancia de este resultado daremos su demostración en este caso más simple, y luego enunciaremos el caso general.

Demostración. Supongamos primero que ϕ es una función esférica. Dada f una función radial y continua de soporte compacto, tenemos que

$$f * \phi = \chi(f)\phi, \tag{2.3}$$

donde

$$\chi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(-x) f(x) dg.$$

Si en particular consideramos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(f) \neq 0$, entonces de la ecuación (2.3) se deduce que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Más aún,

$$\Delta(f) * \phi = \chi(\Delta f)\phi = \chi(f)\Delta\phi,$$

entonces

$$\Delta\phi = \lambda\phi,$$

donde $\lambda = \frac{\chi(\Delta(f))}{\chi(f)}$.

Nota. Observemos que podemos elegir $f \in C_c(G)$ tal que $\chi(f) \neq 0$. En efecto, si $\chi(f) = 0$ para toda $f \in C_c(G)$, entonces $\chi \equiv 0$ y por lo tanto $\phi \equiv 0$, lo cual no puede ocurrir pues $\phi(e) = 1$.

Recíprocamente, sea ahora $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, radial y solución de la ecuación

$$\Delta\phi = \lambda\phi$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerando a ϕ como una función de $r = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, ϕ es una solución regular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\phi}{dr} = \lambda\phi,$$

y por lo tanto se puede ver que la función ϕ es un múltiplo de la función $J_\lambda(r)$ definida por

$$\begin{aligned} J_\lambda(r) &= \Gamma(\frac{n}{2})\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!\Gamma(k+\frac{n}{2})}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \\ &= \Gamma(\frac{n}{2})\left(\frac{\sqrt{\lambda}r}{2}\right)^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r), \end{aligned}$$

donde I_ν es la función de Bessel modificada de índice ν. Observemos que para diferentes $\lambda's$ obtenemos distintas soluciones. Asumamos además que $\phi(0) = 1$. Sea f una función radial sobre $\mathbb{R}^n$ continua y de soporte compacto. La función $\psi = f * \phi$ es también una función radial, de clase C^∞ y es solución de la ecuación

$$\Delta\psi = \lambda\psi.$$

Luego existe una constante C tal que $\psi = C\phi$, donde C depende de f. Luego tenemos que

$$C = \chi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(-x)f(x)dx,$$

entonces

$$f * \phi = \chi(f)\phi,$$

y por lo tanto ϕ es una función esférica, por proposición anterior. □

Sea s un número complejo y $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $||\xi|| = 1$. La función f definida por

$$f(x) = e^{s\langle\xi,x\rangle}$$

es una autofunción del operador Laplaciano,

$$\Delta f = s^2 f.$$

Consideremos la función ϕ_s como la integral de la función f,

$$\phi_s(x) := \int_{S^{n-1}} e^{s\langle\xi,x\rangle}d\sigma(\xi),$$

donde S^{n-1} es la esféra unitaria en $\mathbb{R}^n$ y σ la medida de superficie normalizada sobre S^{n-1}. La función ϕ_s es radial, C^∞ y satisface

$$\Delta\phi_s = s^2\phi_s, \quad \phi_s(0) = 1,$$

y por lo tanto ϕ_s es una función esférica. Recíprocamente, si ϕ es una función esférica entonces existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $\phi = \phi_s$, y $\phi_s = \phi_{-s}$.

Está probado en [32] que ϕ_s es una función esférica acotada si y sólo si $Re(s) = 0$, y que ϕ_s es de tipo positivo si y sólo si $Re(s) = 0$.

El Ejemplo (2.3.5) sugiere que existe una relación entre pares de Gelfand y operadores diferenciales invariantes por la acción de G, en este caso, el operador Laplaciano. Cuando G es un grupo de Lie, la noción de par de Gelfand (G, K) puede ser formulada a partir del álgebra de operadores diferenciales G-invariantes definidos sobre G/K, y la noción de función esférica puede ser formulada por ser autofunciones de esta álgebra.

Consideremos que G es un grupo de Lie conexo y K un subgrupo de Lie compacto, entonces K es un subgrupo de Lie de G y admite una única estructura G-invariante de variedad diferenciable. Un operador diferencial definido sobre G/K es G-invariante si conmuta con la acción de G actuando sobre $C^\infty(G/K)$. El conjunto de todos los operadores diferenciales G-invariantes en G/K forman un álgebra asociativa $D(G, K)$ sobre $\mathbb{C}$. Notemos que el álgebra $\mathcal{D}(G, K)$ coincide con el álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ de operadores diferenciales G-invariantes e invariantes a izquierda por K.

Existen tres resultados que serán relevantes en nuestro trabajo, expuestos en [35].

Teorema 2.3.7. *Sea G un grupo de Lie conexo y K un subgrupo compacto. Entonces (G, K) es par de Gelfand si y sólo si el álgebra $D(G, K)$ es conmutativa.*

Luego, cuando (G, K) es un par de Gelfand, es razonable referirnos a los autovalores simultaneos de $D(G, K)$.

Teorema 2.3.8. *Sea G un grupo de Lie conexo y K un subgrupo compacto tal que (G, K) es par de Gelfand y consideremos ϕ una función C^∞ y K-bi-invariante. Entonces, la función $\phi : G \to \mathbb{C}$ es esférica para el par (G, K) si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\phi(e) = 1$,*

2. *Si $D \in D(G, K)$ entonces $D\phi = \lambda(D)\phi$ para algún $\lambda(D) \in \mathbb{C}$.*

Notemos que el álgebra de autovalores simultaneos $\lambda : D(G, K) \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras asociativas.

Teorema 2.3.9. *Sea G un grupo de Lie conexo y K un subgrupo compacto tal que (G, K) es par de Gelfand. Sean ϕ_1, ϕ_2 dos funciones esféricas del par (G, K) con los mismos autovalores, es decir, $D\phi = \lambda(D)\phi_1$ y $D\phi_2 = \lambda(D)\phi_2$ para todo $D \in D(G, K)$. Entonces $\phi_1 = \phi_2$.*

Sea (G, K) un par de Gelfand. Veamos ahora la relación entre funciones esféricas y funciones de tipo positivo. Si ϕ es una función de tipo positivo y continua sobre G, tenemos asociada una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ tal que $\phi(x) = \langle \epsilon, \pi(x)\epsilon \rangle_\phi$ donde ϵ es un vector cíclico. Asumamos que $\phi(e) = 1$. La representación π es irreducible si y sólo si ϕ es elemental. Sea E la función característica sobre K. Entonces $\pi(E) := \int_K \pi(k)dk : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una proyección ortogonal, y llamamos $\mathcal{H}_E$ a su imagen. El espacio $\mathcal{H}_E$ coincide con el espacio de vectores K-fijos, $\mathcal{H}_K := \{v \in \mathcal{H} : \pi(k)v = v\}$. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.10. *Con la notación anterior. El vector cíclico ϵ pertenece a $\mathcal{H}_K$ si y sólo si ϕ es una función K-bi-invariante.*

Demostración. Supongamos que $\epsilon \in \mathcal{H}_K$. Entonces claramente ϕ es K-bi-invariante. Asumamos ahora que ϕ es K-bi-invariante. Entonces dado $g \in G, k \in K$ tenemos que

$$\langle \epsilon, \pi(g)\epsilon \rangle = \phi(g) = \phi(k^{-1}g) = \langle \epsilon, \pi(k^{-1})\pi(g)\epsilon \rangle = \langle \pi(k)\epsilon, \pi(g)\epsilon \rangle.$$

Como ϵ es un vector cíclico, tenemos que $\pi(k)\epsilon = \epsilon$ para todo $k \in K$, y luego $\epsilon \in \mathcal{H}_K$. □

Teorema 2.3.11. *Sea ϕ una función continua K-bi-invariante de tipo positivo tal que $\phi(e) = 1$. Entonces, ϕ es esférica si y solo si es elemental.*

Corolario 2.3.12. *Dos funciones esféricas de tipo positivo son iguales si y sólo si las representaciones unitarias e irreducibles asociadas son equivalentes.*

Dada una función continua ϕ de tipo positivo, entonces ϕ es esférica si y sólo si ϕ es K-bi-invariante y elemental. Por lo tanto una función ϕ es esférica de tipo positivo si y sólo si es de la forma

$$\phi(x) = \langle \pi(x)\varepsilon, \varepsilon \rangle$$

con π una representación unitaria irreducible y ε un vector cíclico dejado fijo por K.

Además, el siguiente resultado relaciona la definición de par de Gelfand con ciertas propiedades de representaciones unitarias e irreducibles.

Proposición 2.3.13. *El álgebra $C_c^K(G)$ es conmutativa si y sólo si para toda representación unitaria e irreducible $(\pi, \mathcal{H})$ de G el subespacio $\mathcal{H}_K$ es a lo sumo unidimensional.*

Entonces, tenemos las siguientes equivalencias de la definición de par de Gelfand (Criterio del Par de Gelfand).

(I) $(L^1(G)^K, *)$ es un álgebra conmutativa.

(II) Para toda $(\pi, \mathcal{H})$ representación unitaria e irreducible de G se cumple que $[\pi_{|_K} : 1] \leq 1$.

(III) Para cada $(\pi, \mathcal{H}) \in \widehat{G}$, $\dim(\mathcal{H}_K) \leqslant 1$.

El siguiente corolario resume la correspondencia existente entre funciones esféricas sobre G y representaciones de G cuando (G, K) es un par de Gelfand.

Corolario 2.3.14. *Sea (G, K) un par de Gelfand. Las funciones esféricas de tipo positivo de G están en correspondencia uno-a-uno con las clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de G cuyo espacio de vectores K-fijos $\mathcal{H}_K$ es no-trivial.*

2.4. Análisis armónico en pares de Gelfand

Denotamos por Σ al espacio de funciones esféricas de tipo positivo provisto con la topología $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Definimos la *transformada de Fourier* $\hat{f}$ de una función $f \in L^2(G)^K$ como la función definida por

$$\hat{f}(\phi) = \int_G f(g)\phi(g^{-1})\ dg, \quad \phi \in \Sigma.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\hat{f}$ es una función continua en Σ que se anula en el infinito, y $|\hat{f}(\phi)| \leq ||f||_1$.

(b) El mapa $f \mapsto \widehat{f}$ es una transformación lineal.

(c) $(\widehat{f_1 * f_2}) = \widehat{f_1}\ \widehat{f_2}$, para todo $f_1, f_2 \in L^1(G)^K$.

Observación 2.4.1. La transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ nos permite desarrollar el análisis armónico real. Para grupos no conmutativos, existe una transformada que generaliza la transformada de Fourier: la transformada de Gelfand. Dado A un álgebra de Banach conmutativa, definimos

$$\mathcal{M}_A := \{f \in A^* : f \text{ es multiplicativa}\},$$

y lo dotamos de la topología débil. El mapa $x \mapsto \widehat{x}$ donde $\widehat{x}(f) = f(x)$ es la *transformada de Gelfand*. Si consideramos el álgebra $A = C_c(G)^K$, entonces la transformada de Gelfand es una generalización de la transformada de Fourier.

Sea $\mathcal{V}(G)^\sharp$ el espacio de combinaciones complejas de funciones continuas, K-bi-invariantes de tipo positivo sobre G, y sea $\mathcal{V}^1(G)^\sharp = \mathcal{V}(G)^\sharp \cap L^1(G)$. El siguiente teorema es la fórmula de inversión para funciones K-bi-invariantes.

Teorema 2.4.2. *(Fórmula de inversión) Existe una única medida positiva ν sobre Σ tal que para toda $f \in \mathcal{V}^1(G)^\sharp$ se tiene que*

1. $\widehat{f} \in L^1(\Sigma, \nu)$,

2. $f(g) = \int_\Sigma \phi(g)\widehat{f}(\phi)\ d\nu(\phi), \quad g \in G.$

Debido a la propiedad exponencial de las funciones esféricas y a (2) del teorema anterior,

$$\begin{aligned}
f(g) &= \int_\Sigma \phi(g)\widehat{f}(\phi)\ d\nu(\phi) \\
&= \int_\Sigma \phi(g)\left(\int_G f(h)\phi(h^{-1})\ dh\right)\ d\nu(\phi) \\
&= \int_\Sigma \left(\int_G \left[\int_K \phi(gkh^{-1})dk\right] f(h)\ dh\right)\ d\nu(\phi) \\
&= \int_\Sigma \left(\int_G \phi(g\tilde{h}^{-1}) \left[\int_K f(\tilde{h}k)\ dk\right]\ d\tilde{h}\right)\ d\nu(\phi) \\
&= \int_\Sigma \left(\int_G \phi(g\tilde{h}^{-1}) f(\tilde{h})\ d\tilde{h}\right)\ d\nu(\phi) \\
&= \int_\Sigma (f * \phi)(g)\ d\nu(\phi).
\end{aligned}$$

Resumiendo tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.3. *Sea (G, K) un par de Gelfand y $f \in \mathcal{V}^1(G)^\sharp$. Sea ν la medida sobre Σ obtenida en el teorema anterior. Si $g \in G$, entonces la aplicación $\phi \mapsto f * \phi(g) \in L^1(\Sigma, \nu)$, y*

$$f(g) = \int_\Sigma f * \phi(g)\ d\nu(\phi). \tag{2.4}$$

Sea $[\pi_\phi] \in \widehat{G}$ la representación correspondiente a $\phi \in \mathcal{P}_0$. El espacio de Hilbert H_ϕ en el cual se realiza la representación tiene un vector K-fijo u_ϕ. Entonces,

$$f(g) = \int_\Sigma \langle \pi_\phi(f)u_\phi, \pi_\phi(g)u_\phi\rangle_{H_\phi}\ d\nu(\phi). \tag{2.5}$$

Además tenemos la fórmula de Plancherel. Sea ν la medida obtenida en el teorema anterior.

Teorema 2.4.4. *(Teorema de Plancherel) Para toda $f \in C_c^K(G)$ se tiene*

1. $\widehat{f} \in L^2(\Sigma, \nu)$,
2. $\int_G |f(g)|^2\ dg = \int_\Sigma |\widehat{f}(\phi)|^2\ d\nu(\phi) = \int_\Sigma ||\pi_\phi(f)u_\phi||^2_{H_\phi}\ d\nu(\phi)$.

Si extendemos la isometría $f \mapsto \widehat{f}$ de $C_c^K(G)$ a $L^2(G)^K$, obtenemos una isometría de $L^2(G)^K$ en $L^2(\Sigma, \nu)$. La medida ν es llamada *medida de Plancherel.*

Ejemplo 2.4.5. En este ejemplo encontraremos la medida de Plancherel para el par $(K, \mathbb{R}^n)$, donde $K = SO(n)$. En el Ejemplo (2.2.5) probamos que $(K, \mathbb{R}^n)$ es un par de Gelfand y luego encontramos el conjunto de funciones esféricas acotadas, cuyo conjunto coincide con el conjuto conformado por las funciones esféricas definidas positivas.

Sea f una función radial en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces la transformada de Fourier euclidea $\mathcal{F}f$ de f es de nuevo una función radial,

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Consideremos la transformada esférica

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_{2\pi s}(-x)dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi is\langle x,\xi\rangle}d\sigma(\xi)dx \\ &= \mathcal{F}f(s),\end{aligned}$$

donde $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$. La fórmula de inversión euclidea, establece que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ satisface que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y si f es continua en x, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy,$$

y entonces para f suficientemente regular, se tiene que

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)dx.$$

Para f suficientemente regular, f radial, usando cambio de variable a coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$ obtenemos

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \widehat{f}(s)s^{n-1}ds.$$

Luego la medida de Plancherel para este para el grupo de movimientos rígidos, con respecto a $SO(n)$ es

$$d\nu(s) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}s^{n-1}ds,$$

donde identificamos Σ con $[0,\infty)$ vía $s \leftrightarrow \phi_{2\pi is}$.

Daremos una motivación para la sección que sigue. Supongamos que hallamos la medida de Plancherel, es decir, que hallamos una medida positiva ν definida sobre Σ tal que si $f \in C_c^K(G)$, entonces

$$f(g) = \int_\Sigma \phi(g)\widehat{f}(\phi)\ d\nu(\phi),$$

donde $\widehat{f}(\phi) = \int_G f(g)\phi(g^{-1})\ dg$ y Σ es el conjunto de funciones esféricas definidas positivas. Entonces,

$$\begin{aligned}f(g) &= \int_\Sigma \phi(g)\left(\int_G f(h)\phi(h^{-1})\ dh\right)\ d\nu(\phi) &(2.6)\\ &= \int_\Sigma \phi(g)(f*\phi)(e)\ d\nu(\phi). &(2.7)\end{aligned}$$

Una motivación de tipo eurística, dice que (2.6) también vale para la distribución δ. Esto es,

$$\delta(g) = \int_{\Sigma} \phi(g)(\delta * \phi)(e)\ d\nu(\phi) = \int_{\Sigma} \phi(g)\ d\nu(\phi)$$

Entonces, dada $f \in C_c(G)$ arbitraria, tenemos que

$$\begin{aligned} f(g) &= (f * \delta)(g) = \int_G f(h) \left(\int_{\Sigma} \phi(h^{-1}g)\ d\nu(\phi) \right)\ dh \\ &= \int_{\Sigma} \left(\int_G f(h)\phi(h^{-1}g)\ dh \right)\ d\nu(\phi) \\ &= \int_{\Sigma} (f * \phi)(g) d\nu(\phi). \end{aligned}$$

La última fórmula

$$f(g) = \int_{\Sigma} (f * \phi)(g)\ d\nu(\phi) \tag{2.8}$$

es una fórmula de inversión para $f \in C_c(G)$. Además la ecuación (2.8) nos dice que la medida para la fórmula de inversión es la medida de Plancherel ν, que está soportada sobre Σ, el conjunto de funciones esféricas de tipo positivo, y que las proyecciones vienen dadas por $P(f) = f * \phi$ con $\phi \in \Sigma$. En las siguientes secciones desarrollaremos la teoría para probarlo formalmente.

2.4.1. Integral directa de representaciones

En esta parte del trabajo generalizaremos la descomposición de representaciones unitarias para el caso de grupos no compactos. La noción de integral directa para grupos no compactos reemplaza a la suma directa para grupos compactos, y se encuentra definida en [35].

Para ello primero recordemos la definición de suma directa de una cantidad finita de subespacios de Hilbert $\{(X_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_n)\}_{i=1}^n$ de X. Definimos

$$\langle (\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n), (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_n) \rangle = (\langle \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1 \rangle_1 + \cdots + \langle \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n \rangle_n).$$

La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre $\prod_{i=1}^n X_i$. Si además $(X_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_i})$ es un espacio de Hilbert para todo $i = 1, \cdots, n$, entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 2.4.6. Sean $X_1, \cdots, X_n$ subespacios lineales de un espacio vectorial X. El espacio $S = X_1 + \cdots + X_n$ es la suma directa algebraica de los subespacios X_i si el mapa

$$\Phi : \prod_{i=1}^n X_i \to S, \quad \Phi(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n) = \mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Si Φ es un isomorfismo que preserva normas, entonces $S = X_1 + \cdots + X_n$ es la suma directa topológica de los subespacios X_i.

Si Φ es un isomorfismo isométrico, entonces $S = X_1 + \cdots + X_n$ es la suma directa ortogonal de los subespacios X_i.

Teorema 2.4.7. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ una familia de subespacios vectoriales de un espacio de Hilbert de X separables, tal que $S = X_1 + \cdots + X_n$ es la suma algebraica de los subespacios X_i. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- *S es la suma directa topológica de los espacios X_i,*
- *Los mapas definidos por*

$$E_i(\mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n) = \mathrm{x}_i, \quad \mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n \in S, \ \mathrm{x}_i \in X_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

  definen funciones continuas para toda $i = 1, \ldots, n$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ sea $d_i = dim(X_i)$, $\mathcal{B}_i = \{{v_j}^i\}_{j=1}^{d_i}$ una base ortonormal de X_i. Definimos

$$s_j(i) = \begin{cases} {v_j}^i & 1 \leq j \leq d_i \\ 0 & d_i < j \end{cases}$$

Entonces:

1. $s_j : \{1, \cdots, n\} \to \bigcup_{i=1}^n X_i$.
2. $s_j(i) = {v_j}^i$ o ${s_j}^i = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, n$. Luego ${s_j}^i \in X_i$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, \cdots, n$.
3. $i \mapsto \langle s_j(i), s_k(i) \rangle_{X_i} = \langle {v_j}^i, {v_k}^i \rangle_{X_i} \in L^1(\{1, \cdots, n\})$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$.
4. X_i es la clausura del espacio generado por $\{{v_j}^i\}_{j \in \mathbb{N}}$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Consideremos ahora $v = v_1 + \cdots + v_n$ tal que $v_i \in X_i$. Podemos identificar a v con la aplicación v dada por

$$\mathrm{v}(i) = v_i = E_i(v).$$

Notemos que v satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{v} : \{1, \cdots, n\} \to \bigcup_{i=1}^n X_i$.
2. $\mathrm{v}(i) \in X_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$.
3. $i \mapsto \langle \mathrm{v}(i), s_k(i) \rangle_{X_i} = \langle v_i, {v_k}^i \rangle_{X_i} = \langle E_i(v), {v_k}^i \rangle_{X_i}$ es medible para todo $k \in \mathbb{N}$.
4. $i \mapsto \langle \mathrm{v}(i), s_k(i) \rangle_{X_i} = \langle v_i, {v_k}^i \rangle_{X_i} = \langle E_i(v), {v_k}^i \rangle_{X_i} \in L^1(\{1, \cdots, n\})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En este caso se puede ver que

$$E_i(v) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \mathrm{v}(i), {s_j}^i\rangle_{X_i}\, {s_j}^i,$$

y además, dado $v, w \in S$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, w_i\rangle_{X_i} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{v}(i), \mathrm{w}(i)\rangle_{X_i}.$$

La definición anterior se puede generalizar para una familia de espacios $\{H_\mathrm{y}\}_{\mathrm{y}\in Y}$, donde H_y es un espacio de Hilbert para todo $\mathrm{y} \in Y$ con $(Y, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. En el caso anterior, el conjunto de índices que consideramos es $Y = \{1, \cdots, n\}$ con la medida de contar. Además utilizamos de manera auxiliar una familia de aplicaciones $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Definamos ahora la integral directa de espacios de Hilbert.

Definición 2.4.8. Sea $(Y, \mathcal{M}, \tau)$ un espacio de medida. Para cada $\mathrm{y} \in Y$, sea H_y un espacio de Hilbert separable. Dada Γ una familia de índices, fijemos una familia de mapas $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ tales que $s_\alpha : Y \to \cup_\mathrm{y} H_\mathrm{y}$ satisfaciendo:

1. $s_\alpha(\mathrm{y}) \in H_\mathrm{y}$ ppy $\in Y$, para toda $\alpha \in \Gamma$,
2. $\mathrm{y} \mapsto \langle s_\alpha(\mathrm{y}), s_\beta(\mathrm{y})\rangle_{H_\mathrm{y}} \in L^1(Y)$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$,
3. H_y es la clausura del espacio generado por el conjunto $\{s_\alpha(\mathrm{y})\}_{\alpha\in\Gamma}$ ppy $\in Y$.

Entonces, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^2$, que denotamos por

$$\mathcal{H}^2 = \int_Y H_\mathrm{y}\, d\tau(\mathrm{y})$$

es el espacio vectorial de funciones $s : Y \to \bigcup_\mathrm{y} H_\mathrm{y}$ que satisfacen:

1. $s(\mathrm{y}) \in H_\mathrm{y}$ ppy $\in Y$,
2. $\mathrm{y} \mapsto \langle s(\mathrm{y}), s_\alpha(\mathrm{y})\rangle_{H_\mathrm{y}}$ es medible para toda $\alpha \in \Gamma$
3. $\mathrm{y} \mapsto \langle s(\mathrm{y}), s_\alpha(\mathrm{y})\rangle_{H_\mathrm{y}} \in L^1(Y)$ para toda $\alpha \in \Gamma$,

con producto interno

$$\langle s, s'\rangle := \int_Y \langle s(\mathrm{y}), s'(\mathrm{y})\rangle_{H_\mathrm{y}}\; d\tau(\mathrm{y}). \tag{2.9}$$

Dicho producto interno está bien definido, y $\mathcal{H}^2$ es un espacio de Hilbert. $\mathcal{H}^2 = \int_Y d\tau(\mathrm{y})$ es llamada la L^2-*integral directa* de $\{H_\mathrm{y}\}$.

La noción de L^2-integral directa de espacios de Hilbert puede generalizarse a L^p-integral directa de $\{H_y\}$ para $p \geq 1$, obteniendo un espacio $\mathcal{H}^p$ de Banach. La única condición que se debe modificar es (3), cambiando $\mathrm{y} \mapsto \langle s(\mathrm{y}), s_\alpha(\mathrm{y})\rangle_{H_\mathrm{y}} \in L^1(Y)$ para toda $\alpha \in \Gamma$ por $y \mapsto ||s(y)||_{H_y} \in L^p(Y)$, con

$$||s||_p = ||(y \mapsto ||s(y)||_{H_y})||_{L^p(Y,\tau)}. \tag{2.10}$$

Tenemos el siguiente resultado, que se encuentra en [35] página 76.

Lema 2.4.9. *La definición de norma dada por la ecuación* (2.10) *está bien definida y la integral directa $\mathcal{H}^p$ es un espacio de Banach. El espacio de Banach $\mathcal{H}^2$ dado por la definición anterior tiene la misma estructura de espacio de Banach que la dada por la definición 2.4.8 con el producto interno dado por* (2.9).

Sea $\{(\pi_\mathrm{y}, \mathcal{H}_\mathrm{y}) : \mathrm{y} \in Y\}$ una familia de representaciones de G tal que para cada $\alpha, \beta \in \Gamma$, $g \in G$, la función $\mathrm{y} \mapsto \langle \pi_\mathrm{y}(g)(s_\alpha(\mathrm{y})), s_\beta(\mathrm{y})\rangle_{\mathcal{H}_\mathrm{y}}$ es medible.

Definimos

$$\pi(g) : \bigcup_\mathrm{y} \mathcal{H}_\mathrm{y} \to \mathcal{H}^2, \quad \pi(g)(s)(\mathrm{y}) = \pi_\mathrm{y}(g)(s(\mathrm{y}))\,\text{para}\; s \in \mathcal{H}^2,\; s(\mathrm{y}) \in \mathcal{H}_\mathrm{y}$$

Si el homomorfismo de grupos resultante es continuo, es decir, una representación de G, entonces π es llamada la L^2-*integral directa de* $\{\pi_\mathrm{y}\}$, y lo denotamos como $\pi = \int_Y \pi_\mathrm{y}\, d\tau(\mathrm{y})$.

Ejemplo 2.4.10. Sea (G, K) par de Gelfand. Notemos que, debido a la fórmula de inversión, la familia $\{s_f\}_{f \in C_c^K(G)}$ satisface las hipótesis 1–4 de la definición de L^2-integral directa. En efecto,

1. $s_f(\phi) = \pi_\phi(f)u_\phi \in H_\phi$ pp$\phi \in \Sigma$, para toda $f \in C_c^K(G)$,
2. $\phi \mapsto \langle s_{f_1}(\phi), s_{f_2}(\phi)\rangle_{H_\phi} \in L^1(\Sigma)$ para todo $f_1, f_2 \in C_c^K(G)$.

   Sean $f_1, f_2 \in C_c^K(G)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle s_{f_1}(\phi), s_{f_2}(\phi)\rangle_{H_\phi}\, d\nu(\phi) &= \int_\Sigma \langle \pi_\phi(f_1)u_\phi, \pi_\phi(f_2)u_\phi\rangle_{H_\phi}\, d\nu(\phi) \\
&= \int_G f_1(g) \int_\Sigma \langle \pi(g)u_\phi, \pi_\phi(f_2)u_\phi\rangle_{H_\phi}\, d\nu(\phi)\, dg \\
&= \int_G f_1(g) \int_\Sigma \overline{\langle \pi(f_2)u_\phi, \pi_\phi(g)u_\phi\rangle_{H_\phi}}\, d\nu(\phi)\, dg \\
&= \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg \\
&= \langle f_1, f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty
\end{aligned}$$

   Por lo tanto $\phi \mapsto \langle s_{f_1}(\phi), s_{f_2}(\phi)\rangle_{H_\phi} \in L^1(\Sigma)$ para todo $f_1, f_2 \in C_c^K(G)$.

3. H_ϕ es la clausura del espacio generado por el conjunto $\{s_f(\phi)\}_{f \in C_c^K(G)}$ pp$\phi \in \Sigma$. u_ϕ vector cíclico, entonces $< \pi(g)u_\phi >_{g \in G}$ es denso en H_ϕ, luego $< \pi(f)u_\phi >_{f \in L^1(G)^K}$ también lo es.

LLamemos

$$\mathrm{H}^2(G,K) = \int_\Sigma H_\phi \, d\nu(\phi).$$

Por la fórmula de Plancherel, si $f \in L^2(G)^K$ entonces $s_f \in \mathcal{H}^2(G,K)$ y $||s_f||_{\mathcal{H}^2(G,K)} = ||f||_{L^2(G)^K}$.

Luego se puede ver que

$$L^2(G)^K \simeq \mathrm{H}^2(G,K) = \int_\Sigma H_\phi \, d\nu(\phi).$$

2.4.2. Transformada de Fourier en $L^1(G/K)$ y pares de Gelfand

Si (G,K) es un par de Gelfand, los Teoremas 2.4.2 y 2.4.4 permiten descomponer funciones de $L^1(G)^K$. Notemos que podemos identificar funciones de $L^1(G)^K$ con funciones definidas en $L^1(G/K)$ invariantes a izquierda por K. Queremos extender los resultados hallados para $L^1(G)^K$ y encontrar una expresión similar para funciones en $L^1(G/K)$. Para ello necesitamos definir una fórmula de inversión vectorial. Esta teoría se encuentra desarrollada en [35].

Sea $1 \leq p$. Consideremos la L^p-integral directa de los espacios de Hilbert $\{(H_\phi, \langle\cdot,\cdot\rangle_\phi)\}$ definidos por (2.1)

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(G,K) = \int_\Sigma H_\phi \; d\nu(\phi) \tag{2.11}$$

con secciones $s_f(\phi) = \pi_\phi(f)u_\phi$, $f \in C_c(G/K)$, y u_ϕ vector cíclico K-fijo de la función esférica de tipo positivo $\phi \in \Sigma$.

La transformada de Fourier vectorial definida sobre $C_c(G/K)$ es

$$\mathcal{F} : C_c(G/K) \to H^\infty(G,K), \quad \mathcal{F}(f)(\phi) = \pi_\phi(f)u_\phi \in H_\phi,$$

y satisface $||\mathcal{F}(f)||_{H^\infty(G,K)} \leq ||f||_{L^1(G/K)}$.

Sea $B(G/K)$ el conjunto de combinaciones lineales de funciones $\phi : G \to \mathbb{R}$ continuas de tipo positivo K-invariantes a derecha. Entonces $B(G/K) \cap L^1(G/K)$ es denso en $L^1(G/K)$. De acuerdo a [35] páginas 195-196, reemplazando en (2.5) $\pi_\phi(f)u_\phi$ por $[\mathcal{F}(f)](\phi)$, se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 2.4.11 (Fórmula de inversión vectorial)**.** *Sea (G,K) un par de Gelfand y ν la correspondiente medida de Plancherel definida sobre Σ. Si $f \in B(G/K) \cap L^1(G/K)$ entonces $\mathcal{F}(f) \in H^1(G,K)$ y*

$$f(g) = \int_\Sigma \langle \mathcal{F}(f)(\phi), \pi_\phi(g)u_\phi \rangle_{H_\phi} \; d\nu(\phi).$$

Teorema 2.4.12. *(Fórmula de Plancherel vectorial) Sea (G,K) un par de Gelfand y ν su correspondiente medida de Plancherel. Si $f \in L^1(G/K) \cap L^2(G/K)$ entonces $\mathcal{F}(f) \in H^2(G,K)$ con $||\mathcal{F}(f)||_{H^2(G,K)} = ||f||_{L^2(G/K)}$ y*

$$\mathcal{F} : L^1(G/K) \cap L^2(G/K) \to H^2(G/K)$$

se extiende por continuidad en $L^2(G/K)$ sobre $H^2(G,K)$.

El siguiente teorema probado en [35] da una caracterización de los pares de Gelfand a partir de la descomposición del espacio $L^2(G/K)$. Daremos una idea de una de las implicaciones utilizando la fórmula de inversión vectorial y luego daremos una segunda prueba que utiliza una herramienta muy poderosa, el Teorema del núcleo de Schwartz. Esta última prueba, si bien no es elemental, tiene la ventaja de poder extenderse al caso de K no compacto, por lo que será una herramienta muy importante en el último capítulo de este trabajo.

El siguiente lema será de utilidad para probar el teorema.

Lema 2.4.13. *Sea $(\rho, L^2(G/K))$ la representación regular a izquierda de G. Si*

$$A_\rho = \{T : L^2(G/K) \to L^2(G/K) : T \text{ es de entrelazamiento } \}$$

es un grupo conmutativo, entonces $(\rho, L^2(G/K))$ es libre de multiplicidad.

Demostración. Supongamos que ρ no es libre de multiplicidad, luego $\rho = \oplus_i \omega_i \oplus \pi \oplus \pi$ es la descomposición de $(\rho, L^2(G/K))$, donde $(\omega_i, W_i), (\pi, V)$ son representaciones irreducibles y $L^2(G/K) = \oplus_i W_i \oplus V \oplus V$. Sea $T \in A_\rho$, entonces $T_{|V\oplus V} \in A_{\pi\oplus\pi}$, pero $U(2) \subseteq A_{|\pi\oplus\pi}$. Luego A_ρ no es conmutativo. □

Teorema 2.4.14. *Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto. Entonces (G, K) es par de Gelfand si y sólo si la representación regular a izquierda de G sobre $L^2(G/K)$ es libre de multiplicidad.*

Demostración. (Prueba 1) Supongamos que (G, K) es un par de Gelfand, y sea A_ρ el álgebra de operadores de entrelazamiento asociados a la representación regular a izquierda $(\rho, L^2(G/K))$ de G. Siguiendo el Teorema 2.4.12, tenemos una L^2-integral directa G-invariante que es la descomposición de $L^2(G/K)=\int_\Sigma H_\phi \, d\nu(\phi)$, como se define en la ecuación (2.11). Esta es una descomposición primaria de $L^2(G/K)$.

Como π_ϕ, la representación asociado al espacio H_ϕ es irreducible, $A_{\pi_\phi} \simeq \mathbb{C}$ para todo $\phi \in \Sigma$. Como los $H_\phi' s$ son no equivalentes dos a dos, A_ρ es conmutativa. Luego por Lema 2.4.13, la representación regular a izquierda $(\rho, L^2(G/K))$ de G es libre de multiplicidad.

La recíproca se encuentra en Teorema 9.7.1 en [35]. □

Para dar la prueba 2, introducimos primero el *Teorema del núcleo de Schwartz*, el cual por su importancia en este trabajo amerita su propia sección. Dicha sección culmina con la prueba 2 del Teorema 2.4.14.

2.5. Teorema del Núcleo de Schwartz

Primero estudiaremos el Teorema del núcleo de Schwartz en $\mathbb{R}^n$, siguiendo [7], y luego estudiaremos su generalización para grupos de Lie no necesariamente conmutativos.

Dados $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, el producto tensorial

$$(u \otimes v)(x, y) = u(y)v(x),$$

pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Si consideramos $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, entonces el operador integral con núcleo ϕ definido por

$$\langle Tu, v\rangle = \langle \phi, u \otimes v\rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

es un operador bien definido de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ lineal y continuo, donde con la notación $\langle \phi, w\rangle$ entendemos la evaluación $\phi(w)$.

En este contexto, enunciamos y demostramos el Teorema del núcleo de Schwartz.

Teorema 2.5.1. *(Teorema del núcleo de Schwartz) Si $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es un operador lineal y continuo, entonces existe una única distribución $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ tal que*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle \phi, u \otimes v\rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Lema 2.5.2. *Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ es tal que $\langle \phi, u \otimes v\rangle = 0$, para toda $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, para toda $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\phi \equiv 0$.*

Demostración. (del Teorema del núcleo de Schwartz) La unicidad se obtiene del lema anterior.

Consideremos ahora $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ aproximaciones de la identidad en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Definimos las funciones

$$\phi_n(x, y) := \langle T(L_y(\varphi_n)), L_x(\psi_n)\rangle,$$

entonces $\phi_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ y convergen a una distribución ϕ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Sean $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\langle \phi, u \otimes v\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} v(x)\phi_n(x, y)u(y)\, dy\, dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \langle T(L_y(\varphi_n)), L_x(\psi_n)\rangle v(x)u(y)\, dy\, dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle T\left(u(y)\int_{\mathbb{R}^n} L_y(\varphi_n)\, dy\right), v(x)L_x(\psi_n)\, dx\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle T(u * \varphi_n), v * \psi_n\rangle \\
&= \langle Tu, v\rangle.
\end{aligned}$$

□

Para comprender mejor este resultado supongamos momentaneamente que Tu y ϕ son distribuciones funciones para todo $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\langle Tf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, y)f(x)g(y)\, dx\, dy.$$

Luego

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x)f(t)\, dt \qquad \text{pp}x \in \mathbb{R}^n.$$

Es decir, T es un operador integral con núcleo ϕ.

Observación 2.5.3. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ está contenido densamente en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^q(\mathbb{R}^m)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ para todo $1 \leq p, q < \infty$, entonces podemos pensar que el Teorema del núcleo de Schwartz vale para operadores lineales y continuos $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^m)$.

Pensemos ahora en operadores $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ invariantes por traslaciones, esto es,

$$L_x \circ T = T \circ L_x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5.4. *Si T es un operador lineal, continuo e invariante por traslaciones,*

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

entonces existe una única distribución $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tu = u * \Phi \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En este caso, la distribución núcleo ϕ está dada por $\phi(x, y) = \Phi(x - y)$.

Ahora generalizaremos el Teorema del núcleo de Schwartz para grupos de Lie. Tenemos el siguiente enunciado, que se encuentra en [9].

Teorema 2.5.5. *Sea G un grupo de Lie conexo y $T : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}'(G)$ un operador lineal continuo que satisface $L_g Tu = TL_g u$ para toda $u \in \mathcal{D}(G)$, y para todo $g \in G$. Entonces existe una única distribución $\Phi \in \mathcal{D}'(G)$ tal que*

$$Tu = u * \Phi \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{D}(G).$$

La recíproca también es cierta.

Ahora sí daremos la demostración 2 del Teorema 2.4.14.

Demostración. (Prueba 2) Supongamos que (G, K) es un par de Gelfand, y sea $(\rho, L^2(G/K))$ la representación regular izquierda de G.

Notemos que por Lema 2.4.13, basta probar que el álgebra A_ρ es conmutativa.

Sea $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de funciones C^∞ de soporte compacto, y $\mathcal{D}'(G/K)$ su dual dotado con la topología débil, es decir, $\Lambda_n \to \Lambda$ si y sólo si $\Lambda_n(\phi) \to \Lambda(\phi)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(G/K)$.

Notemos que $\mathcal{D}(G/K) \subseteq L^2(G/K)$, y que $L^2(G/K) \subseteq \mathcal{D}'(G/K)$. Por lo tanto, podemos pensar que si $T \in A_\rho$, entonces

$$T : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{D}'(G/K)$$

es un operador que conmuta con la acción de G.

Notemos además, que dada $f \in \mathcal{D}(G/K)$, podemos extenderla a una función K-invariante $\tilde{f}(g) = f(gK)$ para todo $g \in G$. Luego, por el Teorema del núcleo de Schwartz, existe $\phi \in \mathcal{D}'(G)$ K-bi-invariante tal que $\widetilde{Tf}(g) = (\tilde{f} * \phi)(g)$.

Como (G, K) es par de Gelfand, por un argumento de densidad de las funciones $C^\infty(G)$ en las distribuciones (que formalizaremos en el último capítulo), se prueba que

$$\tilde{A}_\rho := \{\tilde{T} : T \in A_\rho\}$$

es un grupo conmutativo. Luego A_ρ también lo es, y por lo tanto, la representación regular a izquierda $(\rho, L^2(G/K))$ es libre de multiplicidad.

Recíprocamente, supongamos que la representación regular a izquierda $(\rho, L^2(G/K))$ es libre de multiplicidad. Luego, por el Lema de Schur, A_ρ es un grupo conmutativo. Además, $\mathcal{D}(G, K) \subseteq A_\rho$, y por lo tanto, es conmutativo. Finalmente por Teorema 2.3.7, (G, K) es un par de Gelfand. □

Observación 2.5.6. De la Prueba 2 del teorema anterior podemos deducir el siguiente hecho:

$$L^2(G/K) = \int_\Lambda H_\lambda \, d\nu(\lambda),$$

donde los H_λ son espacios irreducibles no equivalentes dos a dos. Además, si definimos la proyección $P_\lambda : L^2(G/K) \to H_\lambda$, entonces P_λ conmuta con la acción de ρ. Por Teorema del núcleo de Schwartz, $P_\lambda f = f * \phi_\lambda$, con $\phi_\lambda \in \mathcal{D}'(G/K)$ para toda $f \in L^2(G/K)$. Consideremos $D \in D(G, K)$. Luego D conmuta con la acción de ρ, y por lo tanto $D : H_\lambda \to H_\lambda$. Luego $D \in A_{\rho_\lambda}$ donde ρ_λ es la representación $\rho_{|_{H_\lambda}}$. Por Lema de Schur, $D\phi_\lambda = s(\lambda)(D)\phi_\lambda$. Como esto vale para todo $D \in D(G, K)$, ϕ_λ resulta una función esférica. Por lo tanto, dada $f \in L^2(G/K)$, entonces $f = \int_{\lambda \in \Lambda} f * \phi_\lambda$, con $\Lambda \subseteq \Sigma$.

Capítulo 3

Análisis en el grupo de Heisenberg

El objetivo de este capítulo es descomponer el espacio $L^2(H_n)$ como una integral directa de espacios invariantes e irredudibles bajo la acción regular de $K \ltimes H_n$, donde K es un subgrupo de $Aut(H_n)$ tal que (K, H_n) es par de Gelfand.

La fórmula de inversión será la herramienta principal, y para obtener su formulación explícita es necesario hallar $\widehat{H_n}$, el conjunto de clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de H_n. Esta teoría fue desarrollada por Kirillov para grupos de Lie nilpotentes, y se encuentra en [35]. Daremos una descripción explicita de $\widehat{H_n}$. Luego veremos que para el grupo H_n podemos encontrar la fórmula de inversión y la descomposición de $L^2(H_n)$ vía análisis funcional clásico.

3.1. El grupo de Heisenberg

El grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional H_n es el grupo de Lie conexo y simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{h}_n$. Comenzamos definiendo $\mathfrak{h}_n$ como el conjunto de matrices de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t \in \mathbb{R}$$

con corchete $[A, B] = AB - BA$.

Con esta notación,

$$[(x, y, t), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})] = (0, 0, \langle x, \tilde{y}\rangle + \langle y, \tilde{x}\rangle), \tag{3.1}$$

donde $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

El centro unidimensional de $\mathfrak{h}_n$ es $\mathfrak{c}_n = \{(0, \cdots, 0, t) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \mathbb{R}\}$, y se puede ver que

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{h}_n \times \mathfrak{h}_n \to \mathfrak{c}_n. \tag{3.2}$$

Además, por (3.2) y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \tfrac{1}{2}[A, B] + \cdots),$$

tenemos que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & r \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde $r = t + \frac{1}{2}(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el grupo $H_n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ con el producto dado por:

$$(x, y, t)(x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' - \tfrac{1}{2}\left((x, y') - (x', y)\right)\right) \tag{3.4}$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ y $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Este grupo es llamado el *grupo de Heisenberg* $(2n + 1)$*-dimensional*, y se lo puede identificar con el grupo de matrices triangulares superiores vía el difeomorfismo:

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & t \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Si dotamos a H_n con la topología usual de matrices, H_n es un subespacio de $GL(2n + 1, \mathbb{C})$ cerrado, y por Teorema (1.2.1) es un grupo de Lie.

Como exp es un difeomorfismo de $\mathfrak{h}_n$ en H_n, podemos considerar cartas locales sobre H_n dadas por la función exp. Vía la identificación (3.5) podemos pensar que el mapa exp es el mapa identidad, y por abuso de notación denotamos por $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t)$ tanto a los elementos de H_n como a los de $\mathfrak{h}_n$, los cuales distinguiremos según el contexto.

En algunos casos, también identificaremos los elementos $(x, y, t) \in H_n$ con (z, t), $z \in \mathbb{C}^n$ con el producto de grupo

$$(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' - \frac{1}{2}Im(z, z')).$$

3.2. Representaciones del grupo de Heisenberg

Dada π una representación unitaria e irreducible de H_n, como $(0, \cdots, 0, t)$ está en el centro de H_n, $\pi(0, \cdots, 0, t)$ resulta un operador de entrelazamiento de π consigo misma y, por Lema de Schur $\pi(0, \cdots, 0, t) = \chi(t)I$, donde $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función continua que satisface

$$|\chi(t)| = 1 \text{ y } \chi(t_1)\chi(t_2) = \chi(t_1 + t_2);$$

es decir, χ es un caracter. Luego existe una única $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(t) = e^{i\lambda t}$. Por lo tanto

$$\pi(0, \cdots, 0, t) = e^{i\lambda t} I.$$

Si $\lambda = 0$, $\pi(0, \cdots, 0, t) = I$, es decir, $Z \subseteq Ker(\pi)$ donde Z es el centro de H_n y π induce una representación $\bar{\pi}$ de $H_n/Z \backsimeq \mathbb{R}^{2n}$ que resulta irreducible. Luego $\bar{\pi}$ es un caracter, esto es:

$$\bar{\pi}(x, y) = e^{i(\xi x + \eta y)} I$$

donde ξ y η están unívocamente determinados en $\mathbb{R}^n$. En este caso tenemos que,

$$\pi(x, y, t) = e^{i(\xi x + \eta y)} I, \text{ para } (x, y, t) \in H_n.$$

Para $\lambda \neq 0$ tenemos dos modelos que caracterizan todas las representaciones irreducibles π_λ de H_n.

3.2.1. Modelo de Schrödinger

En el *modelo de Schrödinger* la representación se realiza en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $\lambda = 0$, se tienen las representaciones descriptas arriba; si $\lambda \neq 0$, se tiene la representación de Schrödinger π_λ dada por:

$$[\pi_\lambda(x, y, t) f](\xi) = e^{i\lambda(t + \frac{1}{2} x.y + \xi.y)} f(\xi + x).$$

Esta teoría se encuentran desarrolladas en [9].

Observación 3.2.1. Si consideramos el morfismo $\Phi_a(x, y, t) = (ax, ay, at)$, entonces $\pi_\lambda(x, y, t) = \pi_1(\lambda y, \lambda x, \lambda t) = \pi_1 \circ \Phi_\lambda(x, y, t)$.

3.2.2. Modelo de Fock

En este modelo el espacio de Hilbert es

$$\mathcal{H}_\lambda = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ holomorfas tal que } \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-\frac{|\lambda|}{2}|z|^2} dz < \infty\}. \tag{3.6}$$

Definimos la representación

$$\pi_\lambda(z, t) f(u) = e^{\lambda(it - \frac{1}{2}\langle u, z\rangle - \frac{1}{4}|z|^2)} f(u + \bar{z}), \quad \text{si } \lambda > 0$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{C}$ y

$$\pi_\lambda(z, t) = \pi_{-\lambda}(\bar{z}, -t) \text{ si } \lambda < 0.$$

Considerando $\Phi(z, t) = (\bar{z}, -t)$, por la Proposición 1.4.3 se ve que π_λ es representación unitaria irreducible para $\lambda < 0$.

Teorema 3.2.2. *(Stone-von Neumann, [11]) Todas las representaciones unitarias e irreducibles de H_n que coinciden en el centro son equivalentes.*

Observación 3.2.3. Para λ fijo, la representación π_λ dada por el modelo de Schrödinger y el modelo de Fock son equivalentes, pues coinciden en el centro. Luego toda representación unitaria e irreducible es equivalente a una representación unidimensional ó a una representación de Schrödinger ó de Fock. Es decir, estos dos modelos describen a todas las representaciones unitarias irreducibles de H_n, salvo equivalencias.

3.3. Representaciones Unitarias Irreducibles de $K \ltimes H_n$

Sea $K \subseteq U(n)$ un subgrupo cerrado, entonces K actúa en H_n por

$$k \cdot (z,t) = (kz,t),$$

donde kz denota el producto de la matriz k por el vector z.

Sea $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ una representación irreducible de H_n. Dado $k \in K$ definimos

$$\pi_\lambda^k(z,t) = \pi_\lambda(kz,t).$$

El par $(\pi_\lambda^k, \mathcal{H}_\lambda)$ define una nueva representación unitaria de H_n.

Por el Teorema de Stone-von Neumman, $[\pi_\lambda]$ está determinada por la acción sobre el centro (que resulta invariante por transformaciones unitarias). Luego se cumple que para toda $k \in K, \pi_\lambda \sim \pi_\lambda^k$, y por lo tanto, para todo $k \in K$ existe un operador unitario de entrelazamiento $\varpi(k)$,

$$\varpi(k) : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda, \tag{3.7}$$

tal que ϖ entrelaza las representaciones π y π^k. En particular, $(\varpi, \mathcal{H}_\lambda)$ es una representación unitaria de K, llamada *representación metapléctica.*

Sea (τ, V_τ) una representación unitaria irreducible de K. Definimos

$$\sigma_\lambda(k,(z,t)) := \tau(k) \otimes \varpi(k)\pi_\lambda(z,t).$$

Un resultado probado por Mackey, que se encuentra por ejemplo en [35], asegura que la representación $(\sigma_\lambda, V_\tau \otimes \mathcal{H}_\lambda)$ define una representación unitaria e irreducible de $G = K \ltimes H_n$.

Para obtener representaciones de G a partir de los caracteres $\chi_{\xi,\eta}(x,y,t) = e^{ix.\xi + y.\eta}$ tomemos $K_{\xi,\eta} := \{k \in K : k.(\xi + i\eta) = \xi + i\eta\}$ el estabilizador de $\xi + i\eta$ en K. Denotemos por S al espacio cociente $K/K_{\xi,\eta}$. Es bien sabido que S admite una medida ds la cual es K-invariante a izquierda. Sea $H = (L^2(S), ds)$, para $\varphi \in H$ definimos

$$\sigma_{\xi,\eta}(h,z,t)\varphi(kK_{\xi,\eta}) = e^{iRe(\langle \xi + i\eta, kz\rangle)}\varphi(hkK_{\xi,\eta}),\ h,k \in K,\ (z,t) \in H_n,$$

donde $kK_{\xi,\eta}$ denota la clase de equivalencia de k en $K/K_{\xi,\eta}$ para todo $k \in K$.

Como $K_{\xi,\eta}$ fija $\xi + i\eta$, la representación $(\sigma_{\xi,\eta}, L^2(S))$ de $K \ltimes H_n$ está bien definida, y resulta unitaria e irreducible. Más aún $\sigma_{\xi,\eta} \sim \sigma_{\tilde{\xi},\tilde{\eta}}$ si y sólo si $\xi + i\eta$ y $\tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$ pertenecen a la misma órbita bajo la acción de K.

El siguiente teorema caracteriza $\widehat{K \ltimes H_n}$.

Teorema 3.3.1. *(Criterio de Mackey) Toda representación unitaria irreducible de $K \ltimes H_n$ es unitariamente equivalente a alguna de las anteriores.*

Dada la relación entre funciones esféricas de tipo positivo y entradas matriciales asociadas a una representación con un vector K-fijo, a nosotros nos interesan aquellas representaciones unitarias irreducibles de $K \ltimes H_n$ que tienen un vector dejado fijo por K.

Como $K \subseteq U(n)$ es un grupo compacto, toda representación unitaria sobre K puede descomponerse como una suma directa de representaciones irreducibles. En particular, podemos escribir la representación metapléctica como $\varpi = \bigoplus_{i\in\Lambda} \varpi_i$, con ϖ_i irreducibles y $\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{i\in\Lambda} W_i$, $\dim(W_i) < \infty$ para toda $i \in \Lambda$.

Proposición 3.3.2. *Supongamos que (τ, V) y (ω, W) son dos representaciones unitarias e irreducibles de K compacto, entonces $(\tau(k)\otimes\omega(k), V\otimes W)$ tiene un vector K-fijo si y sólo si $\tau \sim \omega'$, donde ω' es la representación dual de ω.*

Demostración. Primero observemos que el mapa h de $V \otimes W^*$ en $Hom(W, V)$ definido por

$$h(v \otimes \lambda)(u) := \lambda(u)v$$

para todo $v \in V$, $\lambda \in W^*$ y $u \in W$ es un isomorfismo.

Definimos una representación unitaria $(\rho, Hom(W, V))$ de K dada por

$$(\rho(k)T)(u) := \left(\tau(k) \circ T \circ \omega(k^{-1})\right)(u),$$

para $T \in Hom(W, V)$. Entonces se cumple que

$$\rho(k) \circ h = h \circ (\tau \otimes \omega')(k).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho(k) \circ h(v \otimes \lambda)(u) &= \tau(k)\left(h(v\otimes\lambda)(\omega(k^{-1})u)\right)\\
&= \tau(k)\left(\lambda(\omega(k^{-1})u)\ v\right)\\
&= \left(\lambda(\omega(k^{-1})u)\right)\tau(k)v\\
&= \left((\lambda\circ\omega(k^{-1}))u\right)\tau(k)v\\
&= (\omega'(k)\lambda(u))\tau(k)v\\
&= h(\tau(k)v \otimes \omega'(k)\lambda)(u)\\
&= h(\tau(k)\otimes\omega'(k)(v\otimes\lambda))(u)\\
&= h((\tau\otimes\omega')(k)(v\otimes\lambda))(u)\\
&= h\circ(\tau\otimes\omega')(k)(v\otimes\lambda)(u).
\end{aligned}$$

Luego $(\rho, Hom(W, V))$ tiene un vector K-fijo si y sólo si $(\tau\otimes\omega', V\otimes W^*)$ tiene un vector K-fijo.

Además, si suponemos que $T \in Hom(W, V)$ es un vector dejado fijo por K, se tiene que $\rho(k)T = T$ para todo $k \in K$, ó equivalentemente $\tau(k) \circ T = T \circ \omega(k)$. Luego T resulta operador de entrelazamiento entre τ y ω .

En particular, si $\tau \nsim \omega$, entonces $V \otimes W^*$ no tiene vector K-fijo. Si $\tau \sim \omega$, por Lema de Schur $V \otimes W^*$ tiene uno y sólo uno, salvo múltiplos, vectores dejados fijos por K. □

Esta proposición garantiza que la representación $(\tau\otimes\varpi_i', V_\tau\otimes W_i)$ tiene un vector K-fijo si y sólo si $\tau \sim \varpi_i$, y por lo tanto la representación $(\tau\otimes\varpi_i'\pi_\lambda, V_\tau\otimes H_\lambda)$ de $K \ltimes H_n$ definida por

$$\tau\otimes\varpi_i'\pi_\lambda(k, z, t) = \tau(k)\otimes\varpi'(k)\pi_\lambda(z, t)$$

tiene un y sólo un vector dejado fijo por K si y sólo si $\tau \sim \varpi_i$.

3.4. Criterio de Carcano

Sea $K \subseteq U(n)$ un subgrupo compacto de $Aut(H_n)$. Consideremos las representaciones de $K \ltimes H_n$ dadas por

$$\varpi'_i \otimes \varpi\, \pi_\lambda(k,z,t) = \varpi'_i(k) \otimes \varpi(k)\pi_\lambda(z,t)$$

donde $\varpi = \bigoplus_{i\in\Lambda} \varpi_i$ son las componentes irreducibles de la representación metapléctica ϖ. Por lo visto anteriormente, sabemos que $\varpi'_i \otimes \varpi_i$ tiene un vector K-fijo. Más aún:

Afirmación. Sea d_i la dimensión de W_i, $\{q_l\}_{l=1}^{d_i}$ una base ortonormal de W_i y $\{q_l^*\}_{l=1}^{d_i}$ la correspondiente base dual de W_i^*. Entonces,

$$v_i = \sum_{l=1}^{d_i} q_l^* \otimes q_l \tag{3.8}$$

es un vector K-fijo de la representación de K $(\varpi'_i \otimes \varpi_i, W_i^* \otimes W_i)$ para todo $i \in \Lambda$.

Demostración. Supongamos que $\varpi_i(k^{-1})q_j = \sum_{l=1}^{d} a_{l_j} q_l$ y $\varpi_i(k)q_l = \sum_{r=1}^{s} b_{r_l} q_r$, entonces

$$\begin{aligned}
\varpi'_i(k) \otimes \varpi_i(k)(\sum_l q_l^* \otimes q_l)(q_j \otimes 1) &= \sum_l (\varpi'_i(k)(q_l^*)(q_j) \otimes \varpi_i(k)(q_l)) \\
&= \sum_l (q_l^* \circ \varpi_i(k^{-1})(q_j) \otimes \varpi_i(k)(q_l)) \\
&= \sum_l q_l^*(\sum_{t=1}^{d} a_{t,j} q_t) \otimes (\sum_{r=1}^{s} b_{r,l} q_r) \\
&= \sum_{t,l} a_{t,j} q_l^*(q_t) \otimes \sum_{r=1}^{s} b_{r,l} q_r \\
&= \sum_l a_{l,j} 1 \otimes \sum_r b_{r,l} q_r \\
&= \sum_{l,r} a_{l,j} b_{r,l} (1 \otimes q_r) \\
&= 1 \otimes \sum_l a_{l,j} (\varpi_i(k)(q_l)) \\
&= 1 \otimes \varpi_i(k)(\varpi_i(k^{-1})(q_j)) \\
&= 1 \otimes q_j \\
&= q_j^*(q_j) \otimes q_j(1) \\
&= (\sum_l q_l^* \otimes q_l)(q_j \otimes 1)
\end{aligned}$$

como esto vale para todo q_j, se tiene que:

$$\varpi'_i(k) \otimes \varpi_i(k)(\sum_l q_l^* \otimes q_l) = \sum_l q_l^* \otimes q_l.$$

□

Se sigue que v_i es vector K-fijo de $\varpi_i' \otimes \varpi$, y si m_i es la multiplicidad de ϖ_i en ϖ, entonces $\varpi_i' \otimes \varpi$ tiene m_i vectores dejados fijos por K. Más aún, estos vectores son vectores K-fijo de la representación $\varpi_i' \otimes \varpi\pi_\lambda$.

Observación 3.4.1. Las representaciones unitarias e irreducibles de $K \ltimes H_n$ inducidas por caracteres se identifican con las representaciones de $K \ltimes \mathbb{R}^{2n}$. Por el criterio del par de Gelfand, $(K, \mathbb{R}^m)$ resulta par de Gelfand para toda m y para todo $K \subseteq U(n)$. Luego toda representación inducida por un caracter tiene a lo sumo un vector dejado fijo por K.

Por lo tanto se cumple el criterio de Carcano.

Teorema 3.4.2. *(Criterio de Carcano ver [4]) Sea $K \subseteq U(n)$ un subgrupo compacto de $Aut(H_n)$. El par (K, H_n) es de Gelfand si y sólo si la representación metapléctica ϖ es libre de multiplicidad, esto es, cada representación irreducible de K aparece a lo sumo una vez en la descomposición en irreducibles de ϖ.*

3.5. El Espectro de $K \ltimes H_n$

Sea (G, K) un par de Gelfand con medida de Haar dg.

Recordemos que, dada ϕ un función K-bi-invariante de tipo positivo, ϕ es esférica si y sólo si es extremal. Además, una función extremal K-bi-invariante es de la forma

$$\Phi(g) = \langle \pi(g)\varepsilon, \varepsilon \rangle \tag{3.9}$$

donde π una representación unitaria e irreducible y ε un vector K-fijo. Luego toda función esférica de tipo positivo ϕ es de la forma (3.9).

Retornando al par $(K \ltimes \mathbb{H}_n, K)$, si definimos

$$\sigma_{\lambda,i}(k, z, t) := \varpi_i'(k) \otimes \varpi(k)\pi_\lambda(z, t),$$

$$\phi_{\lambda,i}(k, z, t) := \langle \sigma_{\lambda,i}(k, z, t)v_i, v_i \rangle, \text{ con } v_i \text{ como en (3.8)}$$

entonces $\phi_{\lambda,i}$ resulta una función esférica de tipo positivo asociada a $K \ltimes \mathbb{H}_n$. El siguiente Lema da una expresión de $\phi_{\lambda,i}$ en términos de la traza de ciertos operadores asociados a π_λ.

Lema 3.5.1. *Con la notación anterior.*

$$\phi_{\lambda,i}(z, t) = tr\left(\pi_\lambda(z, t)_{|W_i}\right).$$

Demostración. Vamos a probar que sus conjungados coinciden:

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_{\lambda,i}(k,z,t)} &= \overline{\langle \sigma_{\lambda,i}(k,z,t)v_i, v_i\rangle} \\
&= \langle \sum_{l=1}^{d_i} q_l^* \otimes q_l, \sigma_{\lambda,i}(k,z,t)(\sum_{j=1}^{d_i} q_j^* \otimes q_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{l=1}^{d_i} q_l^* \otimes q_l, (1 \otimes \pi_\lambda(z,t))(\varpi_i'(k) \otimes \varpi(k))(\sum_{j=1}^{d_i} q_j^* \otimes q_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{l=1}^{d_i} q_l^* \otimes q_l, 1 \otimes \pi_\lambda(z,t)(\sum_{j=1}^{d_i} q_j^* \otimes q_j)\rangle \\
&= \sum_{l,i} \langle q_l^*, q_i^*\rangle \langle q_l, \pi_\lambda(z,t) q_i\rangle \\
&= \sum_{l,i} \delta_{l,i} \langle q_l, \pi_\lambda(z,t) q_i\rangle \\
&= \sum_{l} \langle q_i, \pi_\lambda(z,t) q_i\rangle \\
&= \overline{tr\left(\pi_\lambda(z,t)_{|W_i}\right)}
\end{aligned}$$

Luego, $\phi_{\lambda,i}(k,z,t) = tr\left(\pi_\lambda|_{W_i}\right)(k,z,t)$. □

3.6. Análisis armónico en el grupo de Heisenberg

En esta sección desarrollaremos el análisis armónico clásico en el grupo de Heisenberg H_n. Esta parte del trabajo está basada en el apunte de Fulvio Ricci [26].

3.6.1. Transformada de Fourier y fórmula de Plancherel

Dada (π, H) una representación unitaria de H_n podemos definir una nueva representación de $L^1(H_n)$ sobre el espacio de Hilbert H, que por abuso de notación también denotaremos por π. Esta representación está definida por:

$$\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle = \int_{H_n} f(x,y,t)\langle \pi(x,y,t)^{-1}\xi, \eta\rangle dx\, dy\, dt,$$

para todo $\xi, \eta \in H$, donde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denota el producto escalar de H. Definimos la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(H_n)$ como la colección de los operadores

$$\{\pi(f) = \hat{f}(\pi)\}_{\pi \in \widehat{H_n}}.$$

Dado H separable y $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, decimos que un operador $T : H \to H$ es Hilbert-Schmidt si $||T||_{HS} = (\sum_{i,j} |\langle Te_i, e_j\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Notemos que esta definición no depende de la base elegida, en efecto, dado U operador unitario se cumple que

$$||T||_{op} \leq ||T||_{HS}, \quad ||TU||_{HS} \leq ||T||_{op}||U||_{HS},$$

donde $||T||_{op} = sup_{||f||=1}|T(f)|$ es la norma clásica de operadores.

Denotamos por $HS(L^2(\mathbb{R}^n))$ al conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, y definimos $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$ como:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times) = \{\Phi : \mathbb{R}^\times \to HS(L^2(\mathbb{R}^n)) : \Phi \text{ medible y además } \int_{\mathbb{R}^\times} ||\Phi||_{HS}^2 |\lambda|^n d\lambda < \infty\},$$

donde $\Phi : \mathbb{R}^\times \to HS(L^2(\mathbb{R}^n))$ es medible si la función $\lambda \to \langle \Phi(\lambda)f, g\rangle$ es medible para cada f y g fijas en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$ es espacio producto interno con la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)}$ dada por:

$$\langle \Phi, \Psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)} = \int_{-\infty}^{\infty} tr(\Phi(\lambda)\Psi(\lambda)^*)|\lambda|^n \, d\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} ||\Phi\Psi^*||_{HS}|\lambda|^n d\lambda.$$

Lema 3.6.1. *Si $f \in L^1(H_n)$ entonces $\pi_\lambda(f)$ es un operador integral cuyo núcleo es*

$$K_\lambda(\xi,\eta) = f(\eta - \xi, -\widehat{\tfrac{\lambda}{2}(3\eta + \xi)}, \widehat{\lambda}).$$

Demostración. Sea $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(\pi_\lambda(f)\Phi)(\eta) &= \int_{H_n} f(x,y,t)\left(\pi_\lambda(x,y,t)^{-1}\Phi\right)(\eta)dx\,dy\,dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)\left(\pi_\lambda(-x,-y,-t)\Phi\right)(\eta)dx\,dy\,dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)e^{i\lambda(-t+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle - \langle\eta,y\rangle)}\Phi(\eta - x)dx\,dy\,dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)e^{-i\lambda t}e^{i\lambda\frac{1}{2}\langle x,y\rangle}e^{-i\lambda\langle\eta,y\rangle)}\Phi(\eta - x)dx\,dy\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y,t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda(\frac{1}{2}\langle x,y\rangle - \langle\eta,y\rangle)}\,dy\right)\Phi(\eta - x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y,\widehat{\lambda})e^{i\lambda\langle\frac{x}{2}-\eta,y\rangle}\,dy\right)\Phi(\eta - x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x, -\widehat{\lambda(\tfrac{x}{2}+\eta)}, \widehat{\lambda})\Phi(\eta - x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta - \xi, -\widehat{\tfrac{\lambda}{2}(3\eta + \xi)}, \widehat{\lambda})\Phi(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(\eta,\xi)\Phi(\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

usando la notación

$$f(x,\widehat{\tau},t) = f(x,\widehat{\cdot},t)(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y,t)e^{-\langle y,\tau\rangle}dy,$$

$$f(x,y,\widehat{\mu}) = f(x,y,\widehat{\cdot})(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,t)e^{-\langle t,\mu\rangle}dt.$$

Luego obtuvimos el resultado deseado. $\square$

Luego, $||\pi_\lambda(f)||_{HS} = \left(\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |K(\eta,\xi)|^2 d\mu(\eta)\, d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}$, con lo cual tenemos la siguiente fórmula de Plancherel.

Teorema 3.6.2. *(Fórmula de Plancherel para $L^1(H_n)$) Si $f \in L^1(H_n)\bigcap L^2(H_n)$, entonces $\pi_\lambda(f)$ es un operador de Hilbert-Schmidt pp$\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ y además:*

$$||f||_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty} ||\pi_\lambda(f)||_{HS}^2\ |\lambda|^n d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty} ||\hat{f}(\lambda)||_{HS}{}^2|\lambda|^n d\lambda,$$

donde estamos usando la notación $\widehat{f}(\lambda) := \widehat{f}(\pi_\lambda)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} ||\pi_\lambda(f)||_{HS}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |K(\eta,\xi)|^2 d\mu(\eta)\, d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(\eta-\xi, -\widehat{\tfrac{\lambda}{2}(3\eta+\xi)}, \widehat{\lambda})|^2 d\mu(\eta)\, d\mu(\xi) \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{cases} x = \eta - \xi \\ \tau = -\frac{\lambda}{2}(3\eta+\xi), \end{cases}$$

resulta $d\xi\, d\eta = |\lambda|^{-n} dx\, d\tau$.

Entonces

$$\begin{aligned} ||\pi_\lambda(f)||_{HS}^2 &= |\lambda|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,\widehat{\tau},\widehat{\lambda})|\, dx\, d\tau \\ &= (2\pi)^n|\lambda|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x,y,\widehat{\lambda})|^2\, dx\, dy \end{aligned}$$

por la fórmula de Plancherel en $\mathbb{R}^n$.

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} |f(x,y,\widehat{\lambda})|^2\, dx\, dy\, d\lambda = 2\pi\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} |f(x,y,t)|^2 < \infty,$$

y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times} |f(x,y,\widehat{\lambda})|^2\, dx\, dy < \infty.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||\pi_\lambda(f)||_{HS}^2|\lambda|^n\, d\lambda = (2\pi)^{n+1}\int_{H_n} |f(x,y,t)|^2\, dx\, dy\, d\lambda = (2\pi)^{n+1}||f||_2^2.$$

$\square$

Corolario 3.6.3. *Si* $f \in L^1(H_n)$ *satisface* $\pi_\lambda(f) = 0$ *para todo* $\lambda \neq 0$*, entonces* $f = 0$ *ppg* $\in H_n$.

La fórmula de Plancherel se puede extender a todo $L^2(H_n)$ como muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.6.4. *La transformada de Fourier* $f \to (2\pi)^{-\frac{(n+1)}{2}}\pi_\lambda(f)$ *se extiende a una isometría entre* $L^2(H_n)$ *y* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$ *con la medida* $|\lambda|^n d\lambda$*. Dicha isometría es sobre, esto es* $L^2(H_n) \simeq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$.

Demostración. Como $L^1(H_n) \cap L^2(H_n)$ es denso en $L^2(H_n)$, podemos extender la transformada de Fourier continuamente. Por (3.6.1), dado $K \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$ podemos reconstruir la función original f, con lo cual la transformada de Fourier es suryectiva. $\square$

Definición 3.6.5. A la medida $|\lambda|^n d\lambda$ dada por el teorema anterior, se le llama medida de Plancherel.

El Corolario (3.6.3) muestra que, si bien en el grupo de Heisenberg hay muchas representaciones no equivalentes a π_λ con $\lambda \neq 0$, estas representaciones son suficientes para distinguir funciones de $L^1(H_n)$, más aún, la medida de Plancherel le asigna medida cero a las representaciones π_λ con $\lambda = 0$.

Dada $\lambda \in \mathbb{R}$, decimos que π_λ es una representación de cuadrado integrable si las funciones $x \mapsto e_\lambda(u,v)(x) = \langle \pi_\lambda(x)u, v\rangle$ son funciones de $L^2(H_n/Z)$ para todo $u, v \in H$, donde la integración sobre H_n/Z se define como en (1.12). Denotamos por $\widehat{H_{n}}_{sq}$ al conjunto de representaciones de H_n de cuadrado integrable. En este caso, $\widehat{H_{n}}_{sq}$ coincide con el conjunto de representaciones π_λ con $\lambda \neq 0$. Este es un caso particular de un resultado que afirma que si un grupo de Lie nilpotente N admite representaciones de cuadrado integrable, entonces la medida de Plancherel está soportada en las clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de cuadrado integrable (ver Capítulo 5).

3.6.2. Fórmula de Inversión

Denotamos por $\mathcal{F}$ al operador tal que $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Como la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es una isometría, se cumple que:

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)} = \langle f, g\rangle_{L^2(H_n)} \; \forall f, g \in \; L^2(H_n).$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. Luego $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = I$.

Por definición, $\langle \mathcal{F}^*\Phi, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \Phi, \mathcal{F}f\rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)}$, luego si computamos $\mathcal{F}^*$ en un subespacio denso conveniente V de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^\times)$ se obtiene:

$$\mathcal{F}^*\Phi(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} tr(\Phi(\lambda)\pi_\lambda(x,y,t))|\lambda|^n d\lambda.$$

Podemos definir el espacio de Scwartz $\mathcal{S}(H_n)$ vía la identificación de H_n con $\mathbb{R}^{2n+1}$ (veremos esta definición más detalladamente para el caso de N grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo). Luego, utilizando argumentos de densidad obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6.6. *(Fórmula de inversión) Si $f \in \mathcal{S}(H_n)$ y π_λ son las representaciones unitarias e irreducibles dadas por el modelo de Schrödinger se tiene*

$$f(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} tr(\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(x,y,t))|\lambda|^n \, d\lambda. \tag{3.10}$$

Para $f \in L^2(H_n)$, se puede extender la fórmula de inversión por densidad. Se puede probar que esta fórmula es independiente de la representación elegida en su clase de equivalencias. En efecto, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ consideremos $(\pi_\lambda, H) \sim (\pi'_\lambda, H')$ dos representaciones unitarias e irreducibles. Entonces existe U operador de entrelazamiento unitario

$$U : H \to H'$$

que satisface $\pi_\lambda(x,y,t) = U \circ \pi'_\lambda \circ U^{-1}$. Lo primero que vamos a probar es que

$$\pi_\lambda(f) = U \circ \pi'_\lambda(f) \circ U^{-1}.$$

Sean $\xi, \eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\lambda(f)\xi, \eta \rangle &= \int_{H_n} f(x,y,t)\langle \pi_\lambda(x,y,t)\xi, \eta \rangle \, dx\, dy\, dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)\langle (U\pi'_\lambda(x,y,t)U^{-1})\xi, \eta \rangle \, dx\, dy\, dt \\
&= \int_{H_n} f(x,y,t)\langle (\pi'_\lambda(x,y,t)U^{-1})\xi, U^{-1}\eta \rangle \, dx\, dy\, dt \\
&= \langle \pi'_\lambda(f)U^{-1}\xi, U^{-1}\eta \rangle \\
&= \langle U\pi'_\lambda(f)U^{-1}\xi, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para toda ξ y η, se tiene que $\pi_\lambda(f) = U \circ \pi'_\lambda(f) \circ U^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}
f(x,y,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(x,y,t)v_j, v_j \rangle |\lambda|^n \, d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \langle U\pi'_\lambda(f)U^{-1}U\pi'_\lambda(x,y,t)U^{-1}v_j, v_j \rangle |\lambda|^n \, d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi'_\lambda(f)\pi'_\lambda(x,y,t)U^{-1}v_j, U^{-1}v_j \rangle |\lambda|^n \, d\lambda.
\end{aligned}$$

Como U es unitario, el conjunto $\{Uv_j\}$ es una base ortonormal de H', y por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}
f(x,y,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi'_\lambda(f)\pi'_\lambda(x,y,t)U^{-1}v_j, U^{-1}v_j \rangle |\lambda|^n \, d\lambda \\
&= f(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} tr(\pi'_\lambda(f)\pi'_\lambda(x,y,t))|\lambda|^n \, d\lambda.
\end{aligned}$$

Como trabajaremos con las representaciones dadas por el modelo de Fock, volveremos a la notación (z,t) para denotar a los elementos de H_n.

Sea $\{h_\alpha\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_\lambda$, entonces podemos escribir la fórmula de inversión como:

$$f(z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\sum_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\langle\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(z,t)h_\alpha,h_\alpha\rangle|\lambda|^n\,d\lambda$$

Para $u,v\in\mathcal{H}_\lambda$ definimos

$$e_\lambda(u,v)(z,t)=\langle\pi_\lambda(z,t)u,v\rangle, \tag{3.11}$$

la entrada matricial asociada a la representación π_λ correspondiente a los vectores u,v.

El siguiente lema será de gran utilidad para nuestros cálculos.

Lema 3.6.7. *Sea $(\pi_\lambda,\mathcal{H}_\lambda)$ una representación unitaria e irreducible de H_n. Si $\{h_\alpha\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_\lambda$, entonces para todo α tenemos que*

$$(f*e_\lambda(h_\alpha,h_\alpha))(z,t)=\langle\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(z,t)h_\alpha,h_\alpha\rangle,$$

donde e_λ es como en (3.11).

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(z,t)h_\alpha,h_\alpha\rangle &= \int_{H_n}f(z',t')\langle\pi_\lambda((z',t')^{-1}(z,t))h_\alpha,h_\alpha\rangle dz'dt'\\ &= \int_{H_n}f((z,t)(u,s)^{-1})\langle\pi_\lambda(u,s)h_\alpha,h_\alpha\rangle duds\\ &= \int_{H_n}f((z,t)(u,s)^{-1})e_\lambda(u,s)(h_\alpha,h_\alpha)duds\\ &= (f*e_\lambda(h_\alpha,h_\alpha))(z,t)\end{aligned}$$

y esto vale para todo $(z,t)\in H_n$. □

Luego podemos reescribir la fórmula de inversión como sigue:

$$f(z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\sum_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}(f*e_\lambda(h_\alpha,h_\alpha))(z,t)|\lambda|^n d\lambda.$$

Lema 3.6.8. *Sea $(\pi_\lambda,\mathcal{H}_\lambda)$ una representación unitaria e irreducible de H_n. Si $\{h_\alpha\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_\lambda$, entonces para todo α tenemos que*

$$f*e_\lambda(h_\alpha,h_\alpha)=\sum_\beta\langle f,e_\lambda(h_\beta,h_\alpha)\rangle e_\lambda(h_\beta,h_\alpha),$$

donde e_λ es como en (3.11).

Demostración. Por el Teorema de Representación de Riesz, para toda $(\pi, \mathcal{H}_\lambda)$ representación unitaria de H_n y todo (z,t) existe $\pi(z,t)^*$ tal que $\langle \pi(z,t)f, g\rangle = \langle f, \pi(z,t)^* g\rangle$ para toda $f, g \in \mathcal{H}_\lambda$.

Además, si $(\pi, \mathcal{H}_\lambda)$ es una representación unitaria, $\pi(z,t)^* = \pi(z,t)^{-1}$ para todo $(z,t) \in H_n$.

Sea $f \in L^2(H_n)$ y $(z,t) \in H_n$,

$$
\begin{aligned}
(f * e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha))(z,t) &= \int_{H_n} f((z,t)(z',t')^{-1}) e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha)(z',t')\, dz'dt' \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha)((u,s)(z,t))\, duds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle \pi_\lambda((u,s)(z,t)) h_\alpha, h_\alpha\rangle\, duds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle \pi_\lambda(u,s)\pi_\lambda(z,t) h_\alpha, h_\alpha\rangle\, duds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle \pi_\lambda(z,t) h_\alpha, \pi_\lambda(u,s)^* h_\alpha\rangle\, duds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle \sum_\beta \langle \pi_\lambda(z,t) h_\alpha, h_\beta\rangle h_\beta, \pi_\lambda(u,s)^* h_\alpha\rangle\, duds \\
&= \sum_\beta \int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle \pi_\lambda(z,t) h_\alpha, h_\beta\rangle \langle h_\beta, \pi_\lambda(u,s)^* h_\alpha\rangle\, duds \\
&= \sum_\beta \left(\int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) \langle h_\beta, \pi_\lambda(u,s)^{-1} h_\alpha\rangle\, duds \right) \langle \pi_\lambda(z,t) h_\alpha, h_\beta\rangle \\
&= \sum_\beta \left(\int_{\mathbb{H}_n} f((u,s)^{-1}) e_\lambda(h_\alpha, \hat{h_\beta)}(u,s)^{-1})\, duds \right) e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)(z,t) \\
&= \sum_\beta \langle f, e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\rangle e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)(z,t),
\end{aligned}
$$

y esto se cumple para todo $(z,t) \in \mathbb{H}_n$. □

Usando el lema anterior, obtenemos que

$$
f(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\rangle \left(e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\right)(z,t) |\lambda|^n\, d\lambda.
$$

Uno de nuestros resultados originales es obtener una descomposición de la representación regular a izquierda de $K \ltimes H_n$ en $L^2(H_n)$ en componentes irreducibles.
Recordemos que $\mathcal{H}_\lambda = \oplus_{i\in\Lambda} W_i$ es la descomposición de la representación metapléctica ϖ en subespacios irreducibles como K-modulo. Sea $d_i := \dim(W_i)$ y sea $\mathcal{B}_i = \{h^i_\alpha\}_{\alpha=1}^{d_i}$ BON de

W_i para todo i. Entonces $\mathcal{B} = \cup_{i\in\Lambda}\mathcal{B}_i$ es una base de $\mathcal{H}_\lambda$. Luego podemos escribir la fórmula de inversión

$$\begin{aligned}
f(z,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * e_\lambda(h_\beta, h_\beta))(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\alpha=1}^{d_i} \int_{-\infty}^{\infty} (f * e_\lambda(h^i_\alpha, h^i_\alpha))(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\alpha=1}^{d_i} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(z,t)h^i_\alpha, h^i_\alpha\rangle |\lambda|^n d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\alpha=1}^{d_i} \int_{-\infty}^{\infty} (f * e^i_\lambda)(h^i_\alpha, h^i_\alpha)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f * tr(\pi^i_\lambda)\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f * \phi_{\lambda,i}\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda
\end{aligned}$$

donde $e^i_\lambda(h^i_\alpha, h^i_\alpha)(z,t) = \langle(\pi^i_\lambda(z,t)h^i_\alpha, h^i_\alpha\rangle$, y $\pi^i_\lambda = \pi_{\lambda_{|W_i}}$. Por lo tanto tenemos que

$$f(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{i\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f * \phi_{\lambda,i}\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda. \tag{3.12}$$

Si (K, H_n) es un par de Gelfand, por Teorema 2.4.14 la descomposición

$$L^2(H_n) = \int_\Omega H_\kappa \, d\mu(\kappa)$$

en componentes irreducible es libre de multiplicidad. Más aún, en la Observación (2.5.6) probamos que si $P_\kappa : L^2(G/K) \to H_\kappa$ es el operador proyección, entonces $P_\kappa f = f * \phi_\kappa$, donde ϕ_κ es una función esférica extremal, y por lo tanto, $\Omega \subseteq \Sigma$.

Teorema 3.6.9. *Sea $H_{\lambda,j}$ el espacio de Hilbert generado por $\{e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\}$ donde $h_\alpha \in \mathcal{B}_j$ y $h_\beta \in \mathcal{B}$, con producto interno $\langle\varphi,\psi\rangle_{\lambda,j} := \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z,0)\overline{\psi(z,0)}dz$. Entonces, la acción regular de $K \ltimes H_n$ se descompone como una integral directa de componentes irreducibles por*

$$L^2(H_n) = \sum_{j\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\lambda,j} \, |\lambda|^n \, d\lambda.$$

Más aún, el espacio de Hilbert $H_{\lambda,j}$ es primario y equivalente a $(\dim W_j)\,\mathcal{H}_\lambda$ como H_n-módulo.

Demostración. La fórmula de inversión para una función Schwartz f en H_n está dada por

$$f(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} tr\left(\pi_\lambda(z,t)\,\pi_\lambda(f)\right) |\lambda|^n \, d\lambda.$$

Más aún,

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\pi_\lambda(f)\|_{HS}^2 |\lambda|^n \, d\lambda = \sum \int_{-\infty}^{\infty} |\langle f, e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\rangle|^2 |\lambda|^n \, d\lambda$$

donde $\|\cdot\|_{HS}$ denota la norma Hilbert-Schmidt, y la suma corre sobre $h_\alpha, h_\beta \in \mathcal{B}$. Vimos que $\langle \pi_\lambda(z,t)\, \pi_\lambda(f)\, h, h'\rangle = (f * e_\lambda(h, h'))(z,t)$, entonces

$$\begin{aligned} f(z,t) &= \sum_{j\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{h_\alpha \in \mathcal{B}_j} (f * e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha))(z,t) |\lambda|^n \, d\lambda \\ &= \sum_{j\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (f * \phi_{\lambda,j})(z,t) |\lambda|^n \, d\lambda. \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (3.12). También vimos que

$$f * e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{h_\beta \in \mathcal{B}} \langle f, e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\rangle_{L^2(H_n)} e_\lambda(h_\alpha, h_\beta). \tag{3.13}$$

Por (3.13) se sigue que $f * e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha) \in H_{\lambda,j}$ y $||f * e_\lambda(h_\alpha, h_\alpha)||_{\lambda,j}^2 = \sum_{h_\beta\in\mathcal{B}} |\langle f, e_\lambda(h_\alpha, h_\beta)\rangle|^2$, para toda $h_\alpha \in \mathcal{B}_j$. Luego obtenemos que la proyección ortogonal $Q_{\lambda,j}(f) = f * \phi_{\lambda,j}$ mapea $L^2(H_n)$ sobre $H_{\lambda,j}$, $H_{\lambda,j}$ es irreducible, y por (3.13) $\|f\|^2 = \sum_{j\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \|Q_{\lambda,j} f\|_{\lambda,j}^2 |\lambda|^n \, d\lambda$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

3.7. Ejemplos conocidos

En esta sección veremos cómo calcular funciones esféricas para algunos $K \subseteq Aut(H_n)$ concretos.

Ejemplo 3.7.1. Si consideramos el grupo $K = U(n)$ actuando sobre H_n de la forma

$$k \cdot (z,t) = (k.z, t),$$

entonces $K \subseteq Aut(H_n)$ es un compacto maximal. Siempre supondremos $K \subseteq U(n)$.

Consideremos (K, H_n) par de Gelfand. En [4] se probó que existen dos clases de funciones esféricas:

1. Tipo 1: Están parametrizadas en pares (λ, W_j), donde λ es un número real no nulo. Estas provienen de las representaciones de H_n infinitamente dimensionales y las denotamos por $\phi_{\lambda,j}(z,t)$. Se puede ver que estas funciones satisfacen

$$\phi_{\lambda,j}(z,t) = \phi_{1,j}(\lambda^{\frac{1}{2}} z, \lambda t), \quad \text{si } \lambda > 0, \tag{3.14}$$

$$\phi_{\lambda,j} = \phi_{|\lambda|,j} \quad \text{si } \lambda < 0. \tag{3.15}$$

Por lo tanto, para los cálculos, basta encontrar $\phi_{1,j}$.

2. Tipo 2: Este tipo de funciones esféricas provienen de las representaciones unidimensionales de H_n, y están parametrizadas en $\mathbb{C}^n/K$, el espacio de K-órbitas. Más aún, si η_w y $\eta_{w'}$ son dos funciones esféricas asociadas a dos representaciones unidimensionales, entonces $\eta_w = \eta_{w'}$ si y sólo si w y w' son equivalentes.

Las funciones esféricas de tipo 2 son *no-genéricas*, es decir, tienen medida de Plancherel nula, por lo cual estamos interesados sólo en las de primer tipo.

¿Cómo construimos estas funciones esféricas?

Seguiremos la construcción hecha en [4]. Dado un par de Gelfand (K, H_n), la representación metapléctica ϖ induce una descomposición en espacios irreducibles de $\mathcal{H}_\lambda$ como K-módulo

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{j\in\Lambda} W_{\lambda,j}.$$

Asumamos $\lambda = 1$ y denotemos por $\mathcal{P}(V)^{\mathbb{R}}$ al álgebra de polinomios reales K-invariantes. Entonces está probado en [4] que existe una base canónica $\{p_j\}_{j\in\Lambda}$ del espacio vectorial $\mathcal{P}(V)^{\mathbb{R}}$, $p_j \in W_j := W_{j,1}$, tal que la sucesión $\{q_j\}_{j\in\Lambda}$ es obtenida de $\{p_j\}_{j\in\Lambda}$ aplicando el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{h_{1,j} \in \mathcal{B}\}$ con respecto de la medida $e^{-\frac{1}{4}|v|^2}dv$, y normalizandolos para que satisfagan $q_j(0) = 1$.

Las funciones esféricas asociadas al par (K, H_n) son de la forma

$$\phi_{1,j}(z,t) = e^{it} q_j(z) e^{-\frac{1}{4}|z|^2}.$$

De la igualdad (3.14) obtenemos las funciones esféricas para $\lambda > 0$,

$$\phi_{\lambda,j}(z,t) = e^{i\lambda t} q_j(\lambda^{\frac{1}{2}} z) e^{-\frac{1}{4}\lambda|z|^2}.$$

Las funciones esféricas $\phi_{\lambda,j}$ con $\lambda < 0$ se obtienen usando (3.15).

Analicemos los casos $K = T_n$ y $K = U(n)$. Consideremos el toro T_n,

$$T_n := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} : \theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notemos que por ser T_n abeliano, se descompone en subespacios unidimensionales de la forma

$$T_n = \bigoplus_{r=1}^{n} e^{i\theta_r}\mathbb{C}.$$

Luego la representación metapléctica se descompone libre de multiplicidad, y por lo tanto (T_n, H_n) es un par de Gelfand.

Los correspondientes polinomios invariantes h_α son de la forma

$$h_\alpha(z,t) = \tfrac{|z|^{2\alpha}}{2^\alpha \alpha!}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

y las funciones esféricas las describimos en la siguiente proposición.

Proposición 3.7.2. *Las funciones esféricas del par (T_n, H_n) son de la forma*

$$\phi_\alpha(z,t) = e^{it}e^{-\frac{1}{4}|z|^2}\prod_{j=1}^{n} L_{\alpha_j}(\tfrac{1}{2}|z_j|^2),, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

donde $L_k(x) = \sum_{j=o}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-x)^j}{j!}$ es el k-ésimo polinomio de Laguerre de orden 0.

Para el caso $K = U(n)$, los espacios irreducibles de la representación metapéctica actuando sobre $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ son los polinomios homogéneos $\mathcal{P}_j(\mathbb{C}^n)$ con base ortonormal

$$\{\tfrac{w^\alpha}{\sqrt{2^m\alpha!}} : |\alpha| = m\}.$$

Las correspondientes funciones esféricas son

$$\phi_m(z,t) = e^{it}e^{-\frac{1}{4}|z|^2}L_m^{(n-1)}(\tfrac{1}{2}|z|^2),$$

donde $L_m^{(n-1)}(x) = (n-1)!\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-x)^j}{(j+n-1)!}$.

El polinomio $L_m^{(n-1)}$ es el m-ésimo polinomio de Laguerre generalizado de orden $(n-1)$.

Otra clase de funciones especiales que aparecen relacionadas a las funciones esféricas del par $(U(n), H_n)$ son las funciones de Bessel .

Acerca de los polinomios de Laguerre: (ver [2])

Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales respecto del peso e^{-x}. El polinomio n-ésimo de Laguerre (de orden 0) surge de resolver la ecuación diferencial

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Desarrollando a y en series de potencias se obtiene una relación de recurrencia

$$a_{k+1} = \tfrac{k-n}{(k+1)^2}a_k, \quad y(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k.$$

Se puede ver, que cuando n es un numero natural, se anulan todos los coeficientes mayores e iguales a n. Luego una de las soluciones es un polinomio de grado menor o igual a n, llamado n-ésimo polinomio de Laguerre L_n.

El n-ésimo polinomio de Laguerre es de la forma

$$L_k(x) = \sum_{j=o}^{k}\binom{k}{j}\tfrac{(-x)^j}{j!}.$$

Los polinomios de Laguerre generalizados son una familia de polinomios ortogonales respecto del peso $x^{-m}e^{-x}$. Estos polinomios L_m^n se obtienen a partir de la resolución de la ecuación diferencial

$$xy''(x) + (m+1-x)y'(x) + ny(x) = 0.$$

Luego se tiene que $L_m^{(0)} = L_m$ y la fórmula para los polinomios de Laguerre generalizados es

$$L_m^{(n-1)}(x) = (n-1)! \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \tfrac{(-x)^j}{(j+n-1)!}.$$

Nota. Familias conocidas de polinomios y funciones especiales puede definirse a partir de pares de Gelfand (G, K). Por ejemplo, los polinomios de Legendre son funciones esféricas asociadas al par (G, K), donde G es el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ y K el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^2$. Las funciones de Bessel surgen al considerar el plano de dimensión dos como el cociente entre el grupo de movimientos rígidos del plano y el grupo de rotaciones.

Capítulo 4

Teoría general de álgebras de Lie

En este capítulo denotaremos a las álgebras de Lie por $\mathfrak{g}$. Dicha álgebra puede ser real o compleja. Cuando $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie real, denotaremos por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su complexificación, y si denotamos por $\mathfrak{g}$ a un álgebra de Lie compleja denotaremos por $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ a su forma real. En este capítulo nos basamos en [16] y [19].

4.1. Álgebras de Lie nilpotentes, solubles y semisimples

Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie finitamente dimensional, definimos recursivamente la serie central ascendente $\mathfrak{g}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ asociada a $\mathfrak{g}$ como la cadena de conmutadores

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots,\ \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

Cada $\mathfrak{g}^k$ es un ideal en $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}^{k-1}$ para todo k natural. Decimos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *soluble* si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^r = 0$.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos la serie central descendente como una cadena de subálgebras construida de la siguiente forma

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$$

para todo k natural. Todas las subálgebras $\mathfrak{g}_k$ son ideales de $\mathfrak{g}$ que verifican

$$\mathfrak{g}_k \subseteq \mathfrak{g}_{k-1}.$$

Definición 4.1.1. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}_r = 0$.

Es fácil ver que un álgebra de Lie nilpotente no nula tiene centro no nulo, y que $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}_k$, y por lo tanto, un álgebra de Lie nilpotente es soluble.

Sea $n := \text{mín}\{r \ :\ \mathfrak{g}_r = 0\}$. Se dice que n es el orden de nilpotencia, y un álgebra de Lie con orden de nilpotencia n se dice que es n-pasos nilpotente.

Proposición 4.1.2. *Toda subálgebra y todo cociente de un álgebra de Lie nilpotente (resp. soluble) es nilpotente (resp. soluble).*

Ejemplo 4.1.3. Si consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de matrices triangulares $n \times n$ con el corchete de Lie dado por $[A, B] = AB - BA$, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble. Si en particular $\mathfrak{g}$ es el conjunto de matrices triangulares $n \times n$ con diagonal nula, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie n-pasos nilpotente.

Ejemplo 4.1.4. El álgebra $\mathfrak{h}_n$ asociada al grupo de Heisenberg H_n es 2-pasos nilpotente para todo n natural.

El siguiente resultado será de gran utilidad a lo largo del trabajo.

Lema 4.1.5. *Sea N un grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ nilpotente. Entonces la aplicación* $\exp : \mathfrak{n} \to N$ *es un difeomorfismo.*

Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie definimos una forma bilineal simétrica por

$$B(x, y) = tr(ad(x)ad(y)) \quad \text{para } x, y \in \mathfrak{g},$$

donde tr es la traza del operador. Llamamos a B la *forma de Killing* y cumple las siguientes propiedades:

- $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
- Es invariante por automorfismos: $B(s(x), s(y)) = B(x, y)$, donde $s \in Aut(\mathfrak{g})$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definición 4.1.6. Un álgebra de Lie finitamente dimensional $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si $\mathfrak{g}$ es no abeliana y no posee ideales propios no triviales. $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si no posee ideales solubles no nulos.

En particular, un álgebra de Lie simple es semisimple, y una caracterización viene dada por el siguiente resultado.

Proposición 4.1.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie finitamente dimensional. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie semisimple,*
- $\mathfrak{g}$ *no posee ideales abelianos no nulos,*
- $\mathfrak{g}$ *es suma directa de ideales simples no abelianos,*
- *La forma de Killing definida sobre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ es no degenerada (Criterio de Cartan).*

Como corolario obtenemos que un álgebra de Lie semisimple tiene centro trivial.

4.1.1. Álgebras de Lie semisimples

Las álgebras de Lie semisimples complejas son de gran interés porque admiten una descomposición notable en espacios de raíces. Para motivar esta descomposición daremos un ejemplo.

Ejemplo 4.1.8. Consideremos el álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Sean

$$\mathfrak{h} = \text{ matrices diagonales con entradas reales en } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \text{ todas las matrices diagonales en } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

Entonces $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$. Sea $E_{i,j}$ la matriz que tiene un 1 en el lugar (i, j) y 0 en el resto de las entradas, y definimos $e_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ como

$$e_i \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \cdots & \\ & & h_n \end{pmatrix} = h_i$$

Para cada $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, $ad(H)$ es diagonalizable respecto de la base de $\mathfrak{g}$ definida por los elementos $E_{i,j}$ con $i \neq j$ unida a una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. En efecto,

$$ad(H)E_{i,j} = [H, E_{i,j}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j}.$$

Luego $E_{i,j}$ es un autovector simultáneo de $ad(H)$ para toda $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, con autovalor $e_i(H) - e_j(H)$. Luego el autovalor $e_i - e_j$ es un funcional lineal de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, es decir, $e_i - e_j \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$. Los autovalores $(e_i - e_j)$'s, para $i \neq j$ son llamadas raíces. El conjunto de raíces se denota por Δ. Además tenemos que

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j},$$

que podemos reescribir como

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}_{e_i - e_j}}, \tag{4.1}$$

donde

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}_{e_i - e_j}} := \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : ad(H)X = (e_i - e_j)(H)X \text{ para toda } H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}.$$

La descomposición (4.1) es llamada descomposición en espacios de raíces. Notemos que Δ genera $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Extraeremos estas propiedades para un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$; para ello debemos definir la subálgebra $\mathfrak{h}$ llamada subálgebra de Cartan. Existen varias formas equivalentes de definir subálgebras de Cartan.

Definición 4.1.9. Dada un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$, una subálgebra $\mathfrak{h}$ se dice *subálgebra de Cartan* si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$ y $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ es simultáneamente diagonalizable.

Un resultado muy conocido garantiza que toda álgebra de Lie compleja finitamente dimensional tiene una subálgebra de Cartan, y es única salvo isomorfismos.

Dada $\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0$, definimos

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} : (ad(z) - \alpha(z))^n x = 0 \text{ para todo } z \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, α es llamada una *raíz*, y denotamos al conjunto de raíces por Δ o por $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

La descomposición en espacio-pesos es

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Esta descomposición es llamada *descomposición en espacios-raíces* de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$. Los elementos de $\mathfrak{g}_\alpha$ son llamados *vectores raíces* de α.

En lo que sigue B será la forma de Killing definida sobre $\mathfrak{g}$.

Proposición 4.1.10. *Sea $\mathfrak{g}$ un algebra de Lie compleja semisimple con algebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y sea $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ conjunto de raíces. Si B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, entonces:*

a) Si $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ y $\alpha + \beta \neq 0$ entonces $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

b) Si $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, entonces B es no singular en $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

c) Si $\alpha \in \Delta$, entonces $-\alpha \in \Delta$.

d) $B_{|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ es no degenerada; consecuentemente para cada α existe $z_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(z) = B(z, z_\alpha)$ para toda $z \in \mathfrak{h}$.

e) Δ genera $\mathfrak{h}^*$.

f) Si $\alpha \in \Delta$, $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$.

Para cada raíz α, podemos elegir y fijar un elemento $v_\alpha \neq 0$ en $\mathfrak{g}_\alpha$ tal que $[z, v_\alpha] = \alpha(z)v_\alpha$ para todo $z \in \mathfrak{h}$ (por Teorema de Lie existe tal v_α).

Como corolario de esta proposición obtenemos que la acción de $ad(\mathfrak{h})$ sobre $\mathfrak{g}$ es simultáneamente diagonalizable. Además, sobre $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ la forma de Killing B satisface

$$B(z, z') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(z)\alpha(z'), \tag{4.2}$$

por lo tanto obtenemos que la base $\{v_\alpha, v_{-\alpha}\}$ puede ser normalizada de manera tal que $B(v_\alpha, v_{-\alpha}) = 1$.

Podemos transferir la forma de Killing a $\mathfrak{h}^*$. Dados $\psi, \phi \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$\langle \psi, \phi \rangle = B(z_\psi, z_\phi).$$

Sea $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ el espacio $\mathbb{R}$-lineal generado por Δ en $\mathfrak{h}^*$. Entonces $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*_\mathbb{R} \oplus i\, \mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$, y la forma bilineal B restringida a $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ es un producto interno definido positivo, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Más aún, si $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ denota el $\mathbb{R}$-espacio lineal generado por $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus i\, \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, los elementos de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ son exactamente aquellos que son reales sobre $\mathfrak{h}$, y la operación de restringir dichos funcionales lineales de $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ es un $\mathbb{R}$-isomorfismo de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ en $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$.

Sea $|\cdot|^2$ el cuadrado de la norma asociado al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, y sea α una raíz. Definimos la reflexión S_α relativa al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ por

$$S_\alpha(\phi) := \tfrac{\phi - 2\langle\phi,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha, \quad \phi \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*.$$

Esta es una transformación ortogonal sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, la cual satisface que es -1 en $\mathbb{R}\alpha$ y es $+1$ en el complemento ortogonal de α.

Proposición 4.1.11. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple con álgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Consideremos $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ un sistema de raíces. Entonces para toda $\alpha \in \Delta$, S_α manda Δ en si mismo.*

Definición 4.1.12. Consideremos $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ un sistema de raíces.

- Llamamos *grupo de Weyl* de Δ al subgrupo del grupo ortogonal $O(\Delta)$ generado por las reflexiones $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, y lo denotamos por $W(\Delta)$.

- Decimos que un conjunto de raíces $\Pi := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ es un conjunto de *raíces simples* si para todo $\gamma \in \Delta$ podemos escribir

$$\gamma = n_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_s n_s \tag{4.3}$$

  con $n_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, s$ con n_i's todos del mismo signo.

- Sobre el sistema de raíces Δ podemos definir una noción de positividad. Sea $\{z_1, \cdots, z_m\}$ una base de $\mathfrak{h}$. Decimos que $\alpha \in \Delta$ es una *raíz positiva* si existe un índice k tal que $\alpha(z_i) = 0$ para todo $1 \le i \le k-1$, y $\alpha(z_k) > 0$, y lo denotamos por $\alpha > 0$. Denotamos por Δ^+ al conjunto de raíces positivas. Equivalentemente, decimos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ es un conjunto de raíces positivas si en la ecuación (4.3) todos los n_i son no negativos.

- Decimos que $\alpha \in \Delta$ es una *raíz indescomponible* si $\alpha > 0$ y si α no puede descomponerse como $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ con β_1, β_2 ambas raíces positivas.

Observación 4.1.13.

$$\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+).$$

4.2. Álgebras de Lie compactas

En esta sección presentaremos los resultados principales de álgebras de Lie compactas.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, $\mathfrak{g}$ se dice compacta si es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto, y un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *reductiva* si su representación adjunta *ad* es completamente reducible.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compacta, como espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ admite un producto interno $Ad(G)$-invariante, es decir

$$\langle Ad(g)u, Ad(g)v\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{para todo } u, v \in \mathfrak{g},\ g \in G.$$

De este hecho se deducen los dos siguientes resultados.

Proposición 4.2.1. *Sea G un grupo de Lie compacto, y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces $\mathfrak{g}$ es reductiva, y por lo tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{c}]$, donde $\mathfrak{c}$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es semisimple.*

Proposición 4.2.2. *Si G es un grupo de Lie compacto con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces la forma de Killing es semidefinida negativa sobre $\mathfrak{g}$.*

Se define un *toro n-dimensional* T_n como un grupo de Lie isomorfo al grupo cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Es bien sabido que un grupo de Lie es compacto conexo y abeliano si y sólo si es un toro T_n para algún $n \in N$.

En esta sección G será un grupo de Lie compacto, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su complexificación.

Teorema 4.2.3. *Todo grupo de Lie compacto y conexo tiene un toro maximal. Además se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Si T es un toro maximal de G y si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son las álgebras de Lie de G y T respectivamente, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana maximal en $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$, entonces el subgrupo conexo de G correspondiente a $\mathfrak{h}$ es un toro maximal de G.*
- *Si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son dos subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{g}$, entonces existe $g \in G$ tal que $Ad(g)\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*
- *Si T^1 y T^2 son dos toros maximales de G, entonces existe $g \in G$ tal que $gT^1g^{-1} = T^2$.*
- *$G = \bigcup_{g\in G} gTg^{-1}$. Luego $\mathfrak{g} = \bigcup_{g\in G} Ad(g)\ \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son las álgebras de Lie de G y T respectivamente.*

Definición 4.2.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compacta y G su correspondiente grupo de Lie. Consideremos $x \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ un subálgebra de Cartan tal que $x \in \mathfrak{h}$, y sea $T = \exp(\mathfrak{h})$ toro maximal. Para $h \in G$, definimos el centralizador de h en G por

$$C_G(h) = \{g \in G : gh = hg\}.$$

Entonces si $h \in T, T \subseteq C_G(h)$. Decimos que $x \in \mathfrak{g}$ es un *elemento regular* si $C_G(\exp(x)) = T$. Denotamos por $\mathfrak{g}_r$ al conjunto de elementos regulares de $\mathfrak{g}$.

Observación 4.2.5. Una definición equivalente de elemento regular es la siguiente. Sea

$$p_x(\lambda) = \det(ad(x) - \lambda I) = \sum \lambda^k\ D_k(x),$$

y sea $m = \text{mín}\{k\ :\ D_k \neq 0\}$, entonces $x \in \mathfrak{g}_r$ si y sólo si $D_m(x) \neq 0$. De esta definición se deduce que el complemento del conjunto de elementos regulares coincide con los ceros de un polinomio, y por lo tanto, tiene medida de Lebesgue nula. Luego $\mathfrak{g}_r$ es un abierto denso en $\mathfrak{g}$.

Proposición 4.2.6. *Sea $x \in \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan tal que $x \in \mathfrak{h}$. Entonces $x \in \mathfrak{g}_r$ si y sólo si* $\dim(Nu(ad(x))) = \dim(\mathfrak{h})$.

Sea T un toro maximal en G, y $\mathfrak{h}$ su álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semisimple y $\mathfrak{c}$ el centro de $\mathfrak{g}$. Sean $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ y $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ las complexificaciones de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Entonces $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{c}_{\mathbb{C}} \oplus [\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$, con $[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$ semisimple y $\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}$ abeliana. Se puede obtener una descomposición de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en espacios de raíces similar a la descomposición para álgebras de Lie complejas semisimples. Esta descomposición viene dada por

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

donde extendemos los miembros $\alpha \in \Delta$ de $\mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}$ (el álgebra de Cartan de $[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$) a $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ definiendo estos como 0 en $\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}$.

Como en el caso semisimple, dado $\alpha \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$,

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid ad(z)x = \alpha(z)x \ \forall z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}, \text{ y}$$

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}} \mid \alpha \neq 0 \ \text{ y } \ \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}.$$

El conjunto Δ satisface todas las propiedades de sistema de raíces definido en el caso semisimple, excepto que no genera $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$.

En general, para un álgebra de Lie reductiva real $\mathfrak{g}$, decimos que una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Cartan si su complexificación es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Con esta terminología, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ asociada a un toro maximal T de un grupo de Lie compacto y conexo G es una subálgebra de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Más aún, dos álgebras abelianas maximales de $\mathfrak{g}$ son conjugadas por un elemento de $Ad(G)$, y todo elemento $g \in G$ es el conjugado de un elemento de T.

En este caso, es fácil ver que si $\alpha \in \Delta$, entonces $\alpha_{|_{\mathfrak{h}}}$ es un funcional lineal en $i\mathbb{R}$,

$$\alpha_{|_{\mathfrak{h}}} : \mathfrak{h} \to i\mathbb{R}.$$

Por lo tanto $\alpha(i\mathfrak{h}) = i\alpha(\mathfrak{h}) \ \in -\mathbb{R}$. Definimos $\mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}$. Podemos ver al sistema de raíces como miembros de $\mathfrak{h}^*_R$.

Por (4.2), la forma de Killing no degenerada B es definida positiva sobre $\mathfrak{h}_R$. Luego dada $\alpha \in \mathfrak{h}^*_R$ existe $H^{\alpha} \in \mathfrak{h}_R$ tal que $\alpha(z) = B(z, z^{\alpha})$ para toda $z \in \mathfrak{h}_R$. Este es el isomorfismo entre $\mathfrak{h}_R$ y $\mathfrak{h}^*_R$, dado por el Teorema de Riesz.

Consideremos

$$\mathfrak{h}'_R = \{z \in \mathfrak{h}_R \mid \alpha(z) \neq 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Se definen las *cámaras de Weyl* de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ como el conjunto de componentes conexas de $\mathfrak{h}'_R$.

Las reflexiones S_{α} y el grupo de Weyl se definen como en el caso semisimple. Además, el conjunto

$$W(G,T) := N_G(T)/Z_G(T),$$

$W(G,T)$ actúa por automorfismos sobre T, y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.7. *Con la notación anterior:*

- *Si $g \in N_G(T)$, entonces $Ad(g)\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ y $Ad(g)_{|\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = I$ si y sólo si $g \in T$.*

- *$W(G,T)$ actúa simplemente transitivamente en las cámaras de Weyl de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Esto es, $W(G,T)$ permuta las cámaras de Weyl y si $s \in W(G,T)$ satisface $sQ = Q$ para alguna cámara de Weyl, entonces $s = I$.*

- *$W(\Delta) = W(G,T)$.*

4.3. Teoría de pesos

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja, y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan.

Para poder describir las representaciones irreducibles de dimensión finita de un álgebra de Lie compleja semisimple, módulo equivalencias, utilizaremos la teoría de pesos. El Teorema del peso máximo describe las clases de equivalencia a partir de los pesos dominantes de un reticulado de pesos enteros, definidos en $\mathfrak{h}^*$. De este teorema se deduce la clasificación de las representaciones irreducibles de grupos de Lie compactos.

Sea (π, V) una representación compleja de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$V(\lambda) := \{v \in V \ : \ \pi(x)v = \lambda(x)v \text{ para toda } x \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $V(\lambda) \neq 0$, entonces $V(\lambda)$ se llama el *espacio peso* de λ. En tal caso, λ es un *peso* de la representación, y $v \in V(\lambda)$ es un *vector peso* λ.

Sea B la forma de Killing. Sabemos que B es no degenerada sobre $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, y que es definida positiva sobre $\mathfrak{h}_R \times \mathfrak{h}_R$, donde $\mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Denotamos por $(x, y) = B(x, y)$, cuando la restringimos B a $\mathfrak{h}_R$ denotamos por $|\cdot|$ a la correspondiente norma.

Proposición 4.3.1. *Sea Δ el conjunto de raíces de $\mathfrak{h}$, y sea $\mathfrak{h}_R$ definido como antes. Si (π, V) es una representación compleja de $\mathfrak{g}$, entonces:*

1. *$\pi(\mathfrak{h})$ actúa diagonalmente sobre V y V es la suma directa de todos los espacios pesos.*

2. *Todo peso es un funcional lineal a valores reales sobre $\mathfrak{h}_R$ y satisface*

$$2\frac{(\lambda, \alpha)}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta.$$

3. *Las raíces y los pesos están relacionados vía $\pi(\mathfrak{g}_\alpha)V(\lambda) \subseteq V(\lambda + \alpha)$.*

Denotamos por

$$P(\mathfrak{g}) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \ : \ (\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

$P(\mathfrak{g})$ se denomina el reticulado de pesos y sus elementos se denominan *pesos enteros*.

Sea $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ el conjunto de raíces simples de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$. Notemos que podemos elegir $\Pi \subseteq \mathfrak{h}^*_R$. Se definen los *pesos fundamentales* ω_i como una base de $\mathfrak{h}^*$ que satisface las ecuaciones

$$2\frac{(\omega_i, \alpha_j)}{|\alpha_j|^2} = \delta_{ij}.$$

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Se dice que λ es un *peso dominante o peso máximo* si $(\lambda, \alpha) \geq 0$ para toda raíz simple α. Denotamos por $P_{++}(\mathfrak{g})$ al conjunto de pesos enteros dominantes.

Teorema 4.3.2 (Teorema del peso máximo)**.** *Salvo equivalencias, las representaciones irreducibles (π, V) de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ están en correspondencia uno-a-uno con las funcionales lineales λ en $P_{++}(\mathfrak{g})$. Denotaremos por π_λ a la representación de peso máximo λ. El peso máximo λ de π_λ tiene además estas propiedades:*

(a) λ depende sólo del sistema simple Π y no del orden de las raíces simples en la base ordenada Π.

(b) El espacio de peso $V(\lambda)$ tiene dimensión 1.

(c) Cada vector $E \in \mathfrak{g}_\alpha$ para una arbitraria raíz positiva anula todos los miembros de $V(\lambda)$; y los vectores de $V(\lambda)$ son los únicos vectores con esta propiedad.

(d) Todo peso de π_λ es de la forma $\lambda = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ con $n_i \geq 0$ y $\alpha_i \in \Pi$.

Recordemos que un grupo de Lie G se dice semisimple si su álgebra de Lie es semisimple. En el caso de que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y que además es compacta, entonces tenemos también el siguiente resultado:

Teorema 4.3.3. *Sea G un grupo de Lie conexo compacto semisimple y simplemente conexo con álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Salvo equivalencias, las representaciones irreducibles de dimensión finita (π, V) de G están en correspondencia uno-a-uno con los funcionales lineales λ en $P_{++}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.*

4.3.1. Ejemplos

Denotamos por G a los grupos lineales $G = GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n+1, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO(2n, \mathbb{C})$ o $SO(2n+1, \mathbb{C})$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El subgrupo H de matrices diagonales es un toro maximal de dimensión n, y denotamos por $\mathfrak{h}$ su álgebra de Lie.

• Para $G = GL(n, \mathbb{C})$ una base de $\mathfrak{h}$ viene dado por $\langle \epsilon_i, A \rangle = a_i$, donde A es la matriz diagonal con entradas $A_{ii} = a_i$. Entonces $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ es una base de $\mathfrak{h}^*$.

• Para $G = SL(n+1, \mathbb{C})$, una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ consiste de las entradas matriciales con diagonal cero. Por abuso de notación denotaremos por ϵ_i a la restricción de ϵ_i definidos para $GL(n, \mathbb{C})$ a $SL(n, \mathbb{C})$.

• Para $G = Sp(2n, \mathbb{C})$ o $SO(2n, \mathbb{C})$, para $i = 1, \cdots, n$ definimos $\langle \epsilon_i, A \rangle = a_i$, donde A es una matriz diagonal con entradas $A_{ii} = a_i$ si $i = 1, \cdots, n$ y $A_{ii} = -a_i$ si $i = n+1, \cdots, 2n$.

• Para $G = SO(2n+1, \mathbb{C})$ para una matriz A diagonal tal que $A_{ii} = a_i$ si $i = 1, \cdots, n$, $A_{(n+1)(n+1)} = 0$ y $A_{ii} = -a_i$ para $i = n+2, \cdots, 2n+1$ definimos $\langle \epsilon_i, A \rangle = a_i$.

En todos los casos anteriores, $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ conforma una base de $\mathfrak{h}^*$. Los pesos $\{\epsilon_i\}$ son llamados *pesos coordenados.*

La descripción de los pesos dominantes $P_{++}(\mathfrak{g})$ a partir de los pesos coordenados se encuentra en [16], y lo resumimos en el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4. *Para cada uno de los siguientes grupos lineales los pesos dominantes están determinados por los pesos coordenados como sigue:*

1. *Si $G = GL(n, \mathbb{C})$ ó $SL(n+1, \mathbb{C})$, entonces $P_{++}(\mathfrak{g})$ consiste de todos los pesos de la forma*

$$\mu = k_1\epsilon_1 + \cdots + k_n\epsilon_n, \quad \text{donde } k_1 \geq \cdots \geq k_n, \quad \text{y} \quad k_1 - k_i + 1 \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

2. *Si $G = SO(2n+1, \mathbb{C})$, $P_{++}(\mathfrak{g})$ es el conjunto de pesos de la forma*

$$\mu = k_1\epsilon_1 + \cdots, k_n\epsilon_n, \qquad \text{con } k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n \geq 0. \tag{4.5}$$

   Aquí $2k_i$ y $k_i - k_j$ son enteros para todo $1 \leq i, j \leq n$.

3. *Si $G = Sp(n, \mathbb{C})$, entonces $P_{++}(\mathfrak{g})$ viene dado por los pesos de la forma μ que satisfacen la ecuación (4.5) pero con $k_i \in \mathbb{Z}$ para todo i.*

4. *Para el caso $G = SO(2n, \mathbb{C})$, $P_{++}(\mathfrak{g})$ viene dado por los pesos de la forma*

$$\mu = k_1\epsilon_1 + \cdots + k_n\epsilon_n, \qquad \text{donde } k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{n-1} \geq |k_n|.$$

   Aquí $2k_i$ y $k_i - k_j$ son enteros para todo $1 \leq i, j \leq n$.

4.3.2. Representación regular sobre el anillo de polinomios

Sea G un grupo de Lie reductivo, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus V$ donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G. Supongamos que (π, V) es la representación dada por $\pi(g)v = gv$. Definimos la representación regular de G en el anillo de polinomios $\mathcal{P}(V)$ como

$$(\rho(g)f)(v) = f(g^{-1}v), \quad f \in \mathcal{P}(V).$$

Definimos el espacio de *polinomios homogéneos de grado k* como

$$\mathcal{P}^k(V) := \{f \in \mathcal{P}(V) : f(zx) = z^k f(x) \ \text{ para todo } z \in \mathbb{C}^\times\}.$$

El espacio vectorial $\mathcal{P}^k(V)$ es de dimensión finita y G-invariante para $k \in \mathbb{N}_0$. La representación ρ_k definida como la restricción de ρ a $\mathcal{P}^k(V)$ es la representación regular de G.

En los casos en que G es $SU(n)$ o $SO(2n)$ el espacio vectorial es $V = \mathbb{C}^n$ y en el caso $G = Sp(n)$, $V = \mathbb{C}^{2n}$. Las representaciones ρ_k son irreducibles y la descomposición de la representación ρ en componentes irreducibles es

$$\rho = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \rho_k. \tag{4.6}$$

4.3.3. Descomposición del producto tensorial de representaciones de $Sp(n)$

En esta subsección seguiremos [7]. Consideremos el grupo simplético real $Sp(n)$, en este caso la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ está compuesta de matrices diagonales de la forma

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & h_n & & & \\ & & & -h_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -h_n \end{pmatrix} : h_1, \cdots, h_n \in \mathbb{C} \right\},$$

Para $i = 1, \ldots, n$, Sea $H_i = e_{i,i} - e_{i+n,i+n}$ donde $e_{i,j}$ denotan las matrices matriciales que tienen un 1 en la entrada (i, j) y 0 en el resto de las entradas, se puede ver facilmente que $\{H_1, \cdots, H_n\}$ es una base de $\mathfrak{h}$.

Si consideramos $\{L_1, \cdots, L_n\}$ la correspondiente base dual de $\{H_1, \cdots, H_n\}$ en $\mathfrak{h}^*$. Los pesos fundamentales de $Sp(n)$ están dados por

$$L_1, L_1 + L_2, \ldots, L_1 + \cdots + L_n,$$

y las raíces simples son

$$L_1 - L_2,\ L_2 - L_3,\ \ldots,\ L_{n-1} - L_n,\ 2L_n.$$

Por Teorema del peso máximo 4.3.2 sabemos que toda representación $\eta \in \widehat{Sp(n)}$ están en correspondencia con una combinación entera no negativa de pesos fundamentales, y por ende podemos identificar a $\eta \in \widehat{Sp(n)}$ con una n-upla $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ donde $\eta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots \geq \eta_n \geq 0$. Por abuso de notación, denotamos con la misma letra η a la representación $\eta \in \widehat{Sp(n)}$ y a la partición $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, aunque también denotaremos a la representación η por $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ según el contexto.

La descomposición de la representación natural η de $Sp(n)$ sobre el espacio de polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n})$ en componentes irreducibles fue desarrollada por Koike-Terada en [21]. Notemos que la partición asociadas a las representación natural de $Sp(n)$ actuando sobre el conjunto $\mathcal{P}_r(\mathbb{C}^{2n})$ de polinomios homogéneos de grado r es la partición de longitud uno (r). A esta representación la denotaremos por $\eta_{(r)}$.

Si $r \geq s$, de acuerdo a [21] pág. 510, el producto tensorial $\eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)}$ se descompone en representaciones irreducibles como

$$\eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)} = \bigoplus_{j=0}^{s} \bigoplus_{i=0}^{j} \eta_{r+s-j-i,j-i}. \tag{4.7}$$

4.3.4. Representaciones de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$

Recordemos que la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, por lo tanto, basta estudiar $\widehat{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})}$ para obtener $\widehat{\mathfrak{u}(n)}$.

Recordemos que por (4.4), sabemos que los pesos fundamentales consisten de los elementos de la forma

$$\mu = k_1\epsilon_1 + \cdots + k_n\epsilon_n, \quad \text{donde } k_1 \geq \cdots \geq k_n, \quad \text{y} \quad k_1 - k_i + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Definimos los pesos dominantes $\lambda_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i$. Notemos que la restricción de los pesos dominantes a $SL(n, \mathbb{C})$ son los pesos dominantes φ_i de $SL(n, \mathbb{C})$, para $i = 1, \cdots n-1$. Si μ viene dado por la ecuación (4.4), entonces

$$\mu = (k_1 - k_2)\lambda_1 + (k_2 - k_3)\lambda_2 + \cdots + (k_n - k_{n-1})\lambda_{n-1} + k_n\lambda_n.$$

Entonces los elementos de $P_{++}(\mathfrak{g})$ pueden escribirse de manera única como

$$\mu = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n \quad \text{con } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0, \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

La restricción de μ_0 de μ a la subálgebra de matrices con diagonal cero viene dado por

$$\mu_0 = (k_1 - k_2)\varpi_1 + (k_2 - k_3)\varpi_2 + \cdots + (k_n - k_{n-1})\varpi_{n-1}.$$

Lema 4.3.5. *Sea (π_n^μ, F_n^μ) una representación de $GL(n, \mathbb{C})$ de peso máximo μ. Entonces la representación de $SL(n, \mathbb{C})$ dada por la restricción de π_n^μ tiene peso máximo μ_0. Además si definimos la representación $(\tilde{\pi}_n^\mu), F_n^\mu)$ por $\tilde{\pi}_n^\mu(g) = \pi_n^\mu(g^t)^{-1}$, entonces es equivalente a la representación dual $(\pi_n^{\mu *}, F_n^{\mu *})$.*

Por otra parte, sea $G = GL(n, \mathbb{C})$ actuando sobre $V = (\mathbb{C}^k)^n$ vía

$$g \cdot (x_1, \cdots, x_k) = (gk_1, \cdots, gx_k).$$

Identificamos V con el espacio $M_{n,k}$ de matrices $n \times k$ complejas. Con esta identificación, la acción de G sobre $M_{n,k}$ está dada por la multiplicación a izquierda. Esto da lugar a la representación $(\rho, \mathcal{P}(M_{n,k}))$ dada por $\rho(g)f(x) = f(g^{-1}x)$.

Sea $G' = GL(k, \mathbb{C})$ entonces G' actúa sobre $M_{n,k}$ por multiplicación a derecha. Esta acción de G' conmuta con la acción de G y define una nueva acción sobre $M_{n,k}$ dada por $\rho'(g)f(x) = f(xg)$.

Sea μ un peso dominante de la representación $(\rho, \mathcal{P}(M_{n,k}))$ de G. Escribimos a $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i\epsilon_i$ como en (4.4). Definimos la longitud de μ como

$$|\mu| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

y definimos la profundidad de μ como

$$\mathrm{depth}(\mu) = \text{mín}\{k : \mu_{k+1} = 0\}.$$

Entonces podemos ver a μ como un peso entero dominante de $GL(n, \mathbb{C})$ para $l \geq \mathrm{depth}(\mu)$.

Siguiendo la descripción que se encuentra en [16], tenemos la descomposición de la representación de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ actuando sobre $\mathcal{P}(M_{n,k})$ en componentes irreducibles.

Teorema 4.3.6. *La representación de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ sobre el espacio de polinomios homogéneos de grado d sobre $M_{n,k}$ se descompone libre de multiplicidades como*

$$\mathcal{P}^d(M_{n,k}) = \sum_{\nu} (F_n^{\nu})^* \otimes F_k^{\nu},$$

donde la suma corre sobre todos los pesos enteros dominantes no negativos ν de longitud d y profundidad $depth(\nu) \leq r$ donde $r = \text{mín}\{n, k\}$.

Sabemos que la representación $(\pi_n^{\nu *}, F_n^{\nu *})$ correspondiente al peso máximo ν es equivalente a la representación $(\tilde{\pi}_n^{\mu}), F_n^{\mu})$ definida por $\tilde{\pi}_n^{\mu}(g) = \pi_n^{\mu}(g^t)^{-1}$. Afortunadamente, la representación regular a izquierda de $GL(n, \mathbb{C})$ actuando sobre $(\mathbb{C}^n)^k$ es equivalente a la representación $(\tilde{\pi}_n^{\mu}), F_n^{\mu})$, y la descomposición de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k)$ viene dada por

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k) = \sum_{\nu} F_n^{\nu} \otimes F_k^{\nu},$$

donde la suma corre sobre todos los pesos enteros dominantes no negativos ν de longitud d y profundidad $depth(\nu) \leq r$ donde $r = \text{mín}\{n, k\}$.

Restringiendo las representaciones (π_n^{μ}, F_n^{μ}) a $SL(n, \mathbb{C})$ tenemos las representación de peso máximo $(\pi_n^{\mu_0}, F_n^{\mu})$ con la notación del Lema 4.3.5. Luego

$$\mathcal{P}^d(M_{n,k}) = \sum_{\nu} (F_n^{\nu_0}) \otimes F_k^{\nu},$$

es la descomposición en irreducibles del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k)$ como $SL(n, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$.

Capítulo 5

Análisis armónico en nilvariedades

En esta sección queremos construir pares de Gelfand (K, N) donde N es un grupo de Lie nilpotente y K el grupo de automorfismos ortogonales de N. Un grupo de Lie N se dice n-pasos nilpotentes si su álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie n-pasos nilpotente. Es sabido que si N es un grupo de Lie nilpotente tal que (K, N) es un par de Gelfand y K es un grupo compacto, entonces N es necesariamente 2-pasos nilpotente. En [23] el autor describe una familia de pares de Gelfand (K, N) donde N es 2-pasos nilpotentes. Recordemos las equivalencias de par de Gelfand vistas en el Capítulo 2.

Sea G un grupo de Lie conexo, y K un subgrupo de Lie compacto de G. Es bien sabido que las siguientes son equivalentes:

1. El álgebra de convolución $L^1(K\backslash G/K)$ es conmutativa.

2. El álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ de operadores diferenciales K-invariantes a izquierda sobre G/K es conmutativa.

3. La representación regular de G sobre G/K es libre de multiplicidad.

4. Dada una representación unitaria e irreducible $(\rho, \mathcal{H})$ de G, el espacio

$$\mathcal{H}_K := \{v \in \mathcal{H} : \rho(k)\, v = v \text{ para todo } k \in K\}$$

   es, a lo más, unidimensional.

Cuando alguna de las anteriores se cumple decimos que (G, K) es par de Gelfand.

El espacio cociente G/K es llamado una nilvariedad si existe un subgrupo nilpotente N de G tal que N actúa transitivamente, y decimos que G/K es una nilvariedad conmutativa si (G, K) es un par de Gelfand. En este trabajo, G/K es conexo y simplemente conexo y entonces, N actúa simplemente transitivamente sobre G/K y G es el producto semidirecto $K \ltimes N$ (ver [35], Lema 13.1.2). Denotamos al par de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ por (K, N).

En el Teorema de clasificación de Vinberg de nilvariedades conmutativas, hay una gran familia que fue definida por J. Lauret en [23]. La construcción de J. Lauret se corresponde con pares donde K es el grupo de automorfismos ortogonales maximal, con excepción de tres casos. Como se prueba en [35](páginas 339-341), en casi todos los casos definidos por

Vinberg, N tiene una propiedad muy sorprendente: tiene representaciones de cuadrado integrables, con excepción de tres casos (dos de los cuales están en la lista de Lauret). Para la familia descripta por J. Lauret tal que N admite representaciones de cuadrado integrables, desarrollaremos el correspondiente análisis esférico, encontrando explícitamente la fórmula de inversión, y como una consecuencia, obtenemos la descomposición de la acción regular de G sobre $L^2(N)$. El resto de las fórmulas de inversión de la lista de Lauret puede encontrarse en Sección 14.5 en [35] y en [36].

Daremos un breve resumen de este capítulo. Primero introduciremos algunos preliminares acerca de la familia descripta por J. Lauret. Recordaremos la teoría de Moore-Wolf desarrollada en [35], encontrando una fórmula de inversión para la familia de J. Lauret. Luego enunciaremos y probaremos nuestro resultado principal.

5.1. Construcción de una familia de álgebras de Lie dos pasos nilpotentes

Sea $\mathfrak{n}$ la suma directa de dos espacios vectoriales, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus V$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto G, es decir $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{c}$, y (π, V) es una representación real de $\mathfrak{g}$. Queremos definir un producto interno en el espacio vectorial $\mathfrak{n}$. Consideramos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ productos internos en $\mathfrak{g}$ y V $ad(\mathfrak{g})$-invariante y $\pi(\mathfrak{g})$-invariante respectivamente. Luego extendemos el producto interno a $\mathfrak{n}$ decretando que $\mathfrak{g}$ y V sean espacios ortogonales. Este producto interno definido sobre $\mathfrak{n}$ es llamado $\mathfrak{g}$-invariante.

Definimos en $\mathfrak{n}$ una forma bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}$ con centro $\mathfrak{g}$ y tal que $[\cdot, \cdot]_{V \times V}$ satisface

$$\langle x, [u, v]_{V \times V} \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \pi(x) u, v \rangle_V, \quad u, v \in V, \ x \in \mathfrak{g}. \tag{5.1}$$

La aplicación $[\cdot, \cdot]$ resulta bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi. Por lo tanto $[\cdot, \cdot]$ es un corchete de Lie, y $(\mathfrak{n}, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente con centro $\mathfrak{g}$.

Denotamos por $N(\mathfrak{g}, V)$ al grupo de Lie conexo y simplemente conexo que tiene a $\mathfrak{n}$ como álgebra de Lie. Podemos darle a $N(\mathfrak{g}, V)$ una métrica invariante a izquierda determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}$. En [23] se prueba que esta construcción no depende de la elección del producto interno $\mathfrak{g}$-invariante, salvo isomorfismos de grupos de Lie. Más aún, si (π, V),(ρ, W) son dos representaciones de $\mathfrak{g}$ y existe un automorfismo Ψ de $\mathfrak{g}$ y un isomorfismo lineal $T : V \to W$ tales que $T \circ \pi(x) \circ T^{-1} = \rho(\Psi(x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, entonces $N(\mathfrak{g}, V)$ y $N(\mathfrak{g}, W)$ son dos grupos de Lie isomorfos. Esta construcción fue explicada con más detalle en (1.3.7).

Nota. Para ser coherente con la notación usada en el Capítulo 3 (que es la notación clásica en el grupo de Heisenberg), denotaremos por $n = (v, x)$, $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$ a los elementos de $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus V$, en lugar de la notación $n = (x, v)$ usada en [13] o $n = x + v$ usada en [23].

5.1.1. El grupo de automorfismos ortogonales de $\mathbf{N}(\mathfrak{g}, \mathbf{V})$

Por simplicidad denotaremos por N a $N(\mathfrak{g}, V)$. En esta sección queremos hallar el grupo $K = Aut(N)$. Como N es conexo y nilpotente, por Lema 4.1.5 basta hallar $Aut(\mathfrak{n})$, es decir, el conjunto de aplicaciones lineales e inversibles k satisfaciendo

$$k([x,y]) = [k(x),k(y)] \quad \text{para todo } x,y \in \mathfrak{n}.$$

Por (4.2.1), $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}'$, donde $\mathfrak{c}$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Sea G' el grupo de Lie conexo y simplemente conexo asociado a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Notemos que podemos incluir G' en K de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \iota \quad : \quad & G' \to Aut(\mathfrak{n}) \\ & g \mapsto (Ad(g),\pi(g)); \\ & \iota_g(v,x) = (\pi(g)v, Ad(g)x). \end{aligned}$$

Para demostrar este hecho usaremos la conmutatividad del diagrama exponencial, por lo cual conviene distinguir la notación de una representación π dada y su derivada $d\pi$. Procedamos a probarlo:

$$\begin{aligned} \langle[\iota_g(v,x),\iota_g(\tilde{v},\tilde{x})],y\rangle &= \langle[(\pi(g)v,Ad(g)x),(\pi(g)\tilde{v},Ad(g)\tilde{x})],y\rangle \\ &= \langle[\pi(g)v,\pi(g)\tilde{v}],y\rangle \\ &= \langle d\pi(y)\pi(g)v,\pi(g)\tilde{v}\rangle \\ &= \langle\pi(g^{-1})d\pi(y)\pi(g)v,\tilde{v}\rangle \\ &= \langle d\pi(Ad(g^{-1})y)v,\tilde{v}\rangle \\ &= \langle[v,\tilde{v}],Ad(g^{-1})y\rangle \\ &= \langle Ad(g)([v,\tilde{v}]),y\rangle \\ &= \langle\iota_g([v,\tilde{v}]),y\rangle \\ &= \langle\iota_g([(v,x),(\tilde{v},\tilde{x})],y\rangle) \end{aligned}$$

Luego $G' \subseteq K$. Para hallar el resto de los automorfismos, consideremos que $k|_\xi = Id$, es decir,

$$k(v,x) = (k_1 v, x),$$

entonces por un lado:

$$\begin{aligned} \langle k([(v,x),(\tilde{v},\tilde{x})]),y\rangle_{\mathfrak{c}} &= \langle[(v,x),(\tilde{v},\tilde{x}],y\rangle_{\mathfrak{c}} \\ &= \langle[v,\tilde{v}],y\rangle_V \\ &= \langle\pi(y)v,\tilde{v}\rangle_V. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle[k(v,x),k(\tilde{v},\tilde{x})],y\rangle_\xi &= \langle[(k_1(v),x),(k_1(\tilde{v}),\tilde{x})],y\rangle_\xi \\ &= \langle\pi(y)k_1(v),k_1(\tilde{v})\rangle_V \\ &= \langle k_1^{-1}\circ\pi(y)\circ k_1(v),\tilde{v}\rangle_V \end{aligned}$$

Como k es automorfirmo de álgebras de Lie se cumple que,

$$\langle k_1^{-1}\circ\pi(y)\circ k_1(v),\tilde{v}\rangle = \langle\pi(y)v,\tilde{v}\rangle, \quad \forall\ v,\tilde{v} \in V.$$

Luego $\pi(y) = k_1^{-1} \circ \pi(y) \circ k_1$ para toda y, y por lo tanto k_1 resulta operador de entrelazamiento de (π, V).

Si denotamos por $U_0 = \{$operadores de entrelazamiento de $(\pi, V)\}$. Notemos que el operador identidad $I \in U_0$. Sea U a la componente conexa que contiene a la identidad, entonces

$$G' \times U \subseteq K.$$

Más aún, son iguales (ver [23]).

Además tenemos el siguiente resultado (Teorema 2, [23]).

Teorema 5.1.1. *Si N es un grupo de Lie 2-pasos nilpotente, K subgrupo de $Aut(N)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *(K^0, N) es un par de Gelfand,*

2. *(K, N) es un par de Gelfand,*

donde $K^0 = G' \times U^0$ es la componente conexa de K que contiene a la identidad I y U^0 es la componente conexa de U que contiene a la identidad.

Observación 5.1.2. En esta tesis consideraremos K subgrupo de $Aut(N)$ conexo, es decir, llamaremos por K a $K^0 = G' \times U^0$.

5.2. Familia de pares de Gelfand $(K, N(\mathfrak{g}, V))$

El grupo $N(\mathfrak{g}, V)$ se dice *descomponible* si es el producto directo de grupos de Lie de la forma

$$N(\mathfrak{g}, V) = N(\mathfrak{h}_1, V_1) \times N(\mathfrak{h}_2, V_2).$$

De otra manera decimos que $N(\mathfrak{g}, V)$ es *indescomponible.*

La lista de pares de Gelfand $(G' \times U, N(\mathfrak{g}, V))$ donde $N(\mathfrak{g}, V)$ es indescomponible es la siguiente:

(I) $(SU(2) \times Sp(n), N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n))$, $n \geq 1$, donde $\mathfrak{su}(2)$ actúa sobre $(\mathbb{C}^2)^n$ como $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ actúa componente a componente sobre $\mathbb{H}^n$ por el producto de cuaterniones a la izquierda, donde $\mathbb{H}$ denota los cuaterniones y $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ los cuaterniones imaginarios. (De tipo Heisenberg)

(II) $(SU(2) \times Sp(n), N(\mathfrak{su}(2), \mathbb{R}^3 \oplus (\mathbb{C}^2)^n))$, $n \geq 0$, donde $\mathfrak{su}(2)$ actúa como $\mathfrak{so}(3)$ por rotaciones sobre $\mathbb{R}^3$, y $\mathfrak{su}(2)$ actúa componente a componente sobre $(\mathbb{C}^2)^n$ en la manera estándar.

(III) $(Spin(4) \times Sp(k_1) \times Sp(k_2), N(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2}))$, $k_1 + k_2 \geq 1$, donde el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4 = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ denota la representación estándar de $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ y la primer copia de $\mathfrak{su}(2)$ actúa sólo sobre $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$ y la segunda copia sólo sobre $(\mathbb{C}^2)^{k_2}$.

(IV) $(Sp(2) \times Sp(n), N(\mathfrak{sp}(2), (\mathbb{C}^4)^n)$, $n \geq 1$, donde $\mathfrak{sp}(2)$ actúa componente a componente sobre $(\mathbb{H}^2)^n$ de la manera estándar (identificando $\mathbb{H}^2$ con $\mathbb{C}^4$).

(V) $(SU(n) \times \mathbb{S}^1, N(\mathfrak{su}(n), \mathbb{C}^n))$, $n \geq 3$, donde $\mathbb{C}^n$ denota la representación estándar de $\mathfrak{su}(n)$ mirada como una representación real.

(VI) $(SO(n), N(\mathfrak{so}(n), \mathbb{R}^n))$, $n \geq 2$ (grupo de Lie libre dos pasos nilpotente), donde $\mathbb{R}^n$ denota la representación estándar de $\mathfrak{so}(n)$.

(VII) $(U(n), N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$, $n \geq 1$ (grupo de Heisenberg).

(VIII) $(SU(2) \times U(k) \times Sp(n), N(\mathfrak{u}(2), (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n))$, $k \geq 1, n \geq 0$, donde el centro de $\mathfrak{u}(2)$ actúa no trivialmente sólo sobre $(\mathbb{C}^2)^k$, de hecho, $(\mathbb{C}^2)^n$ denota la representación de $\mathfrak{su}(2)$ descripta en el item (I) y $\mathfrak{u}(2)$ actúa componente a componente sobre $(\mathbb{C}^2)^k$ de la manera estándar.

(IX) $(SU(n) \times \mathbb{S}^1, N(\mathfrak{u}(n), \mathbb{C}^n))$, $n \geq 3$, donde $\mathbb{C}^n$ denota la representación estándar de $\mathfrak{u}(n)$ mirada como una representación real.

(X) $(G' \times U, N(\mathfrak{g}, V))$ donde:

- $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{su}(m_\beta) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$, con α copias de $\mathfrak{su}(2)$, $m_i \geq 3$ para todo $1 \leq i \leq \beta$ y $\mathfrak{c}$ es una componente abeliana.
- $V := \mathbb{C}^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{m_\beta} \oplus \mathbb{C}^{2k_1+2n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{2k_\alpha+2n_\alpha}$, donde $k_j \geq 1$ y $n_j \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$.
- $\mathfrak{g}$ actúa sobre V como sigue: para cada $1 \leq i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{c}$ hay un subespacio maximal, denotado por $\mathfrak{c}_i$, y $\dim(\mathfrak{c}_i) = 1$, actuando no trivialmente sólo sobre $\mathbb{C}^{m_i}$ (como la representación definida en el item (V)) y para $\beta+1 \leq i \leq \beta+\alpha$, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa no trivialmente sólo sobre $\mathbb{C}^{2k_i+2n_i}$ (como la representación definida en el item (VIII)).
- $U := \mathbb{S}^1 \times \cdots \mathbb{S}^1 \times U(k_1) \times sp(n_1) \times \cdots \times U(k_\alpha) \times Sp(n_\alpha)$, con β copias de $\mathbb{S}^1$.

En este trabajo sólo consideraremos los grupos $N(\mathfrak{g}, V)$ que tienen *representaciones de cuadrado integrable*; esta condición se cumple para todos $N(\mathfrak{g}, V)$ en esta familia, con excepción de dos casos: caso II y caso VI con n impar, como se puede ver en [35], páginas 339–341.

5.3. Representaciones de $N(\mathfrak{g}, V)$

Sea N el grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{g}$ definido como en la sección anterior, y métrica Riemanniana invariante a izquierda deteminada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}$. El grupo N actúa en $\mathfrak{n}$ por la acción adjunta Ad. También N actúa en $\mathfrak{n}^*$, el espacio dual de $\mathfrak{n}$, por la representación $Ad^*(n)\lambda = \lambda \circ Ad(n^{-1})$. Fijado $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ no trivial, sea $O_\lambda := \{Ad^*(n)\lambda : n \in N\}$ su órbita coadjunta.

Denotamos por $\widehat{N}$ al conjunto de clases de equivalencia de las representaciones unitarias e irreducibles de N. Por teoría de Kirillov existe una correspondencia entre $\widehat{N}$ y el conjunto de órbitas coadjuntas. En efecto, sea

$$B_\lambda(x, y) := \lambda([x, y]), \; x, y \in \mathfrak{n}. \tag{5.2}$$

Sea $\mathfrak{M}_\lambda$ el subespacio isotrópico maximal de B_λ en $\mathfrak{n}$ y sea $M_\lambda = \exp(\mathfrak{M}_\lambda)$. Definimos en M_λ el caracter $\chi_\lambda(\exp y) = e^{i\lambda(y)}$, la representación irreducible correspondiente a O_λ es la representación inducida por $\rho_\lambda := Ind_{M_\Lambda}^N(\chi_\lambda)$.

Sea Z el centro de N. Recordemos que una representación unitaria e irreducible se dice de cuadrado integrable si sus entradas matriciales están en $L^2(N/Z)$, donde la integración sobre N/Z es definida como en (1.12). Denotamos por $\widehat{N}_{sq}$ al conjunto de $\widehat{N}$ de clases de cuadrado integrable. Por la teoría de Moore-Wolf tenemos los siguientes hechos:

(I) Si $\rho_\lambda \in \widehat{N}$ tiene entradas matriciales en $L^2(N/Z)$, entonces $\rho_\lambda \in \widehat{N}_{sq}$.

(II) Si N tiene representaciones de cuadrado integrable entonces su medida de Plancherel está concentrada en $\widehat{N}_{sq}$.

Sea $x_\lambda \in \mathfrak{c}$ el representante de $\lambda_{|\mathfrak{c}}$, esto es $\lambda(y) = \langle y, x_\lambda \rangle$ para todo $y \in \mathfrak{c}$, y denotamos por $\mathfrak{c}_\lambda$ al núcleo de $\lambda_{|\mathfrak{c}}$. Si ρ_λ es una representación de cuadrado integrable entonces B_λ es no degenerada sobre V, y su órbita es maximal, esto es

$$O_\lambda = \lambda_{|\mathfrak{c}} \oplus V^*.$$

En efecto, sea $\mathfrak{a}_\lambda$ el subespacio de V donde B_λ es degenerada y sea $\mathfrak{b}_\lambda$ el complemento de $\mathfrak{a}_\lambda$ en V. Consideremos

$$\mathfrak{n}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda \oplus \mathfrak{b}_\lambda \oplus \mathbb{R}x_\lambda \quad \text{y} \quad N_\lambda := \exp(\mathfrak{n}_\lambda).$$

Equipamos a $\mathfrak{a}_\lambda$ con el corchete de Lie trivial y a $\mathfrak{h}_\lambda := \mathfrak{b}_\lambda \oplus \mathbb{R}x_\lambda$ con el corchete de Lie dado por

$$[u, v]_{\mathfrak{h}_\lambda} = B_\lambda(u, v)\, y_\lambda, \; u, v \in \mathfrak{b}_\lambda, \; y_\lambda := \frac{x_\lambda}{|x_{\lambda|}}.$$

Es claro que $\mathfrak{h}_\lambda$ es un álgebra de Heisenberg. Sea H_λ el correspondiente grupo de Heisenberg, y definimos $A_\lambda := \exp(\mathfrak{a}_\lambda)$. Como la representación ρ_λ es trivial sobre $\exp(\mathfrak{c}_\lambda)$, estos factores se anulan sobre H_λ. Identificando N_λ con $A_\lambda \times H_\lambda$, podemos escribir $\rho_\lambda(a,n) = \chi(a)\,\rho'_\lambda(n)$ donde χ es un caracter unitario de A_λ y ρ'_λ es una representación irreducible de H_λ. Entonces ρ_λ no puede ser una representación de cuadrado integrable a menos que $\mathfrak{a}_\lambda = 0$.

La afirmación recíproca es también verdadera: si B_λ es no degenerada sobre V (y entonces O_λ es maximal), entonces ρ_λ da lugar a una representación irreducible N_λ porque λ restringida a $\mathfrak{c}_\lambda$ es trivial. En este caso, N_λ es un grupo de Heisenberg y toda representación irreducible de dimensión finita de N_λ es cuadrado integrable, entonces es ρ_λ.

Este es un caso particular del siguiente resultado de la teoría general de Moore-Wolf: Si N es un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo, las siguientes son equivalentes:

(5.3)

(I) ρ_λ es una representación de N de cuadrado integrable.

(II) La órbita O_λ está determinada por $\lambda_{|_\mathfrak{c}}$.

(III) B_λ es no degenerada sobre $\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$.

Sea $\mathfrak{c}_\lambda = Ker(\lambda_{|_\mathfrak{g}})$. Como λ restringida a $\mathfrak{c}_\lambda$ es trivial, la representación ρ_λ es una representación irreducible sobre N_λ, y la acción metapléctica de K_{ρ_λ} coincide con la acción metapléctica de K_λ definida en (3.7). Más aún, si π_s denota la representación irreducible de N_λ tal que $\pi_s(0,t) = e^{ist}$ realizada en el espacio de Fock definida en (3.6), tenemos que

$$\rho_\lambda(0,z) = \rho_\lambda(0, \langle z, y_\lambda\rangle y_\lambda) = e^{i\langle z,y_\lambda\rangle\lambda(y_\lambda)} = e^{i|\lambda|\langle z,y_\lambda\rangle},$$

esto es $\rho_\lambda(0,z) = \pi_{|\lambda|}(0, \langle z, y_\lambda\rangle)$ y por lo tanto

$$\rho_\lambda(v,z) = \pi_{|\lambda|}(v, \langle z, y_\lambda\rangle).$$

Luego de describir las representaciones irreducibles de N a partir de las representaciones del grupo de Heisenberg, comencemos a estudiar las representaciones irreducibles de $K \ltimes N$.

5.4. Representaciones del Producto Semidirecto $K \ltimes N$

Sea $(\rho_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ la representación correspondiente a $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. Dado $k \in K$, $n \in N$, sea

$$\rho_\lambda^k(n) := \rho_\lambda(k \cdot n).$$

Entonces ρ_λ^k es otra representación de N actuando en $\mathcal{H}_\lambda$.

Definimos el estabilizador de ρ_λ como

$$K_{\rho_\lambda} := \{k \in K : \rho_\lambda^k \sim \rho_\lambda\}.$$

Para $k \in K_{\rho_\lambda}$ existe un operador unitario $\varpi_\lambda(k)$ que entrelaza ρ_λ y ρ_λ^k. Esto da lugar a una representación ϖ_λ definida sobre K_{ρ_λ}, llamada la representación metapléctica.

La acción de K por automorfismos sobre $\mathfrak{n}$ induce una acción de K sobre $\mathfrak{n}^*$ dada por

$$k \cdot \lambda(n) := \lambda(k^{-1} \cdot n),$$

entonces $K_{\rho_\lambda} = K_\lambda := \{k \in K : k \cdot \lambda \in O_\lambda\}$.

Mackey fue quien describió las representaciones unitarias e irreducibles de $K \ltimes N$ con N nilpotente y K subgrupo de automorfismos de N a partir de representaciones unitarias e irreducibles de K y de N. A continuación presentaremos esta teoría.

Dada (σ, V) una representación irreducible de K_λ, sea

$$\nu_\lambda : K_\lambda \ltimes N \to H_\lambda \times V$$

dada por $\nu_\lambda(k, n) = \sigma(k) \otimes \varpi_\lambda(k)\rho_\lambda(n)$. Definimos

$$\kappa_\lambda = Ind(\nu_\lambda)_{K_\lambda \ltimes N}^{K \ltimes N}.$$

El criterio de Mackey establece que todas las representaciones irreducibles de $K \ltimes N$ son de esta forma, salvo clases de equivalencias.

Sea $x_\lambda \in \mathfrak{g}$ el vector que realiza a $\lambda_{|_\mathfrak{g}}$, esto es $\lambda(y) = \langle y, x_\lambda \rangle$ para toda $y \in \mathfrak{g}$. Como la clase de equivalencia de ρ_λ depende solamente de $\lambda_{|_\mathfrak{g}}$, entonces K_{ρ_λ} coincide con K_{x_λ} donde K_{x_λ} es el estabilizador de x_λ, esto es

$$K_{x_\lambda} := \{k \in K : k \cdot x_\lambda = x_\lambda\}.$$

En efecto, en [35] se muestra que si ρ_λ es una representación de cuadrado integrable, entonces $\rho_\lambda^k \sim \rho_{k\cdot\lambda}$ y $k \cdot O_\lambda = O_{k\cdot\lambda}$. Por teoría de Wolf sabemos que $O\lambda$ y $O_{k\cdot\lambda}$ están determinadas por $\lambda_{|_\mathfrak{z}}$ y $k \cdot \lambda_{|_\mathfrak{z}}$, respectivamente. Luego,

$$K_\lambda = \{k \in K : k \cdot \lambda_{|_\mathfrak{z}} = \lambda_{|_\mathfrak{z}}\} = \{k \in K : k \cdot x_\lambda = x_\lambda\} = K_{x_\lambda}$$

Notemos que para $k \in K_\lambda$ y $u, v \in V$, tenemos que

$$B_\lambda (k \cdot u, k \cdot v) = \langle x_\lambda, [k \cdot u, k \cdot v] \rangle = \langle x_\lambda, k [u, v] \rangle = \left\langle k^{-1} \cdot x_\lambda, [u, v] \right\rangle = B_\lambda (u, v) .$$

Entonces K_λ está contenido en el grupo simpléctico $Sp(B_\lambda)$.

Dado $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ fijo, K_λ es un grupo compacto, luego toda representación unitaria e irreducible de K_λ es finitamente dimensional. Además, toda representación unitaria de K_λ se puede descomponer como una suma directa de representaciones irreducibles; en particular

$$(\varpi, \mathcal{H}_\lambda) = \bigoplus_i W_{\lambda,i}$$

con $\dim(W_{\lambda,i}) < \infty$ para toda i.

Definimos $\varpi_i = \varpi_{|_{W_{\lambda,i}}}$. De manera similar a la demostración de la Afirmación 3.8, se puede ver que la representación $(\sigma(k) \otimes \varpi_\lambda(k), \mathcal{H}_\lambda \otimes V)$ tiene un vector K_λ-fijo por cada vez que σ aparece en la descomposición en componentes irreducibles de ϖ'_λ.

Sabiendo que $(\varpi'_{\lambda i} \otimes \varpi_\lambda, W_i^* \otimes \mathcal{H})$ tiene un vector K_λ-fijo, es fácil ver que $\varpi_{\lambda i} \otimes \varpi_\lambda \rho_\lambda$ también tiene un vector K_λ-fijo. Más aún, las representaciones de la forma

$$\nu_{\lambda,i}(k,n) = \varpi'_{\lambda i}(k) \otimes \varpi_\lambda(k)\rho_\lambda(n) \tag{5.4}$$

son todas las representaciones irreducibles de $K_\lambda \ltimes N$ irreducibles que tienen al menos un vector K_λ-fijo.

Luego, si consideramos todas las representaciones de la forma (5.4), se sigue que (K_λ, N) es un par de Gelfand si y sólo si ϖ_λ es libre de multiplicidad como K_λ-módulo.

Sea $y_\lambda := \frac{x_\lambda}{|x_\lambda|}$, y sea N_λ como antes el grupo de Heisenberg con álgebra de Lie $\mathfrak{n}_\lambda = \mathbb{R}y_\lambda \oplus V$ y corchete de Lie

$$[u,v]_\lambda = B_\lambda\,(u,v)\,y_\lambda,\; u,v \in V.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.4.1 (Reducción a un Heisenberg)**.** (K,N) *es un par de Gelfand si y sólo si* (K_λ, N_λ) *es un par de Gelfand pp*$[\rho_\lambda] \in \hat{N}_{sq}$*, esto es, pp*$\lambda \in \mathfrak{g}^*$*.*

Demostración. Probaremos sólo la recíproca. La ida se encuentra en [35].

Sean $f_1, f_2 \in L(G)^K$, entonces f_1 y f_2 coinciden con funciones definidas sobre N que son K-invariantes a izquierda. Supongamos que (K_λ, N_λ) es un par de Gelfand pp$\lambda \in \mathfrak{g}^*$, entonces la representación metapléctica ϖ_λ se descompone libre de multiplicidad como K_λ-módulo. Notemos que $\pi_\lambda(f_1)$ y $\pi_\lambda(f_2)$ son operadores que conmutan con la proyección sobre el espacio H_{K_λ} de vectores K_λ-fijos,

$$P_\lambda : C_c(G) \to C_c^{K_\lambda}(G)$$

$$P_\lambda(f)(g) = \int_{K_\lambda}\int_{K_\lambda} f(kgk')dkdk'.$$

Como $\dim(H_{K_\lambda}) = 1$, $\pi(f_1)\pi(f_2) = \pi(f_2)\pi(f_1)$. Luego

$$\pi_\lambda(f_1 * f_2) = \pi_\lambda(f_1)\pi_\lambda(f_2) = \pi_\lambda(f_2)\pi_\lambda(f_1) = \pi_\lambda(f_2 * f_1).$$

Por Teorema de Plancherel 2.4.4, $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, y esto concluye la prueba para la recíproca. $\square$

Notemos que, como la representación metaplectica definida sobre K_λ coincide con la definida en (3.7). Si (K_λ, N) es par de Gelfand entonces (K_λ, N_λ) también lo es. Por otra parte, por el el criterio de reducción a un Heisenberg, (K_λ, N_λ) es par de Gelfand para todo $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ si y sólo si, (K,N) es par de Gelfand.

El resultado que completa este hecho es el siguiente, y está probado en [3].

Teorema 5.4.2. (K,N) *resulta par de Gelfand si y sólo si la representación metapléctica* ϖ_λ *es libre de multiplicidad para todo* $\lambda \in \mathfrak{n}^*$*.*

Para $j \in \Lambda$, sea $d_j = \dim(W_{\lambda,j})$ y sea $\{v_l^j\}_{l=1}^{d_j}$ una base ortonormal de $W_{\lambda,j}$. Definimos

$$\psi_{x_\lambda,j}(n) = \frac{1}{d_j}\sum_{l=1}^{d_j} \langle \rho_\lambda(n)v_l^j, v_l^j\rangle. \tag{5.5}$$

5.5. Fórmula de Plancherel y fórmula de inversión para N nilpotente

Dado un grupo de Lie nilpotente N, podemos definir el espacio de funciones Schwartz $\mathcal{S}(N)$. Informalmente, el espacio de Schwartz es el espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas decrecen rápidamente. Primero recordemos como se define el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ usamos la notación $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ y $D^\beta f(x) = \frac{d}{dx_1^{\beta_1}} \cdots \frac{d}{dx_n^{\beta_n}} f(x)$.

Definición 5.5.1. El *espacio de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||f||_{\alpha,\beta} < \infty \text{ para toda } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\},$$

donde $||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$.

Sea N un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Definimos el espacio de funciones Schwartz sobre N como la imagen vía la exponencial del espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$. Si $\mathfrak{n}$ es un espacio vectorial n-dimensional, definimos $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ vía la identificación de $\mathfrak{n}$ con $\mathbb{R}^n$.

El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(N)$ satisface las siguientes propiedades:

- $\mathcal{S}(N) \subseteq L^p(N)$ para todo $p \geq 1$.
- $\mathcal{S}(N)$ es un espacio de Frechet.
- $C_c^\infty(N) \subseteq \mathcal{S}(G)$.

Comenzaremos esta sección recordando algunos resultados de la teoría de Moore-Wolf desarrollada en [25], la cual aplicaremos a nuestros grupos $N(\mathfrak{g},V)$, que llamaremos N. Para ello recordaremos brevemente la definición de k-formas.

Dado V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, definimos el álgebra exterior $\Lambda(V)$ como el espacio cociente entre el álgebra tensorial $T(V)$ y el ideal bilátero I generado por todos los elementos de la forma $x \otimes x$ con $x \in V$. El producto exterior Λ de dos elementos de $\Lambda(V)$ es el inducido por el producto tensorial $\otimes$. Definimos una k-forma β como una aplicación tal que para todo $g \in G$, $\beta(g) \in \Lambda^k T_g^* G$, donde $T_g G$ es el espacio tangente a G en el punto g y $T_g^* G$ su espacio dual.

Como vimos en el Ejemplo (1.3.7), el producto en N está dado por

$$(x, v)(x_0, v_0) = (x + x_0 + \frac{1}{2}[v, v_0], v + v_0)$$

para $v, v_0 \in V$ y $x, x_0 \in \mathfrak{g}$. Sea dn una medida de Haar definida sobre N. En (1.3.7)también vimos que si denotamos por dx (resp. dv) la medida de Lebesgue definida sobre $\mathfrak{g}$ (resp. definida sobre V) entonces $dn = dxdv$. Elegimos medidas de Lebesgue dn^*, dx^* y dv^* sobre

$\mathfrak{n}^*, \mathfrak{g}^*$ y V^* respectivamente, tal que la transformada de Fourier de funciones en $\mathfrak{n}, \mathfrak{g}$ o V sobre funciones en $\mathfrak{n}^*, \mathfrak{g}^*$, V^* sea una isometría.

Dada $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, sea $e_\lambda(\phi, \psi)$ la entrada matricial asociada a los vectores $\phi, \psi \in H_\lambda$, es decir,

$$e_\lambda(\phi, \psi)(g) = \langle \rho_\lambda(g)\phi, \psi \rangle.$$

Entonces según Teorema 1.4.33, existe un número positivo $d(\lambda)$ tal que

$$\int_{N/Z} e_\lambda(\phi_1, \psi_1)(g)\overline{e_\lambda(\phi_2, \psi_2)(g)}d\rho_\lambda(\dot{g}) = d(\lambda)^{-1}\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \overline{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle}. \tag{5.6}$$

El numero $d(\lambda)$ es llamado el grado formal de $(\rho_\lambda, H_\lambda)$. Este número depende por supuesto de la elección de la medida de Haar $d\dot{\mu}$ de N/Z, de hecho si seleccionamos otra medida de Haar $c\, d\dot{\mu}$, entonces el grado formal de las representaciones cambian por un factor c^{-1}.

Sea $\mathfrak{g}^\perp$ el anulador de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{n}^*$, al cual identificamos naturalmente con V^*. De acuerdo a la teoría de Moore-Wolf, el caracter ζ_λ de Z asociado con la representación $(\rho_\lambda, H_\lambda)$ es

$$\zeta_\lambda(z) = \exp(2\pi i\lambda(\log(z))).$$

Si $\lambda_2 \in O(\lambda_1)$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2$ sobre $\mathfrak{g}$, y O_{λ_1} está contenido en el hiperplano afín $\lambda_1 + \mathfrak{g}^\perp = \lambda_2 + \mathfrak{g}^\perp$. Por lo tanto el hiperplano depende sólo de la restricción de λ a $\mathfrak{g}$, al cual llamaremos $H(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.

Para $\lambda \in \mathfrak{n}^*, u, v \in V$, sea como antes $B_\lambda(u, v) = \lambda([u, v])$. Como B_λ es una forma antisimétrica no degenerada definida sobre $V \times V$, la correspondiente 2-forma ϖ_λ es no degenerada y por lo tanto la $2m$-forma ϖ_λ^m es un múltiplo de dv, ya que el espacio de $2m$-formas tiene dimensión 1.

El Pfaffiano $Pf\,(B_\lambda)$ de B_λ es, por definición, este múltiplo, esto es, $\varpi_\lambda^m = Pf\,(B_\lambda)\, dv$, y se cumple que $\det\left(B_{\lambda_{|V\times V}}\right) = Pf\,(B_\lambda)^2$.

Sea $P\,(\lambda) := Pf\,(B_\lambda)$. Entonces $P\,(\lambda)$ es una función polinómica homogénea sobre $\mathfrak{n}^*$. Más aún, se sigue del Lema 3.2 en [25] que $P\,(\lambda)$ depende solamente de la restricción de λ a $\mathfrak{g}$. Entonces existe un polinomio homogéneo sobre $\mathfrak{g}^*$, también denotado por P, tal que $P\,(\lambda) = P\left(\lambda_{|\mathfrak{g}}\right)$.

Sea $\mathcal{V} = \{\lambda : P\,(\lambda) \neq 0\}$. Por Teorema 2 en [25] sabemos que hay una correspondencia entre órbitas coadjuntas O_λ tal que $P\,(\lambda) \neq 0$ y el conjunto de clases de equivalencias de representaciones de cuadrado integrable. Más aún, si ϕ es el mapa que envía $\lambda_{|\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}^* \setminus \mathcal{V}$ a $[\rho_\lambda] \in \widehat{N}_{sq}$, entonces ϕ es un homeomorfismo de $\mathfrak{g}^* \setminus \mathcal{V}$ con la topología natural a la topología de representaciones.

Asumimos que N tiene representaciones de cuadrado integrable. Entonces en Teorema 6 de [25] está probado que la medida de Plancherel está concentrada en $\widehat{N}_{sq}$ y su imagen bajo ϕ^{-1} es $m!\, 2^m P\,(\lambda)\, dx^*\,(\lambda)$ donde dx^* es la medida de Lebesgue elegida arriba.

Como estamos interesados en la fórmula de inversión para una función Schwartz sobre N, recordamos algunas líneas sobre la prueba.

La forma B_λ determina un isomorfismo T_B de V en V^* dado por $T_B\,(u)\,(v) = B_\lambda\,(u, v)$, para $u, v \in V$.

Consideremos ϖ_λ^{m*} la forma de volumen definida sobre V^* tal que la transformada de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ de $L^2(V)$ en $L^2(V^*)$

$$\hat{f}(x) = \int_V f(v) \exp(2\pi i x(v)) d\alpha(v), \quad x \in V^*$$

sea una isometría.

Para $\lambda_{|\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}^* \setminus \mathcal{V}$, la órbita O_λ es el hiperplano $\left(\lambda_{|\mathfrak{g}}\right) + V^*$ de $\mathfrak{n}^*$ (una vez que hayamos identificado $\mathfrak{g}^\perp$ naturalmente con V^*). Entonces $B_{\lambda_{|V\times V}}$ es transportado vía T_B a una forma bilineal en el espacio tangente de O_λ en el punto $\lambda_{|\mathfrak{g}}$, el cual define una 2-forma ϖ_λ^* y por ende $(\varpi_\lambda^*)^m$ determina una medida sobre O_λ (o una medida en $\mathfrak{n}^*$ soportada en O_λ,) llamada la medida *canónica* sobre O_λ y que podemos denotar por μ_λ. Se sigue de Lema 3.1 en [25] que si dv^* es la medida de Lebesgue sobre V^* y dv_λ es la medida trasladada en O_λ, entonces $\mu_\lambda = |P(\lambda)|^{-1} dv_\lambda$.

Sea f una función Schwartz sobre N y sea $f_0(y) := f(\exp y)$ la correspondiente función definida sobre $\mathfrak{n}$. Por teoría general

$$tr(\rho_\lambda(f)) := \Theta(f) = c^{-1} \int_{O_\lambda} \widehat{f_0}(y)\, d\mu_\lambda(y),$$

donde $\widehat{f_0}(y) := \int_n f(x) e^{2\pi i y(x)} dx$ y

$$f(e) = \int_{\mathfrak{g}^*\setminus\mathcal{V}} tr(\rho_\lambda(f))\, d\mu(\lambda),$$

donde $d\mu$ es la medida de Plancherel y $c = m!\ 2^m$.

Entonces, por un lado,

$$f(e) = c^{-1} \int_{\mathfrak{g}^*\setminus\mathcal{V}} \left(\int \widehat{f_0}(y) |P(\lambda)|^{-1} dv_\lambda(y) \right) d\mu(\lambda),$$

y por la fórmula de inversión en $\mathfrak{n}^*$,

$$f(e) = \int_{\mathfrak{g}^*\setminus\mathcal{V}} \left(\int \widehat{f_0}(y)\, dv_\lambda(y) \right) dx^*(\lambda).$$

Luego $d\mu = m!\ 2^m |P(\lambda)|\, dx^*(\lambda)$.

Entonces, la fórmula de inversión para una función Schwartz f es

$$f(n) = m!\ 2^m \int_{\mathfrak{g}^*} tr(\rho_\lambda(f)\rho_\lambda(n)) |P(\lambda)| dx^*(\lambda), \tag{5.7}$$

para $n \in N$.

Decomponiendo la acción metapléctica de K_λ en los espacios de Fock como

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{j\in\Lambda} W_{\lambda,j},$$

obtenemos por un cálculo sencillo que

$$f(n) = m!\, 2^m \sum_{j\in\Lambda} d_j \int_{\mathfrak{g}} f * \psi_{x_\lambda,j}(n) \left|P(\lambda)\right| dx^*(\lambda) \tag{5.8}$$

donde $\psi_{x_\lambda,j}$ es defina como en (5.5).

De ahora en adelante, usaremos la notación $P(\lambda)$ (resp. $\rho(\lambda)$, $\psi_{\lambda,j}$, etc) o $P(x_\lambda)$ (resp. $\rho(x_\lambda)$, $\psi_{x_\lambda,j}$, etc) indistintamente.

Lema 5.5.2. *Con las mismas hipótesis de arriba, tenemos que $P(Ad(g)\,x_\lambda) = P(x_\lambda)$, para todo $g \in G$ y $x_\lambda \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Como $B_\lambda(u,v) = \lambda([u,v]) = \langle [u,v], x_\lambda\rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned} B_{Ad(g)x_\lambda}(u,v) &= \langle [u,v], Ad(g)\,x_\lambda\rangle \\ &= \left\langle Ad\left(g^{-1}\right)[u,v], x_\lambda\right\rangle \\ &= \left\langle \left[\pi\left(g^{-1}\right)u, \pi\left(g^{-1}\right)v\right], x_\lambda\right\rangle \\ &= \lambda\left(\left[\pi\left(g^{-1}\right)u, \pi\left(g^{-1}\right)v\right]\right), \end{aligned}$$

donde en la tercer igualdad usamos que $(Ad(g), \pi(g))$ es un automorfismo de N. Entonces $P(Ad(g)\,x_\lambda) = P(x_\lambda)$, como deseamos. □

5.6. Un isomorfismo muy particular

Fijamos un toro maximal T de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y Δ el sistema de raíces asociadas. Sea $\mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}$ y sea $\mathfrak{C}$ una cámara de Weyl de $\mathfrak{h}_R$. Consideremos el mapa

$$\Phi : G \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

definido por

$$\Phi(g,z) = Ad(g)z.$$

Este mapa es suryectivo ya que dado $x \in \mathfrak{g}$, hay alguna subálgebra de Cartan que lo contiene y dos subálgebras de Cartan son conjugadas por $Ad(g)$, para algún $g \in G$. Más aún,

(I) El mapa $\Phi : G \times \mathfrak{h}_r \to \mathfrak{g}_r$ es suryectivo. En efecto, sea $y \in \mathfrak{g}_r$, entonces $y = Ad(g)\,z$, para algún $g \in G, z \in \mathfrak{h}$. Como y es un elemento regular, $\beta(y) \neq 0$ para alguna raíz β de $Ad(g)\,\mathfrak{h}$. Pero $[Ad(g)\,z, Ad(g)\,x_\alpha] = \alpha(z)\,Ad(g)\,x_\alpha$ para alguna raíz α de $\mathfrak{h}$. Entonces las raíces correspondientes a $Ad(g)\,\mathfrak{h}$ son $\beta = \alpha \circ Ad(g^{-1})$, con $\alpha \in \Delta$. Luego $0 \neq \beta(y) = \alpha(z)$ lo cual implica que $z \in \mathfrak{h}_r$.

(II) Es claro que $\Phi : G/T \times \mathfrak{h}_r \to \mathfrak{g}_r$ está bien definida y es suryectiva ya que $Ad(t)\,z = z$ para toda $t \in T, z \in \mathfrak{h}$.

Ahora, con el fin de conseguir que Φ sea un difeomorfismo, restringiremos su dominio. Consideremos

$$\Phi : G/T \times i\mathfrak{C} \to \mathfrak{g}_r,$$

donde $\mathfrak{C}$ es una cámara de Weyl de $\mathfrak{h}_R$. Como $\mathfrak{h}_r = \bigcup i\mathfrak{C}_j$ y $W(T)$ permuta las cámaras, $\Phi : G/T \times i\mathfrak{C} \to \mathfrak{g}_r$ es suryectiva.

Asumamos que existen $g \in G$, y $z, z_1 \in i\mathfrak{C}$ tal que $Ad(g)\, z = z_1$. Por lo tanto $z_1 \in \mathfrak{h} \cap Ad(g)\, \mathfrak{h}$. Como z_1 es un elemento regular tenemos que $Ad(g)\, \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Entonces $Ad(g)$ permuta las cámaras de Weyl y $g \in N(T)$, el normalizador de T. Como $Ad(g)$ fija $i\mathfrak{C}$, gT es la identidad de $W(T)$ (ver [34], pág. 76, Teorema 3.10.9).

Finalmente, el mapa $\Phi : G/T \times i\mathfrak{C} \to \mathfrak{g}_r$ es un difeomorfismo. En lo que sigue hallaremos el determinante de Φ siguiendo [19], páginas 547–549.

Consideremos primero la función

$$\psi : G \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

definida por

$$\psi(g, z) = Ad(g)z.$$

El cálculo del diferencial de la función ψ será de utilidad para hallar el diferencial de la función Φ deseado.

Como el diferencial es una aplicación lineal, se tiene que

$$d\psi_{(g,z)}(y, x) = d\psi_{(g,z)}(y, 0) + d\psi_{(g,z)}(0, x).$$

Para calcular $d\psi_{(g,z)}(y, 0)$, derivemos la curva $Ad(g \exp(ry))z$ en $r = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(Ad(g\exp(ry))z) &= \frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(Ad(g)Ad(\exp(ry))z) \\
&= \frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(Ad(g)\exp(ad(ry))z) \\
&= \frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,\big(Ad(g)(z + r[y,z] + O(r^2)\big) \\
&= Ad(g)\left(\frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(z + r[y,z] + O(r^2))\right) \\
&= Ad(g)\,([y,z]) \\
&= -Ad(g)\,([z,y]) \\
&= -Ad(g)(ad(z)(y))
\end{aligned}$$

Para calcular $d\psi_{(g,z)}(0, x)$, derivemos la curva $Ad(g)(z + rx)$ en $r = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(Ad(g)(z + rx)) &= \frac{d}{dr}\,|_{r=0}\,(Ad(g)z + rAd(g)x) \\
&= Ad(g)x
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d\psi_{(g,z)}(y,x) &= (-Ad(g)ad(z)(y), Ad(g)x) \\ &= Ad(g)(-ad(z)y, x) \end{aligned}$$

El mapa ψ desciende a $G/T \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, al cual también llamamos por ψ. Podemos identificar el espacio tangente a G/T con el complemento ortogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Notemos que $\mathfrak{h}^\perp$ es invariante por $ad(z)$ para $z \in \mathfrak{h}$, en efecto, sea $w \in \mathfrak{h}^\perp$, $w = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha x_\alpha$ y,

$$\begin{aligned} ad(z)(w) &= ad(z)(\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\; x_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\; ad(z)(x_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\; \alpha(z)\; x_\alpha \in \mathfrak{h}^\perp. \end{aligned}$$

Luego podemos escribir:

$$d\psi_{(g,z)}(y,x) = Ad(g)(-ad(z)y + x),\;\; y \in \mathfrak{h}^\perp,\;\; x \in \mathfrak{h}.$$

Ahora, $d\psi$ es esencialmente un mapa de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ con matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathfrak{h}^\perp & \;\;\mathfrak{h} \end{array} \\ (d\psi)_{(g,z)} = Ad(g) & \begin{pmatrix} -ad(z)_{|_{\mathfrak{h}^\perp}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como el determinante de $Ad(g) = 1$, y G es compacto y conexo, tenemos que

$$\det\left((d\psi)_{(g,z)}\right) = \det\left(-ad(z)_{|_{\mathfrak{h}^\perp}}\right).$$

Además, se tiene que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una base de $\mathfrak{h}^\perp$ y $ad(z)_{|_{\mathfrak{h}^\perp}}(x_\alpha) = \alpha(z)x_\alpha$, se tiene que

$$ad(z)_{|_{\mathfrak{h}^\perp}} = \begin{pmatrix} \alpha(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta(z) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma(z) \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz que en la diagonal tiene $\alpha(z)$, con $\alpha \in \Delta$. Si $\#(\Delta)$ es el cardinal de Δ, entonces

$$\det\left((d\psi)_{(g,z)}\right) = (-1)^{\#(\Delta)} \prod_{\alpha\in\Delta} \alpha(z).$$

Notemos que $\det\left(d\psi_{(g,z)}\right)$ es real, ya que el sistema de raíces es finito con cardinal par, debido a que si $\alpha \in \Delta$ entonces $-\alpha \in \Delta$.

Además si consideramos
$$\Phi : G \times i\mathfrak{C} \to \mathfrak{g}_r,$$
entonces por lo visto anteriormente, Φ resulta isomorfismo, y
$$\det\left((d\Phi)_{(gT,iz)}\right) = (-1)^{\#(\Delta)} \prod_{\alpha\in\Delta} \alpha(z).$$

5.7. Análisis armónico en nilvariedades

Recordemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{c}$ donde $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y $\mathfrak{c}$ es el centro de $\mathfrak{g}$. Entonces si denotamos por $\mathfrak{g}'_r$ el conjunto de elementos regulares de $\mathfrak{g}'$, podemos considerar que la medida de Plancherel está definida sobre $\mathfrak{g}'_r \oplus \mathfrak{c}$, ya que el complemento de $\mathfrak{g}'_r$ en $\mathfrak{g}'$ tiene medida de Lebesgue cero.

Sea T un toro maximal de G' con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Denotemos por $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ y $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ las álgebra de Lie complexificadas de $\mathfrak{g}'$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, y por Δ el sistema de raíces correspondiente a $(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Sea $\mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}$ y sea $\mathfrak{C}$ una cámara de Weyl fija de $\mathfrak{h}_R$.

Sea $\Phi : G'/T \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{g}'_r$ la función definida en la sección anterior, dada por
$$\Phi(gT, x) = Ad(g)x, \text{ con } g \in G', x \in \mathfrak{C}.$$
Entonces Φ es un difeomorfismo, y $\det(d\Phi_{(g,x)}) = (-1)^{\#\Delta} \prod_{\alpha\in\Delta} \alpha(x)$.

Sea $\theta(x) := |\det(d\Phi_{(g,ix)})|$. Integrando sobre $\mathfrak{g}$ en lugar de $\mathfrak{g}^*$ y usando el Teorema de cambio de variable obtenemos
$$f(n) = c\sum_{j\in\Lambda} \int_{\mathfrak{c}} \int_{G'/T} \int_{\mathfrak{C}} f * \psi_{(Ad(g)x+z),j}(n) \, |P(Ad(g)\,x+z)|\theta(x)\ dx d\dot{g} dz.$$
y por Lema 5.5.2
$$f(n) = c\sum_{j\in\Lambda} \int_{\mathfrak{c}} \int_{\mathfrak{C}} f * \left(\int_{G'/T} \psi_{Ad(g)(x+z),j}(n)\, d\dot{g}\right) |P(x+z)|\, \theta(x)\ dxdz. \tag{5.9}$$

Recordemos que para $k \in K$, ρ^k_λ es la representación irreducible de N correspondiente a $k\cdot\lambda$. Si $\lambda_{|\mathfrak{g}}$ está representada por el vector $x+z$ entonces $k\cdot\lambda$ se corresponde con $k\cdot(x+z)$. Como $(Ad(g), \pi(g))$ es un automorfismo de N, tenemos que
$$\rho_{Ad(g)(x+z)}(n) = \rho^{Ad(g)}_{x+z}(n) = \rho_{x+z}(Ad(g)\cdot n),$$
entonces
$$\Psi_{Ad(g)(x+z),j}(n) = \Psi_{x+z,j}(Ad(g)\cdot n).$$

Queremos expresar (5.9) en términos del conjunto de funciones esféricas asociadas al par (K, N).

Recordemos que $C^K_c(N)$ es el álgebra de funciones continuas K-bi-invariantes sobre N con soporte compacto, y que decimos que una función continua K-bi-invariante ϕ sobre N es una *función esferica* si el funcional lineal
$$\chi(f) := \int_N f(n)\phi(n^{-1})\ dn$$

es un caracter no trivial de $C_c^K(N)$. Es bien sabido que el conjunto de funciones esféricas acotadas se puede identificar con los homomorfismos del espacio de funciones integrables K-bi-invariantes sobre N vía el mapa

$$\phi \mapsto \chi(f) = \int_N f(n)\phi(n^{-1})\, dn.$$

Lema 5.7.1. *(a) Si $x_\lambda = x' + z$, con $x' \in \mathfrak{g}'_r$, $x' \neq 0$ y $z \in \mathfrak{c}$, entonces $K/K_\lambda = G'/T$. Además,*

$$\phi_{\lambda,j}(n) := \int_{G'/T} \psi_{Ad(g)(x'+z),j}(n)\, d\dot{g}$$

es una función esférica de (K,N).

(b) Si $x_\lambda \in \mathfrak{c}$, entonces $K_\lambda = K$. En particular, si $\lambda \in \mathfrak{c}^*$, $\phi_{\lambda,j} = \psi_{\lambda,j}$.

Demostración.

(a) Sea $C_{G'}(x_\lambda)$ el centralizador de x_λ en G', entonces

$$C_{G'}(x_\lambda) = \{g \in G' : Ad(g)\, x_\lambda = x_\lambda\}.$$

Como el conjunto U de operadores de entrelazamiento de π actúa sobre $\mathfrak{g}$ por la identidad, $K_\lambda = C_{G'}(x_\lambda) \times U$. Además, como x' es un elemento regular, $x' \notin \mathfrak{c}$, $C_{G'}(x_\lambda) = C_{G'}(x')$ es un toro maximal de G'.

La descripción de las funciones esféricas acotadas de un par de Gelfand (K,N) está dada por el Teorema 8.7 en [5]. Sea $(\rho, H_\lambda) \in \widehat{N}$, consideremos la descomposición $H_\lambda = \bigoplus_{j\in\Lambda} W_{j,\lambda}$ de la representación metapléctica de K_{ρ_λ} en componentes irreducibles y $\{v_1, \cdots, v_d\}$ una base ortonormal de $W_{\lambda,j}$. Entonces la prueba del Teorema 8.7 muestra que las funciones esféricas están definidas por

$$\phi_{\lambda,j}(n) = \int_{K/K_{\rho_\lambda}} \sum_{l=1}^{d_j} \langle \rho_\lambda(\dot{k}\cdot n)v_l, v_l\rangle\, d\dot{k}, \tag{5.10}$$

donde $d\dot{k}$ denota la medida K-invariante sobre K/K_{ρ_λ}.

En nuestro caso, $K_{\rho_\lambda} = K_\lambda$, $K/K_\lambda = G'/T$ y

$$\int_{G'/T} \Psi_{Ad(g)(x'+z),j}(n)\, d\dot{g} = \int_{G'/T} \Psi_{x'+z,j}(Ad(g)\cdot n)\, d\dot{g} = \int_{K/K_\lambda} \Psi_{x'+z,j}(k\cdot n)\, d\dot{k},$$

lo cual implica la afirmación (a).

(b) Como antes, $K_\lambda = C_{G'}(x_\lambda) \times U$, y como $x_\lambda \in \mathfrak{c}$, $C_{G'}(x_\lambda) = G'$, entonces $K_\lambda = K$.

□

Observación 5.7.2. Para $x \in \mathfrak{C}$, $z \in \mathfrak{c}$, es más apropiado denotar por $\phi_{x,z,j}$ las funciones esféricas correspondientes a $x_\lambda = x + z$. Pero esta notación es demasiado pesada y preferimos denotarlas por $\phi_{x,z,j} := \phi_{\lambda,j}$.

Denotamos por $V_{\mathbb{C}}$ la complexificación de V y por $(\pi_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ la extensión de π a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Sea

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_r W_r$$

la descomposición en subespacios irreducibles y sea $W_r = \bigoplus_j W^{\nu_r^j}$ la descomposición en espacios pesos, esto es

$$W^{\nu_r^j} := \{v \in W_r \mid \pi_{\mathbb{C}}(x)(v) = \nu_r^j(x)v \text{ para todo } x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}.$$

Entonces, para $x \in \mathfrak{C}$, tenemos

$$P(x) = \prod_{r,j} |\nu_r^j(x)|^{m_r^j/2},$$

donde m_r^j es la dimensión de W_r^j. Sea ζ_r el caracter central de $\pi_{\mathbb{C}|_{W_r}}$, es decir,

$$\zeta_r = tr(\pi_{\mathbb{C}|_{W_r}}).$$

Para $z \in \mathfrak{c}$ y $x \in \mathfrak{C}$, se cumple

$$P(x+z) = \prod_{r,j} |\nu_r^j(x) + \zeta_r(z)|^{m_r^j/2}. \tag{5.11}$$

Resumiendo lo visto hasta ahora tenemos probado nuestro resultado principal.

Teorema 5.7.3. *Sea f una función Schwartz definida sobre N. Entonces*

$$f\,(n) = m!\ 2^m \sum_{j\in\Lambda} d_j \int_{\mathfrak{c}}\int_{\mathfrak{C}} f * \phi_{\lambda,j}\,(n)\,|P\,(x+z)|\ \theta(x)\,dx\,dz,$$

donde $\phi_{\lambda,j}$ es la función esférica definida como en (5.10) *y la función P es como en* (5.11)*. El soporte de la medida de Plancherel es $\Lambda \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{c}$, y la medida está dada por el producto de la medida de contar pesada y la medida $d\mu(\lambda) = |P(x+z)|\,\theta(x)\,dx\,dz$.*

Escribimos $\lambda = \lambda' + \lambda_0$, con $\lambda' \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^*$, y $\lambda_0 \in \mathfrak{c}^*$. Como una consecuencia del resultado previo obtenemos la descomposición de la acción regular sobre $L^2(N)$.

Teorema 5.7.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una de las álgebras de Lie compactas que aparece en [23] y tal que el correspondiente $N(\mathfrak{g}, V)$ tiene representaciones de cuadrado integrable. Entonces la acción regular de $K \ltimes N$ sobre $L^2(N)$ se descompone como una integral directa de componentes irreducibles por*

$$L^2\,(N) = \sum_{j\in\Lambda} \int_{\mathfrak{c}}\int_{\mathfrak{C}} \mathcal{H}_{\lambda\,,\,j}\ \ d\mu\,(\lambda)\,,$$

donde μ es la medida $\mu\,(\lambda) = |P\,(\lambda)|\,\theta(\lambda')\,d\lambda$ y $d\lambda$ es la medida de Lebesgue definida sobre $\mathfrak{c} \times \mathfrak{C}$. Más aún, la proyección sobre $\mathcal{H}_{\lambda,j}$ es $Q_{\lambda,j}(f) = f * \phi_{\lambda,j}$, donde $\phi_{\lambda,j}$ es la función esférica dada por los siguientes casos:

(i) *Si* $\lambda' \neq 0$,

$$\phi_{\lambda,j}(n) = \int_{G'/T} \psi_{\lambda,j}(\dot{g} \cdot n)\, d\dot{g}, \tag{5.12}$$

donde $g \cdot n$ *denota la acción de* G' *por automorfismos sobre* N, $d\dot{g}$ *es la medida* G'*-invariante definida sobre* G'/T *y* $\psi_{\lambda.j}$ *es como en* (5.5).

(ii) *Asumamos que* $\lambda' = 0$. *Si* $\mathfrak{g}$ *es como en el caso VIII con* $k \geq 1$ *y* $n = 0$, *caso IX y caso X con* $k_j \geq 1$ *y* $n_j = 0$ *para todo* $1 \leq j \leq \alpha$, *entonces* $\phi_{\lambda,j} = \psi_{\lambda,j}$ *con* $\psi_{\lambda,j}$ *como en* (5.5).

En caso VII, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, *y* $\phi_{\lambda,j} = \psi_{\lambda,j}$ *con* $\psi_{\lambda,j}$ *es como en* (5.5).

En los otros casos, la medida de Plancherel se anula sobre $\mathfrak{c}$.

Demostración.

(i) Se sigue del Teorema 5.7.3.

(ii) En los casos I, III, IV ,V y VI con n par, $\mathfrak{g}$ es semisimple y tiene centro trivial.

En el caso IX, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus i\mathbb{R}, V = \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, donde $\mathbb{C}^n$ denota la representación estandar de $\mathfrak{u}(n)$. Como $Ker(\pi(x))$ es trivial para todo $x \in \mathfrak{u}(n)$, se sigue que B_λ es no degenerada. Luego, la medida de Plancherel está concentrada en $\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. La expresión para las funciones esféricas se siguen del Lema 5.7.1 (b).

En el caso VIII con $k \geq 1$, $n = 0$, y caso X con $k_j \geq 1$, $n_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$ el análisis es similar al caso IX ya que π tiene centro trivial.

En el caso VIII con $k \geq 1, n > 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2) = \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathbb{R}$, $V = (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$. El centro de $\mathfrak{u}(2)$ actúa no trivialmente solamente sobre $(\mathbb{C}^2)^k$, de hecho, $\mathfrak{su}(2)$ actúa sobre $(\mathbb{C}^2)^n$ como $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ actúa componente a componente sobre $\mathbb{H}^n$ por el producto de cuaterniones a izquierda. Por lo tanto, si $t \in \mathbb{R}$, $\pi(it)(0, v) = (0, 0)$ para todo $v \in (\mathbb{C}^2)^n$, esto es, $(0, v) \in Ker(\pi(it))$. Por (5.1) y (5.2) se sigue que B_{it} es degenerada para todo $it \in i\mathbb{R}$. Entonces, por Teorema 6 en [25], la medida de Plancherel está concentrada en $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

En el caso X con $k_j \geq 1$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$ y $0 < n_{j_0}$ para algún $1 \leq j_0 \leq \alpha$ el análisis es similar al caso VIII con $n > 0$.

El caso VII se corresponde al grupo de Heisenberg, y fue probado en el Capítulo 3, Teorema 3.6.9.

□

Capítulo 6

Descripción de funciones esféricas

En este capítulo describiremos el conjunto $\mathfrak{B}$ de funciones esféricas correspondientes al conjunto de representaciones genéricas (o con medida de Plancherel full) de $N(\mathfrak{g}, V)$. Esta computación involucra integrales sobre G'/T, lo cual es difícil de calcular con excepción de algunos pocos casos. Sin embargo, obtuvimos una parametrización de $\mathfrak{B}$.

Como vimos anteriormente, la representación metapléctica ϖ_λ of K_λ está definida por (3.7). Asumimos que se descompone en componentes irreducibles como

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{j\in\Lambda} W_{\lambda,j}.$$

También probamos que

$$\rho_\lambda(v,z) = e^{i|\lambda|\langle z,y_\lambda\rangle}\pi_{|\lambda|}(v,0).$$

El conjunto de funciones esféricas de (K_λ, H_n) correspondiente a las representaciones de Fock $\pi_{|\lambda|}$ está dado por $\{\psi_{\lambda,j}\}_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, donde $\psi_{\lambda,j}$ es como en (5.5). Como,

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda(\pi(g)v, Ad(g)z) &= \pi_{|\lambda|}(0, \langle Ad(g)z, y_\lambda\rangle)\,\pi_{|\lambda|}(\pi(g)v, 0)\\
&= e^{i|\lambda|\left\langle z, Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda\right\rangle}\pi_{|\lambda|}(\pi(g)v, 0),
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\int_{G'/T}\psi_{\lambda,j}(g\cdot(v,z))\,d\dot{g} = \int_{G'/T} e^{i|\lambda|\left\langle z, Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda\right\rangle}\psi_{\lambda,j}(\pi(g)v, 0)\,d\dot{g}.$$

Por la descripción en [4] del conjunto de funciones esféricas acotadas de un par de Gelfand (K, H_n), sabemos que para $(v,t)\in H_n$ y $\lambda > 0$

$$\psi_{\lambda,j}(v,t) = e^{it\lambda}q_j\left(\lambda^{\frac{1}{2}}v\right)e^{-\frac{\lambda}{4}|v|^2},$$

donde q_j es un polinomio K-invariante con coeficientes reales. En efecto, asumamos $\lambda = 1$ y denotemos por $\mathcal{P}(V)^{\mathbb{R}}$ al álgebra de polinomios reales K-invariantes. Entonces está probado en [4] que existe una base canónica $\{p_j\}_{j\in\Lambda}$ del espacio vectorial $\mathcal{P}(V)^{\mathbb{R}}$, $p_j \in W_j := W_{j,1}$, tal que la sucesión $\{q_j\}_{j\in\Lambda}$ es obtenida de $\{p_j\}_{j\in\Lambda}$ aplicando el proceso de Gram-Schmidt con respecto de la medida $e^{-\frac{1}{4}|v|^2}dv$. Luego

$$\phi_{\lambda,j}(v,z) = e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}\left(\int_{G'/T} e^{i|\lambda|\left\langle z, Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda\right\rangle} q_j\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\pi(g)\,v\right)d\dot{g}\right).$$

Observación 6.0.1. En el caso en el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}\oplus\mathfrak{g}'$, y $y_\lambda = z_\lambda + y'_\lambda,\ z_\lambda\in\mathfrak{c},\ y'_\lambda\neq 0$, tenemos que

$$\phi_{\lambda,j}(v,z) = e^{i|\lambda|\langle z,z_\lambda\rangle}\phi_{\lambda',j}(v,z),$$

donde $|\lambda'| = |\lambda||y'_\lambda|$.

En lo que sigue, analizaremos el conjunto $\mathfrak{B}$ caso por caso. Denotamos por T_n al toro n-dimensional.

• **Caso I**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)\,, V = \mathbb{H}^n$ y $\mathfrak{n} = \mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{H}^n$. $\mathfrak{su}(2)$ es isomorfo (como álgebra no conmutativa) a

$$\mathrm{Im}(\mathbb{H}) := \{a + bi + cj + dk : a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

vía la aplicación

$$bi + cj + dk \quad\mapsto\quad \begin{pmatrix} bi & c+di \\ -c+di & -bi\end{pmatrix}.$$

La acción está definida por $q.(v_1,...,v_n) = (qv_1,...,qv_n)$, $q\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, $v = (v_1,...,v_n)\in\mathbb{H}^n$.

Luego, $\mathfrak{n} = \mathrm{Im}(\mathbb{H})\oplus\mathbb{H}^n$ es un álgebra de Lie de tipo Heisenberg. Como $G = SU(2)$ es conexo y simplemente conexo y $U = Sp(n)$ (pues la acción conmuta con todos los endomorfismos lineales de $\mathbb{H}^n$ unitarios que actúan por producto a derecha), $K = SU(2)\times Sp(n)$.

$K_\lambda = T_1\times Sp(n)$ donde

$$T_1 := \{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} : \theta\in\mathbb{R}\} \tag{6.1}$$

es un toro maximal de $SU(2)$. En (4.6) vimos que la acción natural sobre el espacio $\mathcal{P}_j(\mathbb{C}^{2n})$ de polinomios homogéneos de grado j es irreducible y la denotamos por η_j. Entonces la representación metapléctica de K_λ actuando sobre $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n})$ se descompone como

$$\varpi\downarrow K_\lambda = \oplus_{j=0}\chi_j\otimes\eta_j,$$

donde $\chi_j(\theta) = e^{-ij\theta}$. Por un argumento de trazas del producto tensorial de operadores, se tiene que

$$\psi_{\lambda,j}(v,t) = e^{it|\lambda|}L_j^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v|^2\right)e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}$$

donde L_j^{2n-1} es un polinomio de Laguerre de grado j, (ver [11] pág 64). Luego,

$$\phi_{\lambda,j}(v,z) = \int_{SU(2)/T_1}\psi_{\lambda,j}\left(g.v, \langle Ad\left(,g^{-1}\right)y_\lambda, z\rangle\right)d\dot{g}.$$

Como $Ad : SU(2) \to SO(3)$ es un morfismo suryectivo con núcleo ± 1 y $SO(3)/SO(2)$ es homeomorfo a la esféra 2-dimensional S^2, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,j}(v,z) &= \int_{SO(3)/SO(2)} \psi_{\lambda,j}\left(g.v, \langle g^{-1}y_\lambda, z\rangle\right) d\dot{g} \\ &= \left(\int_{S^2} e^{i|\lambda|\xi.z} d\xi\right) L_j^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2} \\ &= J_{\frac{1}{2}}(|\lambda| z) L_j^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2},\end{aligned}$$

donde $d\xi$ denota la medida sobre S^2 $SO(3)$-invariante, y $J_{\frac{1}{2}}$ es la función de Bessel de orden $\frac{1}{2}$ de la primera clase.

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{su}(2) \times \mathbb{N}_0$.

- **Caso II**. En este caso N no tiene representaciones de cuadrado integrable.
- **Caso III**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), V = \mathbb{H}^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{H}^{k_2}$ y

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{H}^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{H}^{k_2}.$$

La primer copia (respectivamente la segunda) de $\mathfrak{su}(2)$ actúa como $\mathfrak{sp}(1)$ sobre $\mathbb{H}^{k_1}$ y trivialmente sobre $\mathbb{H}^{k_2}$ (resp. sobre $\mathbb{H}^{k_2}$ y trivialmente sobre $\mathbb{H}^{k_1}$), y como $\mathfrak{so}(4)$ sobre $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto, $U = Sp(k_1) \times Sp(k_2), K = Spin(4) \times U$, donde $Spin(n)$ es el doble cubrimiento de $SO(n)$. Esto se debe a que $Spin(3)$ es isomorfo a $SU(2)$ y $Spin(4)$ es isomorfo a $Spin(3) \times Spin(3)$.

Vía la identificación $T_2 \sim T_1 \times T_1$, tenemos que $K_\lambda = T_2 \times U$, donde

$$T_2 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{6.2}$$

es un toro maximal de $Spin(4)$. Como $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2k_1}\right) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2k_2}\right)$, podemos descomponer la representación metapléctica como

$$\varpi \downarrow K_\lambda = \left(\oplus_{j\geq 0} \chi_j(\theta_1) \eta_j^{k_1}\right) \otimes \left(\oplus_{l_1,l_2 \geq 0} \chi_{l_1,l_2}(\theta_1,\theta_2)\right) \otimes \left(\oplus_{s\geq 0} \chi_s(\theta_2) \eta_s^{k_2}\right),$$

donde $\eta_j^{k_i}$ es la acción natural sobre el espacio $\mathcal{P}_j(\mathbb{C}^{2k_i})$.

Sabemos que

$$\psi_{\lambda,j,l_1,l_2,s}(v,t) = \sum_\alpha \left\langle \pi_{|\lambda|}(v,t) h_\alpha, h_\alpha \right\rangle$$

donde $\{h_a\}$ es una base de la componente irreducible $W_{j,l_1,l_2,s}$. Escribiendo $v = (v_1, u, v_2)$, con $v_1 \in \mathbb{C}^{2k_1}, v_2 \in \mathbb{C}^{2k_2}$ y $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$, una sencilla computación muestra que

$$\pi_{|\lambda|}(v,t) = \pi_{|\lambda|}\left(\frac{t}{3}, (v_1,0,0)\right) \otimes \pi_{|\lambda|}\left(\frac{t}{3}, (0,u,0)\right) \otimes \pi_{|\lambda|}\left(\frac{t}{3}, (0,0,v_2)\right),$$

y como la traza del producto tensorial de operadores es el producto de las trazas de los operadores, obtenemos

$$\psi_{\lambda,j,l_1,l_2,s}(v,t) = e^{i|\lambda|t}\, L(v),$$

$$L(v) = L_j^{2k_1-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_1|^2\right) L_{l_1}^0\left(\frac{|\lambda|}{2}|u_1|^2\right) L_{l_2}^0\left(\frac{|\lambda|}{2}|u_2|^2\right) L_s^{2k_2-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_2|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2},$$

donde L_k^n es el polinomio de Laguerre de grado k.

Por un lado, $SU(2)$ está actuando como $Im(\mathbb{H})$ (o $Sp(1)$) en cada componente de $\mathbb{C}^{2k_i}$, $i = 1, 2$. Por otro lado, $G \simeq Sp(1) \times Sp(1)$ actúa sobre $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}$ por la regla: $v \mapsto g.v = q_1 v q_2$, para $g = (q_1, q_2) \in G, v \in \mathbb{H}$. Entonces tenemos que

$$L_j^{2k_1-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|gv_1|^2\right) = L_j^{2k_1-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_1|^2\right), L_s^{2k_2-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|gv_2|^2\right) = L_s^{2k_2-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_2|^2\right),$$

y las funciones esféricas están dadas por la fórmula

$$\phi_{\lambda,j,l_1,l_2,s}(v,z) = \left(\int_{G/T} e^{i|\lambda|\left\langle Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda, z\right\rangle} L_{l_1}^0\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|(gu)_1\right|^2\right) L_{l_2}^0\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|(gu)_2\right|^2\right) dg\right) \times$$

$$e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2} L_j^{2k_1-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_1|^2\right) L_s^{2k_2-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|v_2|^2\right)$$

donde $g(u_1, u_2) = \left((gu)_1, (gu)_2\right)$.

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

• **Caso IV**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2), V = \left(\mathbb{H}^2\right)^n$ y $\mathfrak{n} = \mathfrak{sp}(2) \oplus \left(\mathbb{H}^2\right)^n$. La acción real está definida por $\pi(g)(v_1, ..., v_n) = (gv_1, ..., gv_n), v_j \in \mathbb{H}^2$ para $j = 1, ..., n$. El grupo ortogonal de operadores de entrelazamiento es isomorfo a $Sp(n)$ con la acción sobre $(\mathbb{H}^2)^n$ dada por la matriz de tamaño $2n \times 2n$ $a_{ij}I$, donde $a_{ij} \in \mathbb{H}$, e I es la identidad 2×2. En efecto, como la acción natural de $\mathfrak{sp}(2)$ sobre $\mathbb{H}^2$ es irreducible entonces el Lema de Schur implica que cada operador de entrelazamiento $A \in Sp(n)$ tiene la siguiente representación matricial

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I & \cdots & a_{1n}I \\ a_{21}I & a_{22}I & \cdots & a_{2n}I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}I & a_{n2}I & \cdots & a_{nn}I \end{pmatrix}, \text{ donde } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } a_{i,j} \in \mathbb{H}.$$

Por lo tanto $K = Sp(2) \times Sp(n)$, y $K_\lambda = T_2 \times Sp(n)$ donde T_2 es un toro maximal de $Sp(2)$ como en (6.2).

Escribiendo $(v_1, ..., v_n) = ((u_1, w_1), ..., (u_n, w_n))$, con $(u_j, w_j) \in \mathbb{H}^2$ para $j = 1, ...n$, tenemos que la acción de $Sp(n)$ está dada por

$$g((u_1, w_1), ..., (u_n, w_n)) = (g(u_1, ..., u_n), g(w_1, ..., w_n)).$$

Entonces la acción de $Sp\,(n)$ sobre $\mathcal{P}\,(\mathbb{C}^{4n})$ se parte como

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2n}\right) \otimes \mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2n}\right) = \oplus_{r,s}\left(\mathcal{P}_r\left(\mathbb{C}^{2n}\right) \otimes \mathcal{P}_s\left(\mathbb{C}^{2n}\right)\right).$$

Por otra parte, T_2 actúa naturalmente en cada $\mathbb{H}^2$ por

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} (u_j, v_j) = (e^{-1\theta_1} u_j, e^{-i\theta_2} v_j).$$

Como antes, denotamos por η_j a la representación irreducible de $Sp\,(n)$ sobre $\mathcal{P}_j\,(\mathbb{C}^{2n})$. De acuerdo a (4.7) se tiene que

$$\eta_s \otimes \eta_r = \oplus_{j=0}^{s} \oplus_{i=0}^{j} \eta_{(r+s-j-i,j-i)}$$

donde $\eta_{(r+s-j-i,j-i)}$ es la representación irreducible de $Sp(n)$ con peso máximo $(r+s-j-i, j-i, 0, \cdots, 0)$, para $r \geq s$. Luego

$$\varpi \downarrow K_\lambda = \oplus_{r,s} \chi_{r,s}\,(\theta_1, \theta_2) \otimes (\oplus_{j=0}^{s} \oplus_{i=0}^{j} \eta_{(r+s-j-i,j-i)}),$$

donde $\chi_{r,s}\,(\theta_1, \theta_2) = e^{-i(r\theta_1 + s\theta_2)}$.

El polinomio $q_{r,s,j,i}$ en $\mathcal{P}\,(\mathbb{C}^{4n})$ correspondiente a la función esférica $\psi_{\lambda,r,s,j,i}$ es K_λ-invariante, por lo tanto $q_{r,s,j,i}\,(v,t) = q_{r,s,j,i}\left(|u|^2, |w|^2, t\right)$, pero $Sp\,(2)$ preserva la norma de (u_j, w_j) para $j = 1, \cdots, n$. Luego

$$\phi_{\lambda,r,s,j,i}\,(v,z) = e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2} \left(\int_{G'/T} e^{i|\lambda|\langle Ad(g^{-1}) y_\lambda, z\rangle} q_{r,s,j,i}(g \cdot v, t)\, d\dot{g} \right).$$

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{sp}(2) \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

• **Caso V**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}\,(n)\,, V = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{n} = su\,(n) \oplus \mathbb{C}^n$ y π es la acción canónica de $su\,(n)$ sobre $\mathbb{C}^n$. Como esta representación es irreducible, el grupo de operadores de entrelazamientos ortogonales es un toro de dimensión uno al cual denotamos por T_1. Entonces $K = SU\,(n) \times T_1$, $K_\lambda = T_{n-1} \times T_1$ donde T_{n-1} es un toro maximal de $SU\,(n)$, y

$$\varpi \downarrow K_\lambda = \oplus_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z} \geq 0}\ \chi_{m_1,\ldots,m_n},$$

donde $\chi_{m_1,\ldots,m_n}\ (\theta_1, \ldots, \theta_n) = e^{-i(m_1\theta_1 + \ldots + m_n\theta_n)}$.

El conjunto de funciones esféricas correspondientes al par (T_n, H_n) (que fueron computadas en [11] y fueron descriptas en el Capítulo 3) son:

$$\psi_{\lambda,m_1,\ldots,m_n}\,(v,t) = e^{i|\lambda|t} \prod_{j=1}^{n} L_{m_j}^{0}\left(\frac{|\lambda|}{2}\,|v_j|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}, \tag{6.3}$$

y poniendo $gv = ((gv)_1, ..., (gv)_n)$ para $g \in SU(n)$, obtenemos la siguiente expresión para el conjunto de funciones esféricas genéricas

$$\phi_{\lambda,m_1,\ldots,m_n}(v,z) = e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}\left(\int_{SU(n)/T_n} e^{i|\lambda|\left\langle Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda, z\right\rangle}\prod_{j=1}^{n} L^0_{m_j}\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|(gv)_j\right|^2\right)d\dot{g}\right),$$

donde $L^0_{m_j}$ es el polinomio de Laguerre de grado m_j.

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{su}(n) \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$, donde aparece n veces el producto de $\mathbb{N}_0$.

• **Caso VI**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{so}(2n) \oplus \mathbb{R}^{2n}$ y π es la acción canónica de $\mathfrak{so}(2n)$ sobre $\mathbb{R}^{2n}$. Como esta representación es irreducible, el grupo de operadores de entrelazamientos es trivial. Por lo tanto $K = SO(2n)$ y K_λ es un toro n-dimensional.

Como en el caso anterior, la representación metapléctica se descompone en una suma directa de caracteres libre de multiplicidad como

$$\varpi \downarrow T_n = \bigoplus_{(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}\geq 0} \chi_{(m_1,\cdots,m_n)},$$

donde $(\chi_{(m_1,\cdots,m_n)}(\theta_1,\cdots,\theta_n))(z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}) = e^{-im_1\theta_1}z_1^{m_1}\cdots e^{-im_n\theta_n}z_n^{m_n}$.

Luego $\psi_{\lambda,m_1,\ldots,m_n}$ está dada por (6.3), pero aquí tenemos que integrar sobre $SO(2n)/T_n$, esto es,

$$\phi_{\lambda,m_1,\ldots,m_n}(v,z) = e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}\left(\int_{SO(2n)/T_n} e^{i|\lambda|\left\langle Ad\left(g^{-1}\right)y_\lambda, z\right\rangle}\prod_{j=1}^{n} L^0_{m_j}\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|(gv)_j\right|^2\right)d\dot{g}\right),$$

donde $L^0_{m_j}$ es el polinomio de Laguerre de grado m_j.

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{so}(2n) \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$, donde aparece n veces el producto de $\mathbb{N}_0$.

• **Caso VII**. En este caso $N(\mathfrak{g}, V)$ es el grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional, $K = U(n)$ y el conjunto de funciones esféricas acotadas fueron descriptas por varios autores, ver por ejemplo [3] y [11], y fueron descriptas también en el Capítulo 3.

• **Caso VIII**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2)$, $V = (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$ y $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}(2) \oplus (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$. $\mathfrak{u}(2)$ actúa de la siguiente manera:

- en cada una de las k componentes de $(\mathbb{C}^2)^k$ actúa de la manera natural, y

- en $(\mathbb{C}^2)^n$ el centro de $\mathfrak{u}(2)$ actúa trivialmente y la parte semisimple actúa como $\mathfrak{sp}(1)$ (o $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$) a la izquierda en cada una de las n componentes de $(\mathbb{C}^2)^n$.

Para n positivo, $K = SU(2) \times U(k) \times Sp(n)$, $K_\lambda = T_1 \times U(k) \times Sp(n)$ donde

$$T_1 := \left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

es un toro maximal contenido en $SU(2)$. La acción de T_1 sobre $\mathcal{P}\left((\mathbb{C}^2)^k\right)$ está dada por

$$p(u_1, w_1, ..., u_k, w_k) \to p\left(e^{i\theta}u_1, e^{-i\theta}w_1, ..., e^{i\theta}u_k, e^{-i\theta}w_k\right)$$

para $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2k}), e^{i\theta} \in T_1, (u_i, w_i) \in \mathbb{C}^2$. También $U(k)$ actúa por un múltiplo de la identidad 2×2 en cada una de las k componentes de $(\mathbb{C}^2)^k$.

Denotamos por ν_r (resp. η_r) la acción irreducible de $U(k)$ (resp. $Sp(n)$) sobre $\mathcal{P}_r(\mathbb{C}^{2k})$ (resp. $\mathcal{P}_r(\mathbb{C}^{2n})$).

Como $U(k)$-módulo, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2k}) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{C}^k) = \oplus_{r,s}\nu_r \otimes \nu_s$. Más aún,

$$\nu_r \otimes \nu_s = \oplus_{j=1}^{\text{mín}(r,s)} \nu_{(r+s-2j,j)},$$

donde $\nu_{(r+s-2j,j)}$ denota la representación irreducible de peso máximo $(r+s-2j, j, 0, \cdots, 0)$ (ver [12], pag 225). Por lo tanto

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2k}\right) \otimes \mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2n}\right)$$

y la descomposición de la representación metapléctica en componentes irreducibles es

$$\varpi \downarrow K_\lambda = \left(\oplus_{r,s,j\in\mathbb{Z}\geq 0}\ \chi_{r-s}(\theta) \oplus_{j=1}^{\text{mín}(r,s)} \nu_{(r+s-2j,j)}\right) \otimes \left(\oplus_{l\in\mathbb{Z}\geq 0}\ \chi_l(\theta)\, \eta_l\right).$$

Ponemos $v = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), \mathbf{v}^1 \in \mathbb{C}^{2k}, \mathbf{v}^2 \in \mathbb{C}^{2n}$. Como en el caso **III**, aplicando una propiedad elemental de la traza de un mapa definido sobre un producto tensorial, obtenemos la expresión de la función esférica

$$\psi_{\lambda,r,s,j,l}(v,t) = e^{i|\lambda|t}e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}q_{j,r,s}\left(\frac{|\lambda|}{2}\mathbf{v}^1\right)L_l^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|\mathbf{v}^2\right|^2\right), j = 1, ..., \text{mín}(r,s),\ l \geq 0,$$

donde L_l^{2n-1} es el polinomio de Laguerre de grado l.

Sea $\mathbf{v}^1 = (u_1, w_1, \cdots, u_k, w_k) \in \mathbb{C}^{2k}$. Luego tenemos que $q_{j,r,s}$ es un polinomio en $|u|^2, |w|^2$ ya que $q_{j,r,s}$ es $U(k)$-invariante, pero la acción de $G = SU(2)$ es componente a componente en cada (u_j, w_j). Luego,

$$\phi_{\lambda,r,s,j,l}(v,t) = \left(\int_{G'/T} e^{i|\lambda|\langle Ad(g^{-1})y_\lambda, z\rangle}q_{j,r,s}(\frac{|\lambda|}{2}g\cdot\mathbf{v}^1)\,d\dot{g}\right)e^{-(\frac{|\lambda|}{4}|v|^2)}L_l^{2n-1}(\frac{|\lambda|}{2}|\mathbf{v}^2|^2).$$

El conjunto de funciones esféricas genéricas para $n \neq 0$ está parametrizado por $\mathfrak{su}(2) \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Como observamos en la prueba del Teorema (5.7.4), en este caso no hay funciones esféricas genéricas asociadas al centro de $\mathfrak{g}$.

Caso $n = 0$. Al conjunto de funciones esféricas descriptas (con los cambios obvios pues $n = 0$) agregamos el conjunto de funciones esféricas correspondientes a los elementos del centro de $\mathfrak{g}$. Para este propósito, necesitamos descomponer la acción metapléctica de $K = SU(2) \times U(k)$ sobre $\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2k}\right)$. Asumimos que $k \geq 2$.

Es fácil ver que $\mathbb{C}^{2k}$ es equivalente a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ con la acción estándar como $(SU(2) \times U(k))$-módulo. Entonces seguimos la Sección 4.3 para obtener la descomposición deseada. Con la notación de dicha sección, sea $\mathcal{F}_2^\mu$ la representación irreducible de $GL(2, \mathbb{C})$ con peso máximo μ satisfaciendo $\mu = \mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2$ donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son las coordenadas del peso y $\mu_1 + \mu_2 = d$ con $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ y sea $\mathcal{F}_k^\mu$ la representación irreducible de $GL(k, \mathbb{C})$ con peso máximo la k-upla $(\mu_1, \mu_2, 0, ..., 0)$. Entonces tenemos que el polinomio homogeneo de grado d sobre $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ se descompone como

$$\mathcal{P}_d\left(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k\right) = \bigoplus_\mu \mathcal{F}_2^\mu \otimes \mathcal{F}_k^\mu$$

donde $\mu_1 + \mu_2 = d$. Ahora, para poder restringir a $SL(2, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$, sea $l = \mu_1 - \mu_2$ y sea $\mathcal{F}^l$ las representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$ de dimensión $l+1$. Luego, la restricción a $SL(2, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ se descompone como

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k\right) = \oplus_{l,d} \mathcal{F}^l \otimes \mathcal{F}_k^\mu, l, d \geq 0$$

con $\mu_1 + \mu_2 = d$ y $\mu_1 - \mu_2 = l$. El correspondiente conjunto de funciones esféricas está dado por (5.5) y está parametrizado por $\{\lambda, d, l\}$ con $\lambda \neq 0$ y $l, d \geq 0$.

• **Caso IX**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$ y la acción es la estándar. Por lo tanto $G = SU(n)$, $U = T_1$ y $K = U(n)$. Para $x_\lambda \in \mathfrak{g}'$, las correspondientes funciones esféricas coinciden con las del caso **V**.

Para los elementos del centro de $\mathfrak{g}$, el estabilizador es K y

$$\varpi \downarrow K = \oplus_{r \geq 0} v_r$$

donde v_r denota la representación irreducible de $U(n)$ en los polinomios homogeneos de grado r. El conjunto de funciones esféricas asociadas está conformado por las funciones

$$\phi_{\lambda,r}(v, t) = e^{i|\lambda|t} L_r^{n-1}\left(\frac{\lambda}{2}|v|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2},$$

donde L_r^{n-1} es el polinomio de Laguerre de grado r.

En este caso, el conjunto de funciones esféricas está parametrizado por $\mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$.

• **Caso X**. En este caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m_1) \oplus ... \oplus \mathfrak{su}(m_r) \oplus \mathfrak{c}$ donde $\mathfrak{c}$ es su centro y hay α copias de $\mathfrak{su}(2)$. La componente abeliana satisface $1 \leq \dim(\mathfrak{c}) \leq r-1$; $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, y la representación π de $\mathfrak{g}$ sobre V está definida de la siguiente manera:

Para cada $1 \leq j \leq r$, $\mathfrak{su}(m_j)$ actúa no trivialmente sólo sobre V_j, $\mathfrak{c}$ tiene un único subespacio $\mathfrak{c}_j$ actuando no trivialmente sobre V_j y $\dim(\mathfrak{c}_j) = 1$.

Si $m_j \geq 3$, $V_j = \mathbb{C}^{m_j}$ y $\mathfrak{s}u(m_j) \oplus \mathfrak{c}_j$ (el cual es isomorfo a $\mathfrak{u}(m_j)$) actúa en la manera estándar sobre V_j; En este caso, el grupo de operadores de entrelazamiento es S^1.

Si $m_j = 2, V_j = (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$, y se tiene que $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_j$ actúa sobre V_j como en el caso **VIII**, y entonces el grupo de operadores de entrelazamiento es $U(k) \times Sp(n)$.

Primero consideremos el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}\,(m) \oplus \mathfrak{su}\,(2) \oplus \mathfrak{c}, \mathfrak{m} \geq 3$, $n > 0$. Por lo tanto $\dim \mathfrak{c} = 1$. En este caso,

$$V = \mathbb{C}^m \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^k \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^n,$$

$$G = SU\,(m) \times SU\,(2) \text{ y}$$

$$K = G \times S^1 \times U\,(k) \times Sp\,(n)\,.$$

Sea T_{m-1} un toro maximal de $SU\,(m)$, entonces $T_{m-1} \times S^1$ es (isomorfo a) un toro n-dimensional actuando sobre $\mathbb{C}^m$ de la manera estándar,

$$K_\lambda = T_{m-1} \times S^1 \times T_1 \times U\,(k) \times Sp\,(n)$$

y $T_1 \times U\,(k) \times Sp\,(n)$ actúa sobre $\left(\mathbb{C}^2\right)^k \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^n$ como en el caso **VIII**. Luego,

$$\varpi \downarrow K_\lambda =$$

$$\left(\oplus_{k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{k_1,\ldots,k_m}\left(\theta_1, \ldots, \theta_m\right)\right) \otimes \oplus_{r,s} \oplus_{i=1}^{\text{mín}(r,s)} \chi_{r-s}\left(\theta\right) \oplus_{i=1}^{\text{mín}(r,s)} \upsilon_{r+s-2i,i} \otimes \left(\oplus_j \chi_j\left(\theta\right) \eta_j\right).$$

Para $v = (u, v_1, v_2)\,, u \in \mathbb{C}^m, v_1 \in \mathbb{C}^{2k}, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}$, las funciones esféricas asociadas al par (K_λ, N_λ) son

$$\psi_{\lambda,\mathbf{k},,r,s,i,j}\left(u, v_1, v_2, t\right) = e^{i|\lambda|t} e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2} \prod_{j=1}^{m} L_{k_j}^0 \left(\frac{|\lambda|}{2}\left|u_j\right|^2\right) q_{i,r,s}\left(\frac{|\lambda|}{2} v_1\right) L_j^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|v_2\right|^2\right),$$

donde $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_m)\,, i = 1, \ldots, \text{mín}\,(r, s)$ y $r, s,\ j \geq 0$.

La acción de G es componente a componente, entonces escribimos

$$q_{\mathbf{k},r,s,i}\left(u, v_1\right) = \prod_{j=1}^{m} L_{k_j}^0 \left(\frac{|\lambda|}{2}\left|u_j\right|^2\right) q_{i,r,s}\left(\frac{|\lambda|}{2} v_1\right)$$

y tenemos que la expresión de las funciones esféricas es

$$\phi_{|\lambda|,\mathbf{k},r,s,i,j}\left(v, z\right) = \left(\int_{G'/T} e^{i|\lambda|t\langle Ad(g)y_\lambda, z\rangle} q_{\mathbf{k},r,s,i,}\left(\pi\left(g\right)\left(u, v_1\right)\right) dg\right) L_j^{2n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\left|v_2\right|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|v|^2}.$$

En este caso, el conjunto de funciones esféricas genéricas está parametrizado por $\mathfrak{g} \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ donde $\mathbb{N}_0$ aparece $n + 4$ veces en el producto directo.

Cuando $n = 0$, para completar el conjunto de funciones esféricas hay que agregar las correspondientes a los elementos del centro $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$, siguiendo el caso **IX** y el caso **VIII** con $n = 0$, ya que $U\,(m)$ actúa sobre $\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^m\right)$ y $SU\,(2) \times U\,(k)$ actúa sobre $\mathcal{P}\left(\mathbb{C}^{2k}\right)$. Con esto terminamos el caso más simple. El caso general sigue líneas similares.

La siguiente tabla resume los casos analizados.

Tabla 6.1: Pares de Gelfand.

	$\mathfrak{g}$	(π, V)	U	K
I	$\mathfrak{su}(2) \simeq Im(\mathbb{H})$	$V = (\mathbb{C}^2)^n \simeq \mathbb{H}^n,\ n \geq 1$ $\pi(q)(v_1, \cdots, v_n) = (qv_1, \cdots, qv_n)$	$Sp(n)$	$SU(2) \times Sp(n)$
II	$\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$	$V = \mathbb{R}^3 \oplus (\mathbb{C}^2)^n,\ n \geq 0$ $\mathfrak{so}(3)$ actúa en $\mathbb{R}^3$ por rotaciones $\mathfrak{su}(2)$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^n$ como en el caso I	$Sp(n)$	$SU(2) \times Sp(n)$
III	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(4)$	$V = (\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2},\ k_1 + k_2 \geq 1$ $\mathfrak{so}(4)$ actúa en $\mathbb{R}^4$ por rotaciones la primer (resp. segunda) componente de $\mathfrak{su}(2)$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$ (resp. $(\mathbb{C}^2)^{k_2}$) como en I	$Sp(k_1) \times Sp(k_2)$	$Spin(4) \times Sp(k_1) \times Sp(k_2)$
IV	$\mathfrak{sp}(2)$	$V = (\mathbb{C}^4)^n \simeq \mathbb{H}^{2n},\ n \geq 1$ $\pi(X)(v_1, \cdots, v_n) = (Xv_1, \cdots, Xv_n)$	$Sp(n)$	$Sp(2) \times Sp(n)$
V	$\mathfrak{su}(n)$	$V = \mathbb{C}^n,\ n \geq 3$ $\pi(X)v = Xv$	S^1	$S^1 \times SU(n)$
VI	$\mathfrak{so}(n)$	$V = \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ $\pi(X)v = Xv$	I	$SO(n)$
VII	$\mathbb{R}$	$V = \mathbb{C}^n,\ n \geq 1$ $\pi(t)(v_1, \cdots, v_n) = (itv_1, \cdots, itv_n)$	$SU(n)$	$U(n)$
VIII	$\mathfrak{u}(2) \simeq \mathfrak{sp}(1)$	$V = (\mathbb{C}^2)^n \times (\mathbb{C}^2)^k,\ n \geq 0,\ k \geq 1$ $\mathfrak{sp}(1)$ actúa por multiplicación en cada componente de $(\mathbb{C}^2)^k$; en $\mathbb{C}^{2n}$ sólo actúa $\mathfrak{su}(2)$ como en I	$U(k) \times Sp(n)$	$SU(2) \times U(k) \times Sp(n)$
IX	$\mathfrak{u}(n)$	$V = \mathbb{C}^n,\ n \geq 3$ $\pi(X)v = Xv$	S^1	$S^1 \times SU(2)$
X	$\mathfrak{su}(m) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$ $\dim(\mathfrak{c}) = 1$	$V = \mathbb{C}^m \oplus (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$ $\mathfrak{su}(m)$ actúa sobre $\mathbb{C}^m$ como en el caso V $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$ actúa sobre $\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2n}$ como en el caso VIII	$S^1 \times U(k) \times Sp(n)$	$SU(m) \times SU(2) \times S^1 \times U(k) \times Sp(n)$

Capítulo 7

Pares de Gelfand generalizados

Sea N un grupo de Lie nilpotente y K un subgrupo compacto del subgrupo de automorfismos $Aut(N)$. Es bien sabido que, si $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand, entonces N es un grupo de Lie a lo sumo 2-pasos nilpotente.

La noción de par de Gelfand fue generalizada para el caso en que K no es necesariamente un grupo compacto, y la pregunta natural que surge es: ¿Existe un par de Gelfand generalizado $(K \ltimes N, K)$ donde N es un grupo de Lie al menos 3-pasos nilpotente? En este sentido, comenzaremos recordando nuevamente el concepto de par de Gelfand clásico, y veremos sus limitaciones para el caso no compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I) El álgebra de convolución de funciones integrables K-bi-invariantes sobre G es conmutativa.

II) Dada una representación unitaria e irreducible $(\pi, \mathcal{H})$ de G, el subespacio $\mathcal{H}_K$ de vectores fijos por K es a lo sumo unidimensional.

III) La representación $(\rho, L^2(G/K))$ es libre de multiplicidades, donde ρ es la representación regular a izquierda.

IV) El álgebra de operadores $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ es conmutativa.

Cuando algunas de las anteriores se cumple, decimos que (G, K) es un par de Gelfand.

Ejemplos muy estudiados de pares de Gelfand provienen de pares simétricos de tipo compacto o no compacto. Trabajos más recientes pusieron atención en pares de Gelfand de la forma $(K \ltimes N, K)$ donde N es un grupo de Lie nilpotente y K es un subgrupo del grupo de automorfismos $Aut(N)$ (ver [1], [3], [4], [5], [10], [23], [33], entre otros). Uno de los primeros resultados, probado en [5], establece que si $(K \ltimes N, K)$ (abreviadamente (K, N)) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o es un grupo de Lie 2-pasos nilpotente.

Observemos que en el caso en el que K es un subgrupo *no compacto*, el espacio de funciones integrables K-invariantes definidas sobre G/K es trivial, y por lo tanto (I) es siempre cierta. Luego, para generalizar la definición de par de Gelfand usamos la noción (II).

Los artículos fundacionales son debidos a J. Faraut [8], E.G. Thomas [30], y hay importantes resultados en [31]. Primero que todo, asumamos que G y K son grupos *unimodulares* (esta hipótesis no la necesitamos cuando K es compacto, ya que (G, K) par de Gelfand con K compacto implica G unimodulares, y K es unimodular por ser compacto). Luego G/K admite una medida G-invariante.

Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G, y denotemos por $\mathcal{H}^\infty$ el espacio de vectores $\mathcal{C}^\infty$, esto es,

$$\mathcal{H}^\infty = \{v \in \mathcal{H} : g \mapsto \pi(g)v \in \mathcal{C}^\infty(G)\}.$$

Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G. Recordemos que si $v \in \mathcal{H}^\infty$, entonces

$$\pi(x_j)v = \frac{d}{ds}_{|s=0} \pi(\exp(sx_j))v.$$

Definimos para $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ las seminormas

$$p_{m_1,\cdots,m_n}(v) = ||\pi(x_1)^{m_1} \cdots \pi(x_n)^{m_n} v||_{\mathcal{H}}.$$

Esta familia de seminormas $\{p_{m_1,\cdots,m_n}\}$ induce una topología llamada *topología de Sobolev*, con la cual $\mathcal{H}^\infty$ es un espacio de Fréchet. Definimos el antidual como las aplicaciones continuas sobre $\mathcal{H}^\infty$ que satisfacen

$$\phi(cv) = \bar{c}\, \phi(v), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Sea $\mathcal{H}^{-\infty}$ el antidual de $\mathcal{H}^\infty$ con la topología fuerte (convergencia uniforme sobre conjuntos acotados de $\mathcal{H}^\infty$). Esto da una inclusión natural.

$$\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-\infty}.$$

Denotamos por π_∞ la restricción de π a $\mathcal{H}^\infty$, y para $g \in G$ definimos $\pi_{-\infty}(g)$ sobre $\mathcal{H}^{-\infty}$ por dualidad: para $\phi \in \mathcal{H}^{-\infty}, v \in \mathcal{H}^\infty$

$$\langle \pi_{-\infty}(g)\phi, v\rangle := \langle \phi, \pi_\infty(g)v\rangle.$$

Los elementos de $\mathcal{H}^{-\infty}$ son llamados *vectores distribución.*

Denotamos por

$$\mathcal{H}_K^{-\infty} = \{\phi \in \mathcal{H}^{-\infty} : \pi_{-\infty}(k)\phi = \phi \text{ para todo } k \in K\}$$

al espacio de vectores distribución K-fijos.

Definición 7.0.1. Decimos que (G, K) es un *par de Gelfand generalizado* si dada una representación unitaria irreducible $(\pi, \mathcal{H})$ de G, el espacio $\mathcal{H}_K^{-\infty}$ de vectores distribución fijos por K es a lo sumo unidimensional.

En este capítulo, daremos un ejemplo de un grupo de Lie 3-pasos nilpotente N y un subgrupo K de $Aut(N)$ no compacto tal que (K, N) es un par de Gelfand generalizado. Este resultado está enunciado en el Teorema 7.2.3. Luego daremos un ejemplo de otro par (K, N)

donde encontramos que la representación metapléctica se descompone en representaciones irreducibles con multiplicidad 2.

Comenzaremos este capítulo introduciendo algunas nociones que generalizan las estudiadas para par de Gelfand en el Capítulo 2.

Nota. Cuando K es compacto, otra equivalencia con la definición de par de Gelfand clásico es que el álgebra de operadores $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ sea conmutativa. Sin embargo, hay ejemplos de pares (G, K) con K no compacto tal que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ es conmutativa pero (G, K) no es par de Gelfand generalizado (ver [6]).

7.1. Preliminares

Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo de G. Denotamos por $\mathcal{D}(G/K)$ al espacio de funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto y por $\mathcal{D}^K(G)$ al subespacio de $\mathcal{D}(G)$ de funciones sobre G que son K-invariantes a derecha. Ambos espacios son identificables vía el mapa $f \in \mathcal{D}(G/K)$ a $f_0 := f \circ \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P} : G \to G/K$ es la proyección natural. Dotamos a estos espacios de la topología natural. Sea $\mathcal{D}'(G)$ y $\mathcal{D}'(G/K)$ el espacio topológico dual de $\mathcal{D}(G)$ y $\mathcal{D}(G/K)$ respectivamente.

Una manera natural de definir $\phi \in \mathcal{D}'(G)$ es vía la aplicación

$$\phi(f) = \int_G f(g)\phi(g)dg, \tag{7.1}$$

la cual tiene sentido si por ejemplo $\phi \in \mathcal{D}(G)$ o $\phi \in L^p$ para todo $p \geq 1$. Luego, podemos incluir naturalmente $\mathcal{D}(G)$ en $\mathcal{D}'(G)$.

El espacio $\mathcal{D}'(G)$ es llamado el espacio de *distribuciones* de G. A las distribuciones ϕ definidas por la ecuación (7.1) las llamamos *distribuciones funciones* de G. Podemos generalizar las nociones definidas para funciones de $\mathcal{D}(G)$ (como convolución, derivación, etc) para elementos de $\mathcal{D}'(G)$. Las distribuciones copian las propiedades que cumplen las distribuciones funciones, y suelen llamarse funciones generalizadas, ya que permiten definir, por ejemplo, derivadas de funciones que no son siquiera continuas.

La topología en $\mathcal{D}(G)$ la construimos de la siguiente manera:
• Dado $K \subseteq G$ compacto sea $D_K(G)$ el espacio de funciones C^∞ con soporte en K. Consideramos τ_K la topología de Fréchet del espacio dada por las seminormas

$$p_N(f) = \text{máx}\{|D^\alpha f(g)| : |\alpha| \leq N, g \in K\},$$

donde $|\alpha| = |(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)| = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
• Sea β la colección de conjuntos convexos y balanceados W tal que $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$.
• La topología τ de $\mathcal{D}(G)$ es la unión de todos los conjuntos de la forma $\phi + W$, con $\phi \in \mathcal{D}(G)$, $W \in \beta$.

Las distribuciones se definen como el espacio de funcionales sobre $\mathcal{D}(G)$ lineales y continuos respecto de la topología τ.

Ejemplo 7.1.1. El ejemplo más conocido de distribución que no viene dada por la fórmula (7.1) es la *delta de dirac* definida por

$$\delta_g(\phi) = \phi(g), \qquad g \in G.$$

Nota. Dada $\phi \in \mathcal{D}'(G)$ y $f \in \mathcal{D}(G)$, denotamos por $\langle \phi, f \rangle$ la evaluación de ϕ en f. Esta notación se condice con la notación del Teorema de Riesz.

Definición 7.1.2. Dada $\Phi \in \mathcal{D}'(G)$, decimos que:

- Φ es una distribución K-invariante a izquierda si para toda $f \in \mathcal{D}(G)$ se cumple

$$\langle \Phi, L_k f \rangle = \langle \Phi, f \rangle.$$

- Φ es una distribución K-invariante a derecha si para toda $f \in \mathcal{D}(G)$ se cumple

$$\langle \Phi, R_k f \rangle = \langle \Phi, f \rangle.$$

- Φ es una distribución *K-bi-invariante* si es K-invariante a izquierda y a derecha,
- Φ es una *distribución de tipo positivo* si $\langle \Phi, f * f^\sharp \rangle \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{D}(G)$, donde $f^\sharp(g) = \overline{f(x^{-1})}$.

Usando aproximaciones de la identidad se puede ver que, con la topología de $\mathcal{D}'(G)$, toda distribución es el límite de funciones infinitamente diferenciables.

Recordemos que, si (G, K) es un par de Gelfand, hay una correspondencia uno-a-uno entre funciones K-bi-invariantes definidas sobre G de tipo positivo y clases de equivalencias de representaciones unitarias que tienen un vector cíclico K-fijo. Más aún, en capítulos anteriores probamos que estas representaciones unitarias se realizan en el espacio $\mathcal{D}'(G/K)$. Existe un resultado análogo para pares de Gelfand generalizados, pero en este caso las distribuciones K-bi-invariantes de tipo positivo cumplen el rol de las funciones para pares de Gelfand clásicos.

Decimos que una representación $(\pi, \mathcal{H})$ puede realizarse como subespacio de $\mathcal{D}'(G/K)$ si existe una inyección lineal y continua $j : \mathcal{H} \to \mathcal{D}'(G/K)$ tal que

$$j\pi(g) = L_g j, \qquad \text{para toda } g \in G.$$

El espacio $j(\mathcal{H})$ es llamado un subespacio de Hilbert de $\mathcal{D}'(G/K)$.

Probemos algunas propiedades del espacio $\mathcal{H}^\infty$.

Proposición 7.1.3. *Dado $w \in \mathcal{H}$, $f \in C^\infty(G)$, entonces $\pi(f)w \in \mathcal{H}^\infty$.*

Demostración. Recordemos que definimos

$$\pi(f)w = \int_G f(g)\pi(g)wdg.$$

Sea $x \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}_{|s=0} \pi(\exp(sx))\pi(f)w &= \frac{d}{ds}_{|s=0} \int_G f(g)\pi(\exp(sx)g)w\, dg \\
&= \frac{d}{ds}_{|s=0} \int_G f(\exp(-sx)\tilde{g})\pi(\tilde{g})w\, d\tilde{g} \\
&= \int_G (-xf)(\tilde{g})\pi(\tilde{g})wd\tilde{g} \\
&= \pi(-xf)w.
\end{aligned}$$

Luego se sigue el resultado deseado. □

Observación 7.1.4. Tomando aproximaciones de la identidad $\{f_j\}$ se puede ver que $\mathcal{H}^\infty$ es denso en $\mathcal{H}$.

Dados $f \in C^\infty(G)$, $\phi \in \mathcal{H}^{-\infty}$, $w \in \mathcal{H}$ definimos $\langle \pi(f)\phi, w\rangle := \langle \phi, \pi(f)w\rangle$.
Luego tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.1.5. *Si $f \in C^\infty(G)$, $\phi \in \mathcal{H}^{-\infty}$, entonces $\pi(f)\phi \in \mathcal{H}' \sim \mathcal{H}$.*

Más aún, se cumple la proposición que sigue.

Proposición 7.1.6. *Si $f \in \mathcal{D}(G)$, $\phi \in \mathcal{H}^{-\infty}$, entonces $\pi(f)\phi \in \mathcal{H}^\infty$.*

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que

$$\pi(x)\pi(f)\phi = \pi(-xf)\phi.$$

Luego se tiene el resultado deseado. □

Definición 7.1.7. Dada $f \in \mathcal{D}(G), \Phi \in \mathcal{D}'(G)$ la convolución

$$(f * \Phi)(g) := \Phi(L_g \check{f})$$

define una nueva distribución $f * \Phi \in \mathcal{D}'(G)$.

Observación 7.1.8. En el caso en que Φ sea una distribución función, tenemos que

$$(f * \Phi)(g) = \int_G f(gh^{-1})\Phi(h)dh.$$

Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G que tiene un vector distribución $\phi \in \mathcal{H}_K^{-\infty}$.
Definimos T_ϕ por

$$T_\phi(f) = \langle \phi, \pi_\infty(f)\phi\rangle.$$

Como $\phi \in \mathcal{H}_K^{-\infty}$, se puede ver que T_ϕ es una distribución K-bi-invariante. Además tenemos que T_ϕ es una distribución de tipo positivo, pues:

$$\begin{aligned} T_\phi(f * f^\sharp) &= \langle \phi, \pi(f * f^\sharp)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, \pi(f)\pi(f^\sharp)\phi \rangle \\ &= \langle \pi(f)^*\phi, \pi(f^\sharp)\phi \rangle \\ &= \langle \pi(f^\sharp)\phi, \pi(f^\sharp)\phi \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea T una distribución K-bi-invariante de tipo positivo. Para $f \in \mathcal{D}(G/K)$, sea $f_0 = f \circ \mathcal{P}$. En $\mathcal{D}(G/K)$ consideremos el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_T = T(f_0^\sharp * g_0),$$

y denotemos por $\mathcal{N}_T$ el subespacio de vectores de longitud cero.

El subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_T$ de $\mathcal{D}'(G/K)$ asociado a T es la completación de $\mathcal{D}(G/K)/\mathcal{N}_T$, y una computación (usando que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_T$ es identificable con su dual) muestra que si

$$j^* : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{D}(G/K)/\mathcal{N}_T$$

es la proyección natural y

$$j : \mathcal{H}_T \to \mathcal{D}(G/K)'$$

es el mapa dual, entonces para $f \in \mathcal{D}(G/K)$,

$$(j \circ j^*)f = f_0 * T.$$

Para probar este resultado consideramos la identificación de $\mathcal{H}_T \sim \mathcal{H}'_T$ dada por

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle.$$

Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G/K)$ definimos la aplicación

$$\varphi \mapsto \Lambda_\varphi(\psi) := \langle \overline{\varphi}, \psi \rangle_T.$$

Entonces si T es una distribución función tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi(\psi) &= \langle \overline{\varphi}, \psi \rangle_T \\ &= \langle T, \overline{\varphi}^\sharp * \psi \rangle \\ &= \int_G T(g) \left(\int_G \overline{\varphi}^\sharp(h)\psi(h^{-1}g)dh \right) dg \\ &= \int_G T(g) \left(\int_G \varphi(h^{-1})\psi(h^{-1}g)dh \right) dg \\ &= \int_G T(g) \left(\int_G \varphi(\tilde{h}g^{-1})\psi(\tilde{h})dh \right) dg \\ &= \int_G \left(\int_G T(g)\varphi(\tilde{h}g^{-1})dg \right) \psi(\tilde{h})dh \\ &= \int_G (\varphi * T)(\tilde{h})\psi(\tilde{h})dh \\ &= \langle \varphi * T, \psi \rangle \end{aligned}$$

Luego $\Lambda_\varphi = \varphi * T$, y por lo tanto $jj^*\varphi = \varphi * T$.

Además, por ser T una distribución K-bi-invariante, T resulta un vector K-fijo para la representación regular a izquierda.

Sean π_1 y π_2 dos representaciones unitarias de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente, realizadas en $\mathcal{D}'(G/K)$. Denotemos por T_1 y T_2 sus correspondientes núcleos reproductores y j_1, j_2 las inyecciones G-invariantes. Asumamos que $T_1 = T_2$. Entonces tenemos que

$$||j_1^*\phi||^2 = ||j_2^*\phi||^2 \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(G/K).$$

Definimos U por $U(j_1{}^*\phi) = j^{2^*}\phi$. Luego, el operador U está bien definido y lo podemos extender unitariamente a un operador de $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ que conmute con la acción de G. Más aún, $j_1 = j_2 \circ U$. Por lo tanto, $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ son representaciones unitariamente equivalentes.

La distribución T_ϕ asociada a $(\pi, \mathcal{H})$ representación unitaria de G con $\phi \in \mathcal{H}^{-\infty}$ es llamada el *núcleo reproductor* de $\mathcal{H}$.

Luego existe una correspondencia entre clases de equivalencias de representaciones unitarias de G que tienen un vector distribución K-fijo y distribuciones de tipo positivo K-bi-invariantes. La prueba general se obtiene tomando aproximaciones de la identidad.

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado (para más detalles de la prueba ver [31]).

Teorema 7.1.9. *(A) Hay una correspondencia uno-a-uno entre representaciones unitarias de G teniendo una distribución cíclica fija por K y distribuciones de tipo positivo K-bi-invariantes en $\mathcal{D}'(G)$ (la correspondiente representación es realizada como un subespacio de Hilbert invariante de $\mathcal{D}'(G/K)$).*

Notemos que si ϕ es una distribución de tipo positivo K-bi-invariante, entonces

$$f * \phi \in \mathcal{H}_\phi \subseteq \mathcal{D}'(G/K)$$

para toda $f \in \mathcal{D}(G)$. En efecto, sea $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\begin{aligned}(f * \phi)(g) &= \int_G f(h)\phi(h^{-1}g)dy \\ &\sim \sum_i f(h_i)\phi(h_i^{-1}g) \\ &= \sum_i f(h_i)L_{h_i}\phi(g).\end{aligned}$$

Luego $\{f * \phi : f \in \mathcal{D}(G)\} \subseteq \mathcal{H}_\phi$. Como ϕ es de tipo positivo es acotada, y por lo tanto j, la inclusión de $\mathcal{H}_\phi \subseteq \mathcal{D}'(G/K)$, es inyectiva y j^* es sobreyectiva.

$$j : \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{D}'(G/K), \quad j^* : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{H}_\phi' \sim \mathcal{H}_\phi \subseteq \mathcal{D}'(G/K).$$

Por el Teorema del núcleo de Schwartz,

$$j^*(f) = f * \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{D}'(G/K).$$

Sea $f \in \mathcal{H}_\phi$, $f = j^*(h)$ para algún $h \in \mathcal{D}(G/K)$, entonces $f = h * \Phi$. Por otra parte, sabemos que $jj^*f = f * \phi$. Entonces tenemos que

$$f * \phi = jj^*(f) = j(f * \Phi). \tag{7.2}$$

Tomando $\{f_j\}$ una aproximación de la identidad en (7.2), $\phi = j(\Phi)$. Luego $\phi = \Phi \in \mathcal{H}_\phi$, y por lo tanto

$$f = h * \phi \quad \text{para alguna } h \in \mathcal{D}(G/K) \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{H}_\phi.$$

Finalmente

$$\mathcal{H}_\phi = \{f * \phi : f \in \mathcal{D}(G/K)\},$$

y por lo tanto ϕ resulta un vector K-fijo cíclico de la representación $(L, \mathcal{H}_\phi)$.

Por otra parte, si $(\mathcal{H}, \pi)$ es una representación que se realiza en $\mathcal{D}'(G/K)$, existe $j : \mathcal{H} \to \mathcal{D}'(G/K)$ inyectiva y continua que conmuta con la acción de G, y por lo tanto j^* es sobreyectiva,

$$j^* : \mathcal{D}(G/K) \to \mathcal{H}' \sim \mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}'(G/K).$$

Dada $f \in \mathcal{D}(G/K)$ podemos extenderla a una función $\tilde{f} \in \mathcal{D}(G)$ K-bi-invariante. El Teorema del núcleo de Schwartz asegura que existe $\Phi \in \mathcal{D}'(G/K)$ K-bi-invariante tal que

$$j^*(\tilde{f}) = \tilde{f} * \Phi.$$

Sea $f \in \mathcal{H}$, $f = j^*(h)$ para algún $h \in \mathcal{D}(G/K)$. Identificando h con $\tilde{h}$, obtenemos que $f = h * \Phi_0$, donde $\Phi_0 = P(\Phi)$. Entonces

$$\mathcal{H} = \{h * \Phi_0 : h \in \mathcal{D}(G/K)\},$$

y existe $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $j^*(\phi) = \Phi_0$. Por lo tanto ϕ es un vector K-fijo de la representación $(\pi, \mathcal{H})$.

Luego tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.1.10. *Existe una correspondencia entre representaciones unitarias de G que tienen un vector distribución K-fijo y las representaciones unitarias que se realizan en $\mathcal{D}'(G/K)$.*

En particular toda representación unitaria e irreducible de G que satisfacen $\mathcal{H}_K \neq 0$ se puede realizar en $\mathcal{D}'(G/K)$.

Supongamos ahora que (G, K) es un par de Gelfand generalizado, y sean $(\pi_1, \mathcal{H}^1)$, $(\pi_2, \mathcal{H}^2)$ dos representaciones de G que se realizan en $\mathcal{D}'(G/K)$ tal que $\mathcal{H}^1_K$ y $\mathcal{H}^2_K$ son no nulos. Por ser (G, K) par de Gelfand,

$$\dim(\mathcal{H}^1_K) = \dim(\mathcal{H}^2_K) = 1.$$

Sean $v_1 \in \mathcal{H}^1_K$ y $v_2 \in \mathcal{H}^2_K$. Si $(\pi_1, \mathcal{H}^1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}^2)$ son representaciones equivalentes de G, entonces existe $T : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^2$ operador de entrelazamiento, y por lo tanto

$$Tv_1 = \alpha v_2 \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Podemos suponer que T es un operador de entrelazamiento unitario. Como v_1 y v_2 son vectores cíclicos de $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^2$ respectivamente, podemos suponer que como espacios de Hilbert $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^2$, $Tv_1 = \alpha v_1$ pero varían los productos internos de manera tal que

$$\langle \alpha v_1, \alpha v_1 \rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle v_1, v_1 \rangle_{\mathcal{H}^1},$$

es decir,

$$\langle v_1, v_1 \rangle_{\mathcal{H}^2} = \tfrac{1}{|\alpha|^2} \langle v_1, v_1 \rangle_{\mathcal{H}^1}.$$

Recíprocamente, supongamos que $(\pi_1, \mathcal{H}^1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}^2)$ son representaciones de un grupo de Lie G, y sea K un subgrupo de automorfismo de G. Supongamos que estas representaciones satisfacen la siguiente condición: si $(\pi_1, \mathcal{H}^1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}^2)$ son representaciones equivalentes entonces como espacios vectoriales $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^2} = \alpha \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^1}$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ no nulo. Supongamos que $\mathcal{H}^1_K$ y $\mathcal{H}^2_K$ son no nulo, entonces $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^2$ pueden realizarse en $\mathcal{D}'(G/K)$. Sean ϕ_1 y ϕ_2 vectores distribución K-fijos de tipo positivo en $\mathcal{D}'(G/K)$. Entonces

$$\mathcal{H}^1 = \{f * \phi_1 : f \in \mathcal{D}(G/K)\} = \{f * \phi_2 : f \in \mathcal{D}(G/K)\} = \mathcal{H}^2.$$

y

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle f^\sharp * g, \phi_1 \rangle,$$
$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2} = \langle f^\sharp * g, \phi_2 \rangle.$$

Luego

$$\langle f^\sharp * g, \phi_2 \rangle = \alpha \langle f^\sharp * g, \phi_1 \rangle,$$

y por lo tanto $\phi_2 = \alpha\, \phi_1$. Finalmente, (G, K) es un par de Gelfand generalizado.

Las equivalencias dadas por Thomas que se encuentran en Teorema A página 298 de [6] completan este resultado. Aquí mencionaremos sólo algunas de las equivalencias.

Antes de eso, haremos algunas observaciones acerca de las definiciones que contiene el artículo de Thomas.

Definición 7.1.11. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G. Consideremos $(L, \mathcal{D}'(G/H))$ la representación regular a izquierda, y sea $\mathcal{H}_0$ un subespacio de $\mathcal{D}'(G/H)$.

- Decimos que el subespacio $\mathcal{H}_0$ es G-invariante si $L(g)\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$ para todo $g \in G$.

- Un subespacio $\mathcal{H}$ se dice minimal si no posee subespacios cerrados invariantes propios. Nosotras lo definimos como subespacio irreducible.

- La notación $\int^\oplus$ significa integral directa.

- Una medida de Radon es una medida boreliana, localmente finita y regular por dentro.

Teorema 7.1.12. *Las siguientes son equivalentes:*

1. *Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son subespacios de Hilbert G-invariantes minimales de $\mathcal{D}'(G/H)$ no proporcionales (es decir, que difieren como espacios vectoriales), entonces son no equivalentes.*

2. *Si H es un espacio de Hilbert G-invariante de $\mathcal{D}'(G/H)$, el álgebra $D(G,H)$ es conmutativa.*

3. *Para todo $\mathcal{H}$ subespacio G-invariante de $\mathcal{D}'(G/K)$ existe una única medida de Radon m de s tal que*
$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} H_s \, dm(s).$$

4. *En particular existe una única medida de Radon ds de s tal que*
$$L^2(G/K) = \int^{\oplus} H_s \, ds.$$

A partir de este resultado, Thomas define que $(G, G/H)$ es un par libre de multiplicidad si satisface algunas de las equivalencias anteriores (y por lo tanto todas). De la tercera equivalencia se deduce que nuestra definición de par de Gelfand generalizado coincide con la definición de Thomas de ser par libre de multiplicidad.

Definición 7.1.13. Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base de $\mathcal{H}$. Un operador $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice de traza si
$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle S(h_j), h_j \rangle < \infty.$$

Si G es un grupo de Lie y $(\pi, \mathcal{H})$ una representación tal que $\pi(f)$ es un operador de traza, definimos χ_π por
$$\chi_\pi(f) = tr(\pi(f)).$$

Si G es un grupo de Lie compacto, $(\pi, \mathcal{V})$ con $\mathcal{V}$ de dimensión finita es una representación unitaria de G, entonces $\pi(f)$ es un operador de traza. Sea $\chi_\pi(f) := tr(\pi(f))$. Consideremos además que $\{v_j\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$, y que $\{\lambda_j\}$ la correspondiente base dual de $\mathcal{V}^*$.

Dado $\lambda \otimes v \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}$, podemos definir un funcional $\theta(\lambda \otimes v) \in \mathcal{D}'(G)$ por
$$\theta(\lambda \otimes v)(g) := \lambda(\pi(g)v).$$

Vía la identificacíın $\lambda \otimes v \leftrightarrow \theta(\lambda \otimes v)$, tenemos las siguientes igualdades:
$$\begin{aligned}
\chi_\pi(f) = tr(\pi(f)) &= \sum_j \langle \pi(f)v_j, v_j \rangle \\
&= \sum_j \langle \int_G \pi(g) f(g) v_j dg, v_j \rangle \\
&\sim \sum_j \langle \sum_i \pi(g_i) f(g_i) vj, vj \rangle \\
&= \sum_{j,i} \langle f(g_i) \pi(g_i) v_j, v_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} f(g_i)(\lambda_j \otimes v_j)(g_i),
\end{aligned}$$

donde en la tercera ecuación estamos aproximando integrales por sumas.

Como $(f * \chi_\pi)(g) = \chi_\pi(L_g \check{f})$ (pensando a la función como distribución función), de las igualdades anteriores podemos deducir que el espacio $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}$ se identifica con el subespacio de $\mathcal{D}'(G)$ de la forma $\{f * \chi_\pi : f \in \mathcal{D}(G)\}$.

Es sabido que si G es nilpotente o semisimple y $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación irreducible, entonces el operador $\pi(f)$ es un operador de traza para toda $f \in \mathcal{D}(G)$.

Consideremos ahora un grupo de Lie unimodular H tal que dado $(\gamma, \mathcal{V}) \in \widehat{H}$, $\gamma(f)$ es un operador de traza para toda $f \in \mathcal{D}(H)$ (esta propiedad se cumple para una clase amplia de grupos de Lie tal como los nilpotentes o grupos de Lie semisimples).

Consideremos el par (G, K) donde

$$G = H \times H \text{ y } K = diag(H \times H)$$

el cual puede identificarse naturalmente con H. También G/K puede identificarse con H. Denotemos por $(\gamma^*, \mathcal{V}^*)$ la representación contragradiente (o representación dual) de $(\gamma, \mathcal{V})$. Por un lado, $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}$ es canónicamente isomorfo al subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_\gamma$ de $\mathcal{D}'(H)$ de distribuciones de la forma $f * \chi_\gamma, f \in \mathcal{D}(H)$. Por otro lado, $\gamma^* \otimes \gamma$ se corresponde con la sub-representación de $H \times H$ sobre $\mathcal{D}'(H)$ dada por

$$(h_1, h_2) \mapsto L(h_1)R(h_2).$$

Por lo tanto, χ_γ es el núcleo reproduciente de $\mathcal{H}_\gamma$ y claramenete χ_γ es un vector-distribución en $\mathcal{H}_\gamma^{-\infty}$ fijado por H.

El resultado completo, debido a Mokni y Thomas en [24] da un resultado análogo al criterio de Carcano para pares de Gelfand.

Teorema 7.1.14 (B)**.** *Sean $(\omega, \mathcal{W})$ y $(\gamma, \mathcal{V})$ representaciones unitarias de H tal que γ es irreducible. Entonces γ aparece en la descomposición de ω en componentes irreducibles si y sólo si el $H \times H$-módulo $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}$ tiene un vector-distribución fijado por H.*

En lo que sigue aplicaremos la teoría anterior para grupos de Lie nilpotentes N. Para ello primero recordemos la teoría vista en el Capítulo 5, que muestra como construir las clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de N.

Sea N un grupo de Lie nilpotente y denotemos por $\widehat{N}$ el conjunto de clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de N. Describimos $\widehat{N}$ de acuerdo a la teoría de Kirillov. Sea $\mathfrak{n}$ el álgebra e Lie de N. El grupo N actúa sobre $\mathfrak{n}$ por la acción adjunta Ad, y N actúa sobre $\mathfrak{n}^*$, el espacio dual de $\mathfrak{n}$, por la representación dual

$$Ad^*(n)\Lambda = \Lambda \circ Ad(n^{-1}).$$

Fijado $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$ no trivial, sea $O_\Lambda := \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N\}$ su órbita coadjunta.

De la teoría de Kirillov se sigue que hay una correspondencia entre $\widehat{N}$ y el conjunto de órbitas coadjuntas en $\mathfrak{n}^*$. En efecto, sea

$$B_\Lambda(u,v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}. \tag{7.3}$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un isotrópico maximal de B_Λ en $\mathfrak{n}$, y sea $M_\Lambda = \exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definimos sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(\exp u) = e^{i\Lambda(u)}$, la representación irreducible correspondiente a O_Λ es la representación inducida $\rho_\Lambda := Ind_{M_\Lambda}^N(\chi_\Lambda)$.

Sea K un subgrupo de $Aut(N)$. Dado $k \in K$, $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$ definimos una nueva representación de N dada por

$$\rho_\Lambda^k(n) := \rho_\Lambda(k \cdot n).$$

El estabilizador de π_Λ is $K_\Lambda := \{k \mid \rho_\Lambda \sim \rho_\Lambda^k\}$. Para cada $k \in K_\Lambda$, uno puede elegir un operador de entrelazamiento $\varpi_\Lambda(k)$ tal que

$$\rho_\Lambda^k(n) = \varpi_\Lambda(k)\rho_\Lambda(n)\varpi_\Lambda(k^{-1})$$

para todo $n \in N$. El mapa $k \mapsto \varpi_\Lambda(k)$ es una representación proyectiva de K_Λ, i.e,

$$\varpi_\Lambda(k_1k_2) = \theta_\Lambda(k_1,k_2)\varpi_\Lambda(k_1)\varpi_\Lambda(k_2),\ \text{con } |\theta_\Lambda(k_1,k_2)| = 1 \text{ para todo } k_1,k_2 \in K_\Lambda.$$

La aplicación ϖ_Λ es llamada la representación de entrelazamiento de π_Λ o la representación metapléctica y θ_Λ el multiplicador para la representación proyectiva ϖ_Λ.

Vamos a considerar un grupo de Lie 3-pasos nilpotente introducido en [27] y cierto subgrupo K de $Aut(N)$, tal que

(I) para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}^*, K_\Lambda = K$,

(II) ϖ_Λ es una verdadera representación de K, es decir, $\theta_\Lambda \equiv 1$.

En esta situación, la teoría de Mackey asegura que para $\sigma \in \widehat{K}$,

$$\rho_{\sigma,\Lambda} = \sigma \otimes \varpi_\Lambda\rho_\Lambda$$

es una representación irreducible de $K \ltimes N$ y moviendo $\sigma \in \widehat{K}$ y $\rho_\Lambda \in \widehat{N}$ esta construcción describe completamente a $\widehat{K \ltimes N}$.

Se sigue del Teorema B que la representación irreducible $\sigma \otimes \varpi_\Lambda\rho_\Lambda$ tiene un vector-distribución fijo por K si y sólo si la representación dual σ^* de K aparece en la descomposición en componentes irreducibles de ϖ_Λ.

Luego tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.1.15. (K,N) *es un par de Gelfand generalizado si y sólo si* ϖ_Λ *es libre de multiplicidad para todo* $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Observación 7.1.16. Recordemos que si f es una función Schwartz, tenemos que

$$f(n) = \int_{\widehat{N}} tr\left(\gamma\left(f\right)\gamma\left(n\right)\right) d\mu(\gamma),$$

donde μ es la medida de Plancherel de N.

Por otro lado, tenemos que si $(\gamma, \mathcal{V}) \in \widehat{N}$,

$$\begin{aligned} f * \chi_\gamma(n) = \chi_\gamma\left(L_{n^{-1}}f\right) &= \int_N f\left(nh\right)\chi_\gamma\left(h^{-1}\right) dh \\ &= \int_N f\left(nh\right)\gamma\left(h^{-1}\right) dh \\ &= \int_N f\left(h\right)\gamma\left(h^{-1}n\right) dh \\ &= tr\left(\gamma\left(f\right)\gamma\left(n\right)\right). \end{aligned}$$

Luego podemos reescribir la fórmula de inversión como

$$f(n) = \int_{\widehat{N}} f * \chi_\gamma(n) d\mu(\gamma).$$

7.2. Ejemplo 1

El grupo N que consideraremos es el caso más simple de la familia introducida por G. Ratcliff en [27]. Sea H_1 el grupo de Heisenberg 3-dimensional con álgebra de Lie $\mathfrak{h}_1$ cuyas coordenadas son $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ y corchete de Lie definido por

$$[(x, y, t), (x', y', t')] = (0, 0, xy' - yx').$$

Sea S el subgrupo de $Sp(1) \subseteq Aut(H_1)$ que consiste de las matrices

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la acción de S sobre H_1 dada por

$$\mathbf{s} \cdot (x, y, t) = (x, sx + y, t).$$

Esta acción da lugar a un producto semidirecto $N = S \ltimes H_1$ tal que

$$(s, x, y, t)(s', x', y', t') = (s + s', x + x', sx' + y + y', t + t' + \tfrac{sxx' + y'x - x'y}{2}). \qquad (7.4)$$

Sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de Lie de S. El álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ asociada a N es un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente con coordenadas (s, x, y, t), donde $s \in \mathfrak{s}$, $x, y, t \in \mathbb{R}$, y producto

$$[(s, x, y, t), (s', x', y', t')] = (0, 0, sx' - s'x, xy' - x'y); \qquad (7.5)$$

su centro unidimensional es $\mathfrak{c} = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Observación 7.2.1. Dada una acción de un grupo de Lie S sobre otro grupo de Lie H, esta induce una nueva acción de $\mathfrak{s}$ (el álgebra de Lie de S) sobre $\mathfrak{h}$ (el álgebra de Lie de H)

$$\rho : \mathfrak{s} \to \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$$

tal que hace conmutar el diagrama exponencial.

Podemos dar estructura de álgebra de Lie a $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ vía el corchete

$$[(s,z),(s',z')] = ([s,s'],[z,z'] + \rho(s)z' - \rho(s')z).$$

$(\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}, [\cdot,\cdot])$ es el álgebra de Lie del producto semidirecto $S \ltimes H$.

En nuestro caso,

$$\rho(s)(x,y,t) = (0, sx, 0),$$

y $[\cdot,\cdot]$ coincide con el definido en (7.5).

Denotamos por $Aut_0(N)$ al grupo de automorfismos de N que actúa sobre $\mathfrak{c}$ por la identidad. Como el mapa exponencial es un difeomorfismo (de acuerdo al Lema 4.1.5), podemos identificar $Aut_0(N)$ con $Aut_0(\mathfrak{n})$ y tenemos que

$$Aut_0(N) = \{k \in GL(4,\mathbb{R}) : k([u,v]) = [k(u),k(v)] \text{ para todo } u,v \in \mathfrak{n}, k_{|_\mathfrak{c}} = I\}. \tag{7.6}$$

Sea $\Phi \in Aut_0(N)$, y $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j=1}^4$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. De acuerdo a (7.5) y (7.13), Φ debe satisfacer las siguientes relaciones

$$\Phi([e_1,e_2]) = \Phi(e_3); \quad \Phi([e_2,e_3]) = \Phi(e_4);$$

$$\Phi([e_1,e_3]) = \Phi([e_1,e_4]) = \Phi([e_2,e_4]) = \Phi([e_3,e_4]) = \Phi(0) = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$Aut_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} r & a & 0 & 0 \\ 0 & r^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ d & b & r^{\frac{1}{2}} & 0 \\ e & c & -dr^{-\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix} : r,a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \text{ y } r \neq 0 \right\}.$$

Definimos

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R}^\times \right\} \text{ y}$$

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & b & 1 & 0 \\ e & c & -d & 1 \end{pmatrix} : a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces tenemos que A está actuando por conjugación sobre M y $Aut_0(N) = A \ltimes M$. Escribiendo los elementos de M como 5-uplas (a,b,c,d,e), tenemos que el producto está dado por

$$(a,b,c,d,e)(a',b',c',d',e') = (a+a', b+b'+da', c+c'+ea'-db', d+d', e+e'-dd'). \tag{7.7}$$

Más aún, M es isomorfo a $H \ltimes M_0$, donde

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & -d & 1 \end{pmatrix} \ : \ d, e \in \mathbb{R} \right\}, \text{y}$$

$$M_0 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^3.$$

En efecto, el producto en H es

$$(0,0,0,d,e)(0,0,0,d',e') = (0,0,0,d+d',e+e'-dd'),$$

y por lo tanto podemos identificar H con el subgrupo $\{(d,-d,e) \ : \ d,e \in \mathbb{R}\}$ de H_1. Considerando la acción de H sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$(d,e) \cdot (a',b',c') = (a', b'+da', c'+ea'-db'),$$

y usando (7.7) obtenemos que $M = H \ltimes M_0$.

El subgrupo K de $Aut_0(N)$ que vamos a considerar es

$$K = \left\{ k \in \mathbb{R}^3 : k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7.8}$$

Sea K_1 (resp. K_2) el subgrupo de K cuyos elementos tienen entradas matriciales $k_2 = 0$ (resp. $k_1 = 0$).

Denotamos por $(\alpha, \mu, \nu, \lambda)$ los elementos de $\mathfrak{n}^*$. La correspondencia entre $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n}^*$ está dada por

$$(\alpha, \mu, \nu, \lambda)[(s,x,y,t)] = \alpha s + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Para $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$, es fácil ver que $K_\Lambda = \{k \in K \mid k \cdot \Lambda \in O_\Lambda\}$ donde O_Λ es la órbita coadjunta de Λ. Sea $x_\Lambda \in \mathfrak{n}$ tal que $\Lambda(y) = \langle y, x_\Lambda \rangle$ para todo $y \in \mathfrak{n}$, entonces se sigue que $k \cdot \Lambda(y) = \langle y, (k^{-1})^t x_\Lambda \rangle$. Luego

$$K_\Lambda := \{k \in K \mid k^t \cdot x_\Lambda \in O_\Lambda\}, \tag{7.9}$$

donde k^t denota la matriz transpuesta de k.

Las *órbitas genéricas* son aquellas que se corresponden con representaciones que tienen medida de Plancherel no nula y fueron computadas en [27]. Estas están parametrizadas por $\Lambda = (\alpha, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$, y si $O_{\alpha,\lambda}$ es la órbita coadjunta de Λ, entonces

$$O_{\alpha,\lambda} = \{(\alpha - \frac{1}{2\lambda}\nu^2, \mu, \nu, \lambda) \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}\}.$$

En el caso de las órbitas no-genéricas con $\Lambda = (\alpha, \mu, \nu, 0)$, obtenemos que

$$O_\Lambda = \{(\beta, \eta, \nu, 0) \mid \beta, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto, sea $\Lambda = (\alpha, \mu, \nu, 0)$, y sea $n' = (s', x', y', t') = (0, x', y', t')(s', 0, 0, 0)$. Entonces,

$$Ad(n'^{-1}) = Ad((0, x', y', t')^{-1})Ad((s', 0, 0, 0)^{-1}).$$

Sea $n = (s, x, y, t)$, luego

$$\begin{aligned}(Ad(\exp -(0, x', y', t')))(n) &= \exp(-ad(0, x', y', t'))(n)\\ &= (s, x, y, t) + [(0, x', y', t'), (s, x, y, t)]\\ &+ \tfrac{1}{2}[(0, x', y', t'), [(0, x', y', t'), (s, x, y, t)]]\\ &= (s, x, y - sx', t + \tfrac{x'y - y'x}{2} - \tfrac{sx'^2}{4}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Lambda \circ Ad(-(0, x', y', t'))(s, x, y, t) &= \alpha s + \mu x + \nu(y - sx')\\ &= \alpha s + \mu x + \nu y - \nu s x'\\ &= (\alpha - \nu x')s + \mu x + \nu y\\ &= (\alpha - \nu x', \mu, \nu, 0)(s, x, y, t).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(Ad(\exp -(s', 0, 0, 0)))(n) &= \exp(-ad(s', 0, 0, 0))(n)\\ &= (s, x, y, t) + [(s', 0, 0, 0), (s, x, y, t)] + \tfrac{1}{2}[(s', 0, 0, 0), [(, 0, 0, 0), (s, x, y, t)]]\\ &= (s, x, y, t) + (0, 0, s'x, 0)\\ &= (s, x, s'x + y, 0),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\Lambda \circ Ad(-(s', 0, 0, 0))(s, x, y, t) &= \alpha s + \mu x + \nu(s'x + y)\\ &= \alpha s + \mu x + \nu y + \nu s' x\\ &= \alpha s + (\mu + \nu s')x + \nu y\\ &= (\alpha, \mu + \nu s', \nu, 0)(s, x, y, t).\end{aligned}$$

Luego,

$$\Lambda \circ Ad(s', x'y', t') = (\alpha - \nu x', \mu + \nu s', \nu, 0).$$

Como $O_\Lambda = \{Ad(n') \circ \Lambda : n' \in N\}$, resulta que

$$\begin{aligned}O_\Lambda &= \{(\alpha - \nu x', \mu + \nu s', \nu, 0) : s', x' \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\mu}, \nu, 0) : \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}, \nu \in \mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Sea $(0, 0, \nu, 0)$ un representante de $O_{(\alpha,\mu,\nu,0)}$, y denotemos a $O_{(\alpha,\mu,\nu,0)}$ por O_ν.

Computaremos explicitamente la representación ρ_Λ correspondiente a la órbita O_Λ para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$. Denotamos a ρ_Λ por $\rho_{\alpha,\lambda}$ en el caso $\Lambda = (\alpha, 0, 0, \lambda)$ y por ρ_ν en el caso $\Lambda = (0, 0, \nu, 0)$.

Fijado $\Lambda = (\alpha, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$, la forma anti-simétrica no degenerada asociada es

$$\begin{aligned} B_\Lambda((s,x,y,t),(s',x',y',t')) &= (\alpha,0,0,\lambda)([(s,x,y,t),(s',x',y',t')]) \\ &= (\alpha,0,0,\lambda)(0,0,sx'-s'x,xy'-x'y) \\ &= \lambda(xy'-x'y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, un subespacio isotrópico maximal asociado a Λ está dado por

$$\mathfrak{M}_\Lambda = \{(s,0,y,t) \in \mathfrak{n} \mid s,y,t \in \mathbb{R}\}.$$

El caracter χ_Λ definido sobre $M_\Lambda = \exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$ es $\chi_\Lambda(s,0,y,t) = e^{\Lambda(s,0,y,t)} = e^{i(\alpha s+\lambda t)}$, y

$$\rho_{\alpha,\lambda} = Ind_{M_\Lambda}^N(\chi_\Lambda).$$

Recordemos que la representación inducida es el par $(\rho_{\alpha,\lambda}, H_{\alpha,\lambda})$ donde $H_{\alpha,\lambda}$ es la completación de

$$\{f \in C_c(N) \mid f(nm) = \chi_\Lambda(m^{-1})f(n) \ \text{ for all } m \in M_\Lambda, n \in N\},$$

con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{N/M_\Lambda} f(u)\overline{g(u)}du,$$

y la acción está dada por la traslación regular a izquierda, esto es

$$(\rho_{\alpha,\lambda}(n)f)(n') = f(n^{-1}n'), \quad n, n' \in N.$$

Notemos que escribiendo

$$(s,x,y,t) = (0,x,0,0)(s,0,y,t-\frac{xy}{2}),$$

podemos identificar $H_{\alpha,\lambda}$ con $L^2(\mathbb{R})$ vía el mapa $(0,u,0,0) \mapsto u$.

Como

$$(s,x,y,t)^{-1} = (-s,-x,sx-y,-t),$$

para $f \in H_{\alpha,\lambda}$ obtenemos

$$\begin{aligned} [\rho_{\alpha,\lambda}(s,0,0,0)f](u) &= f((s,0,0,0)^{-1}(0,u,0,0)) \\ &= f((-s,0,0,0)(0,u,0,0)) \\ &= f(-s,u,-su,0) \\ &= f((0,u,0,0)(-s,0,-su,\frac{su^2}{2}) \\ &= \chi_\Lambda(s,0,su,-\frac{su^2}{2})f(0,u,0,0) \\ &= e^{s\alpha-\lambda\frac{su^2}{2}}f(u). \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(s,0,0,0)f](u) = e^{is(\alpha - \frac{\lambda u^2}{2})} f(u),$$

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(0,x,0,0)f](u) = f(u-x),$$

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(0,0,y,0)f](u) = e^{-i\lambda uy} f(u),$$

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(0,0,0,t)f](u) = e^{i\lambda t} f(u).$$

Observemos que las representaciones $\rho_{\alpha,\lambda}$ con $\lambda \neq 0$, son extensiones de las representaciones irreducibles de H_1.

A continuación describiremos las representaciones correspondientes a las órbitas no-genéricas O_ν con $\nu \neq 0$. En este caso,

$$B_\Lambda((s,x,y,t),(s',x',y',t')) = \nu(sx' - s'x),$$

y un subespacio isotrópico maximal es nuevamente $\mathfrak{M}_\Lambda = \{(s,0,y,t) : s,y,t \in \mathbb{R}\}$. El caracter asociado es $\chi_\Lambda(s,0,y,t) = e^{i\nu y}$. Mediante una computación similar al caso anterior obtenemos

$$[\rho_\nu(s,0,0,0)f](u) = e^{i\nu su} f(u),$$

$$[\rho_\nu(0,x,0,0)f](u) = f(u-x),$$

$$[\rho_\nu(0,0,y,0)f](u) = e^{i\nu y} f(u),$$

$$[\rho_\nu(0,0,0,t)f](u) = f(u).$$

Por (7.9) podemos ver fácilmente que $K_\Lambda = K$ para toda $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$. Por lo tanto, la representación metapléctica ϖ_Λ debe satisfacer

$$\rho_\Lambda^k(n)\varpi_\Lambda(k) = \varpi_\Lambda(k)\rho_\Lambda(n) \quad \text{para toda } k \in K \text{ y } n \in N.$$

Los subgrupos K_1 y K_2 fijan los elementos $(s,0,0,0)$, $(0,0,y,0)$ y $(0,0,0,t)$ para todo $s,y,t \in \mathbb{R}$. Luego, tenemos que encontrar un operador unitario ϖ_Λ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\rho_\Lambda^k(0,x,0,0)\varpi_\Lambda(k) = \varpi_\Lambda(k)\rho_\Lambda(0,x,0,0), \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in K \tag{7.10}$$

y

$$\rho_\Lambda(n)\varpi_\Lambda(k) = \varpi_\Lambda(k)\rho_\Lambda(n) \tag{7.11}$$

para $n = (s,0,0,0)$, $n = (0,0,y,0)$ y $n = (0,0,0,t)$, $k \in K$.

Teorema 7.2.2. *La representación metapléctica $(\varpi_\Lambda, K_\Lambda)$ es libre de multiplicidad para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$.*

Demostración. Denotamos por $\varpi_{\alpha,\lambda}$ (resp. ϖ_ν) a la representación metapléctica correspondiente a $\Lambda = (\alpha, 0, 0, \lambda)$ (resp. $\Lambda = (0, 0, \nu, 0)$).

Es fácil ver que dado $k_1 \in K_1$, tenemos que

$$k_1 \cdot (0, x, 0, 0) = (0, x, k_1 x, 0).$$

Escribiendo $(0, x, k_1 x, 0) = (0, x, 0, 0)(0, 0, k_1 x, 0)(0, 0, -\frac{k_1 x^2}{2})$,

$$\begin{aligned}
\rho(0, x, k_1 x, 0) f(u) &= \rho(0, x, 0, 0)\rho(0, 0, k_1 x, 0)\rho(0, 0, 0, -\tfrac{k_1 x^2}{2}) f(u) \\
&= \rho(0, x, 0, 0)\rho(0, 0, k_1 x, 0) e^{-i\lambda \frac{k_1 x^2}{2}} f(u) \\
&= e^{-i\lambda k_1 \frac{x^2}{2}} \rho(0, x, 0, 0)\rho(0, 0, k_1 x, 0) e^{-i\lambda k_1 \frac{x^2}{2}} f(u) \\
&= e^{-i\lambda k_1 \frac{x^2}{2}} \rho(0, x, 0, 0)(e^{-i\lambda u k_1 x} f(u)) \\
&= e^{-i\lambda k_1 \frac{x^2}{2}} (e^{-i\lambda (u-x) k_1} f(u - x) \\
&= e^{i\lambda(-k_1 \frac{x^2}{2} - (u-x) k_1 x)} f(u - x) \\
&= e^{i\lambda(-k_1 \frac{x^2}{2} - u k_1 x + k_1 x^2)} f(u - x) \\
&= e^{i\lambda(k_1 \frac{x^2}{2} - u k_1 x)} f(u - x).
\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(0, x, k_1 x, 0) f](u) = e^{-i\lambda k_1 x u + i\lambda k_1 \frac{x^2}{2}} f(u - x),$$

y definimos

$$[\varpi_{\alpha,\lambda}(k_1, 0) f](u) = e^{-i\lambda \frac{u^2}{2} k_1} f(u).$$

También, dado $k_2 \in K_2$ se cumple que

$$k_2 \cdot (0, x, 0, 0) = (0, x, 0, k_2 x).$$

Entonces

$$[\rho_{\alpha,\lambda}(0, x, 0, k_2 x) f](u) = e^{i\lambda k_2 x} f(u - x),$$

luego definimos

$$[\varpi_{\alpha,\lambda}(0, k_2) f](u) = e^{i\lambda k_2 u} f(u).$$

Esto es,

$$[\varpi_{\alpha,\lambda}(k_1, k_2) f](u) = e^{-i\lambda \frac{u^2}{2} k_1 + i\lambda k_2 u} f(u).$$

El análisis para las órbitas no-genéricas es similar, y obtenemos

$$[\rho_\nu(0, x, k_1 x, 0) f](u) = e^{i\nu k_1 x} f(u - x),$$

$$[\rho_\nu(0,x,0,k_2x)f](u) = f(u-x).$$

Definimos,

$$[\varpi_\nu(k_1,0)f](u) = e^{i\nu k_1 u}f(u),$$
$$[\varpi_\nu(0,k_2)f](u) = f(u).$$

Esto es,

$$[\varpi_\nu(k_1,k_2)f](u) = e^{i\nu k_1 x}f(u).$$

Luego se sigue que (7.11) se satisface para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Por lo tanto podemos concluir que la descomposición de $\varpi_{\alpha,\lambda}$ sobre $L^2(\mathbb{R})$ es

$$L^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-\lambda\frac{u^2}{2},\lambda u}\ du$$

donde $\chi_{-\lambda\frac{u^2}{2},\lambda u}(k_1,k_2) = e^{i(-k_1\lambda\frac{u^2}{2}+\lambda u k_2)}$.

Análogamente, la descomposición de ϖ_ν sobre $L^2(\mathbb{R})$ es

$$L^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\nu u,0}\ du$$

donde $\chi_{\nu u,0}(k_1,k_2) = e^{ik_1\nu u}$.

En el último caso, $\Lambda \equiv 0$ por lo tanto $\mathfrak{M}_\Lambda = \mathfrak{n}$ y $\chi_\Lambda \equiv 1$. Se sigue que ρ_Λ es la representación trivial. Este caso concluye el análisis de la descomposición de la representación metapléctica obteniendo que ϖ_Λ es libre de multiplicidad para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}^*$. Luego, se sigue el siguiente resultado. $\square$

Teorema 7.2.3. *Sean $N = S \ltimes H_1$ y $K \subseteq Aut_0(N)$ definidas como en* (7.8). *Entonces, (K,N) es un par de Gelfand generalizado.*

7.3. Ejemplo 2

Este ejemplo es un caso particular de una familia de álgebras de Lie definida por L. Barberis e I. Dotti en [35]. Dicha familia está definida en el espacio $M_n(\mathbb{R})$ de matrices $n\times n$, obteniendo para cada n natural un álgebra de Lie $\mathfrak{n}_n$ $(n-1)$-pasos nilpotente. Dado n natural, definimos $e_i = \sum_{j=1}^{n-i} e_{j,j+i}$, donde $e_{i,j}$ es la base canónica de $M_n(\mathbb{R})$, y sea

$$\mathfrak{s}_n =< e_i >_{i=1,\cdots,n-1}\ .$$

Notemos que deberíamos usar la notación e_i^n y $e_{i,j}^n$ en lugar de e_i y $e_{i,j}$ respectivamente, pero para no sobrecargar la notación omitiremos el supraíndice n.

Ejemplo 7.3.1. Si estamos en el caso $n = 4$, las matrices e_i son

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmenente definimos

$$\mathfrak{n}_n := \mathfrak{s}_n \oplus \mathfrak{s}_n = \{(s_1, s_2) \ : s_1, s_2 \in \mathfrak{s}_n\}.$$

Dotamos a $\mathfrak{n}_n$ con el corchete de Lie

$$[(x, y), (u, v)] = (xv - yu, 0).$$

En particular, $[(e_i, e_j), (e_k, e_l)] = (e_{i+l} - e_{j+k}, 0)$, pues $e_i e_j = e_{i+j}$, donde definimos $e_{i+j} = 0$ si $i + j \geq n$.

Luego $(\mathfrak{n}_n, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie $(n-1)$-pasos nilpotente.

Para construir nuestro ejemplo, consideremos $n = 4$, pues de esta forma $\mathfrak{n}_4$, que de ahora en más llamaremos $\mathfrak{n}$, resulta un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente.

Es fácil ver que el centro $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{n}$ es el subespacio generado por los vectores $(e_3, 0)$ y $(0, e_3)$, y que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(e_3, 0), (0, e_3), (e_1, 0), (0, e_1), (e_2, 0), (0, e_2)\}$$

es una base ordenada de $\mathfrak{n}$.

Definimos

$$V = \langle (e_1, 0), (0, e_1), (e_2, 0), (0, e_2) \rangle.$$

Sea $\lambda \in \mathfrak{n}^*$, entonces $\lambda(u) = \langle u, x_\lambda \rangle$ para algún $x_\lambda \in \mathfrak{n}$ y para todo $u \in \mathfrak{n}$. Supongamos

$$x_\lambda = c_\lambda^1 (e_3, 0) + c_\lambda^2 (0, e_3) + c_\lambda^3 (e_1, 0) + c_\lambda^4 (0, e_1) + c_\lambda^5 (e_2, 0) + c_\lambda^6 (0, e_2), \quad c_\lambda^i \in \mathbb{R}.$$

Sean $x, y \in V$,

$$x = x_3(e_1, 0) + x_4(0, e_1) + x_5(e_2, 0) + x_6(0, e_2),$$

$$y = y_3(e_1, 0) + y_4(0, e_1) + y_5(e_2, 0) + y_6(0, e_2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B_\lambda(x, y) &= \lambda([x, y]) \\ &= \langle [x, y], x_\lambda \rangle \\ &= \langle x_3x_4(e_2, 0) - x_4y_3(e_2, 0) + x_3y_6(e_3, 0) + x_5y_3(e_3, 0) - x_4y_5(e_3, 0) - x_6y_4(e_3, 0), x_\lambda \rangle, \\ &= (x_3y_6 + x_5y_3 - x_4y_5 - x_6y_4)\ c_\lambda^1\ \langle (e_3, 0), (e_3, 0) \rangle \\ &= (x_3y_6 + x_5y_3 - x_4y_5 - x_6y_4)\ c_\lambda^1\ ||(e_3, 0)||. \end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{\lambda_{|V\times V}}$ resulta una forma bilineal no degenerado sobre $\mathfrak{n}/\mathfrak{c} = V$. Luego, por las equivalencias de Wolf (5.3), la representación ρ_λ asociada a $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ es de cuadrado integrable, y el conjunto de clases de equivalencias de representaciones de $\mathfrak{n}$ están parametrizadas por $\lambda \in \mathfrak{c}^*$. Además, $K_{|V} \subseteq Sp(B_{\lambda_{|V\times V}})$.

Sea N el grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Como en el Ejemplo 1, denotamos por $Aut_0(N)$ al grupo de automorfismos de N que actúa sobre $\mathfrak{c}$ por la identidad. Como el mapa exponencial es un difeomorfismo (ver Lema 4.1.5), identificamos $Aut_0(N)$ con $Aut_0(\mathfrak{n})$, y por lo que

$$Aut_0(N) = \{k \in GL(6,\mathbb{R}) : k([u,v]) = [k(u), k(v)] \text{ para todo } u, v \in \mathfrak{n},\ k_{|_\mathfrak{c}} = I\}.$$

Luego de verificar que k satisface la condición $k([u,v]) = [k(u), k(v)]$ para todo $u, v \in \mathcal{B}$ obtuvimos que $Aut_0(N)$ está conformado por el conjunto de k's que satisfacen

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & M & c_1 & e \\ 0 & 1 & b_1 & 0 & d_1 & f \\ 0 & 0 & s & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & s^{\frac{1}{2}} & c & bs^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & d & s^{-1} \end{pmatrix},$$

con $s > 0$, $a, a_1, b, b_1, c, c_1, d, d_1, f, e, r \in \mathbb{R}$, y $M = sd + as^{-\frac{1}{2}} - br$.

Consideraremos

$$K = \{k \in Aut_0(N) : k_{|V} \subseteq V\}. \tag{7.12}$$

En particular, esto implica

$$M = sd + as^{-\frac{1}{2}} - br = 0.$$

Multiplicando a M por $s^{\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$Ms^{\frac{1}{2}} = ds^{\frac{3}{2}} + a - brs^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Para conocer K basta caracterizar a $K_{|V}$

$$K_{|V} = \left\{ k : k = \begin{pmatrix} s & 0 & b & 0 \\ a & s^{\frac{1}{2}} & c & s^{-\frac{1}{2}}b \\ 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ r & 0 & d & s^{-1} \end{pmatrix} : s > 0,\ a, b, c, d, r \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad 0 = ds^{\frac{3}{2}} + a - brs^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Más aún, a todo $k \in K$ lo podemos escribir como $k = k_1 k_2$ con $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$, donde

$$K_1 := \left\{ k \ : \ k = \begin{pmatrix} s & 0 & b & 0 \\ a & s^{\frac{1}{2}} & c & s^{-\frac{1}{2}}b \\ 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -s^{-\frac{3}{2}}a & s^{-1} \end{pmatrix} \ : \ s > 0,\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \tag{7.13}$$

y

$$K_2 := \left\{ k \ : \ k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ s > 0, \ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, si k es una matriz que satisface la ecuación $a + s^{\frac{3}{2}}d - rbs^{\frac{1}{2}} = 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} s & 0 & b & 0 \\ a & s^{\frac{1}{2}} & c & s^{-\frac{1}{2}}b \\ 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ r & 0 & d & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & b & 0 \\ a - s^{\frac{1}{2}}rb & s^{\frac{1}{2}} & c & s^{-\frac{1}{2}}b \\ 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -s^{-\frac{3}{2}}a & s^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ rs & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\tilde{J} := [B_\lambda]_{\mathcal{B}_{|V}}$, entonces

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y sea J la matriz dada por la forma bilineal canónica preservada por el grupo de matrices $Sp(2,\mathbb{R})$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

entonces $P = P^{-1}$, y las matrices J y $\tilde{J}$ son conjugadas por la matriz P.

El subgrupo K satisface

$$K\tilde{J}K^{-1} = \tilde{J}^{-1}.$$

Luego si consideramos el grupo

$$\tilde{K} := PKP^{-1}, \tag{7.15}$$

el grupo $\tilde{K}$ preserva la forma bilineal dada por J, y por lo tanto $\tilde{K} \subseteq Sp(2,\mathbb{R})$. Notemos que la ecuación (7.15) se puede expresar en términos de equivalencia de representaciones. Luego la representación metapléctica es libre de multiplicidad como K-módulo si y sólo si lo es como $\tilde{K}$-módulo.

Sean $\tilde{K_1}$ y $\tilde{K_2}$ los subgrupos obtenidos vía la conjugación por P de K_1 y K_2 respectivamente.

Comencemos trabajando con el subgrupo $\tilde{K_1}$.

$$\tilde{K_1} := \left\{ k \ : \ k = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & b \\ a & s^{\frac{1}{2}} & s^{-\frac{1}{2}}b & c \\ 0 & 0 & s^{-1} & -s^{-\frac{3}{2}}a \\ 0 & 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \ : \ s > 0, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es fácil ver que $\tilde{K_1} = S \ltimes H$, donde

$$S := \left\{ r(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \ : \ s > 0 \right\} \quad \text{y}$$

$$H := \left\{ n(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ a & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

El subgrupo H resulta isomorfo al grupo de Heisenberg H_1 de dimensión 3 vía la identificación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ a & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

y S es isomorfo al subgrupo

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{d+d^{-1}}{2} & \frac{d-d^{-1}}{2} \\ \frac{d-d^{-1}}{2} & \frac{d+d^{-1}}{2} \end{pmatrix} \ : \ s > 0 \right\},$$

que es la parte conmutativa de la descomposición de Iwasawa de $SU(2,1)$.

Varios autores describen como se descompone la representación metapléctica actuando sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ como $Sp(2,\mathbb{R})$-módulo. Si $g(A)$, $t(B)$ y C son matrices de la forma

$$g(A) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad t(B) \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

donde $A \in GL(2,\mathbb{R})$, B es una matriz simétrica 2×2, I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 y 0 denota la matriz nula de tamaño 2×2, entonces $\{g(A), t(B), C\}$ son generadores del grupo $Sp(2,\mathbb{R})$. En [18] se establece que la representación metapléctica se define por:

(7.16)

$$\begin{aligned}\varpi(g(A))f(x) &= \det(A)^{\frac{1}{2}}f(A^t x),\\ \varpi(t(B))f(x) &= e^{\frac{i}{2}\langle t(B)x,x\rangle}f(x),\\ \varpi(C)f(x) &= \widehat{f}(x).\end{aligned}$$

Siguiendo esta descripción, escribimos a $r(s)\in S$ como

$$r(s)=\begin{pmatrix} A_s & 0\\ 0 & (A_s^t)^{-1}\end{pmatrix},\quad A_s=\begin{pmatrix} s & 0\\ 0 & s^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

entonces

$$\varpi(r(s))f(u,v)=s^{\sqrt{\frac{3}{2}}}f(su,s^{\frac{1}{2}}v).$$

Para computar la representación ϖ sobre H, notemos que

$$\begin{aligned} n(a,0,0) &= \begin{pmatrix} A_a & 0\\ 0 & (A_a^t)^{-1}\end{pmatrix},\quad A_a=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ a & 1\,,\end{pmatrix},\\ n(0,b,0) &= \begin{pmatrix} 1 & B_b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_b=\begin{pmatrix} 0 & b\\ b & 0\,.\end{pmatrix},\quad B_b=B_b^t,\\ n(0,0,c) &= \begin{pmatrix} 1 & B_c\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_c=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & c\,.\end{pmatrix},\quad B_c=B_c^t.\end{aligned}$$

Entonces computamos ϖ obteniendo

$$\begin{aligned}\varpi(n(a,0,0))f(u,v) &= f(u+av,v),\\ \varpi(n(0,b,0))f(u,v) &= e^{ibuv}f(u,v),\\ \varpi(n(0,0,c))f(u,v) &= e^{\frac{i}{2}cv^2}f(u,v).\end{aligned}$$

Recordemos que H es isomorfo al grupo de Heisenberg H_1. La representación $\varpi_{|_H}$ coincide con una representación del grupo H_1, pero con un producto modificado.

Consideremos el grupo $(H_1,*)$, donde

$$(a,b,c)*(a',b',c')=(a+a',b+b',c+c'+ab'-a'b).$$

El centro de $(H_1,*)$ es $Z=\{(0,0,c):c\in\mathbb{R}\}$, y por lo tanto, si (π,H_π) es una representación de H_1, entonces existe $\lambda=\lambda(\pi)\in\mathbb{R}$ tal que

$$\pi(0,0,c)=e^{i\lambda c}I.$$

Supongamos que $\lambda\neq 0$. Entonces el siguiente resultado nos permitirá construir representaciones de $(H_1,*)$.

Lema 7.3.2. *Sea $\lambda\neq 0$, y sean σ_1, σ_2 dos representaciones unitarias de $\mathbb{R}$ en un espacio de Hilbert H_λ, tal que*

$$\sigma_1(a)\sigma_2(b)=e^{2i\lambda ab}\sigma_2(b)\sigma_1(a). \tag{7.17}$$

Entonces existe una y sólo una representación unitaria de $(H_1,*)$ en H_λ tal que

$$\pi_\lambda(a,0,0)=\sigma_1(a),\ \pi_\lambda(0,b,0)=\sigma_2(b),\ y\ \pi_\lambda(0,0,c)=e^{i\lambda c}I,$$

con $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Demostración. Observemos que

$$(a, b, c) = (0, 0, c - ab) * (a, 0, 0) * (0, b, 0).$$

Entonces

$$\pi_\lambda(a, b, c) = e^{i\lambda(c-ab)}\sigma_1(a)\sigma_2(b).$$

Luego, por (7.17)

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(a, b, c)\pi(a', b', c') &= e^{i\lambda(c+c'-(ab+a'b'))}\sigma_1(a)\sigma_2(b)\sigma_1(a')\sigma_2(b') \\
&= e^{i\lambda(c+c'-(ab+a'b'+2a'b))}\sigma_1(a)\sigma_1(a')\sigma_2(b)\sigma_2(b') \\
&= e^{i\lambda(c+c'+ab'-ba'-ab'-a'b'-a'b-ba'-ab)}\sigma_1(a)\sigma_1(a')\sigma_2(b)\sigma_2(b') \\
&= e^{i\lambda(c+c'+ab'-ba'-(a+a')(b+b')}\sigma_1(a + a')\sigma_2(b + b') \\
&= \pi_\lambda(a + a', b + b', c + c' + ab' - a'b).
\end{aligned}$$

La representación π_λ resulta continua y unitaria. Por lo tanto π_λ es una representación de $(H_1, *)$. □

La representación $\varpi_{|_H}$ en el centro satisface

$$\varpi(0, 0, c) = e^{ic\frac{v^2}{2}}I.$$

Para cada v real consideremos $\lambda = \frac{v^2}{2}$. Para este λ, las representaciones σ_1 y σ_2 definidas en el espacio de Hilbert $H_\lambda = L^2(\mathbb{R})$ por

$$\sigma_1(a)f(u) = f(u + av), \tag{7.18}$$

$$\sigma_2(b)f(u) = e^{ibuv}f(u), \tag{7.19}$$

satisfacen (7.17). En efecto:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(a)(\sigma_2(b)f)(u) &= (\sigma_2(b)f)(u + bv) \\
&= e^{ib(u+av)v}f(u + av) \\
&= e^{iauv}e^{iabv^2}f(u + av) \\
&= \sigma_2(b)(\sigma_1(a)f)(u)e^{iv^2ab} \\
&= \sigma_2(b)(\sigma_1(a)f)(u)e^{i2\lambda ab}.
\end{aligned}$$

La representación $\pi_{\frac{v^2}{2}}$ obtenida para σ_1 y σ_2 definidas en (7.18) y (7.19) respectivamente es

$$\pi_{\frac{v^2}{2}}(n(a, 0, 0))f(u) = f(u + av),$$

$$\pi_{\frac{v^2}{2}}(n(0, b, 0))f(u) = e^{ibuv}f(u),$$

$$\pi_{\frac{v^2}{2}}(n(0, 0, c))f(u) = e^{\frac{i}{2}cv^2}f(u).$$

Se puede ver, además, que $(\pi_{\frac{v^2}{2}}, H_\lambda)$ es irreducible (ver [26] página 113).

Notemos que, si π_1 y π_2 son dos representaciones tales que $\lambda(\pi_1) = \lambda(\pi_2)$, entonces π_1 y π_2 son equivalentes. Esto lo podemos ver usando la equivalencia (5.3). En efecto, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_1$ asociada a H_1 es $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{c} \oplus V$, con $V = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{c} = \mathbb{R}$ y corchete de Lie $[(a,b,c),(a',b',c')] = (0,0,2(ab'-a'b)$ (el corchete se obtiene usando la fórmula de Campbell-Hausdorff). Dado $\Lambda \in H_1^*, \Lambda = (a_1,a_2,a_3)$ con $a_i \in \mathbb{R}^* \sim \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$, entonces

$$B_\Lambda((a,b,0),(a',b',0)) = \Lambda[(a,b,0),(a',b',0)] = \Lambda(0,0,2(ab'-a'b)) = a_3 2(ab'-a'b),$$

y por lo tanto B_Λ es no degenerada sobre $V \times V$, luego las representaciones de H_1 con $\Lambda \neq 0$ son de cuadrado integrable y están caracterizadas por su valor en $\mathfrak{c} =< (0,0,1) >$.

Si definimos $H^t := \{f(u,t) \;:\; f \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$, y $(\tilde{\pi}_t, H^t)$ la representación obtenida de modificar $\pi_{\frac{t^2}{2}}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_t(n(a,0,0))f(u,t) &= f(u+at,t),\\
\tilde{\pi}_t(n(0,b,0))f(u,t) &= e^{ibut}f(u,t),\\
\tilde{\pi}_t(n(0,0,c))f(u,t) &= e^{\frac{i}{2}ct^2}f(u,t),
\end{aligned}$$

entonces $\varpi(n(a,b,c)) : H^t \to H^t$ coincide con $\tilde{\pi}_t(a,b,c)$ para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$. Luego para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, $(\varpi_{|_H}, H^t)$ es, básicamente, una representación del Heisenberg modificado $(H_1,*)$.
Más aún, $(\varpi_{|_H}, H^t)$ es una representación irreducible.

Sin embargo, H^t no es un espacio invariante por la representación $\varpi_{|_S}$.
Definimos entonces

$$\begin{aligned}
H^+ &:= \int_{t>0} H^t dt,\\
H^- &:= \int_{t\leq 0} H^t dt.
\end{aligned}$$

Los espacios H^+ y H^- resultan invariantes por la representación ϖ. Notemos, además, que $\varpi_{|_{H^+}}$ es irreducible. En efecto, sea $W \subseteq H^+$ un subespacio invariante por ϖ, en particular W también resulta ser invariante por la representación $\varpi_{|_H}$, y $W^\perp$ cumple la misma propiedad. Por Teorema (3.6.9), a W lo podemos descomponer como una integral directa de espacios, entre los cuales aparece H^t para algún t. Podemos suponer que $t > 0$, sino consideramos $W^\perp$ en lugar de W. Como W es un subespacio invariante y se cumple que $\varpi(r(t^{-2}))W = H^1$, entonces H^1 también debe aparecer en la descomposición de W en componentes irreducibles. Por lo tanto, $W = H^+$.

De manera análoga, se prueba que H^- es un subespacio invariante y resulta una componente irreducible de la representación ϖ.

Luego tenemos el siguiente resultado

Teorema 7.3.3. *Sea* $\mathfrak{n}$ *el álgebra de Lie* 3*-pasos nilpotente definido por Barberis-Dotti en [35] con* $n = 4$*, sea* K_1 *el subgrupo de automorfismos de* $\mathfrak{n}$ *definido en 7.13, y* $\tilde{K_1} = PK_1P^{-1}$ *con* P *definida en* (7.14)*. Si* N *es el grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie* $\mathfrak{n}$*, entonces el espacio* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *se descompone como suma de dos subespacios* $\tilde{K_1}$*-invariantes minimales equivalentes,*

$$L^2(\mathbb{R}^2) = H^+ \oplus H^-. \tag{7.20}$$

Luego la representación metapléctica $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^2))$ *tiene multiplicidad 2 y el par* (K_1, N) *no es un par de Gelfand generalizado.*

Demostración. Dado $t \in \mathbb{R}$, las representaciones $(\varpi_{|_H}, H^t)$ y $(\varpi_{|_H}, H^{-t})$ resultan equivalentes como H-módulo, pues coinciden en $n(0,0,c)$ para todo c. Recordemos que $n(0,0,c)$ es el centro de $(H_1, *)$ y dos representaciones sobre este grupo son equivalentes si y sólo si coinciden en el centro. Luego $(\varpi_{|_H}, H^+)$ y $(\varpi_{|_H}, H^-)$ son representaciones equivalentes como H-módulo.

Si consideramos el operador

$$T : H^+ \to H^-$$

$$Tf(u,v) = f(-u,-v),$$

entonces T resulta operador de entrelazamiento como H-módulo. En efecto,

$$T \circ \varpi(n(a,0,0))f(u,v) = T(f(u+av,v)) = f(-u-av,-v) \quad \text{y}$$

$$\varpi(n(a,0,0)) \circ Tf(u,v) = \varpi(n(a,0,0))f(-u,-v) = f(-u-av,-v).$$

Por otra parte,

$$T \circ \varpi(n(0,b,0))f(u,v) = T(e^{ibuv}f(u,v)) = e^{ibuv}f(-u,-v) \quad \text{y}$$

$$\varpi(n(0,b,0))Tf(u,v) = \varpi(n(0,b,0))f(-u,-v) = e^{ibuv}f(-u,-v).$$

Finalmente,

$$T \circ \varpi(n(0,0,c))f(u,v) = T(e^{\frac{i}{2}cv^2}f(u,v)) = e^{\frac{i}{2}cv^2}f(-u,-v), \quad \text{y}$$

$$\varpi(n(0,0,c))Tf(u,v) = \varpi(n(0,0,c))f(-u,-v) = e^{\frac{i}{2}cv^2}f(-u,-v).$$

Además las representaciones $(\varpi_{|_S}, H^+)$ y $(\varpi_{|_S}, H^-)$ resultan equivalentes como S-módulo. En efecto,

$$T \circ \varpi(r(s))f(u,v) = T(s^{\sqrt{\frac{3}{2}}}f(su, s^{\frac{1}{2}}v)) = s^{\sqrt{\frac{3}{2}}}f(-su, -s^{\frac{1}{2}}v), \quad \text{y}$$

$$\varpi(r(s))Tf(u,v) = \varpi(r(s))f(-u,-v) = s^{\sqrt{\frac{3}{2}}}f(-su, -s^{\frac{1}{2}}v).$$

Además, T es claramente biyectivo. Concluímos que (ϖ, H^+) y (ϖ, H^-) son representaciones irreducibles equivalentes. Finalmente la representación metapéctica ϖ tiene multiplicidad 2 sobre $\tilde{K_1}$, por lo que el par (K_1, N) no es un par de Gelfand generalizado. □

Recordemos que el subgrupo $K \subseteq Aut(N)$ definido en (7.12) satisface $K = K_1K_2$. Analicemos el par (K, N).

Conjugando a la matriz K_2 por P obtenemos

$$\tilde{K_2} = \left\{ \tilde{k_2} \in \tilde{K} : \tilde{k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es sabido que si definimos

$$V := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : f \text{ es par}\}, \quad W := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : f \text{ es impar}\},$$

entonces V y W resultan subespacios invariantes e irreducibles respecto de la representación metapléctica como $Sp(2, \mathbb{R})$-módulo y tenemos la descomposición

$$L^2(\mathbb{R}^2) = V \oplus W. \tag{7.21}$$

Más aún, V y W son no equivalentes.

Este argumento nos permite verificar que H^+ y H^- son subespacios invariantes bajo la acción de $\tilde{K_2}$, y lo probaremos en la siguiente afirmación.

Afirmación. Sea $\tilde{k_2}$ el elemento que genera a $\tilde{K_2}$. Entonces H^+ y H^- son subespacios $\varpi(\tilde{k_2})$-invariantes.

Demostración. Sabemos que la representacion metaplectica sobre $\tilde{K_1}$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$ se descompone como suma de H^+ y H^-, y que son $\tilde{K_1}$-módulos equivalentes a través del operador T copete, de acuerdo al Teorema 7.3.3.

Si $\varpi(\tilde{k_2})$ no dejara invariante a H^+ y H^-, entonces la representacion metaplectica de $\tilde{K}$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ sería irreducible. En efecto, sea W un subespacio de $L^2(\mathbb{R}^2)$ invariante por $\varpi(\tilde{K})$, y sea $W^\perp$ el subespacio ortogonal de W. Luego $L^2(\mathbb{R}^2)$ se descompone como suma directa de W y $W^\perp$. Pero entonces W debe ser $\tilde{K_1}$-irreducible, pues por unicidad de la descomposicion en irreducibles (7.20), el numero de componentes irreducibles no puede cambiar y ya sabemos que es 2. Luego tambien por unicidad de la descomposición (7.20), W debe ser equivalente a H^+ o a H^- como $\tilde{K_1}$-módulo. Como H^+ y H^- no son invariantes por $\varpi(\tilde{k_2})$, $W = L^2(\mathbb{R}^2)$ o $W = 0$.

Si la representación ϖ de $\tilde{K}$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ es irreducible, entonces ϖ también es irreducible como $Sp(2, \mathbb{R})$-módulo, lo cual contradice (7.21). Por lo tanto H^+ y H^- son subespacios invariantes bajo la acción de $\varpi(\tilde{k_2})$. $\square$

Como conclusión tenemos que H^+ y H^- son subespacios $\tilde{K_2}$-invariantes por la acción de la representación metapléctica ϖ.

Dado $\tilde{k_2} \in \tilde{K_2}$,

$$\tilde{k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

si definimos $t(B_r)$ por

$$t(B_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $\tilde{k_2} = -I\ C\ t(B_r)\ C \in Sp(2, \mathbb{R})$.

Recordando las fórmulas (7.16), obtenemos que

$$\varpi(t(B_r))f(u,v) = e^{\frac{i}{2}ru^2} f(u,v).$$

Suponemos $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\varpi(\tilde{k_2})f(x_1,x_2) &= \varpi(g(-I)) \circ (\varpi(C) \circ \varpi(t(B_r)) \circ \varpi(C)f)(x_1,x_2) \\
&= (\varpi(C) \circ \varpi(t(B_r)) \circ \varpi(C)f)(-x_1,-x_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \varpi(t(B_r)) \circ \varpi(C)f)(\xi_1,\xi_2) e^{i\langle (x_1,x_2),(\xi_1\xi_2)\rangle}\ d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\varpi(C)f)(\xi_1,\xi_2) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{i\langle (x_1,x_2),(\xi_1,\xi_2)\rangle}\ d\xi_1\ d\xi_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi_1)\widehat{f}(\xi_2) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{i\langle (x_1,x_2),(\xi_1,\xi_2)\rangle}\ d\xi_1\ d\xi_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_1) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{ix_1\xi_1}\ d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_2) e^{x_2\xi_2}\ d\xi_2 \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_1) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{ix_1\xi_1}\ d\xi_1 \right) f(x_2).
\end{aligned}$$

A pesar de que no logramos encontrar una fórmula explícita para $\varpi|_{\tilde{K_2}}$, podemos verificar que el operador T definido arriba

$$Tf(u,v) = f(-u,-v)$$

es un operador de entrelazamiento.

Por un lado,

$$\begin{aligned}
\varpi(\tilde{k_2}) \circ T(f(x_1,x_2)) &= \varpi(\tilde{k_2})f(-x_1,-x_2) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_1) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{-ix_1\xi_1}\ d\xi_1 \right) f(-x_2).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T \circ \varpi(\tilde{k_2})f(x_1,x_2) &= T\left(\left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_1) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{ix_1\xi_1}\ d\xi_1 \right) f(x_2) \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi_1) e^{ir\frac{{\xi_1}^2}{2}} e^{-ix_1\xi_1}\ d\xi_1 \right) f(-x_2).
\end{aligned}$$

Luego

$$\varpi(\tilde{k_2}) \circ T(f(x_1, x_2)) = T \circ \varpi(\tilde{k_2}) f(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Con un argumento de densidad de las funciones de variables separadas en $L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos ver que T es un operador de entrelazamiento para la representación $\varpi|_{\tilde{K}_2}$.

Teorema 7.3.4. *Sea $\mathfrak{n}$ el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente definido por Barberis-Dotti en [35] con $n = 4$, sea K el subgrupo de automorfismos de $\mathfrak{n}$ definido en 7.12 y $\tilde{K} = PKP^{-1}$ con P definido en (7.14). Si N es el grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, entonces , el espacio $L^2(\mathbb{R}^2)$ se descompone como $\tilde{K}$-módulo en la suma de dos subespacios invariantes minimales,*

$$L^2(\mathbb{R}^2) = H^+ \oplus H^-.$$

Luego, la representación metapléctica $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^2))$ tiene multiplicidad 2 y el par (K, N) no es un par de Gelfand generalizado.

Demostración. Ya probamos que H^+ y H^- son espacios $\tilde{K}_2$-invariantes por la representación ϖ.

Supongamos que existe $W \subseteq H^+$ subespacio invariante de la representación $\varpi|_{\tilde{K}}$. En particular, W es invariante como $\tilde{K}_1$-módulo, y por lo tanto es $W = H^+$. Luego H^+ es una componente irreducible, y análogamente se puede ver que H^- también lo es.

Computemos $T \circ \varpi$:

$$\begin{aligned} T \circ \varpi(k) &= T \circ \varpi(k_1 k_2) \\ &= T \circ \varpi(k_1) \circ \varpi(k_2) \\ &= \varpi(k_1) \circ T \circ \varpi(k_2) \\ &= \varpi(k_1) \circ \varpi(k_2) \circ T \\ &= \varpi(k) \circ T. \end{aligned}$$

Luego $T \in A_\varpi$, y $T : H^+ \to H^-$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto las representaciones (ϖ, H^+) y (ϖ, H^-) son equivalentes como $\tilde{K}$-módulo, y

$$L^2(\mathbb{R}^2) = H^+ \oplus H^-.$$

Finalmente, $(\varpi, L^2(\mathbb{R}^2))$ tienen multiplicidad 2, y el par (K, N) no es un par de Gelfand generalizado. □

Bibliografía

[1] F. Astengo, B. Di Blasio, F. Ricci, *Gelfand transforms of polyradial functions on the Heisenberg group*. J. Funct. Anal. **251**, 772-791 (2007).

[2] R. Beals, W. Roderick, *Special functions: a graduate text*. Vol. 126. Cambridge University Press (2010).

[3] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratclif, *The orbit method and Gelfand pairs, associated with nilpotent Lie group*, The Journal of Geometric Analysis. **9**, 569-582 (1990).

[4] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratclif, *Bounded k-spherical function on Heisenberg group*, Journal of Funcional Analysis. **105**, 409-443 (1992).

[5] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratclif, *On Gelfand pair associated with nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **321**, 89-116 (1999).

[6] K. D. Bierstedt, B. Fuchssteiner, *Functional analysis: surveys and recent results III*. Elsevier (2000).

[7] R. Díaz Martín, *Análisis armónico en grupos nilpotentes*. Trabajo doctoral en Matemática. FaMAF-UNC (2018).

[8] J. Faraut, *Distributions sphriques sur le espaces hiperbolique*. J. Math. Pures Appl. **58**, 369-444 (1979).

[9] V. Fischer, M. Ruzhansky, *Quantization on nilpotent Lie groups*. Basel: Birakhuser (2016).

[10] V. Fischer, F. Ricci, O. Yakimova, *Nilpotent Gelfand pairs and spherical transforms of Schwartz functions III. Isomorphisms between Schwartz spaces under Vinberg condition*, arxiv 1210.7962.

[11] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phases spaces*, Annals of Mathematics Studies. **122** (1989).

[12] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory*, Graduate text Mathematics. **129** (1991).

[13] A. L. Gallo, L. V. Saal, *Some harmonic analysis on commutative nilmanifolds,* Journal of Lie Theory, en prensa (2019). https://arxiv.org/abs/1909.09873.

[14] A. L. Gallo, L. V. Saal, *A generalized Gelfand pair attached to a 3-step nilpotent Lie group,* Journal of Fourier Analysis and Applications, en prensa (2020). https://arxiv.org/abs/2005.06362.

[15] T. Godoy, L. Saal, *Some spectral results on $L^2(H_n)$ related to the action of $U(p,q)$*, Colloquium Mathematicum. **86**, 177-186 (2000).

[16] R. Goodman, N. R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Mathematics. **68** (1998).

[17] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces.* Vol. 341. American Mathematical Soc. (2001).

[18] M. Kashiwara, M. Vergne, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials.* Inventiones mathematicae, 44(1), 1-47 (1978).

[19] A. Knapp, *Lie groups beyound and introduction*, ivan second edition. Birkhauser. Progree in mathematics, **140** (2002).

[20] T. Kobayashi, *Multiplicity free representations and visible actions on complex manifolds*, edition. Kyoto University, **41** (2005).

[21] K. Koike, I. Terada, *Young-diagrammatic methods for representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n*, Journal of Functional Analysis. **107**, 466-511 (1987).

[22] J. Lauret, *Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups*, manuscripta math, Springer-Verlag. **99**, 287-309 (1999).

[23] J. Lauret, *Gelfand pairs attached to representations of compact Lie groups*, Transformation Groups. Math. Soc. **5**, 307-324 (2000).

[24] K. Mokni, E. G. F. Thomas, *Paires de Guelfand gnralises associes au groupe d'Heisenberg.* J. Lie Theory **8**, 325-334 (1998).

[25] C. Moore, J. Wolf, *Square integrable representations of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** 445-462 (1973).

[26] F. Ricci, *Analisi Armonica non Commutativa*, Apuntes (2001-2002).

[27] G. Ratcliff, *Symbols and orbits for 3-step nilpotent Lie groups.* J. Funct. Anal. **62**, 38-64 (1985).

[28] M. R. Sepanski, *Compact lie groups.* Vol. 235. Springer Science and Business Media (2007).

[29] R. Strichartz, *L^p harmonic analysis and Radon transform on the Heisenberg group*, Journal of Functional Analysis . **96**, 350-406 (1991).

[30] E. G. F. Thomas, *The theorem of Bochner Schwartz Godement for generalized Gelfand pairs*. Funct. Anal.: Surveys and Recent Results III, Elsevier (1984).

[31] G. Van Dijk, *Group representations on spaces of distributions*. Russian J. Math. Phys. **2**, 57-68 (1994).

[32] G. Van Dijk, *Introduction to harmonic analysis and generalized Gelfand pairs*. Vol. 36. Walter de Gruyter, (2009).

[33] E. B. Vinberg, *Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions*. Russian Math. **56**, 1-60 (2001).

[34] N. R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker (1973).

[35] J. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces.* American Mathematical Sociaty. Mathematical Surveys and Monograohs, Volume 142 (2007).

[36] J. Wolf, *On the analytic structure of commutative nilmanifolds.* J. Geom. Anal. **26**, 1011-1022. (2016).