

CREACIÓN DE PARES
POR FOTONES DE ALTA ENERGÍA
EN EL CAMPO DE ELECTRONES LIBRES

Tesis de Doctorado de:

Lorenzo Marcos Iparraguirre

Director:

Dr. Gerardo O. Depaola

2014

Facultad de Matemática astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Córdoba
Argentina

Agradecimientos:

Dentro de mí, yo soy un agradecido.

Todos los días me siento agradecido con el nuevo día de que me permita ver su luz, y con los que me acompañan, porque están ahí.

Y en este momento especial agradezco a las fuerzas del universo que me hayan permitido terminar esta Tesis.

Pero ello no hubiera ocurrido sin el empujón inicial que agradezco a mi colega y amigo Carlos Kozameh.

Y agradezco especialmente a mi director, Gerardo Depaola por su ayuda en todo momento, pero sobre todo por la paciencia que me ha tenido.

Y por sobre todas las cosas, con mucho amor, a mi familia.

Por estar ahí.

Y muy especialmente a mi esposa Gabriela y mi hija menor Alfonsina, que han soportado toda la carga. Y a Aranza y a Iñaki que están más lejos y todos los días extraño.

Y por último a mis amigos que están esperando esto desde hace mucho, especialmente entre ellos a Silvana Bertolino por sus acertados comentarios que me han hecho ver muchas cosas.

Y la dedico a la memoria de Marita.

Lorenzo Marcos Iparraguirre

CREACIÓN DE PARES POR FOTONES DE ALTA ENERGÍA EN EL CAMPO DE ELECTRONES LIBRES

Tesis de Doctorado de: Lorenzo Marcos Iparraguirre

Director: Dr. Gerardo O. Depaola

ÍNDICE

Introducción y objetivos del trabajo	1
CAPÍTULO 1: Consideraciones cinemáticas y dinámicas básicas	4
1.1.- La creación de un par por un fotón	4
1.2.- Consideraciones cinemáticas y dinámicas generales del triplete	9
1.3.- Los valores pequeños de Δ	13
1.4.- El umbral de detección del triplete	16
CAPÍTULO 2 Procedimiento general de integración de la sección eficaz	19
2.1.- Expresión estándar de la sección eficaz diferencial	19
2.2.- Procedimiento general de integración	19
CAPÍTULO 3 Los diagramas de feynmann y sus contribuciones	25
3.1.- Los diagramas de Feynmann	25
3.2.- La indistinguibilidad de los negatrones y distintas posibilidades de integración	26
3.3.- Sección eficaz diferencial y distribución de probabilidades	28
3.4.- Criterios para seleccionar e interpretar el rol de cada negatrón	28
3.5.- Procedimientos de análisis	30
Negatrón de menor energía	31
Negatrón de mayor energía	31
CAPÍTULO 4 Tratamiento de la polarización lineal de la radiación incidente	32
4.1.- Tratamiento analítico de la polarización.	32
4.2.- Detección de la polarización.	35
CAPÍTULO 5 Tratamiento general del negatrón menos energético	39
5.1.- Análisis de los aportes de los diagramas de Feynmann	39
Tabla 5.1. Contribuciones totales a la sección eficaz	41
Comparación con otros autores	42

5.2.- Un método para evaluar las contribuciones	42
Tabla 5.2. $d\sigma_B/dp_1$ integrada en distintos intervalos de p_1	44
5.3.- Aproximaciones simplificadoras prácticas	46
Tabla 5.3: Integral del valor absoluto de la diferencia con $d\sigma_{total}/dp_1$	49
CAPÍTULO 6	51
Tratamiento general del negatrón más energético	51
6.1.- Comentarios generales	51
6.2.- Distribución de energía entre las partículas del par	52
6.3.- Contribuciones de todos los diagramas de Feynmann	54
Tabla 6.1. Contribuciones totales a la sección eficaz	54
6.4.- Distribución angular de las partículas del triplete	56
6.4.1.- Distribución angular del electrón menos energético	56
6.4.2.- Distribución angular de las partículas del par	57
6.4.3.- Distribución azimutal y polarización de la radiación incidente.	62
CAPÍTULO 7	68
Resumen y conclusiones	68
Referencias bibliográficas	71
Apéndice 1: Expresión de la sección eficaz de creación de pares en el campo de un electrón.	74
Apéndice 2: Valores extremos de p_2 , dados p_1 y θ_1 .	78
Apéndice 3: Variación φ_{21} mientras θ_2 recorre su rango de validez.	82
Apéndice 4: La sección eficaz diferencial de Boldyshev.	83
Apéndice 5: Cálculo de los elementos de matriz correspondientes a los diferentes diagramas de Feynmann.	87
Apéndice 6: Fórmulas y procedimientos de integración sobre θ_2	126
Apéndice 7: La contribución de los diagramas de Feynmann según Mork y Haug	136

CREACIÓN DE PARES POR FOTONES DE ALTA ENERGÍA EN EL CAMPO DE ELECTRONES LIBRES

Introducción y objetivos del trabajo

Desde la sorpresa causada por los primeros rayos gamma provenientes de fuentes cósmicas detectados por instrumental a bordo de satélites, al final de la década de los 60, ha tenido lugar una verdadera revolución en la Astrofísica [1].

Desde entonces el progreso de la Astrofísica de Rayos Gamma ha sido explosivo, y ha abierto una ventana antes insospechada para el avance de la ciencia, la cual en cierta medida se encuentra repitiendo el proceso de hace cuatro siglos, cuando la búsqueda de explicaciones a los movimientos celestes llevó al enunciado de las leyes básicas de toda la física.

En el momento actual la radiación gamma que nos llega del cosmos no sólo nos informa sobre la evolución de muy lejanos objetos celestes, sino que también sobre lo que sucede en condiciones físicas extremas que pueden poner a prueba los conceptos fundamentales de las teorías físicas y que no pueden lograrse en ningún laboratorio terrestre.

Por ello es que el mundo científico está uniendo fuerza en torno a proyectos de gran envergadura [2] orientados a la detección y estudio de radiaciones gamma de energías cada vez mayores, y en ellas uno de los aspectos que más dificultades plantea y más interés está concitando es la detección de la polarización de estas radiaciones.

Telescopios orbitales como AGILE [3] y Fermi/LAT [4], cubren un importante rango de energías pero no tienen buena capacidad para detectar polarización.

Los sistemas de detección en tierra con telescopios Cherenkov alcanzan muy altas energías (TeV), pero son totalmente insensibles a la polarización [5].

Se considera que el próximo paso más importante en astrofísica de rayos gamma sería la producción de un telescopio de detección de rango medio, capaz de medir la polarización de esta radiación. Tal instrumento permitiría buscar respuesta a numerosas cuestiones [6], de las cuales sólo mencionaremos algunas a los efectos de ejemplificación, ya que la literatura actual abunda en proyectos que intentan cubrir y anticiparse a todas las posibilidades de los modelos y las teorías [2].

Por ejemplo analizando la radiación gamma emitida por los púlsares se espera aportar datos fundamentales a los modelos que intentan explicar la enorme eficiencia de los mecanismos de aceleración de los electrones y de radiación por parte de los mismos, en los campos magnéticos extremadamente intensos que caracterizan a estos objetos [7], [8]. La polarización de los rayos gamma puede distinguir entre la emisión de sincrotrón y otros mecanismos de emisión. Medición de polarización con instrumentos de buena resolución angular puede ayudar a determinar la geometría de las regiones de emisión.

Hay grandes expectativas para saber si fuentes como los “blazars” (chorros muy intensos de rayos gamma emitidos por los núcleos galácticos activos) deberían estar polarizados debido al campo magnético en su región de emisión.

También por ejemplo se ha detectado que algunos “burst” (destellos) de rayos gamma son acompañados de rayos X polarizados. Si se detectara la misma polarización en los rayos gamma, se podría interpretar que son producidos por el mismo mecanismo.

Por otra parte detección de polarización en estos burst de radiación gamma, que se saben provenientes de fuentes tan distantes, pondría a prueba sobre modelos de gravedad cuántica que postulan la “birrefringencia del vacío”, capaz de destruir la polarización en trayectos suficientemente largos.

Se podría continuar con una larga lista de temas de física (magnetohidrodinámica de plasmas, partículas elementales, supersimetría, gravedad cuántica, etc.) y de astrofísica (materia oscura, rayos cósmicos, núcleos activos de galaxias, modelos de los mecanismos productores de las diversas partículas y radiaciones de altísima energía que se detectan cada vez más, etc.) que esperan lograr avances importantes y comprobaciones clave a partir del desarrollo y mejoramiento de instrumental capaz de detectar rayos gamma en diversos intervalos de energía [2], pero no es necesario aquí porque basta con saber que se requiere mejorar todo: cubrir más zonas del espectro, mejorar la sensibilidad, mejorar la detección de la polarización, mejorar la resolución angular, y mejorar la resolución temporal.

Pero todos esos aspectos a mejorar, en alta energía, tienen una cosa en común, y es que la detección de radiación gamma de muy alta energía está basada en la “*creación de pares*”, dado que es el único mecanismo de absorción de radiación gamma por la materia cuya efectividad no disminuye con dicha energía.

Este mecanismo consiste esencialmente en la desaparición del fotón gamma, y la aparición en su lugar de un par electrón-positrón, al tener una interacción suficientemente cercana con una partícula cargada, lo que en la práctica significa ya sea interacción con un núcleo atómico, o ya sea interacción con un electrón.

Se considera que a partir de ciertos valores relativamente grandes de energía, digamos unos 50 o 100 MeV, la absorción de fotones gamma se hace preponderantemente por este mecanismo.

Si bien estos dos procesos han sido estudiados y resueltos en sus aspectos matemáticos esenciales desde hace muchos años [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], el caso de creación de pares en el campo de un electrón, que es similar pero mucho más complejo que el caso de creación en el campo nuclear, aún no ha sido suficientemente explorado en todas sus posibilidades, debido precisamente a las dificultades crecientes que entrañan muchos de sus cálculos a medida que aumenta la energía de los fotones.

Es decir, para el caso de creación de pares en el campo nuclear existen expresiones analíticas que se utilizan habitualmente y también aproximaciones asintóticas muy útiles para energías infinitamente grandes de los fotones [18], [21]. Estas expresiones sólo deben dar cuenta del movimiento de las dos partículas que se crean, ya que el núcleo, aunque también ha participado de la interacción, no absorbe una cuota apreciable de la energía del fotón porque tiene una masa suficientemente grande como para poder considerar que se mantiene inmóvil.

En cambio en el caso de creación de un par en el campo de un electrón, luego de la interacción se tienen tres partículas en movimiento, un “tripleto”, con un enorme incremento en la complejidad del tratamiento.

Sin embargo dadas las similitudes entre los casos es posible establecer muchas relaciones entre ambos, y encontrar muchas formas de adecuar el caso nuclear, más simple, para obtener expresiones y valores límites particulares del otro caso. La bondad de muchas de estas adecuaciones ha sido evaluada por Mork [22], quien ha mostrado, entre otras cosas, que para

energías de los fotones suficientemente grandes (más de 8 MeV según sus resultados) muchos resultados del caso nuclear se pueden trasladar directamente al caso de creación de pares en el campo de un electrón. Haugh [23], con algunas diferencias, confirma en líneas generales los resultados de Mork, y posteriormente la mayor parte de los autores que trabajan en altas energías encuentran en estos trabajos una justificación cuantitativa para evitar muchas de las complicaciones específicas del triplete (en el Apéndice 7 compararemos nuestros resultados con los de esos trabajos, encontrando muy buen acuerdo con los resultados de Haug, y discutiendo algunos aspectos).

Y en general todos los trabajos posteriores básicamente mantienen un esquema de trabajo que, coherente con los resultados de Mork, sólo considera ciertas contribuciones que son dominantes, para realizar aportes a muchos aspectos diversos del tema, entre los que principalmente se pueden mencionar:

- Determinación de diversas aproximaciones (algunas de las cuales producen expresiones que nos serán útiles en este trabajo) [24], [25], [26], [27], [28], [29],
- Determinación del “apantallamiento” debido a los otros electrones en el átomo y estudio de otros efectos debidos a los electrones vecinos en la red cristalina o en el medio material en general, [19], [20], [30], [31], [32], [33], [34],
- Cálculo de correcciones radiativas, [35],
- Creación de pares de otros leptones, [36], [37],
- Estudio de diversas posibilidades de detectar experimentalmente los rayos gamma y su polarización, para distintos intervalos de energía, y diseño de aparatos capaces de llevarlo a cabo [26], [38], [39], [40], [41], [42]. En el momento actual las necesidades de la Astrofísica están impulsando enérgicamente este tipo de trabajos.

A partir de esta situación se elaboró el proyecto inicial de este trabajo, consistente hacer el aporte que sistemáticamente se ha dejado de lado, aplicando la electrodinámica cuántica para resolver de manera exacta *todos los diagramas de Feynmann* de tres vértices correspondientes a este caso, que es el orden de aproximación más bajo que esta teoría ofrece para ello.

Dado que todas las aproximaciones que se utilizan habitualmente son razonables y están bien fundamentadas, no se espera introducir ningún cambio revolucionario en el tratamiento de estos temas, pero sí ofrecer:

- Valores de todas las contribuciones de los diagramas de Feynmann a la sección eficaz diferencial en función de todas las diferentes variables posibles, considerando que el criterio de descartar una contribución considerando únicamente su valor total integrado en un intervalo, no siempre es adecuado, y es mucho mejor partir del conocimiento del valor de la contribución en los diferentes lugares del intervalo.
- Un análisis de las mejores opciones para detectar la polarización en función del comportamiento de las tres partículas,
- Elementos para una simulación tipo Montecarlo orientada a la detección de la polarización,

Y desde mi punto de vista estrictamente personal, también me interesa explorar las posibilidades de pensar y presentar los aspectos de este fenómeno con cierto enfoque didáctico, que pueda complementar el formalismo matemático con razonamientos físicos.

CAPÍTULO 1

CONSIDERACIONES CINEMÁTICAS Y DINÁMICAS BÁSICAS

En este capítulo se presentan los aspectos básicos de la creación de pares por interacción de un fotón con el campo ya sea de un núcleo o de un electrón. Estos aspectos se discuten dentro del alcance de los conceptos clásicos, pero con una orientación que permita conectar con el tratamiento que se hará en los siguientes capítulos.

También se presentan los conceptos cinemático-dinámicos básicos que se utilizarán en todo el trabajo, a partir de las consideraciones fundamentales sobre la conservación del cuádrimomento.

1.1.- La creación de un par por un fotón

El único proceso de interacción con la materia de los fotones de alta energía cuya sección eficaz no disminuye, sino que, por el contrario, aumenta con el valor de la misma, es el de creación de pares electrón-positrón ($e^+ e^-$).

Para entender la razón por la cual la sección eficaz del proceso de creación de pares aumenta con la energía del fotón, es conveniente imaginar el fenómeno básico: un fotón de momento lineal \vec{p}_f desapareciendo al llegar a un punto A de su trayectoria, a partir del cual continúan un electrón y un positrón, de momentos \vec{p}_- y \vec{p}_+ respectivamente, como se ilustra esquemáticamente en la figura 1.1.

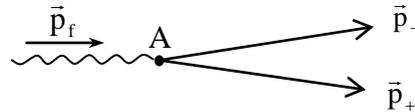


Fig.1.1: esquema representativo de un proceso (hipotético) por el cual un fotón de momento lineal \vec{p}_f desaparecería en un punto A dando lugar a la creación de un par $e^- e^+$.

Para comenzar este análisis de manera elemental, podemos plantear que en principio, para cumplir con la conservación de la energía sería necesario que el fotón supere cierta energía umbral, necesaria para proveer la energía de reposo de las dos partículas creadas. Ahora bien, aún suponiendo que se cumple este requisito, es sabido que este proceso no es posible de esta manera elemental planteada, ya que no podrían cumplirse simultáneamente las condiciones de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal (es decir la conservación del cuádrimomento lineal).

Analicemos este proceso planteando estas leyes de conservación para un fotón de frecuencia angular ω que viaja a lo largo del eje z con momento lineal $\vec{p}_f = (0,0,\hbar\omega/c)$ y energía $E_f = \hbar\omega = c p_f$, y desaparece dando lugar a dos partículas (de masa $m_1 = m_2 = m =$ masa del electrón) en el plano x,z, con momentos $\vec{p}_1 = (p_{1x},0,p_{1z})$ y $\vec{p}_2 = (p_{2x},0,p_{2z})$.

Conservación de la energía:

$$E_f = E_1 + E_2 \quad (1.1)$$

Donde:

$$E_f = p_f c \quad (1.2)$$

$$E_1 = c \sqrt{p_{1x}^2 + p_{1z}^2 + m^2 c^2} \quad (1.3)$$

$$E_2 = c \sqrt{p_{2x}^2 + p_{2z}^2 + m^2 c^2} \quad (1.3')$$

Conservación del momento lineal:

$$p_{fz} = p_{1z} + p_{2z} \quad (1.4)$$

$$0 = p_{1x} + p_{2x} \quad (1.4')$$

Ahora bien, como muestra la figura 1.2, con los valores absolutos de todas estas variables es posible hacer una construcción geométrica que muestra que si $|p_{fz}| = |p_{1z}| + |p_{2z}|$, entonces nunca E_f puede ser igual a $E_1 + E_2$.

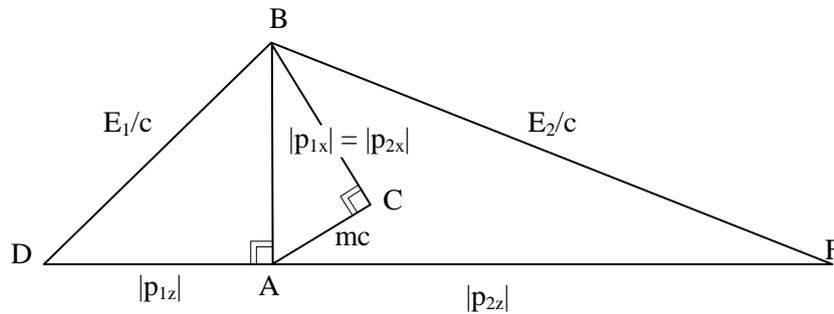


Fig. 1.2: Los ángulos rectángulos indicados en A y en C, garantizan, a través del Teorema de Pitágoras, el cumplimiento de (1.3) y (1.3'). Luego la longitud de la base DF, según (1.4), representa el momento lineal del fotón, $p_f = E_f/c$, que según (1.1) debería igualar a la longitud sumada de DB y BF, lo cual se ve que es imposible si $m \neq 0$.

Es decir que la creación de un par ($e^+ e^-$) a partir de un fotón sólo es posible en el campo de otra partícula a la cual se le pueda transferir parte del momento/energía, para que puedan verificarse las leyes de conservación:

$$E_f + E_0 = E_1 + E_2 + E_3 \quad (1.5)$$

$$\vec{p}_f + \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad (1.6)$$

En donde se ha designado con el índice 0 al momento/energía de la partícula inicial en cuyo campo ocurre el proceso, con 1 a las variables de esa partícula después de concluido el mismo, con 2 a las variables del electrón creado, y con 3 a las del positrón.

Vale destacar que dado que la energía del fotón debe necesariamente superar a la energía de reposo de las partículas 2 y 3, en los casos de interés siempre resulta razonable despreciar la energía cinética inicial de la partícula 0, y ése es el procedimiento que se adoptará en adelante: consideraremos la **creación de pares en el campo de una partícula que está en reposo**.

Cualquier otra situación podría luego tratarse por medio de un adecuado cambio de sistema.

De manera que en adelante, el **Sistema Laboratorio, SL**, será un sistema en el cual $p_0 = 0$.

También es habitual en el tratamiento del tema definir el *momento* y la *energía transferidos* (a los cuales, adhiriendo a una costumbre muy difundida, también denominaremos indistintamente momento y energía *de retroceso*):

$$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \quad (1.7)$$

$$E_q = E_1 - E_0 \quad (1.8)$$

Con estas definiciones las ecuaciones de conservación quedan:

$$E_f = E_q + E_2 + E_3 \quad (1.5')$$

$$\vec{p}_f = \vec{q} + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad (1.6')$$

Estas ecuaciones (1.5) y (1.6) (o sus versiones (1.5') y (1.6')) sí tienen solución y de muchas maneras, y hay dos casos típicos de mucho interés: *creación de pares en el campo de un núcleo atómico*, y *creación de pares en el campo de un electrón*, de los cuales diremos algunas características básicas importantes enseguida.

Pero antes de hacerlo notemos que según la figura 1.2, la necesidad de la tercera partícula es cada vez menor a medida que la energía del fotón se hace muy grande, ya que haciendo un desarrollo aproximado elemental para comparar las longitudes DB y BF con DA y AF, para el caso en que la altura se mantiene constante mientras la base crece indefinidamente, se encuentra que:

Si las componentes transversales de la cantidad de movimiento se mantienen dentro del orden de magnitud mc mientras E_f se hace indefinidamente grande, las leyes de conservación (1.5') y (1.6') se podrán cumplir con $q \approx (mc/E_f) \times mc$, es decir arbitrariamente pequeño.

Nótese también que mientras q transversal se mantenga $|q_x| \ll mc$, aunque no se acerque al orden de pequeñez (m^2c^2/E_f), la transferencia de momento longitudinal sí deberá ser de ese orden, es decir inversamente proporcional a la energía del fotón.

Como nota al margen es interesante saber que para energías extremadamente grandes de los fotones este hecho da lugar al llamado "efecto LPM" (por Landau, Pomeranckuk, y Migdal), relacionado con la necesidad de una distancia de interacción suficiente para posibilitar la transferencia de un momento longitudinal *que debe ser* extremadamente pequeño [33].

Es decir que las condiciones más favorables para crear pares se dan para muy grandes energías de los fotones, ya que en estos casos basta con una mínima interacción, la cual se puede dar con máximo parámetro de impacto, es decir mínima necesidad de acercamiento. Y el resultado más favorecido (por requerir la menor de todas las interacciones) sería la creación de pares de partículas con energías grandes del orden de E_f , y momentos transversales aproximadamente opuestos entre sí, de valores no mayores que mc .

Por otra parte, además, esto sugiere que el apartamiento angular $\theta_{2/3}$ respecto de la dirección inicial de marcha del fotón se espera con mayor probabilidad dentro del orden de magnitud:

$$\theta \approx \frac{p_x}{p} \approx \frac{2mc^2}{E_f}$$

Revisemos ahora los dos casos típicos de interés práctico que se han mencionado. Vale destacar que esta descripción inicial estará limitada a afirmaciones que son básicas para este

tema y están fundamentadas en los innumerables trabajos que lo tratan, pero que muchas de ellas encontrarán su justificación luego, a medida que avancemos en este trabajo.

Caso 1: creación de pares en el campo de un núcleo atómico

En este caso la masa M de la partícula productora del campo en el cual ocurre la creación del par es mucho mayor que la del electrón, y eso determina grandes simplificaciones en los cálculos, ya que en los encuentros con gran parámetro de impacto, que son los más frecuentes, el momento transferido es pequeño, y por ello la energía transferida puede ser despreciada, como se verá inmediatamente:

$$E_q = c \sqrt{q^2 + M^2 c^2} - M c^2 \quad (1.9)$$

Si admitimos que q pueda ser del orden mc , siendo siempre m la masa del electrón, $m \ll M$, entonces esta expresión permite calcular que:

$$E_q \cong \frac{q^2}{2M} = \frac{q}{2Mc} q c \ll q c \approx m c^2 \quad (1.10)$$

De manera que dado un fotón con energía suficientemente mayor que mc^2 como para que puedan crearse dos partículas de masa m , con un sobrante al menos de ese orden (no trataremos el caso de fotones con energía muy cercana al umbral, sino el caso opuesto, de energías muy grandes) que se reparta como energía cinética final de las partículas creadas, la energía cinética que se transferirá al núcleo de gran masa, será una fracción absolutamente despreciable, no sólo de la energía del fotón, sino de la energía de reposo de los electrones.

Otra característica importante de este caso es que el campo de un núcleo de número atómico Z es, para igual parámetro de impacto, Z veces mayor que el de un electrón, y eso determina que la sección eficaz sea mucho mayor (Z^2 veces mayor), para la creación de un par en el campo nuclear, que en el de uno de los electrones de ese átomo. Claro que el efecto se compensa parcialmente porque el átomo tiene Z electrones, que multiplican por Z la probabilidad de que el fenómeno ocurra en el campo de *alguno* de los electrones del átomo.

Pero además hay que considerar que para parámetros de impacto grandes, el campo nuclear se ve *apantallado* por el de los electrones interiores, y eso disminuye lo que podría denominarse carga nuclear efectiva, de manera que como muestran los resultados de todos los investigadores, y en particular los de Heitler [10], a los cuales nos referiremos frecuentemente en este trabajo, este efecto de apantallamiento limita decisivamente la sección eficaz para energías grandes del fotón.

Así es que el efecto de apantallamiento comienza a hacerse sentir cuando la energía del fotón supera los 10 o 20 MeV, y prácticamente determina que la sección eficaz de creación de pares en el campo nuclear ya no aumente apreciablemente para energías del fotón superiores a los 1000 MeV.

Caso 2: creación de pares en el campo de un electrón

En este caso la partícula productora del campo en el cual ocurre la creación del par también es un electrón, de manera que en el estado final el sistema consiste en un *triplete* de partículas de

la misma masa m (que en adelante simbolizará la masa del electrón). Para evitar confusiones a veces adoptaremos la denominación según la cual las tres partículas son *electrones*, las dos negativas se denominan *negatrones*, y *positrón* la positiva, aunque no lo haremos de manera exclusiva, sino que en cada ocasión, evitando ambigüedades, utilizaremos la denominación que resulte más natural.

Ahora bien, los dos negatrones en principio son *indistinguibles*, lo que trae aparejadas considerables complicaciones de interpretación, que en la práctica se soslayan con algunos usos muy arraigados como lo que se describe a continuación.

La configuración dinámica que veremos que resulta abrumadoramente más probable para el triplete resultante cuando la energía del fotón es muy alta, consiste en que uno de los negatrones emerge con una muy pequeña fracción de la energía en una dirección que forma un ángulo considerable, cercano a 90° , con la dirección inicial del fotón, mientras que el positrón y el restante negatrón se reparten la casi totalidad de la energía del fotón, y son emitidos en direcciones muy cercanas a la dirección inicial del mismo.

Dado que esta última situación: un negatrón y un positrón viajando casi juntos en una dirección muy próxima a la del fotón incidente y con energías próximas a la mitad de la del mismo, es la situación típica del par creado en la vecindad de un núcleo, se ha desarrollado la costumbre muy arraigada de interpretar que el negatrón con estas características es el que corresponde al par creado, mientras que el otro, de mucha menos energía y gran ángulo polar se denomina *de retroceso*, como si fuese posible distinguir entre ambos.

Oportunamente en este trabajo indicaremos una forma conceptualmente más correcta de denominar a los negatrones del triplete – pero por ahora continuaremos con este uso que ya es tradicional.

Ahora bien, debido a esta característica básica del fenómeno, es que uno de los procedimientos para determinar que ha tenido lugar, consiste en detectar la aparición de un par negatrón-positrón de alta energía viajando prácticamente en la misma dirección, simultáneamente con la de otro negatrón viajando en una dirección bastante diferente con una energía mucho más baja. Se considera que la dirección inicial de viaje del par negatrón-positrón define prácticamente la dirección de marcha del fotón inicial.

Ahora bien, en general, y dependiendo del sistema de detección, hay un umbral de energía del negatrón de retroceso por debajo del cual resulta imposible detectarlo, con la consecuencia de que experimentalmente el par detectado será interpretado como creado en el campo de un núcleo.

Esto plantea un serio problema práctico en la detección y el estudio del fenómeno, ya que como se desprende de la discusión inicial (y será confirmado por el tratamiento formal), la mayor probabilidad para los fotones de gran energía, favorece precisamente a los casos de muy bajo retroceso.

El tratamiento de estos casos ([19], [20]) en principio contempla las posibilidades:

- a) Interacción *coherente*: el par es creado en el campo de un electrón atómico cuyo estado cuántico no es alterado por la interacción, en cuyo caso todo el átomo absorbe coherentemente el impulso y la energía.
- b) Interacción *parcialmente coherente*: el par es creado en el campo de un electrón atómico que es excitado a otro estado cuántico atómico.
- c) Interacción *incoherente*: la interacción es suficiente para ionizar al átomo.

En este trabajo se evitará esa problemática considerándose siempre la *creación de pares en el campo de electrones libres*. Pero la adopción de un umbral por debajo del cual no se detectará el retroceso, seguirá siendo una manifestación de que el problema subsiste, aunque será una gran simplificación que agilizará enormemente los cálculos en muchos casos.

Dado que la cantidad de variables involucradas hace imposible obtener expresiones generales que sean manejables, resulta necesario encuadrar los tratamientos dentro de ciertos rangos determinados de valores de las variables. En este trabajo será de interés considerar energías del fotón suficientemente altas (comenzaremos considerando mayores que $100 mc^2$), y umbral de detección del electrón de retroceso en energías cinéticas del orden de mc^2 .

De manera que comenzaremos considerando el planteo general del problema, para luego mostrar cómo se puede avanzar teniendo en cuenta los umbrales mencionados.

1.2.- Consideraciones cinemáticas y dinámicas generales del triplete

Utilizaremos cursivas para designar cuadvectores (eventualmente con índices griegos como α o β contravariantes), y flechitas encima de letras para designar vectores del espacio tridimensional.

Siendo p_f y p_0 los momentos lineales del fotón incidente (de frecuencia ω) y del electrón existente inicialmente (de masa m), y p_1, p_2, p_3 , los de las tres partículas del triplete emitido a partir de la colisión, podemos escribir la conservación del cuadrimento, que será nuestra consideración básica, de la siguiente manera:

$$p_f + p_0 = p_1 + p_2 + p_3 \quad (1.11)$$

En adelante se tomará \hbar y c iguales a 1, con lo cual se tiene, en el Sistema Laboratorio, $p_f = (\omega, \omega \hat{k})$, y $p_0 = (m, \vec{0})$, siendo \hat{k} es el vector unitario en la dirección de incidencia, la cual se toma como eje polar.

Siguiendo a Boldyshev et.al [26], la forma más sencilla de analizar el rango de variabilidad de las variables dinámicas de una cualquiera de las partículas, en este caso la 1, parte de definir dos invariantes fundamentales (luego el análisis se extiende a las otras partículas simplemente con una permutación de índices):

1.- El *cuadrado invariante del cuadrimento total* del sistema

$$S = (p_f + p_0)^\alpha (p_f + p_0)_\alpha \quad (1.12)$$

2.- La *masa invariante* del par de partículas restantes:

$$\Delta = \sqrt{(p_2 + p_3)^\alpha (p_2 + p_3)_\alpha} \quad (1.13)$$

En el **sistema Laboratorio** se pueden obtener fácilmente las expresiones siguientes para estos invariantes:

$$S = m (2 \omega + m) \quad (1.14)$$

$$\Delta^2 = 2m^2 + 2E_2 E_3 - 2|\vec{p}_2||\vec{p}_3| \cos \theta_{23} \quad (1.15)$$

Donde $E_i = \sqrt{p_i^2 + m^2} = T_i + m$, es la energía de la partícula en cuestión, siendo T_i la correspondiente energía cinética.

La expresión para Δ^2 también puede ser escrita en variables de la partícula 1, haciendo uso de la ley de conservación (11):

$$\Delta^2 = -2(E_1 - m)(\omega + m) + 2\omega p_1 \cos \theta_1 \quad (1.15')$$

Por otra parte, en el **sistema Centro de Masa** (denotado con * para cada variable), definido por:

$$\vec{p}^*_f + \vec{p}^*_0 = \vec{p}^*_1 + \vec{p}^*_2 + \vec{p}^*_3 = \vec{0} \quad (1.16)$$

Se tiene:

$$p^*_f + p^*_0 = (\omega^* + E^*_0, \vec{0}) = (E^*_1 + E^*_2 + E^*_3, \vec{0}) \quad (1.17)$$

$$p^*_2 + p^*_3 = (\omega^* + E^*_0 - E^*_1, -\vec{p}^*_1) \quad (1.18)$$

De manera que para los mismos invariantes calculados en el sistema CM, resulta:

$$\begin{aligned} S &= (p^*_f + p^*_0)^2 \\ &= (\omega^* + E^*_0)^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$= (E^*_1 + E^*_2 + E^*_3)^2 \quad (1.19')$$

$$\Delta^2 = S - 2E^*_1 \sqrt{S} + m^2 \quad (1.20)$$

De todas estas expresiones podemos deducir:

1) La **energía umbral** para este proceso será el mínimo valor de ω compatible con estas expresiones. Según (1.14) ese ω_{umbral} dará el mínimo valor de S , y según (1.19') eso corresponderá al mínimo valor de las E^*_i , es decir a la situación en la cual las tres partículas del triplete queden en reposo en el sistema CM: $E^*_1 = E^*_2 = E^*_3 = m$.

Con esto en (1.19'), y S obtenida así luego en (1.14), se obtiene que la energía umbral para el fotón (en el sistema L) es:

$$\omega_{\text{umbral}} = 4m \quad (1.21)$$

2) Dado que el valor de S queda fijado por la expresión (1.14) una vez que está fijado un valor cualquiera de ω superior al umbral, se tiene que según (1.20) el **máximo valor de Δ^2** corresponderá al mínimo valor de E^*_1 , que es $E^*_1 = m$:

$$\Delta^2_{\text{max}} = (\sqrt{S} - m)^2 \quad (1.22)$$

3) El **mínimo valor de Δ^2** a partir de su definición (1.13) se obtiene cuando las dos partículas están en reposo relativo entre ellas, es decir cuando $\vec{p}_2 = \vec{p}_3$, lo cual según (1.15) da:

$$\Delta^2_{\text{min}} = 4m^2 \quad (1.26)$$

Estos dos últimos resultados definen el intervalo: $2m \leq \Delta \leq \sqrt{S} - m$, a partir de lo cual es relativamente sencillo analizar la región de valores posibles para las variables dinámicas de la partícula 1, análisis que, como ya se ha dicho, se extiende a cualquiera de las tres partículas cambiando adecuadamente los índices.

Efectivamente, una vez fijados ω (es decir S , según (1.14)) y Δ dentro de su rango de validez, la expresión (1.15') determina los valores posibles de p_1 en función de los de θ_1 o viceversa.

La expresión (1.15') es una ecuación de 2º grado para p_1 , cuya solución arroja la expresión:

$$p_{1\pm} = m \frac{(S - m^2)(S + m^2 - \Delta^2) \cos \theta_1 \pm (S + m^2) \sqrt{D}}{4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (1.27)$$

siendo D una variable intermedia que se define por comodidad, dada por:

$$D = (S + m^2 - \Delta^2)^2 - 4Sm^2 - (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1 \quad (1.28)$$

Siendo que D es positivo para todo el rango de valores de Δ , cuando ésta toma su mínimo valor posible, $\Delta = 2m$, resultan los máximos valores de D y con ellos los valores extremos de p_{1+} y p_{1-} , entre los cuales quedan acotados los valores posibles de p_1 para cada θ_1 . La figura 1.3 muestra cualitativamente la forma de la región de estos valores permitidos en un sistema de ejes (θ_1, p_1) .

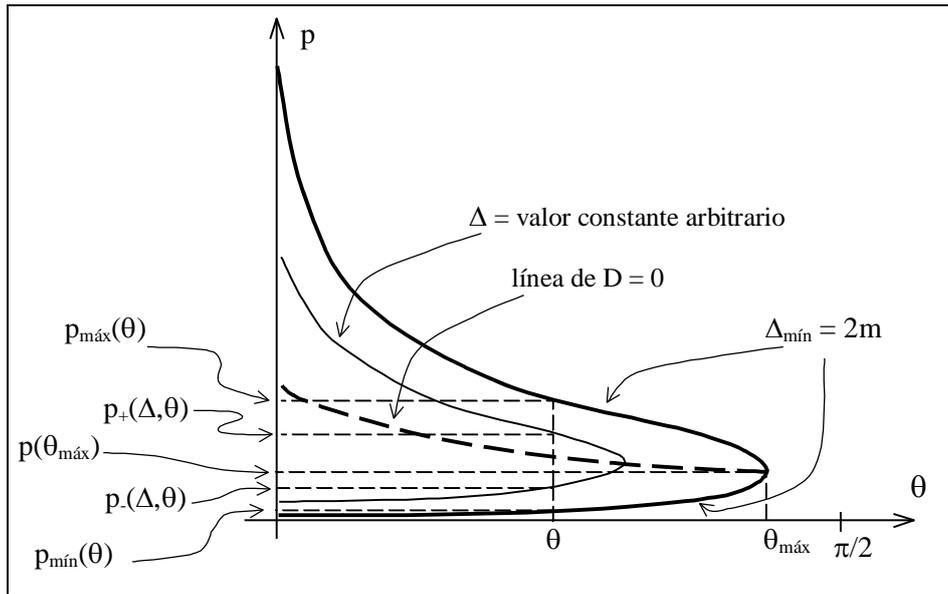


Fig. 1.3: Se muestra la región de valores permitidos del momento lineal (tridimensional), $p = |\vec{p}|$, de una partícula cualquiera del triplete (se ha suprimido el subíndice 1), delimitada por la línea gruesa indicativa del valor $\Delta_{\min} = 2m$. Se muestra una línea de un valor arbitrario de Δ , la cual, para cada θ define los dos valores posibles, p_+ y p_- . Para cada valor de θ el valor máximo de Δ se alcanza sobre la línea $D = 0$.

Por otra parte, respecto del ángulo polar θ_1 puede decirse que claramente su valor mínimo es cero, ya que si (1.28) arroja un valor positivo para algún dado Δ , para algún θ_1 , también lo hace para $\theta_1 = 0$, y este valor no hace divergir (1.17). Respecto del valor máximo en la figura

se ve claramente que corresponde simultáneamente a $D = 0$ y $\Delta = 2 m$, de manera que fijando estos valores en la expresión (1.28) se obtiene:

$$\theta_{\text{máx}} = \arccos\left(\sqrt{\frac{4 m}{\omega}}\right) \quad (1.29)$$

Esta expresión nos muestra que para energías grandes $\theta_{\text{máx}}$ se acerca a los 90° , lo cual sólo es posible si el correspondiente p es suficientemente pequeño, como se ve en las siguientes expresiones que se obtienen de las ya planteadas con las sustituciones correspondientes y que serán útiles en algún momento:

1) Momento lineal para la máxima desviación (vértice en extremo derecho de la gráfica):

$$p(\theta_{\text{máx}}) = \frac{2 m \sqrt{\omega m}}{(\omega - m)} \quad (1.30)$$

2) Momentos lineales mínimo y máximo absolutos (corresponden a $\Delta = 2 m$, $\theta = 0$):

$$p_{\text{máx/mín}} = \frac{\omega}{2\left(1 + \frac{m}{2\omega}\right)} \left(1 - \frac{m}{\omega} \pm \sqrt{1 - \frac{2m}{\omega} - \frac{7m^2}{\omega^2} - \frac{4m^3}{\omega^3}}\right) \quad (1.31)$$

Expresión que para grandes valores de ω puede aproximarse como sigue:

$$p_{\text{máx}} \cong \omega - \frac{3m}{2} \quad (1.31')$$

$$p_{\text{mín}} \cong \frac{4m^2}{2\omega + m} \cong \frac{2m^2}{\omega} \quad (1.31'')$$

3) Momento lineal de máximo Δ (corresponde a $\theta = 0$)

$$p(\Delta_{\text{máx}}) = \frac{\omega m}{\sqrt{S}} \quad (1.32)$$

4) Momento lineal máximo asintótico para $\omega \rightarrow \infty$, para cada θ :

$$p_{\text{lim}} = 2m \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (1.33)$$

Esta función se obtiene eligiendo el signo + en la expresión (1.27) con $\Delta = 2$, y haciendo tender $\omega \rightarrow \infty$, y aproxima muy bien si se excluyen los ángulos extremos (muy cercanos a 0 y a $\theta_{\text{máx}}$).

En la figura 1.4 se aprecia con claridad la bondad y zona de validez de esta aproximación.

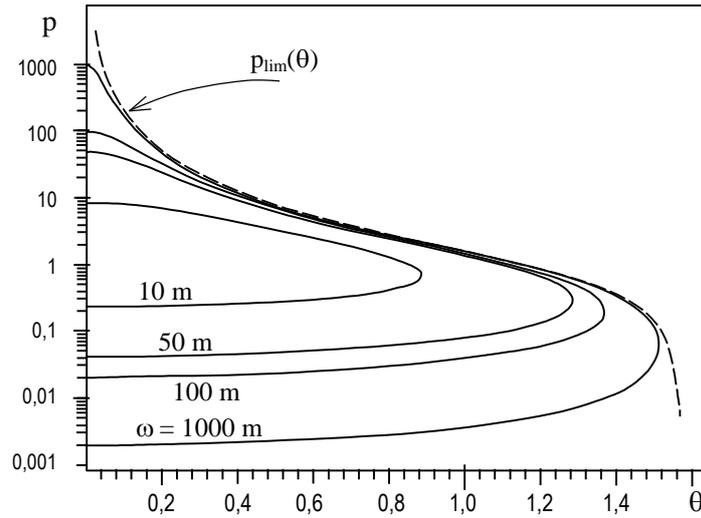


Fig. 1.4: Se muestra la región de valores permitidos del momento lineal (tridimensional) en función del ángulo polar para varios valores de la energía del fotón incidente, ω . Se puede observar, para $\omega > 50 m$, el buen ajuste del borde superior de la zona permitida con la función $p_{lim}(\theta)$ dada por (1.33), que se muestra en línea de trazos.

1.3.- Los valores pequeños de Δ

Ya hemos comentado que para energía muy grande de los fotones incidentes la situación que resulta abrumadoramente más probable es aquella en la cual una partícula del triplete (designada arbitrariamente con el índice 1) tiene una fracción muy pequeña de la energía, mientras las otras dos se reparten casi toda la energía del fotón.

Utilizando la denominación $x = T_3/(\omega - 2m - T_1)$ para la fracción de la energía disponible que le queda como cinética al positrón (T representará energía cinética de la correspondiente partícula $T = E - m$), en estas condiciones más probables podremos despreciar tanto la energía cinética como la total de la partícula 1, y escribir:

$$E_3 \cong p_3 \cong x \omega$$

$$E_2 \cong p_2 \cong (1-x) \omega$$

$$E_2 + E_3 \cong p_2 + p_3 \cong \omega$$

En donde puede considerarse, en principio, hasta que dispongamos de más argumentos, que los valores de E_2 y E_3 , coherentemente con las condiciones de mínima interacción antes comentadas, se mantienen con gran probabilidad mucho más grandes que m . Esto significa para x , que la probabilidad de valores más próximos que algún pequeño valor δ a alguno de los extremos (0 ó 1), disminuirá para ω muy grande proporcionalmente a $\delta m/\omega$.

Siendo $E_{2/3}$ mucho mayor que m , valdrá

$$E_{2/3} \cong p_{2/3} + \frac{m^2}{2p_{2/3}}$$

O, equivalentemente:

$$p_{2/3} \cong E_{2/3} - \frac{m^2}{2E_{2/3}}$$

En estas condiciones es posible obtener una expresión útil aproximando la expresión (1.15): $\Delta^2 = 2 m^2 + 2 (E_2 E_3 - p_2 p_3 \cos\theta_{23})$.

Dado que el paréntesis consiste en una diferencia entre dos términos muy grandes que pueden ser muy parecidos si el ángulo θ_{23} es muy pequeño, como es el caso de interés, la aproximación requiere ciertos cuidados.

Si aceptamos que para cada partícula con gran energía el ángulo polar respecto de la dirección inicial del fotón es del orden $\theta_{2/3} \approx m / p_{2/3}$, podemos estimar que:

$$\theta_{23} \approx \frac{m}{p_2} + \frac{m}{p_3} = m \frac{p_3 + p_2}{p_2 p_3} \cong m \frac{E_3 + E_2}{E_2 E_3}$$

Expresión que determina el orden de magnitud de θ_{23} y también su valor sin pretender una precisión que distinga entre valores grandes de E y de p . Para tener mayor flexibilidad en estas estimaciones incorporaremos un factor α del orden de 1, pero que puede ser cero para considerar $\theta_{2/3} = 0$, o algún valor como 10 o más para considerar valores mayores de $\theta_{2/3}$, siempre dentro de cierto orden de pequeñez.

$$\theta_{23} \approx m \frac{E_3 + E_2}{E_2 E_3} \alpha$$

Dado que $\theta_{2/3}$ sigue siendo siempre un ángulo pequeño, para el cual $\cos\theta_{23} \cong 1 - \frac{1}{2} \theta_{23}^2$, se tendrá:

$$\begin{aligned} E_2 E_3 - p_2 p_3 \cos\theta_{23} &\cong E_2 E_3 - E_2 E_3 \left(1 - \frac{m^2}{2E_2^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{2E_3^2}\right) \left(1 - \frac{m^2 \omega^2 \alpha^2}{2E_2^2 E_3^2}\right) \\ &\cong \frac{m^2 E_3}{2E_2} + \frac{m^2 E_2}{2E_3} + \frac{m^2 \omega^2 \alpha^2}{2E_2 E_3} \\ &\cong m^2 \frac{E_3^2 + E_2^2 + \omega^2 \alpha^2}{2E_2 E_3} = m^2 \frac{(E_2 + E_3)^2 - 2E_2 E_3 + \omega^2 \alpha^2}{2E_2 E_3} \\ &\cong m^2 \frac{\omega^2 (1 + \alpha^2)}{2E_2 E_3} - m^2 \end{aligned}$$

De manera que, finalmente,

$$\Delta^2 \cong \frac{(1 + \alpha^2) m^2}{x(1 - x)} \quad (1.34)$$

Expresión que es válida mientras el ángulo polar de estas partículas, 2 y 3, sea suficientemente pequeño (sin necesidad de llegar al orden m/ω), y la proximidad entre el valor de x y cualquiera de los extremos 0 o 1, no alcance ese mismo orden de pequeñez m/ω .

Esta expresión (1.34) tiene su mínimo valor, 4, en $x = 0,5$, para $\alpha = 0$, y varía bastante poco mientras x va desde 0,2 hasta 0,8 (llega a 6,25 en estos extremos (siempre para $\alpha = 0$)). Pero en realidad la condición típica que debe considerarse es $\alpha \approx 1$, lo que no hace valores muy diferentes. Más cerca de los extremos crece como ω/E_{menor} .

De manera que esto nos dice que en la medida en que la mínima interacción favorezca la creación de pares esperamos que la máxima probabilidad corresponda a la zona de mínimo p_1 y pequeños valores de Δ en las figuras 1.3 y 1.4.

Ahora bien, mínima interacción es sinónimo de gran parámetro de impacto, mínimo p_1 , y gran ángulo polar θ_1 .

Vale la pena analizar esquemáticamente esta interacción.

Por razones probabilísticas la interacción será entre *una* de las partículas del par, por ejemplo la 2, y la tercer partícula (en este caso el electrón 1). Dada la muy alta energía que vamos a considerar para la partícula viajera, el electrón 1 se puede considerar siempre en reposo inicialmente.

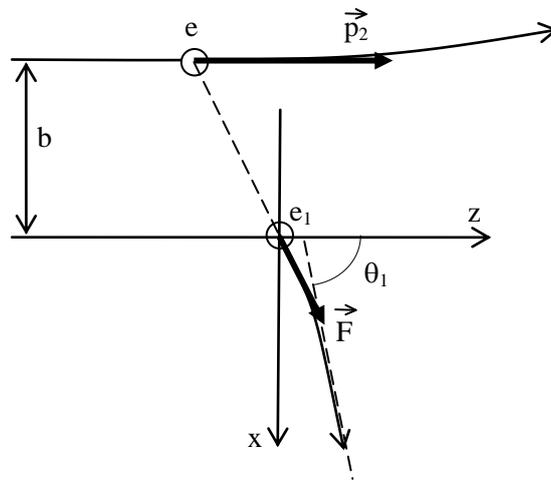


Fig. 1.5: Esquema de una colisión (clásica) entre un electrón viajero de alta energía y otro inicialmente en reposo, con parámetro de impacto b .

Si el parámetro de impacto es suficientemente grande como para que la transferencia de momento sea pequeña, en una aproximación gruesa podemos considerar que la fuerza sólo actúa durante el tiempo τ que la partícula viajera permanece a la distancia mínima. Esta distancia mínima es del orden de b , y la partícula viajera permanece aproximadamente a esa distancia mientras recorre aproximadamente una distancia similar, con una velocidad prácticamente igual a c .

De manera que $\tau \approx b/c$ (para que sea más claro a este cálculo lo hacemos en unidades CGS), la fuerza aplicada en promedio es transversal y se puede estimar como $F_x \approx e^2/b^2$, siendo e la carga del electrón, y se tendrá una transferencia de momento, esencialmente transversal, dada por:

$$q_x \approx F_x \tau \approx \frac{e^2}{bc} \quad (1.35)$$

Ahora bien, si se considera $q_x \approx mc$, el parámetro de impacto correspondiente puede estimarse como:

$$b \approx \frac{e^2}{mc^2} = r_0 \quad (1.36)$$

Siendo $r_0 \cong 2,818 \times 10^{-13}$ cm, el *radio del electrón*.

Es decir que el parámetro de impacto requerido para una transferencia de momento transversal que veremos que puede considerarse bastante típica, es realmente pequeño, y es de prever que la mayor probabilidad será de crear pares con $q \ll m$ (volvemos aquí a las unidades naturales con $c = 1$). Esta pequeñez justifica también el hecho de que sea una buena aproximación considerar la interacción de una sola de las partículas creadas con el electrón e_1 .

Por otra parte, en cualquier caso en que q sea mucho menor que el momento de la partícula viajera, se tendrá que la transferencia de momento longitudinal será mucho menor que la transversal, lo cual significa que la mayor probabilidad será la de grandes ángulos polares en las figuras 1.3 y 1.4.

1.4.- El umbral de detección del triplete

Se puede advertir que para ω grande tanto las expresiones (1.30) y (1.31'') como las curvas de la figura 1.4 establecen y muestran que el momento de la parte inferior de la zona de valores permitidos se mantiene en valores extremadamente bajos.

Desde el punto de vista experimental es necesario establecer un valor umbral para el momento lineal por debajo del cual será imposible detectar una partícula, y con ello, detectar que se ha producido un triplete.

Aunque este valor umbral depende del sistema de detección, es razonable situarlo alrededor de $q_u = m$, y en este trabajo contemplaremos la posibilidad de variarlo entre valores que consideraremos extremos para el umbral: $0,1m < q_u < 10m$, y veremos además que la existencia de este umbral resulta muy conveniente para simplificar los cálculos y disminuir hasta valores razonables el tiempo de máquina que requieren.

Para concretar estas afirmaciones es importante observar que para ω muy grande la expresión (1.30) nos dice que el valor $p(\theta_{\text{máx}})$ tiende a $2m/\omega^{-1/2}$, lo que significa que:

Para ω suficientemente grande el momento lineal del vértice (extremo derecho) de la figura estará por debajo de cualquier umbral que se elija.

Particularmente para $\omega > 400 m$, dicho vértice estará por debajo del mínimo valor del umbral que nos propusimos considerar, $0,1 m$, y sólo interesará la parte de la región de valores de p que queda por encima.

Ahora bien, al descartar los valores muy pequeños de p_1 habremos descartado la mayor parte de los episodios, y habremos invalidado algunos de los razonamientos hechos.

Así por ejemplo si revisamos las razones por las cuales la masa invariante del par, Δ , debe ser pequeña, encontramos que la expresión (1.34) nos permite inferir que Δ se mantendrá pequeño mientras α sea del orden de 1, lo cual requiere que q no supere el orden $\approx m$. Si p_1 está por encima de ese valor, ya no habría razones a priori para esperar que Δ sea muy pequeño.

No obstante, mientras p_1 siga siendo mucho menor que ω , seguirá siendo muy probable que $p_2 \gg p_1$, y con ello, que θ_1 sea grande (por corresponder a un choque de gran parámetro de impacto), lo cual equivale, según las curvas de las figuras 1.3 y 1.4, a que la probabilidad mayor sea de los Δ pequeños.

Las figuras 1.6 y 1.7 cierran este punto mostrando cómo algunos valores de probabilidad que serán calculados con los desarrollos que se realizan más adelante a partir de la *sección eficaz diferencial*, confirman estas afirmaciones preliminares.

La sección eficaz diferencial, $d\sigma$, que será expresada muchas veces en este trabajo en función de diversos conjuntos de variables, es proporcional al número de eventos (creaciones de pares) que corresponden a los intervalos considerados de las variables que se elijan, y por lo tanto representativa, en términos relativos, de la probabilidad de ocurrir esos eventos asociados con esos intervalos (ver Apéndice 1 para ampliación).

La figura 1.6 muestra, para $\omega = 100$ m, esta sección eficaz en la forma $d^2\sigma/dp_1 d\theta_1$, obtenida por Boldyshev et al. [26], en función de p_1 , para valores fijos de θ_1 , en toda la región de valores permitidos de p_1 y θ_1 (siendo 1 el electrón menos energético). Esto constituye la distribución de probabilidad de p_1 para cada θ_1 y permite ver:

- Cómo la probabilidad es máxima para el máximo ángulo polar, es decir el vértice de las gráficas de las figuras 1.3 y 1.4.
- Cómo para cada valor del ángulo polar θ_1 la probabilidad se concentra en los valores extremos de p_1 , dados por la expresión (1.27) para el mínimo valor de Δ ($\Delta = 2$), y cómo el efecto se intensifica al aumentar ω (ejemplificado para $\theta_1 = 0,6$). Para el borde superior de las gráficas de las figuras 1.3 y 1.4, esto significa que, para cada valor fijo de p_1 , es siempre más probable el máximo ángulo polar posible.

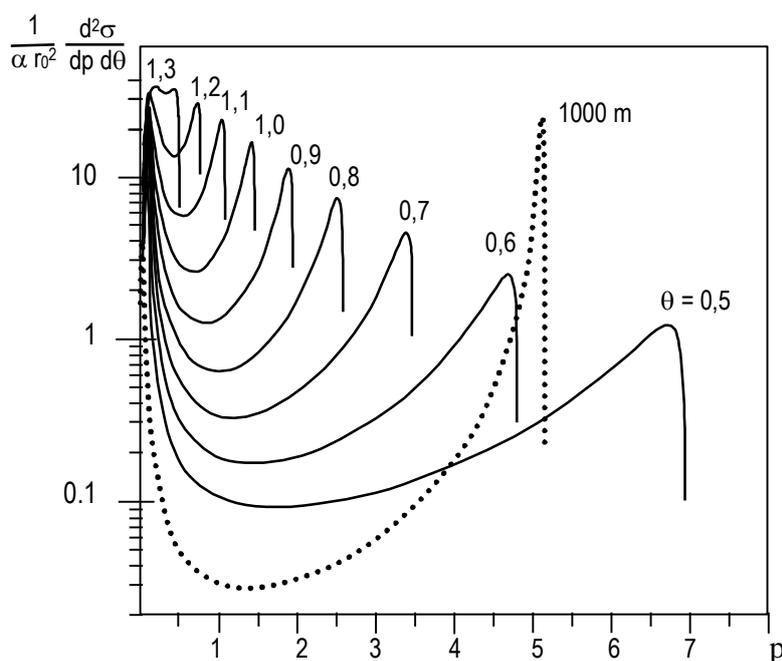


Fig. 1.6: Densidad de probabilidad de valores del momento lineal para varios valores del ángulo polar del electrón menos energético (se ha omitido el índice 1), para $\omega = 100$ m. La gráfica en línea de puntos, correspondiente a $\theta = 0,6$ para $\omega = 1000$ m, muestra el comportamiento típico al aumentar ω : la probabilidad se concentra en los bordes de la zona permitida ($\Delta \cong 2$ m).

La figura 1.7, por otra parte, muestra para $\omega = 1000$ m, y 10000 m, la distribución de probabilidad $d\sigma/d\Delta$ de la masa invariante Δ (Apéndice 4), que resulta una vez que se integra la sección eficaz diferencial $d^2\sigma/d\Delta dp_1$ (obtenida a través del cambio de variables $p_1, \theta_1 \rightarrow p_1, \Delta$) sobre todos los valores de p_1 por encima de los valores umbrales $q_u = 0,1$ m, m, y 10 m.

En esta figura la probabilidad relativa de ocurrir creaciones de pares con p_1 por encima de un valor umbral dado estaría representado por el área de gráfica $d\sigma/d\Delta$ correspondiente, de manera que puede verse que:

- La probabilidad de crear pares con p_1 por encima de algún umbral cualquiera que se considere, se hace notablemente independiente de la energía de los fotones para valores suficientemente grandes de ésta. Aumentar dicha energía a partir valores suficientemente grandes de la misma sólo hace aumentar la probabilidad de crear pares con valores pequeños de p_1 , por debajo del umbral.
- Para cualquier umbral que se imponga a p_1 siempre es mayor la probabilidad de (crear pares con) valores de Δ cercanos al mínimo, pero las distribuciones correspondientes a valores mayores del umbral, tienen el máximo en valores mayores de Δ (es decir, el valor más probable de Δ es mayor para los p_1 grandes).
- Aunque todas las distribuciones indican que para cualquier umbral la máxima probabilidad es de crear pares con valores Δ muy cercanos al mínimo, todas la distribuciones se anulan en ese valor exacto, indicando que no se crean pares con $\Delta = 2$ m exactamente, lo cual es muy razonable dado que ese valor correspondería a dos partículas con igual velocidad y dirección (en reposo en el Sistema C.M.), que no se separarían y por lo tanto se aniquilarían sin llegar a aparecer como partículas independientes.

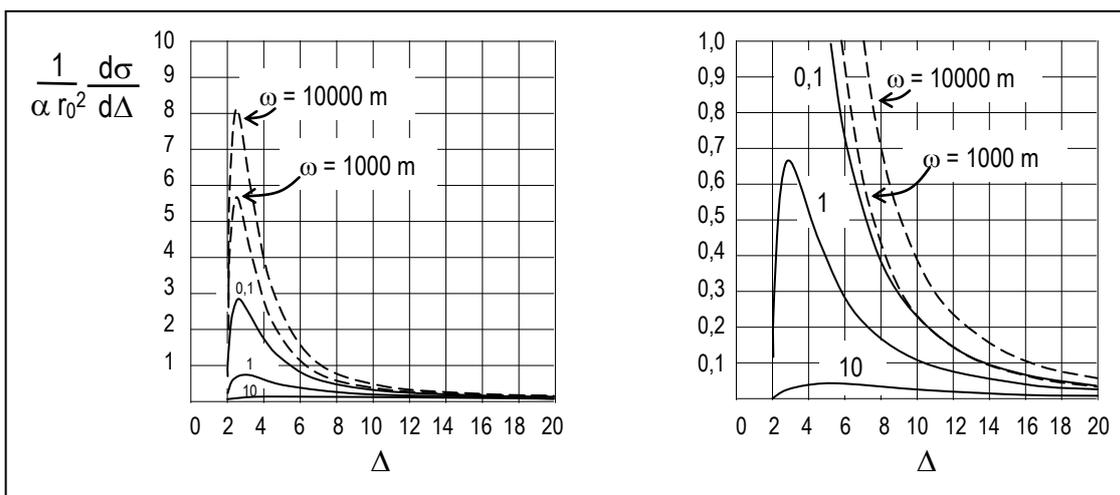


Fig. 1.7: Densidad de probabilidad de valores de Δ para p_1 integrado sobre todo el intervalo de valores mayores que el umbral indicado, mostrada con dos ampliaciones diferentes. Las gráficas en línea llena corresponden a p_1 por encima de los umbrales 0,1, 1, y 10 m, indistintamente para $\omega = 1000$ m y 10000 m, ya que con la ampliación de las gráficas no se perciben diferencias dependientes de la energía del fotón. Las gráficas en línea de trazos corresponden a la inclusión de todos los valores de p_1 , sin umbral, y muestran cómo al incluir los valores muy bajos de p_1 la probabilidad crece con ω .

CAPÍTULO 2

PROCEDIMIENTO GENERAL DE INTEGRACIÓN DE LA SECCIÓN EFICAZ

En este capítulo se presenta el mecanismo de integración de la sección eficaz diferencial, que puede considerarse el pilar de cálculo del trabajo, desarrollado a partir de las consideraciones cinemáticas desarrolladas en el Capítulo 1.

2.1.- Expresión estándar de la sección eficaz diferencial

En el marco de la electrodinámica cuántica existe un procedimiento estandarizado [43] para calcular la sección eficaz de los procesos que se estudian, el cual se muestra en el Apéndice 1 aplicado al caso que nos ocupa.

Lo que interesa decir en este lugar es que para abordar cada fenómeno se parte de los *diagramas de Feynmann* que lo describen en el grado de aproximación elegido (los analizaremos en el próximo capítulo), cada uno de los cuales da lugar a un *elemento de matriz*, M . Para tener en cuenta la contribución de varios diagramas de Feynmann (en nuestro caso se consideran 8), se suman o restan (dependiendo de si difieren en un número par o impar de intercambios de fermiones) los elementos de matriz correspondientes, para tener de esta manera un único elemento M , cuyo módulo al cuadrado es lo que debe ingresar a la expresión de la sección eficaz diferencial, $d\sigma$.

Ésta se obtiene partir de las consideraciones usuales como se muestra en el Apéndice 1, y tiene una estructura totalmente estandarizada:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{4\pi^2 \omega m} \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3} \times \delta^4(\sum p_f - \sum p_i) \times \left(4 \frac{m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.1)$$

Donde (en unidades naturales):

α es la constante de estructura fina ($\alpha = e^2 / 4\pi \cong 1 / 137,04$), siendo e es la carga del electrón.

r_0 es el radio de Thompson del electrón ($r_0 = \alpha / m = e^2 / 4\pi m \cong 2,818 \times 10^{-13}$ cm)

E y p son la energía y el módulo del trimomento lineal de cada partícula ($E = \sqrt{p^2 + m^2}$)

p_i y p_f son los cuadrimentos iniciales y finales de cada partícula, de manera que δ^4 representa una delta de Dirac de 4 dimensiones que expresa la conservación del cuadrimento total del sistema.

M es el elemento de matriz calculado a partir de los 8 diagramas de Feynmann que se consideran para la interacción, según los procedimientos que se explicitan en el Apéndice 5.

2.2.- Procedimiento general de integración

En virtud de la función delta ($\delta^4(\sum p_f - \sum p_i) = \delta(\sum E_f - \sum E_i) \times \delta^3(\sum \vec{p}_f - \sum \vec{p}_i)$) la integración de la expresión (2.1) sobre las posibilidades del momento tridimensional de una de las partículas es trivial.

Aquí se elige el positrón para ello, de manera que el efecto de esta integración será valuar \vec{p}_3 de manera de conservar el momento lineal tridimensional, lo cual siempre será posible para cualesquiera \vec{p}_1 y \vec{p}_2 haciendo:

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \vec{k} + \vec{p} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{k} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \quad (2.2)$$

Ahora bien, esto define $E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sqrt{(\vec{p}_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2))^2 + m^2}$, que resulta:

$$E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sqrt{m^2 + \omega^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2\omega p_1 \cos \theta_1 - 2\omega p_2 \cos \theta_2 + 2p_1 p_2 \cos \theta_{12}} \quad (2.3)$$

Siendo (en esta expresión, y de aquí en adelante):

p_1 y p_2 los módulos de los correspondientes vectores tridimensionales,

θ_1 y θ_2 los ángulos polares respecto del eje z,

θ_{21} el ángulo entre los vectores \vec{p}_1 y \vec{p}_2 , el cual, según el teorema del coseno de la trigonometría esférica, cumple con:

$$\cos \theta_{21} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.4)$$

Siendo φ el correspondiente ángulo azimutal.

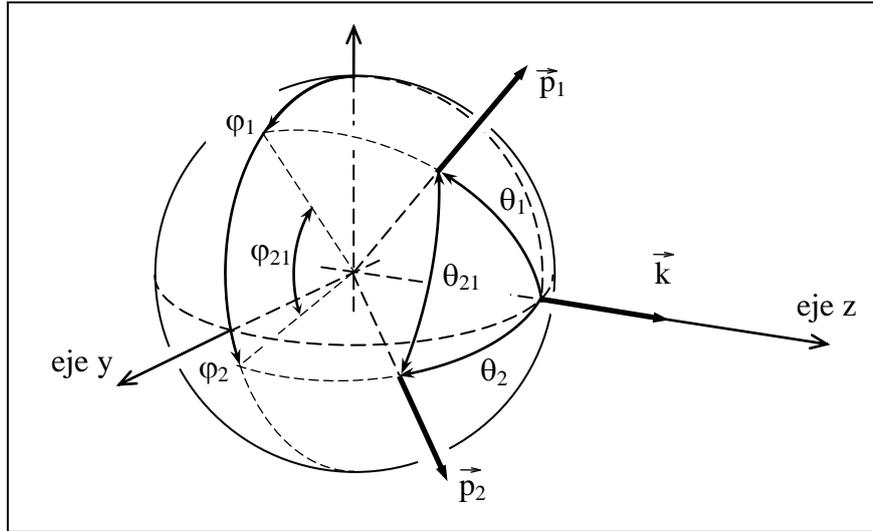


Fig. 2.1: esquema de los ángulos involucrados en la expresión (2.4)

De manera que una vez efectuada la integración sobre d^3p_3 queda la expresión:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{\omega m} \frac{d^3p_1}{2\pi E_1} \frac{d^3p_2}{2\pi E_2} \frac{1}{E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} \times \delta(\sum E_f - \sum E_i) \times \left(4 \frac{m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.5)$$

En donde se sobreentiende que en el elemento de matriz M también se han sustituido E_3 y \vec{p}_3 por las expresiones en función de \vec{p}_1 y \vec{p}_2 .

En la expresión (2.5) aún queda una función delta que permite integrar sobre una variable, la cual elegiremos que sea φ_2 (y equivalentemente podría ser φ_1 , como mostraremos también más adelante).

Aplicaremos:

$$\int f(x, \varphi_2) \delta(g(x, \varphi_2)) d\varphi_2 = \left. \frac{f(x, \varphi_2)}{\frac{\partial g}{\partial \varphi_2}} \right|_{\text{en } g=0}$$

En donde x simboliza todas las demás variables ($p_1, p_2, \theta_1, \theta_2$, y φ_1), las cuales se mantienen constantes en la derivada parcial involucrada.

De manera que la función $g(x, \varphi_2)$ es: $g(x, \varphi_2) = \omega + m - E_1 - E_2 - E_3(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$, y la dependencia de φ_2 es la expresada en (2.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} &= -\frac{\partial E_3}{\partial \varphi_2} = -\frac{1}{2E_3} 2p_1 p_2 \frac{\partial(\cos \theta_{12})}{\partial \varphi_2} \\ &= \frac{p_1 p_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_3} \end{aligned}$$

Con esto la expresión para la $d\sigma$ queda:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{\omega m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1} \frac{p_2^2 \text{sen} \theta_2 dp_2 d\theta_2}{E_2} \frac{1}{2\pi p_1 p_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 |\text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)|} \left(4 \frac{m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.6)$$

Expresión en la que φ_2 debe valuarse en el valor que anula $g(x, \varphi_2)$, o sea en el valor que conserva la energía.

Esta condición $g = 0$ permite, a través de (2.3) y (2.4), despejar la siguiente expresión para el valor de φ_2 que hace conservar la energía:

$$\cos(\varphi_{21}) = \frac{(\omega + m)(m - E_1 - E_2) + E_1 E_2 + \omega(p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2) - p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{p_1 p_2 \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2} \quad (2.8)$$

Siendo

$$\varphi_{21} = |\varphi_2 - \varphi_1|$$

La razón para haber usado el valor absoluto en esta definición es que, como se advierte a partir de la figura 2.1 y también de la expresión (2.4), para cualquier juego de valores $\theta_1, \theta_2, \varphi_1$, hay dos valores de φ_2 que dan el mismo θ_{21} : tanto $\varphi_{1+} \varphi_{21}$, como $\varphi_{1-} \varphi_{21}$.

Ahora bien, esto significa que la expresión (2.7), dado que es el resultado de integrar sobre φ_2 , debe ser modificada para incluir la suma de las dos posibilidades de este ángulo, y eso se consigue cambiando $|M|^2$ por la suma de las expresiones que resultan de valuar φ_2 en $\varphi_{1+} \varphi_{12}$ y en $\varphi_{1-} \varphi_{12}$:

$$\underbrace{|M|^2}_{\text{final}} = \underbrace{|M|^2}_{+\text{sen}\varphi_{21}} + \underbrace{|M|^2}_{-\text{sen}\varphi_{21}}$$

Para ello previamente, en el cálculo de M se debe haber sustituido φ_2 por $\varphi_{1+} \varphi_{12}$:

$$\cos \varphi_2 = \cos \varphi_{21} \cos \varphi_1 - \text{sen} \varphi_{21} \text{sen} \varphi_1$$

$$\text{sen} \varphi_2 = \text{sen} \varphi_{21} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_{21} \text{sen} \varphi_1$$

Ahora bien, dados dos vectores \vec{p}_1 y \vec{p}_2 ambos dentro del rango de valores permitidos por la cinemática general de este proceso, el miembro derecho de (2.8) no necesariamente tiene valor absoluto menor que 1. Es más, en general este valor resulta mayor que 1, de manera que esta expresión impone una condición (bastante restrictiva, como se verá), a las posibilidades de \vec{p}_2 una vez que se ha fijado \vec{p}_1 (dentro de la zona de valores posibles). Debe notarse que la expresión (2.8) es totalmente simétrica para 1 y 2, y en realidad todo el procedimiento lo es para las tres partículas, de manera que, fijando el movimiento de cualquiera de las partículas dentro del rango permitido, la expresión (2.8) limita fuertemente las posibilidades de las dos restantes.

Veremos que esta condición (2.8) resulta fundamental para este problema. Si llamamos U al miembro derecho de (2.8), la condición resulta $U^2 \leq 1$, y esto es equivalente a:

$$(\text{numerador } U)^2 \leq (p_1 p_2 \text{ sen}\theta_1 \text{ sen}\theta_2)^2$$

O lo que es lo mismo:

$$(p_1 p_2 \text{ sen}\theta_1 \text{ sen}\theta_2)^2 - (\text{numerador } U)^2 \geq 0 \quad (2.9)$$

Llamando F al miembro izquierdo de (2.9), y definiendo algunas variables auxiliares (C, G) resultan entonces las siguientes expresiones:

$$F = -p_2^2 \cos^2\theta_2 G + 2 p_2 \cos\theta_2 (\omega - p_1 \cos\theta_1) C + p_1^2 p_2^2 \text{ sen}^2\theta_1 - C^2 \quad (2.10)$$

$$C = (\omega + m) (E_1 + E_2 - m) - E_1 E_2 - \omega p_1 \cos\theta_1 \quad (2.11)$$

$$= \omega (E_1 - p_1 \cos\theta_1) + (E_2 - m) (\omega - E_1 + m) \quad (2.11')$$

$$G = \omega^2 + p_1^2 - 2 \omega p_1 \cos\theta_1 \quad (2.12)$$

(Vale notar que la expresión (2.11') permite inferir fácilmente que $C > 0$ siempre).

Condición de validez:

$$F \geq 0$$

$$|\text{sen}\varphi_{21}| = \frac{\sqrt{F}}{p_1 p_2 \text{ sen}\theta_1 \text{ sen}\theta_2} \quad (2.13)$$

$$\cos\varphi_{21} = \frac{(\omega - p_1 \cos\theta_1) p_2 \cos\theta_2 - C}{p_1 p_2 \text{ sen}\theta_1 \text{ sen}\theta_2} \quad (2.8')$$

Utilizando estas expresiones la expresión de la sección eficaz se modifica de la siguiente manera:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{2\omega m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1} \frac{p_2^2 \text{ sen}\theta_2 dp_2 d\theta_2}{E_2} \frac{1}{\pi \sqrt{F}} \left(4 \frac{m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.6')$$

Ahora bien, dado que ni C ni G dependen de θ_2 , F es un polinomio de segundo grado en $\cos\theta_2$, con coeficiente cuadrático negativo (ya que, como puede verse fácilmente siempre es $G > 0$). De manera que, fijados \vec{p}_1 y p_2 dentro del rango de valores permitidos, la zona $F \geq 0$ queda definida por los valores de θ_2 entre las dos raíces, que designaremos x^- y x^+ ($x^- \leq \cos\theta_2 \leq x^+$ - ver figura 2.2). Aunque el tratamiento es totalmente equivalente si se intercambia la partícula 1 con la 2, ya que como se dijo, las expresiones funcionan simétricamente para ambas, aquí se continuará en este orden, dejando para el último la integración sobre \vec{p}_1 .

Estas raíces están dadas por:

$$x^{\pm} = \frac{(\omega - p_1 \cos \theta_1) C \pm p_1 \operatorname{sen} \theta_1 \sqrt{p_2^2 G - C^2}}{p_2 G} \quad (2.14)$$

Y corresponden a valores de θ_2 definidos por:

$$\theta_2^+ = \arccos(x^+) < \theta_2^- = \arccos(x^-)$$

En adelante utilizaremos $x = \cos \theta_2$ como variable para el polinomio $F(x)$, el cual puede ser escrito como:

$$F(x) = \frac{4F_0}{\delta^2} (x - x^-)(x^+ - x) \quad (2.15)$$

Donde δ es la longitud del intervalo entre las raíces: $\delta = (x^+ - x^-)$, y $F_0 = F(x_0)$ es el valor de F en el punto medio del intervalo, $x_0 = \frac{1}{2} (x^+ + x^-)$.

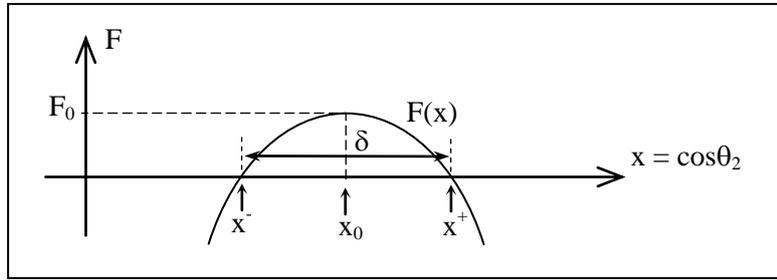


Fig. 2.2: Gráfica de $F(x)$ en la zona de interés, muy exagerada.

Por otra parte la anulaci3n de la ra3z en el numerador plantea la condici3n $C^2 = p_2^2 G$, que puede escribirse como una ecuaci3n de segundo grado en p_2 , cuyas ra3ces, p_{2a} y p_{2b} , se3alan los valores extremos posibles de p_2 , una vez fijado \bar{p}_1 (figura 2.3). Las expresiones correspondientes, muy largas, est3n desarrolladas en Ap3ndice 2.

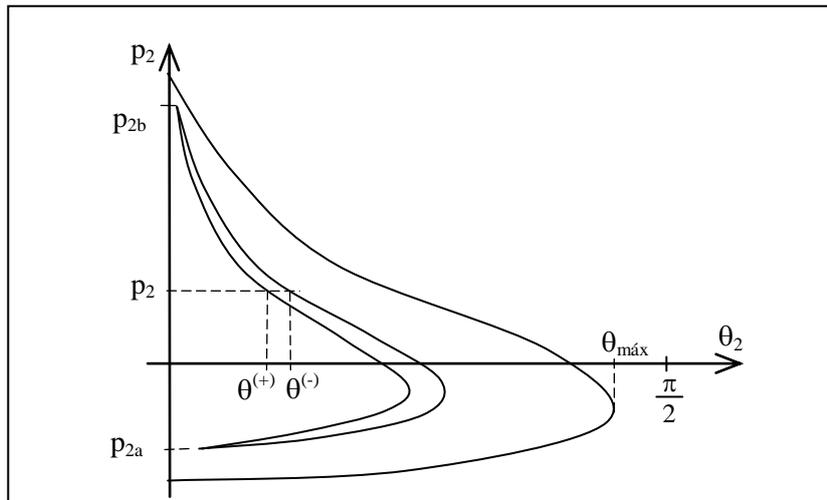


Fig. 2.3: Se muestra cualitativamente la regi3n de valores de (θ_2, p_2) para los cuales $F \geq 0$, supuesto elegido un valor cualquiera de (θ_1, p_1) dentro del rango posible. Para los casos de gran energ3a, la escala de ordenadas se supone logar3tmica, y el ancho de la regi3n se muestra muy exagerado.

Se encuentra que para grandes valores de ω el intervalo entre x^- y x^+ es extremadamente angosto, y sin embargo esto no habilita para aproximar la integración sobre θ_2 considerando que el elemento de matriz M se debería mantener aproximadamente constante en un intervalo tan angosto, porque se encuentran variaciones muy marcadas en los valores de M en el intervalo. Valga para ilustrar eso el dato de que el intervalo entre x^- y x^+ define la zona en la cual en general φ_{21} pasa de π a 0, como se deduce inspeccionando las expresiones (2.8) a (2.12), y como se muestra en el Apéndice 3).

De manera que, teniendo en cuenta (2.15), y denominando $A = 4 m^6 |M|^2 / e^6$, la integral sobre θ_2 en general puede escribirse como sigue:

$$\int \frac{A \sin \theta_2 d\theta_2}{\pi \sqrt{F}} = \frac{\delta}{2\pi \sqrt{F_0}} \int_{x^-}^{x^+} \frac{A dx}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} \quad (2.16)$$

Esta integral se podría efectuar exactamente si A fuese constante, y también si fuese alguna potencia de x , de manera que siempre estará la opción de aproximar A con un polinomio, a la cual recurriremos en determinadas ocasiones.

No obstante, inspeccionando la forma de A se encuentra, con variaciones que dependen de los diagramas de Feynmann considerados, cierta estructura general que puede integrarse analíticamente, que es la siguiente:

$$\frac{\text{Polinomio de grado } \leq 3}{(H_2 - x)^{n_2} (x - H_3)^{n_3} (x - H_4)^{n_4}}$$

En donde:

- H_2, H_3 y H_4 son constantes que están fuera del intervalo de integración, $H_2 > x^+$, $H_3 < x^-$, y $H_4 < x^-$,
- n_2, n_3 y n_4 son tres números naturales, en general 0, 1, ó 2.

De manera que en general la sección eficaz diferencial quedará expresada de la siguiente manera que tomaremos como punto de partida para todas las integraciones:

$$d\sigma = \alpha r_0^2 \frac{1}{2 \omega m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} \left(\frac{4m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.17)$$

En donde se han aplicado (2.10), (2.12), y (2.14), para obtener que

$$\frac{\delta}{\sqrt{F_0}} = \frac{2}{p_2 \sqrt{\omega^2 + p_1^2 - 2\omega p_1 \cos \theta_1}} = \frac{2}{p_2 \sqrt{G}}$$

Vale destacar que el factor 2π en el denominador de la integral sobre $d^3 p_1$ tiene el efecto de normalizar la integración sobre φ_1 , mientras que el factor $1/\pi$ delante de la integral sobre x , se cancela con un factor π que, como se verá, aparece como factor de todas estas integrales.

CAPÍTULO 3

LOS DIAGRAMAS DE FEYNMANN Y SUS CONTRIBUCIONES

En este capítulo, luego de presentar los diagramas de Feynmann que se consideran para calcular los elementos de matriz, se discute el concepto de indistinguibilidad de los electrones del triplete, y la forma correcta de tratar cada partícula. De acuerdo con eso se plantea la forma en que se desarrollará el tratamiento en el resto del trabajo.

3.1.- Los diagramas de Feynmann

La electrodinámica cuántica [43] permite explicar el proceso de creación de pares en el campo de un electrón, en el nivel más bajo de aproximación, con los diagramas de Feynmann de tres vértices que se muestran en la figura 3.1.

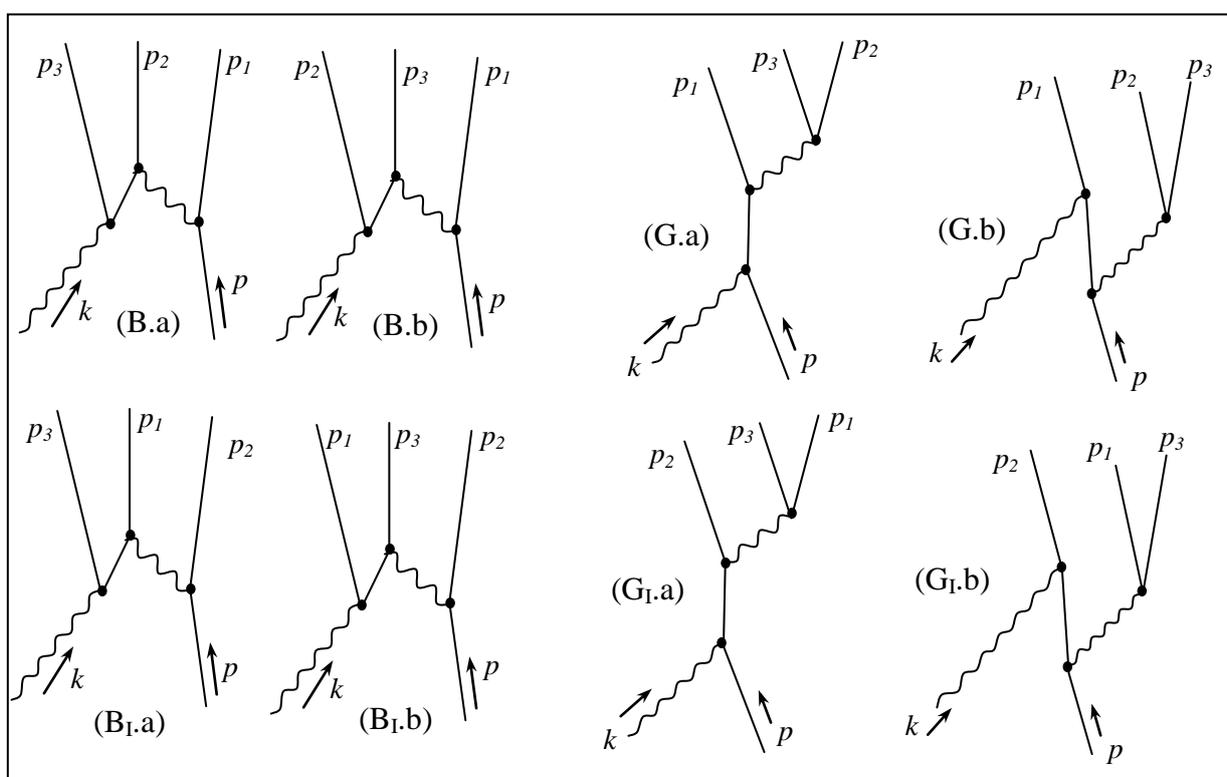


Fig. 3.1: Se muestran los ocho diagramas de Feynmann de tres vértices que representan la creación de pares en el campo de un electrón. En todos los casos k representa el momento del fotón incidente, p el del electrón necesario para la posibilidad del fenómeno, y la partícula 3 es el positrón.

Dos de los diagramas, (B.a) y (B.b), se denominan de Borsellino (en reconocimiento a Borsellino, quien calculó la sección eficaz resolviendo los detalles de la interacción que ellos representan [9]).

Estos diagramas plantean el fenómeno básico: un fotón (de momento k) se aniquila en un vértice creando un par negatrón-positrón (de momentos p_2 y p_3), que debe interactuar con otro negatrón (inicialmente de momento p) para que se cumpla la conservación del cuadrimomento lineal. En el nivel más bajo de aproximación eso requiere otros dos vértices entre los cuales un fotón virtual conecta el tercer electrón con alguna de las partículas del par creado. Así, el

diagrama (B.a) muestra al tercer electrón interactuando con el negatrón, y el (B.b) lo muestra interactuando con el positrón.

La indistinguibilidad entre los negatrones agrega automáticamente dos diagramas más, que también son de Borsellino, distinguidos de los anteriores por un subíndice I, indicador de que se han intercambiado los negatrones en el triplete de salida.

Los otros diagramas son los denominados “ γ -e” en toda la literatura del tema, debido al tipo de interacción inicial que representan, y aquí, por razones de comodidad y compatibilidad con las hojas de cálculo Maple, han sido denominados “G”. Los dos diagramas, (G.a) y (G.b), representan una interacción Compton del fotón incidente con el electrón inicial, en la cual el fotón (virtual) emergente se desintegra en un par negatrón-positrón. Dan cuenta de la indistinguibilidad sus parejas (G_{I.a}) y (G_{I.b}), que tienen intercambiados los negatrones 1 – 2.

Sabiendo que las probabilidades de la interacción Compton decrecen con la energía, podemos esperar que para muy altas energías disminuyan suficientemente las contribuciones de los cuatro diagramas G correspondientes, y en principio vale destacar que ya en los valores de umbral de la energía de los fotones para la creación de pares los diagramas G sólo introducen correcciones relativamente pequeñas en la sección eficaz calculada con los B, que pueden por lo tanto ser considerados dominantes para este fenómeno.

Por otra parte las contribuciones de los diferentes diagramas B requieren para su análisis de un trabajo más completo, y se discuten en los próximos puntos.

3.2.- La indistinguibilidad de los negatrones y distintas posibilidades de integración

Obviamente para integrar la sección eficaz en este problema es posible elegir el orden de integración de las diferentes variables de muchas maneras distintas.

El orden elegido hasta aquí permite obtener $d\sigma/d^3p_1$, es decir la sección eficaz diferencial en función de las variables dinámicas del electrón 1, después de haber integrado la expresión (2.1) sobre toda la gama de posibilidades de las partículas 2 y 3.

Siendo siempre la partícula 3 el positrón, es necesario un análisis con cierto grado de elaboración para decidir cómo tratar a los negatrones 1 y 2.

Lo usual es identificar el electrón 1 con el de retroceso, lo cual sólo tiene sentido mientras sea ignorada la indistinguibilidad entre los negatrones, limitando la descripción a los diagramas de Feynmann denominados “sin intercambio” (B y G).

La consideración de los diagramas “con intercambio” (B_I y G_I) agregados a los anteriores introduce dos cambios importantes en el esquema de cálculo de la integral de la expresión (2.1).

El primero de estos cambios es que agrega a cada elemento $|M|^2$ “sin intercambio”, exactamente el mismo elemento en el cual se han intercambiado los dos negatrones entre sí ($1 \leftrightarrow 2$): $|M_I(1,2)|^2 = |M(2,1)|^2$, y para que esto se entienda bien es necesario decir que no hay aquí nada más que un *intercambio de nombre* entre los electrones. Físicamente cada diagrama “sin intercambio” sólo se distingue de su par “con intercambio”, en el *nombre* de los negatrones 1 y 2. Según la teoría el electrón inicial es *aniquilado* en un vértice del diagrama, por lo cual formalmente carece de sentido tratar de identificarlo con uno de los electrones del triplete.

Asimismo es importante destacar que no hay diferencia física entre cualquiera de los diagramas sin intercambio, y su par con intercambio: se elige arbitrariamente cuál se va a considerar “sin”, y cuál “con”, intercambio.

El segundo de los cambios importantes es que aparece un término “de interferencia” ($M \cdot M_1^* + M^* \cdot M_1$) al calcular el módulo cuadrado del elemento de matriz total, que modifica la distribución de probabilidades de las distintas variables de las partículas emergentes.

Es claro que este término sería nulo de no haber una zona del espacio fásico en común, es decir una zona en la cual simultáneamente tanto M como M_1 no sean nulos. De manera que los valores relativamente pequeños del término de intercambio indican poco “solapamiento” entre diagramas (con y sin intercambio), y eso significa características generales bastante diferentes de los movimientos para las partículas 1 y 2, lo cual permitiría intentar algún tipo de diferenciación entre uno y otro.

Dado que en este caso los diagramas B son dominantes, es posible definir (arbitrariamente) cuál versión del par de estos diagramas se considera sin intercambio, eligiendo así a cuál se va a denominar electrón de retroceso. Esta elección, en principio arbitraria, sólo adquiere cierto grado de sentido a medida que el término de interferencia entre estos diagramas se hace despreciable para energías de los fotones cada vez más grandes.

Como se verá al avanzar la discusión, las notables diferencias en las características del movimiento de ambos negatrones para grandes energías de los fotones permitirán distinguir el más energético del menos energético, y tendrá cierto grado de sentido denominar a este último “de retroceso”, sin pretender ningún rigor en esta denominación.

Desde el punto de vista puramente práctico esto tiene dos consecuencias importantes.

La primera es una disminución de la cantidad de posibilidades de integración que serían de interés, ya que la equivalencia entre las partículas 1 y 2 hace redundante la integración sobre las variables de la partícula 1 para obtener $d\sigma/d^3p_2$.

Efectivamente, integrando $|M|^2$ “sin intercambio” sobre todas las posibilidades de la partícula 2 (luego de eliminar las variables de la partícula 3 en función de las de las otras) se obtiene cierta información sobre la partícula 1 ($d\sigma/d^3p_1$). Obtener la misma información sobre la partícula 2 podría requerir reelaborar todo el algoritmo para integrar sobre la partícula 1, pero dada la equivalencia mencionada, esto puede hacerse integrando sobre las posibilidades de la partícula 2 el elemento $|M_1|^2$, y luego intercambiando los nombres $1 \leftrightarrow 2$.

La segunda consecuencia importante se refiere a la forma de contabilizar los posibles estados finales de la interacción.

Cuando consideramos cada uno de los estados contenidos en $d^3p_{1,s_1} d^3p_{2,s_2}$, donde s_1 y s_2 son los índices de spin, al integrar (sumar) sobre todas las posibilidades de cada uno, debemos multiplicar por un factor $1/2$, ya que para el sistema de las dos partículas indistinguibles los dos estados que se obtienen intercambiando *los valores* de las variables $1 \leftrightarrow 2$ (cuando al menos uno de los valores correspondientes a una de las partículas es diferente del que le corresponde a la otra), son en realidad un solo y mismo estado. Si ninguna de las variables difiriera de una partícula a la otra, entonces no estaríamos hablando de dos estados sino de uno, pero en este caso el elemento de matriz sería nulo, por lo cual el elemento no contribuiría a la integral y no interesaría en la cuenta.

De manera que en la expresión (2.1) para obtener la sección eficaz el elemento $|M - M_1|^2 = |M|^2 + |M_1|^2 - (M^*M_1 + M M_1^*)$ debe integrarse sobre todo el espacio de posibilidades dado por $d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3$, multiplicado por un factor $1/2$.

3.3.- Sección eficaz diferencial y distribución de probabilidades

Se entiende mejor el factor $\frac{1}{2}$ si se considera un caso hipotético con el término de interferencia nulo.

En este caso la sección eficaz es una suma que antes de la última integración (sobre las variables del negatrón 1) puede ser escrita:

$$\frac{d\sigma}{p_1^2 dp_1 d\Omega_1} = \frac{1}{2} \int |M|^2 \times \dots \times d^3 p_2 d^3 p_3 + \frac{1}{2} \int |M_1|^2 \times \dots \times d^3 p_2 d^3 p_3 \quad (3.1)$$

Donde los tres puntos simbolizan todos los factores que faltan para completar la expresión (2.1), antes de multiplicar por el factor $\frac{1}{2}$. Cada sumando es una función de las variables \vec{p}_1 , variables que puede interpretarse que son, por ejemplo, las del electrón de retroceso para el primero, y del otro para el segundo (depende de cual par de diagramas de Feynmann es el que se ha definido como “sin intercambio”).

De manera que si se quita el factor $\frac{1}{2}$, el primer término representa la distribución de probabilidades de las variables del electrón de retroceso, y el segundo la de las variables del otro electrón. Es decir que para cada elemento $d^3 p$ (quitando el índice 1 para este razonamiento), el primer término cuenta la fracción de fotones incidentes que dan lugar a un electrón de retroceso emergiendo con esos valores de \vec{p} , y el segundo lo mismo para el otro electrón.

Es claro que ambos términos integrados por separado sobre todo el espacio $d^3 p_1$ darán exactamente lo mismo, que habiéndose suprimido el factor $\frac{1}{2}$ (y siempre en el caso de término de interferencia nulo), será la sección eficaz total, dado que: el primero dará la fracción de fotones que dieron lugar a un electrón de retroceso con cualquier momento final posible, y el segundo dará la fracción de fotones que dieron lugar al otro electrón con cualquier momento final posible.

De manera que la integral total, sin el factor $\frac{1}{2}$, cuenta la fracción de electrones emergentes que se detectan sobre el total de fotones incidentes, y esto es el doble de la sección eficaz total, porque hay dos electrones emergentes por cada creación de pares que ocurre.

3.4.- Criterios para seleccionar e interpretar el rol de cada negatrón

Esta discusión sugiere que también resulta natural plantear *sin el factor* $\frac{1}{2}$ las integrales de los distintos términos que representan a cada diagrama de Feynmann, y de esta manera interpretar cada contribución en términos de su influencia sobre la distribución de probabilidad de las variables dinámicas de alguno de los negatrones, seleccionado con algún criterio que vamos a establecer.

Para establecer criterios que sean útiles es necesario tener en cuenta los siguientes hechos, que se verán corroborados por medio de los cálculos correspondientes más adelante.

1) La contribución de los diagramas de Borsellino es dominante frente a los G, dado que la probabilidad del proceso Compton, que requiere en algún vértice la absorción del fotón incidente por parte de un electrón, comienza siendo relativamente baja para fotones de energías superiores al umbral de creación de pares, y continúa disminuyendo a medida que dicha energía aumenta.

2) El valor del término de interferencia entre los diagramas de Borsellino decrece al aumentar la energía del fotón, y ya se hace suficientemente pequeño para energías del orden de $10 mc^2$. Estos bajos valores del término de interferencia representan directamente baja probabilidad de

estados dinámicos parecidos de ambos negatrones (estados próximos en el espacio de las fases).

3) Si en los diagramas de Borsellino sin intercambio el electrón 1 es el de retroceso, y M es su correspondiente elemento de matriz, entonces el primer término de la expresión (3.1)

$$\int |M|^2 \dots d^3 p_2 d^3 p_3 \quad (3.1')$$

que representa la distribución de probabilidades de los valores de \vec{p}_1 , sólo es considerable para pequeños valores de p_1 , del orden de $10m/\omega$ (línea de puntos en figura 3.2).

Por otra parte el otro término de (3.1)

$$\int |M_1|^2 \dots d^3 p_2 d^3 p_3 \quad (3.1'')$$

da una densidad de probabilidad mostrada en línea llena en la figura 3.2, que no varía mucho para p_1 desde casi cero hasta casi ω .

Es claro que para grandes energías del fotón incidente la superposición de las dos distribuciones es pequeña, y disminuye a medida que aumenta dicha energía, tal como lo hace el término de interferencia.

Es fácil ver este comportamiento en las siguientes gráficas para tres energías distintas: $\omega = 10, 100, \text{ y } 1000 \text{ (mc}^2\text{)}$.

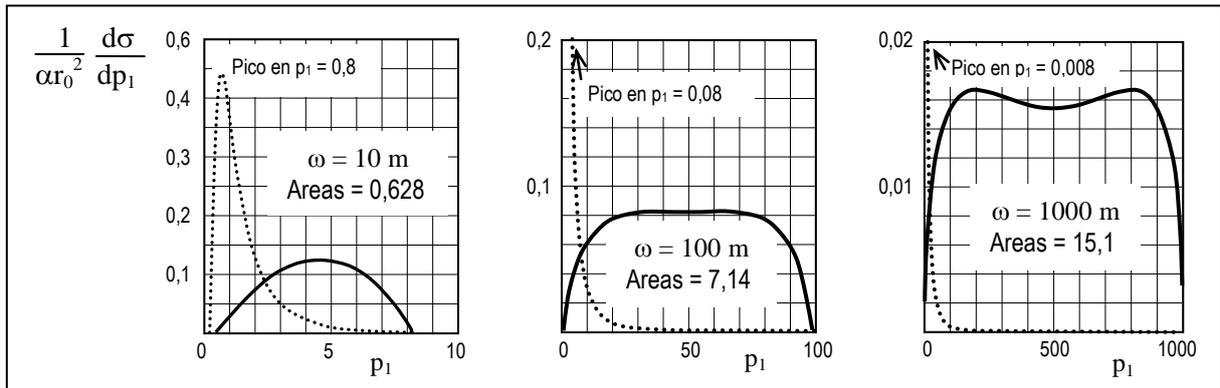


Fig. 3.2: Gráficas de las distribuciones de probabilidad de p_1 para las integrales (3.1'), en línea de puntos, y (3.1''), en línea llena, para tres valores de energía del fotón. Para cada energía ambas gráficas encierran la misma área, que está indicada en unidades de α_0^2 .

La pequeñez del solapamiento entre estas gráficas correspondientes a (3.1') y (3.1'') para grandes energías, es lo que hace que hablar del electrón de retroceso pueda tener algún sentido. Y las características de éstas y de las demás funciones que expresan la dependencia de la sección eficaz diferencial con las diversas variables dinámicas hacen que en general se designe como electrón de retroceso al de menor energía (y mayor ángulo polar de desviación) que se detecta experimentalmente.

4) El ángulo polar de cualquiera de las partículas está fuertemente limitado por las consideraciones elementales de conservación del cuadrimomento, las que según (1.33) imponen, para una partícula de momento lineal (tridimensional) p , el siguiente valor máximo posible para el ángulo polar:

$$\theta_{\max} \cong \sqrt{\frac{2m}{p}} \quad (3.2)$$

Pero además de esta limitación, para grandes energías del fotón incidente existen dos comportamientos típicos diferentes: por un lado el negatrón de menor energía tiene gran probabilidad de tener ángulo polar cercano al valor máximo dado por (3.2), y por otro lado, las dos partículas de gran energía (cualquiera de ellas, tanto negatrón como positrón), como se verá oportunamente, tienen ángulos polares mucho menores, cercanos al valor $(p$ es el momento lineal tridimensional de la partícula):

$$\theta_{\text{par}} \cong \frac{m}{p} \quad (3.3)$$

5) Por último es importante saber que ninguna de las partículas puede ser detectada si su momento cae por debajo de cierto valor umbral q , en general del orden de m . Esto es fundamental porque si bien a medida que aumenta la energía ω del fotón la sección eficaz crece proporcionalmente a $\ln(\omega)$, la cantidad de tripletes que se detecta tiende a un valor límite independiente de dicha energía.

Esto es porque para grandes energías ω lo que aumenta proporcionalmente a $\ln(\omega)$ en realidad es el número de tripletes que se producen con uno de los negatrones de energía cinética extremadamente baja (de orden m/ω), y si se fija cualquier valor pequeño como umbral de detección, se llega a un valor de ω tal que los fotones con más energía producen preponderantemente tripletes que no son detectados porque alguno de los negatrones está por debajo del umbral.

Estos cuatro hechos descriptos resultan en que la característica esencial de la detección experimental de uno de estos tripletes consiste en que se detecta un par negatrón positrón con ambas partículas de muy alta energía y muy pequeño ángulo polar, junto con un tercer negatrón de muy baja energía y gran ángulo polar.

Ahora bien, desde el punto de vista formal es posible calcular perfectamente la distribución de probabilidades de las distintas variables del negatrón más energético, separándolo del menos energético precisamente por los valores de sus energías, sin necesidad de afirmar que uno de ellos sea el de retroceso. Y aunque por costumbre pueda seguirse denominando “de retroceso” al menos energético, ello no tiene más pretensión que seguir una costumbre.

En función de estas características discutidas es posible plantear el siguiente procedimiento básico de análisis de los datos experimentales, el cual a su vez puede servir de base a un procedimiento de simulación del proceso de creación de pares en campo de electrón para un haz de fotones incidiendo sobre un material.

3.5.- Procedimientos de análisis

De acuerdo con la notación presentada hasta aquí, la letra B designará los elementos correspondientes a los diagramas de Borsellino sin intercambio. En ellos M es el correspondiente elemento de matriz y 1 es el electrón de retroceso.

De este modo $d\sigma_B$ será sección eficaz diferencial calculada efectuando la integral (2.1) con el módulo cuadrado del elemento de matriz reducido a $|M|^2$, dejando sin efectuar la integración sobre d^3p_1 . Es decir que es la calculada con la integral (3.1’):

$$\frac{d^3\sigma_B}{p_1^2 dp_1 d\Omega_1} = \int |M|^2 \dots d^3p_2 d^3p_3 \quad (3.1')$$

De manera similar designaremos $d\sigma_{BII}$ a la correspondiente integral (3.1'') en la que el elemento de matriz se ha reducido a $|M_I|^2$, y $d\sigma_{BI}$ a la contribución del término de intercambio a la sección eficaz, es decir la misma integral en la cual el módulo cuadrado del elemento de matriz ha sido reemplazado por el elemento cruzado $(-M^*M_I - M M_I^*)$.

Con el mismo criterio designaremos a todas las demás contribuciones a la sección eficaz. Es decir, para los diagramas G tendremos las contribuciones $d\sigma_G$, $d\sigma_{GII}$, y $d\sigma_{GI}$. Y por último las contribuciones de los términos "cruzados" serán $d\sigma_{BG}+d\sigma_{BIGI}$, y $d\sigma_{BIG}+d\sigma_{BGI}$, todas referidas al elemento de volumen d^3p_1 del espacio de las fases.

Todas expresarán contribuciones a la densidad de probabilidad por unidad de volumen d^3p_1 del espacio de fases, donde la partícula p_1 podrá ser interpretada de diferentes maneras según se discute a continuación.

Así, independientemente de que en el cálculo se rechacen o no los tripletes en los que alguna de las partículas tenga momento por debajo de algún umbral, tendremos:

Negatrón de menor energía

Si se calculan todas las contribuciones con la restricción de que $p_1 < p_2$, se tiene la distribución de probabilidades en la que las variables \bar{p}_1 representan al negatrón de menor energía. En ésta el término dominante está dado por $d^3\sigma_B$, que indica una distribución muy concentrada en los pequeños valores de p_1 (líneas de puntos en la figura 3.2), y corresponde al electrón de retroceso en el diagrama de Borsellino sin intercambio; todos los demás términos son pequeñas correcciones sobre éste.

Negatrón de mayor energía

Si se calculan todas las contribuciones con la restricción de que $p_1 > p_2$, se tiene la distribución de probabilidades en la que las variables \bar{p}_1 representan al negatrón de mayor energía. En ésta el término dominante está dado por $d\sigma_{BII}$, que indica la distribución correspondiente al electrón del par creado cuando sólo se consideran los diagramas de Borsellino sin intercambio, y está representada por las líneas llenas en la figura 3.2; y todos los demás términos son pequeñas correcciones sobre éste.

Esta distribución para grandes energías coincide muy aproximadamente con la distribución típica de Bethe-Heitler para el electrón creado en el campo del núcleo atómico [10], [18], como se verá oportunamente.

CAPÍTULO 4

TRATAMIENTO DE LA POLARIZACIÓN LINEAL DE LA RADIACIÓN INCIDENTE

En este capítulo se discute la manera práctica concreta en que intervendrá la polarización lineal del haz incidente en el cálculo de los elementos de matriz de los diagramas de Feynmann, y la notación que resulta del procedimiento.

Al finalizar el capítulo y como consecuencia directa de lo anterior, se discute uno de los procedimientos para detectar experimentalmente la mencionada polarización, que es a través de la distribución azimutal del electrón menos energético del triplete.

4.1.- Tratamiento analítico de la polarización.

Como se verá oportunamente en detalle al calcular los elementos de matriz M correspondientes a cada uno de los diagramas de Feynmann mostrados en la figura 3.1, la dependencia de cada uno de ellos con el campo electromagnético de un fotón que está linealmente polarizado y viaja a lo largo del eje z , se expresa siempre en la forma de un producto escalar de cuadvectores de la siguiente manera:

$$M = \varepsilon_{\alpha} M^{\alpha} \quad (4.1)$$

Donde:

- ε_{α} es el cuadvector que indica la polarización lineal del fotón (α es un índice cuadvectorial que se suma de 0 a 3)
- M^{α} es cualquiera de los elementos de matriz, con una complicada estructura que se verá oportunamente, pero que aquí no interesa porque su relación con el fotón inicial está contenida en (4.1).

Para el fotón viajando a lo largo de z , la polarización lineal en cualquier dirección del plano x,y dada por $\hat{n} = (\cos\chi, \text{sen}\chi, 0)$ se expresa con el cuadvector:

$$\mathcal{E}^{\alpha} = (0, \cos\chi, \text{sen}\chi, 0) \quad \mathcal{E}_{\alpha} = (0, -\cos\chi, -\text{sen}\chi, 0) \quad (4.2)$$

De manera que al calcular el módulo cuadrado del elemento de matriz aparecen distintas contribuciones que siempre tienen la forma del siguiente producto tensorial:

$$\rho_{\alpha\beta} X_{ab}^{\alpha\beta} \quad (4.3)$$

En donde

- $X_{ab}^{\alpha\beta} = M_a^{\alpha} M_b^{\beta*}$, siendo M_a y M_b son los elementos de matriz que se están multiplicando para cada contribución particular considerada (y el asterisco indica conjugado complejo).
- $\rho_{\alpha\beta} = \mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\beta}$, es la *matriz densidad*

Dado que todos los elementos de esta matriz serán nulos excepto posiblemente para los valores 1 o 2 de los índices α y β podemos abreviar el tratamiento reteniendo sólo éstos elementos, con lo cual la matriz densidad será:

$$\rho_{\hat{n}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \chi & \cos \chi \sin \chi \\ \cos \chi \sin \chi & \sin^2 \chi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & 1 - \cos 2\chi \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Esta matriz densidad también puede escribirse como:

$$\rho_{\hat{n}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1 - \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Siendo ξ_i los llamados parámetros de Stokes:

$$\xi_1 = \sin 2\chi \quad \xi_3 = \cos 2\chi \quad (4.6)$$

Un tercer parámetro imaginario, ξ_2 aparecería en la matriz densidad si se quisiera considerar polarización circular, que no es el caso.

Con estos dos parámetros además se plantean dos relaciones que se desprenden de (4.6):

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \operatorname{tg}(2\chi) \quad \xi_1^2 + \xi_3^2 = 1 \quad (4.7)$$

Ahora bien, para el caso no polarizado se plantea una matriz densidad que se obtendría promediando la anterior para todas las direcciones uniformemente distribuidas sobre el plano x, y ; y eso equivale a plantear la suma con igual probabilidad de la matriz densidad para cualquier χ , y para $\chi + \pi/2$:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{NOP}} &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & 1 - \cos 2\chi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\chi + \pi) & \sin(2\chi + \pi) \\ \sin(2\chi + \pi) & 1 - \cos(2\chi + \pi) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Y finalmente, si se mezcla radiación no polarizada con radiación linealmente polarizada en dirección dada por χ , se tendrá $\rho = c_1^2 \rho_{\text{NOP}} + c_2^2 \rho_{\chi}$, con $c_1^2 + c_2^2 = 1$, lo cual hace que:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + c_2^2 \cos 2\chi & c_2^2 \sin 2\chi \\ c_2^2 \sin 2\chi & 1 - c_2^2 \cos 2\chi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1 - \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Donde ahora

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \operatorname{tg}(2\chi) \quad \xi_1^2 + \xi_3^2 = c_2^4 \leq 1 \quad (4.10)$$

Se define el vector polarización \vec{P} , que apunta en la dirección \hat{n} , de módulo:

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = c_2^2 \begin{cases} 0, & \text{en caso NO POLARIZADO} \\ 1, & \text{en caso TOTALMENTE POLARIZADO} \end{cases}$$

De manera que finalmente quedará:

$$X^{ab} \rho_{\alpha\beta} = u_{ab} + P (v_{ab} \cos 2\chi + w_{ab} \sin 2\chi) \quad (4.11)$$

En donde:

$$u_{ab} = \frac{(X_{ab})^{11} + (X_{ab})^{22}}{2} \quad (4.12)$$

$$v_{ab} = \frac{(X_{ab})^{11} - (X_{ab})^{22}}{2} \quad (4.12')$$

$$w_{ab} = \frac{(X_{ab})^{21} + (X_{ab})^{12}}{2} \quad (4.12'')$$

Es posible reescribir (4.11) de la siguiente manera (en adelante se suprimen los índices a,b, indicativos de los diagramas de Feynmann cuya contribución se está calculando, en virtud de que para cada contribución la estructura es esta misma):

$$X^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} = u + PR \left(\frac{v}{R} \cos(2\chi) + \frac{w}{R} \sin(2\chi) \right) \quad (4.13)$$

$$= u + PR (\cos 2\phi \cos 2\chi + \sin 2\phi \sin 2\chi)$$

$$= u + PR \cos(2(\phi - \chi)) \quad (4.13')$$

Donde:

$$R = \sqrt{v^2 + w^2}$$

$$\frac{v}{R} = \cos(2\phi) \quad \frac{w}{R} = \sin(2\phi) \quad \frac{w}{v} = \operatorname{tg}(2\phi) \quad (4.14)$$

En (4.13) se tiene que tanto R como ϕ pueden depender de φ_1 pero no de χ , mientras que el resultado de esta expresión, o más precisamente su parte variable, $R \cos(2(\phi - \chi))$, sólo puede depender de φ_1 y de χ a través de la diferencia $\varphi_1 - \chi$. Manipulando estas ideas se encuentra que R debe ser independiente de φ_1 , mientras que ϕ debe ser $\phi = \varphi_1 + \phi_0$, donde ϕ_0 es algún valor constante.

De manera que (4.13) queda:

$$X^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} = u + PR \cos(2(\varphi_1 + \phi_0 - \chi))$$

Si se elige $\chi = 0$ (polarización orientada a lo largo del eje x), se tiene finalmente:

$$X^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} = u + PR \cos(2(\varphi_1 + \phi_0)) \quad (4.15)$$

Y también se tiene, según (14):

$$X^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} = u + P v$$

Esto indica que no es necesario calcular w, y que además

$$v = R \cos(2(\varphi_1 + \phi_0)) \quad (4.16)$$

Si, como lo sugiere la simetría, la sección eficaz es una función par de φ_1 , entonces sólo habrá dos posibilidades para ϕ_0 : 0 ó $\frac{1}{2}\pi$, equivaliendo esta última a la primera colocando signo negativo a R.

Es decir:

$$v = v_0 \cos(2\varphi_1) = \pm R \cos(2\varphi_1) \quad (4.16')$$

Con $v_0 = \pm R$, independientes ambos de φ_1 ; vale destacar que esto implica que debe cumplirse $w = v_0 \sin(2\varphi_1)$, lo cual se verifica efectivamente al hacer explícitamente los cálculos dados por (4.12') y (4.12'').

Una vez desarrollados los elementos de matriz correspondientes a cada diagrama de Feynmann, es posible integrar la expresión (2.17) analíticamente sobre $x = \cos\theta_2$, de la manera que se describe en el Apéndice 6, con un procedimiento particular para cada una de las contribuciones de cada diagrama, luego integrar numéricamente sobre p_2 para completar la integración sobre las variables \vec{p}_3 y \vec{p}_2 .

Es interesante notar que sólo los términos u contribuyen a la sección eficaz total, ya que la integración sobre φ_1 anula la contribución de los términos v . Además también es interesante notar que el factor 2π en el denominador de la expresión (2.17) sólo tiene la misión de normalizar dicha integración (φ_1).

Con lo cual, dado que tomaremos en adelante $\chi = 0$ (\vec{P} orientado según el eje x), para cualquiera de las contribuciones de los distintos diagramas a la sección eficaz podrá escribirse, en general:

$$d\sigma = d\sigma^{(t)}(p_1, \theta_1) + P d\sigma^{(l)}(p_1, \theta_1) \cos(2\varphi_1) \quad (4.17)$$

Vale destacar que el índice “ t ” en el primer término, se ha elegido como abreviatura de “total”, para explicitar el hecho antes mencionado de que es la única parte que contribuye a la sección eficaz una vez que se integra sobre la totalidad de los ángulos azimutales.

4.2.- Detección de la polarización.

La polarización del haz incidente se puede detectar a través del ángulo azimutal de las partículas del triplete, y eso puede hacerse ya sea con el par de partículas más energéticas (negatrón-positrón), sólo si se los detecta a gran distancia del punto de creación, puesto que el ángulo polar de estas partículas está limitado por la relación (3.3), o ya sea con el negatrón de baja energía, ya que éste es emitido con gran probabilidad en un ángulo polar grande.

La expresión (4.17) contiene toda la información directamente necesaria para detectar la polarización del haz incidente a través de la partícula 1, si ésta es el negatrón de menos energía.

Ahora bien, si como nuestros resultados mostrarán claramente, la distribución de probabilidades de este electrón, para alta energía del fotón, converge a la del electrón de retroceso en el diagrama de Borsellino, tendremos que el camino más corto y sencillo para estudiar la polarización de esta última manera es a través de las expresiones de Boldyshev y otros [26].

Estos autores obtienen, a partir de [44] y [25], sus expresiones (37) y (38) para lo que serían respectivamente nuestras contribuciones $d\sigma_B^{(t)}$ y $d\sigma_B^{(l)}$ de los diagramas de Borsellino sin intercambio en nuestra expresión (4.17).

Siguiendo a estos autores la expresión (4.17) puede ser reescrita como (sólo discrepamos en algunos signos con Boldyshev):

$$d\sigma = d\sigma^{(t)} [1 + P \Lambda \cos(2\varphi_1)] \quad (4.17')$$

Siendo $\Lambda = d\sigma^{(1)}/d\sigma^{(1)}$ la asimetría para el caso de polarización completa del haz ($P = 1$).

Estas expresiones (37) y (38) de Boldyshev reemplazan muy ventajosamente a las nuestras para el cálculo de (4.17) con las contribuciones de Borsellino, por la rapidez con que permiten obtener exactamente los mismos valores. Nuestras expresiones son necesarias para obtener información sobre las variables dinámicas de cualquiera de las otras partículas, cosa que no permiten las de Boldyshev, pero en lo que se refiere a la partícula 1 solamente, son mucho más engorrosas.

El examen del comportamiento de Λ según cualquiera de las expresiones indica que su dependencia principal es con la masa invariante del par 2-3, Δ , de la que hemos hablado algo en el capítulo 1.

Para esto interesa saber que la asimetría es siempre negativa (si el 1 es el electrón menos energético), su valor absoluto es mayor (toma valores cercanos a 1) en la zona de Δ cercano a su valor mínimo, siempre que los valores de p no se acerquen demasiado a sus valores extremos mínimo ni máximo, como puede verse en la figura 4.7 (obtenida a partir de las expresiones (37) y (38) de Boldyshev), que si bien exhibe los valores correspondientes al caso $\omega = 100$ m, muestra el comportamiento general para cualquier energía grande de los fotones (en el Capítulo 6 retomaremos este análisis con otros elementos).

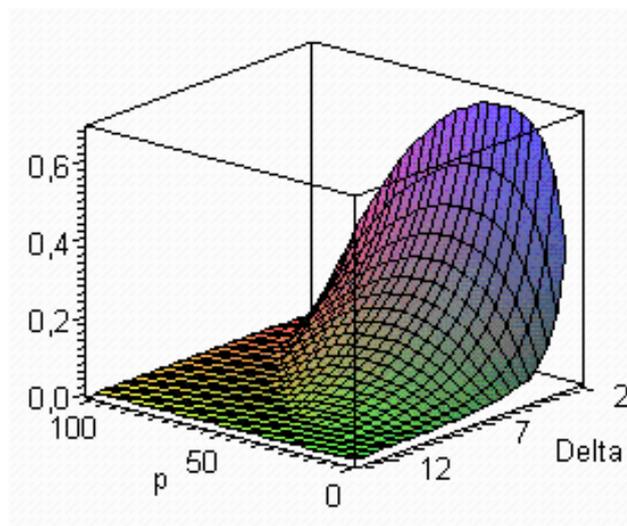


Fig. 4.1: Se muestra en ordenadas el valor absoluto de la asimetría para la región de valores permitidos del momento lineal de la partícula "lenta" del triplete (se ha suprimido el subíndice 1), expresados en función de p y Δ .

Teniendo en cuenta que la partícula menos energética tiene baja probabilidad de tener energías grandes, digamos mayores que 10 o 20 m, resulta que la mayor parte de los tripletes detectados estarán cerca de la zona de bajos p de esta figura (sin llegar a los valores extremadamente bajos, menores que el umbral de detección), y las más favorables para detectar asimetría serán las que corresponden a valores de Δ cercanos al mínimo, es decir al borde superior de la zona permitida de las figuras 1.3 y 1.4: partículas con todas las energías detectables (por encima del umbral), y máximo ángulo polar permitido para la energía de cada una.

Según lo mostrado en estas figuras 1.3 y 1.4, si para cada energía de la partícula (menos energética) detectada se admiten todos los ángulos polares, lo que se hace, al incluir ángulos menores que el máximo, es considerar valores mayores de Δ , con menor valor de asimetría.

De manera que es claro que una selección que descarte los ángulos polares menores que el máximo para cada valor de p , debería permitir detectar con más facilidad la polarización del haz incidente, al aumentar la asimetría en la distribución de las partículas detectadas, y las figuras 4.2 y 4.3 ilustran sobre las posibilidades reales de proceder de esta manera .

En la figura 4.2 se muestra cómo a medida que se extiende el intervalo de Δ desde el mínimo, aumenta el porcentaje de tripletes detectados: el 50 % de los pares se detecta con Δ entre 2 y 5 m, y el 80 % entre 2 y 10 m, por ejemplo, y cómo al mismo tiempo, disminuye la asimetría en la distribución. Esta figura permite ver que si el intervalo de Δ va más allá de 10 m la asimetría detectada tenderá al valor asintóticamente calculable para ω infinitamente grande, de alrededor del 14 % ([26], [38]) mientras que limitando los tripletes considerados a los que tienen $\Delta \leq 5$ m, podría detectarse una asimetría algo mayor, del orden del 25 % (siempre para un haz de fotones totalmente polarizado).

Comparando la gráfica de la izquierda, para $\omega = 1000$ m, con la de la derecha, para $\omega = 10000$ m, se hace evidente que para grandes energías todo el comportamiento se hace independiente de dicha energía. Por otra parte es importante decir que con la precisión de ambas gráficas es imposible distinguir si la integración sobre p (que comienza en el valor umbral $p = m$ en este caso) se ha extendido hasta $p = 50$ m, o 100 m, o mucho más. Esto es porque estamos considerando la partícula menos energética, que tiene muy baja probabilidad de tener energía más allá de 10 m.

Es interesante decir que la disminución del valor umbral para p agrega muchos tripletes al conjunto detectado, pero no hace variar apreciablemente la asimetría.

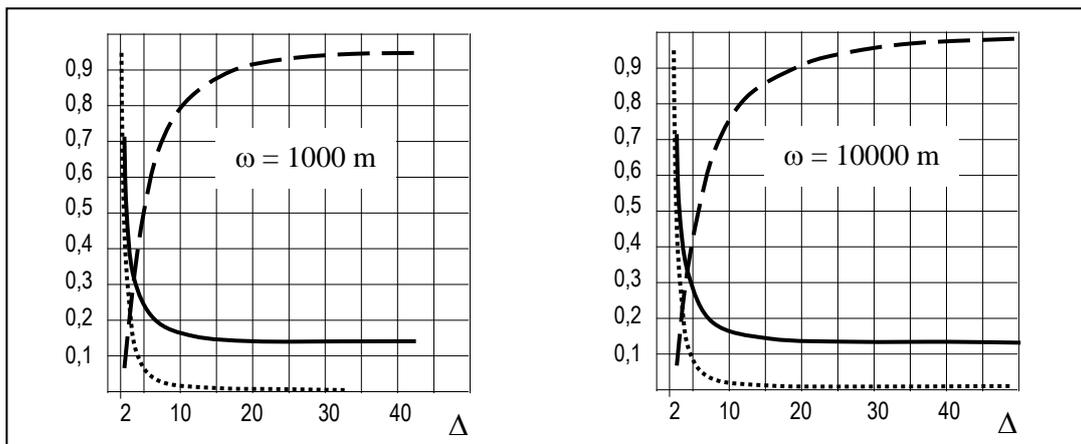


Fig. 4.2: Línea de trazos: fracción de tripletes con Δ hasta el valor indicado en la abscisa. Línea llena: asimetría (en valor absoluto) detectada con esa fracción de tripletes. Línea de puntos: Asimetría correspondiente a cada valor de Δ . Se ha integrado sobre p desde 1m (tomado como umbral) hasta $\omega/20$, o hasta $\omega/2$, sin que se perciban diferencias.

La figura 4.3, por otra parte, permite ver la dificultad para distinguir y separar los tripletes de menor Δ , si dicha separación se hace considerando solamente la partícula más lenta, ya que ello implica retener solamente los de máximo ángulo polar. La figura de la izquierda muestra que con fotones de alrededor de $\omega = 1000$ m, será muy difícil distinguir ángulos polares para valores de Δ por debajo de 10 m, y la de la derecha muestra que en realidad para grandes energías esa distinción desaparecerá, y todas las partículas menos energéticas tenderán a ser detectadas con el máximo ángulo polar compatible con su momento, valor independiente de la energía de los fotones, cuyo valor asintótico se calcula fácilmente con la expresión (3.2).

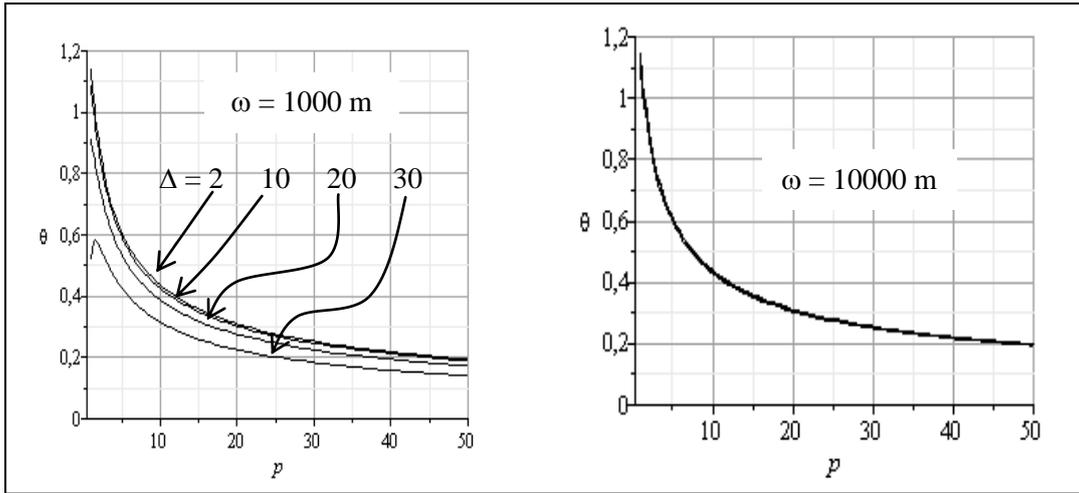


Fig. 4.3: Ángulo polar de la partícula menos energética en función de p para $\Delta = 2, 10, 20,$ y 30 m. A la derecha, para $\omega = 10000$ m, todas las gráficas están confundidas.

Esto que muestra la figura 4.3 tiene la consecuencia práctica muy importante de que para grandes energías del haz incidente (digamos, $\omega > 5000$ m) será posible determinar la energía de estas partículas de gran ángulo polar, a partir solamente del valor de dicho ángulo. Y también significa que será posible combinar mediciones de energía y ángulo para aumentar la precisión, o que a partir de la medición de la energía, el conocimiento subsecuente del ángulo polar brindará información sobre la dirección de incidencia del fotón.

Por otra parte siempre será posible seleccionar los tripletes con valores pequeños de Δ , que servirán para obtener una asimetría considerablemente mayor, utilizando la información contenida en el par de partículas más energéticas, ya que Δ mide directamente su masa invariante, y puede calcularse bastante bien si se pueden determinar sus energías y direcciones de movimiento relativas.

CAPÍTULO 5

TRATAMIENTO GENERAL DEL NEGATRÓN MENOS ENERGÉTICO

En este capítulo se presentan las distribuciones de probabilidad obtenidas para el momento del electrón menos energético a partir de las contribuciones de todos los diagramas de Feynmann considerados, y se encuentra la forma de simplificar su tratamiento para que los cálculos sean accesibles. Con ayuda de expresiones de otros autores se desarrollan simplificaciones prácticas de los cálculos necesarios para una simulación tipo Montecarlo.

5.1.- Análisis de los aportes de los diagramas de Feynmann

En el punto anterior se ha visto cómo aprovechar las propiedades del electrón menos energético para detectar la polarización lineal del haz incidente. Aquí se desarrollará el tratamiento general de todos los elementos que pueden determinarse sobre este electrón.

Una vez que se procede a integrar la expresión de la sección eficaz diferencial (2.17) con los elementos de matriz correspondientes a cada diagrama de Feynmann sobre todas las posibilidades de las variables \vec{p}_3 , y \vec{p}_2 (y también φ_1 , para eliminar en esta discusión la parte dependiente de la polarización) con la restricción de que p_2 sea mayor que p_1 , se obtienen las distintas contribuciones a la parte $d\sigma^{(t)}(p_1, \theta_1)$ de la sección eficaz (4.17), donde p_1 y de θ_1 son variables que corresponden al negatrón menos energético. En este capítulo prescindiremos del índice (t), que siempre estará sobreentendido porque trabajaremos únicamente con esa parte de la sección eficaz.

Es necesario destacar que en este procedimiento la integración sobre p_2 debe hacerse numéricamente (y lo mismo vale para las variables siguientes que se elija integrar, θ_1 o/y p_1), y que esta integración además de hacerse sobre expresiones demasiado largas para ser escritas (varias páginas), requiere de una subdivisión cada vez más fina de los intervalos de integración a medida que aumenta ω . Esto significa que podemos elaborar tablas con valores de las contribuciones a la sección eficaz diferencial en función de cualquiera de las variables de cualquiera de las partículas, pero no podemos escribir ninguna función que pueda manipularse algebraicamente.

De manera que veremos cómo es posible establecer relaciones con algunas expresiones desarrolladas por otros autores, más limitadas pero más manipulables, para llegar a un tratamiento satisfactorio de las posibilidades de este electrón.

Ya se ha dicho que para alta energía de los fotones incidentes habrá una contribución dominante para el negatrón menos energético, y será la designada por el subíndice B. Esta contribución, sin la restricción de que p_1 sea menor que p_2 y que p_3 , correspondería exactamente a los diagramas de Borsellino sin intercambio, y esta restricción no la modifica mucho, dado que ya sin ella la partícula 1 en estos diagramas sólo tiene probabilidades apreciables de tener muy bajo momento. El otro diagrama importante, BII, contribuirá muy poco porque en él la partícula 1 tiene muy poca probabilidad de tener baja energía, y los demás diagramas son todos contribuciones pequeñas para alta energía de los fotones, independientemente de esta restricción mencionada.

La forma del término dominante, $d\sigma_B/dp_1$, por lo tanto, sigue siendo la que se mostró en la figura 3.2 (aunque en esa figura no se consideraba la restricción de ser el 1 el negatrón menos

energético), con un pico muy agudo en $p_1 \approx 8/\omega$. Ahora además, como hemos dicho, consideraremos un umbral de detección q_u , que es de fundamental importancia, no sólo experimentalmente, sino para poder abreviar los cálculos y acotar valores en una función de comportamiento tan abrupto en la zona de interés, que es la de p_1 pequeño.

En la siguiente figura 5.1 se muestran la forma y los valores del término dominante, $d\sigma_B/dp_1$, y de las demás contribuciones, con diferente grado de ampliación, para $\omega = 1000$ m, y considerando un umbral de detección $q_u = m$.

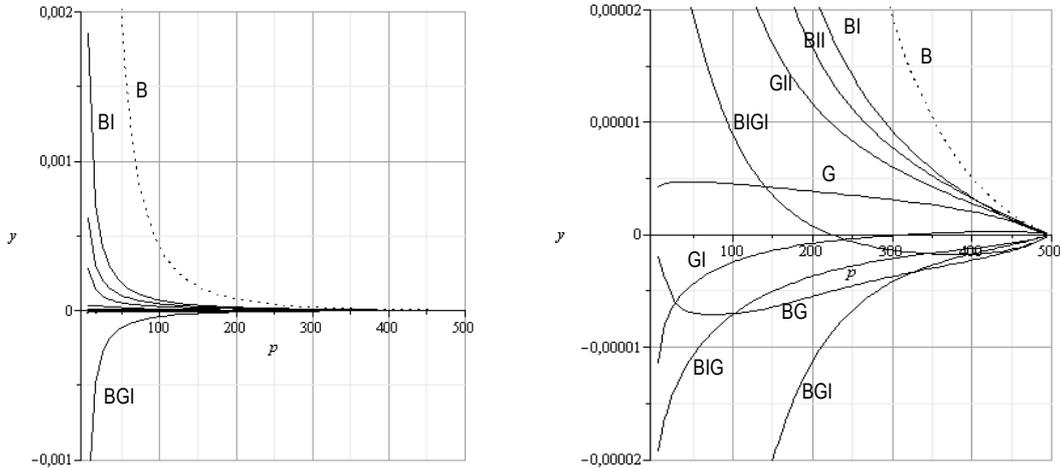


Fig. 5.1: Contribuciones a la sección eficaz diferencial $d\sigma/dp_1$ (en unidades de αr_0^2) en función del momento p_1 del neutrón menos energético, a partir del valor umbral $p_1 = m$, para la energía del fotón incidente $\omega = 1000$ m, con dos ampliaciones diferentes. Para comparación, el valor máximo de la ordenada del término dominante $d\sigma_B/dp_1$, en $p_1 = 1$, es 2,27.

Puede verse que los diagramas B aportan las contribuciones más importantes, y además puede verse lo difícil que es tratar de extraer de estas gráficas una idea clara de la relación entre las contribuciones en la zona de muy bajos valores de p_1 .

Una idea más clara se logra graficando, en función de p_1 , la relación $d\sigma_X/d\sigma_B$, entre cualquier contribución $d\sigma_X/dp_1$, y la del diagrama dominante ($d\sigma_B/dp_1$) para cada intervalo dp_1 , como se muestra en la figura 5.2.

Las gráficas de esta figura destacan algunos aspectos muy generales importantes. Así por ejemplo permiten inferir que en la zona de interés, que es la zona de p_1 pequeño, para cualquiera de las contribuciones apreciables, la relación $d\sigma_X/d\sigma_B$ es aproximadamente una función lineal de p_1 . El último cuadro de la figura 5.2 muestra eso muy claramente con una ampliación de dicha zona.

Vemos además en la figura 5.2 que la forma y valores de ordenada de las gráficas cambian muy poco mientras la escala de las abscisas se multiplica por 100, lo que indica que la pendiente de cada una en el origen es aproximadamente proporcional a ω^{-1} .

Ahora bien, el intervalo de p_1 en el que la probabilidad (gobernada por el término dominante) es esencialmente distinta de cero, *no se extiende al aumentar ω* (ver figura 3.2), es decir, para grandes ω es una zona de p_1 cercana a cero, y que no depende de ω . De manera que la influencia total de cada contribución, representada por una recta cuya pendiente es aproximadamente proporcional a ω^{-1} en una zona que no depende de ω , se hace también aproximadamente proporcional a ω^{-1} .

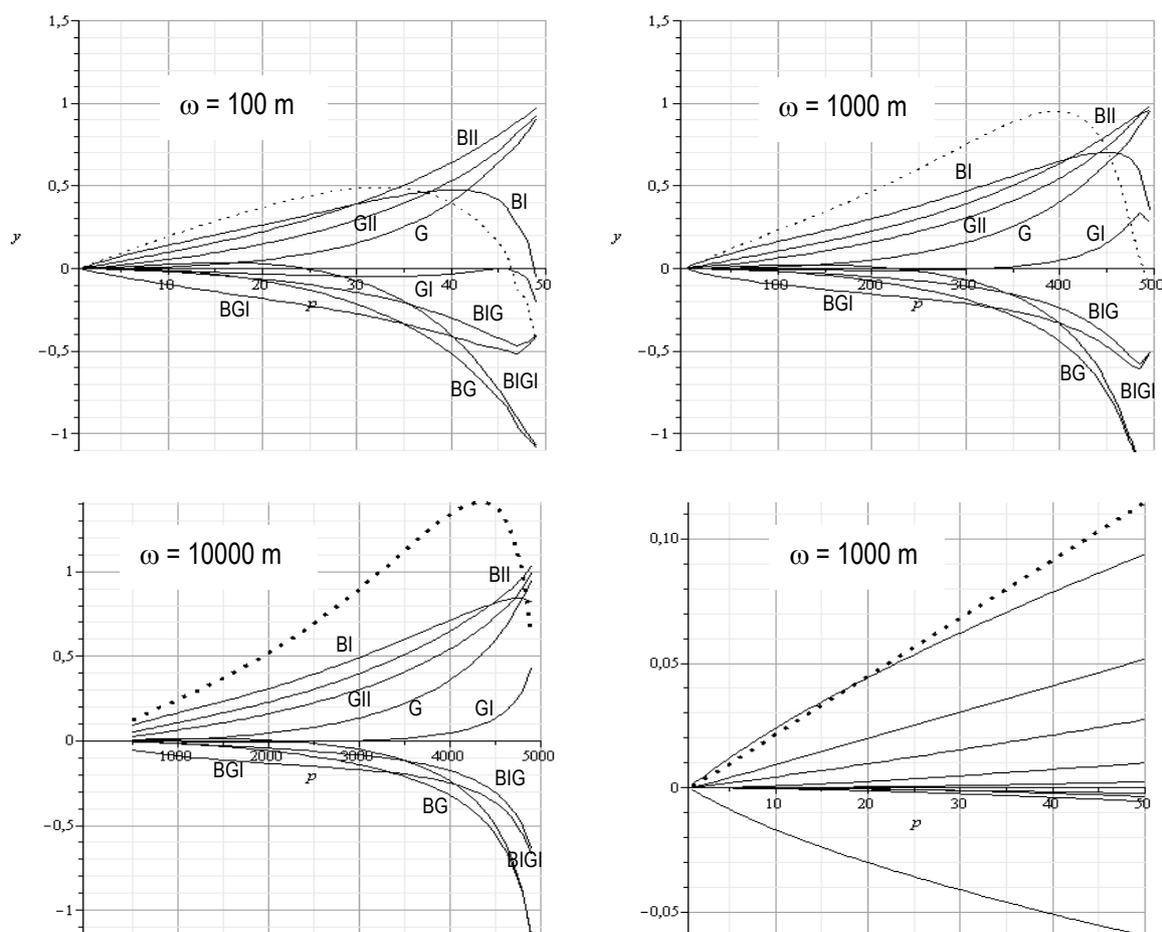


Fig. 5.2: Relación $d\sigma_X/d\sigma_B$, entre cualquier contribución $d\sigma_X/dp_1$, y la del diagrama dominante $d\sigma_B/dp_1$, en función de p_1 , para ω 100, 1000, y 10000 m (en línea de puntos la suma de todas las contribuciones relativas).
En el último cuadro se muestra ampliado el intervalo $0 \leq p_1 \leq 50$ para $\omega = 1000$ m.

En la siguiente Tabla 5.1 se muestran los valores totales de cada contribución integrada sobre todo el intervalo de valores posibles de p_1 . Puede apreciarse cómo disminuye cada una (y el total) al aumentar ω , disminución que no ocurre en la proporción que se podría esperar a partir de los comentarios anteriores, sino que lo hace en una proporción bastante menor.

Tabla 5.1. Contribuciones totales a la sección eficaz (Umbral $q_u = m$)

ω ($m\ c^2$)	B ($\alpha\ r_0^2$)	B _{II} /B (%)	B _I /B (%)	G/B (%)	G _{II} /B (%)	G _I /B (%)	BG/B (%)	B _I G _I /B (%)	BG _I /B (%)	B _I G/B (%)	Total (%)
100	2,22	3,20	4,95	0,40	1,71	-0,34	-0,48	0,46	-3,4	-0,62	5,88
1000	3,19	0,67	1,46	0,05	0,36	-0,021	-0,07	0,07	-1,0	-0,07	1,45
10000	3,46	0,11	0,30	0,0057	0,065	-0,0016	-0,0076	0,0077	-0,22	-0,008	0,25

Comparación con otros autores

Las contribuciones de los diferentes diagramas han sido evaluadas por Mork [22], cuyos resultados han sido considerados por muchos autores, y en particular discutidos con manifestación de algunas discrepancias por Haug [23].

Aunque no es posible una comparación directa con esos trabajos porque haber elegido el electrón menos energético introduce cambios fundamentales en algunos números, resulta de interés discutir algunos detalles.

En principio debe destacarse que Mork calcula las contribuciones de los diferentes diagramas integradas sobre todo el intervalo, es decir sólo obtiene un valor total para cada una, mientras que Haug calcula por otro método, sin recurrir a los diagramas de Feynmann, la sección eficaz total, integrada, y además representativa de todos los diagramas.

Mork no discrimina entre los dos electrones, de manera que para él las secciones eficaces que nosotros denominamos B y B_{II} resultan idénticas, y corresponden (cada una) a lo que en toda la literatura se denomina “sección eficaz de Borsellino”. Mork encuentra que para ω cercano al umbral (4 m) las correcciones sumadas aportan a Borsellino un incremento negativo, el cual disminuye hasta anularse en $\omega = 16$ m (sus números coinciden hasta el 0,1 %, pero él mismo considera que tienen una exactitud sólo del 2 %), y no hallando razones para que la importancia de los términos aumente con ω , concluye que para mayores energías los diagramas de Borsellino son suficientes sin necesidad de correcciones.

Haug coincide con Mork para ω cercano al umbral, pero encuentra que la corrección total sobre Borsellino no se anula hasta $\omega \cong 18$ m, y a partir de allí cambia de signo, alcanzando valores positivos de cerca del 1 %, para ω entre 35 y 80 m. Según sus resultados calculados hasta $\omega = 5000$ m, la corrección necesaria es del 0,8 % para $\omega = 100$ m, del 0,11 % para $\omega = 1000$ m, y nula para $\omega > 5000$ m.

Debido a nuestra selección de electrón menos energético nuestros números mostrados en la Tabla 5.1 son imposibles de comparar con los de cualquiera de ambos autores, pero sugieren claramente que las correcciones introducidas por los diagramas no desaparecen hasta ω superior a 1000 m, lo cual está más cercano a Haug que a Mork.

Para verificar la corrección de nuestros procedimientos y realizar un pequeño aporte al punto hemos realizado los cálculos sin discriminar entre los electrones para algunos valores interesantes de ω , y hemos encontrado un acuerdo total con los resultados de Haug, como se muestra en el Apéndice 7.

De cualquier manera es importante que quede claro que algunas contribuciones tienen distinto signo en distintos valores de p_1 , y al ser integradas sobre todo el rango de p_1 dan un contribución total muy pequeña, sin ser ellas del mismo orden de pequeñez en cada lugar.

Algo parecido sucede con las contribuciones BG y BIGI, cuya suma constituye la contribución que Mork denomina “ $B\gamma$ ”, y que siempre es nula. En la tabla 5.1 podemos ver que esta suma efectivamente es nula en todo el rango de valores de ω en nuestro tratamiento también, pero las figuras 5.1 y 5.2 muestran claramente que la contribución es importante.

5.2.- Un método para evaluar las contribuciones

Sin embargo, los números mostrados en la Tabla 5.1 no constituyen la única forma de evaluar la importancia de las distintas contribuciones. El planteo que se presenta a continuación,

dando de alguna manera más peso a los valores bajos de p_1 , resulta en un efecto proporcional a ω^{-1} , como veremos.

Las figuras 5.2 permiten evaluar la corrección total (C_{total}) de todas las contribuciones de una manera muy simple: las tres gráficas permiten calcular que C_{total} (referida al término dominante), en el rango importante de valores de p_1 , para $p_1 \geq m$, con un error del orden del 1%, es una función lineal de p_1 dada por:

$$\frac{C_{total}}{B} = \frac{2,36}{\omega} (p_1 - 1) \quad (5.1)$$

La región de $p_1 < m$ fue investigada hasta 0,1 m, y se encontró que la relación C_{total}/B disminuye hasta valores tan pequeños que la mejor aproximación consiste en considerar nula esta relación en todo el intervalo.

Esto permite establecer la siguiente expresión para $d\sigma_{total}/dp_1$, que incluya todas las correcciones, a partir del término dominante $d\sigma_B/dp_1$, en función de p_1 , válida para un rango muy amplio de valores de ω :

Para $p_1 < m$:

$$\frac{d\sigma_{total}}{dp_1} = \frac{d\sigma_B}{dp_1}$$

Para $p_1 \geq m$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{total}}{dp_1} &= \frac{d\sigma_B}{dp_1} + C_{total} \\ &= \frac{d\sigma_B}{dp_1} \times \left(1 + 2,36 \frac{(p_1 - 1)}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para poder avanzar ahora es necesario definir algunos valores. Por ejemplo fijemos el umbral de detección q_u entre dos valores extremos razonables, tales como 0,1 m y 10 m.

Un q_u tan bajo como 0,1 m está muy por encima de los valores de p_1 para los cuales $d\sigma_B/dp_1$ tiene el máximo (del orden de $8/\omega$). De manera que en todo el rango detectable de p_1 esta función es decreciente, comportamiento que en particular es muy brusco para p_1 cercano al valor umbral (como se verá $d\sigma_B/dp_1 \rightarrow cte \times p_1^{-1}$ en esta zona).

Este tipo de comportamiento de la distribución $d\sigma_B/dp_1$, reforzado por el hecho de que para los valores grandes de p_1 ella decrece más rápidamente aún (aproximadamente como $cte \times p_1^{-2}$), permite inferir no sólo que sólo es importante conocerla en la zona de valores pequeños de p_1 , sino que, además, *no será importante un grado muy alto de precisión en este conocimiento*, ya que experimentalmente no se podrá discriminar entre valores muy próximos de p_1 .

De manera que tomaremos $p_1 = 0,1$ m como el mínimo valor de umbral de detección que pretendemos alcanzar, y de acuerdo con eso comenzaremos analizando las herramientas de cálculo de que disponemos y sus posibilidades, en el intervalo de p_1 entre 0,1 m y 10 m.

Y en este punto, atendiendo a las limitaciones ya mencionadas de nuestro procedimiento, vamos a recurrir a expresiones de otros autores con las cuales estableceremos algunas relaciones.

Por un lado tenemos la función calculada en [26] para el par de diagramas de Borsellino sin intercambio, numerada (37) en ese trabajo, a la cual designaremos $d\sigma_{\text{Boldyshev}}/dp_1$, y que tiene una expresión bastante complicada (ver Apéndice 4). Aunque esta expresión es mucho más sencilla y manipulable que las que nosotros hemos desarrollado, tiene el inconveniente de que en ella ya se han integrado variables que por lo tanto no son accesibles, y no permite, por ejemplo, seleccionar el electrón menos o más energético.

Por otra parte, para agilizar cálculos conviene delimitar aproximadamente el intervalo de p_1 que contribuye apreciablemente a la sección eficaz, y precisar algunos valores de ésta.

En la siguiente tabla 5.2 se muestran algunos valores pertinentes al tema, expresados en unidades de αr_0^2 .

Tabla 5.2. $d\sigma_B/dp_1$ integrada en distintos intervalos de p_1
(momentos y energías expresados en m, secciones eficaces en αr_0^2)

	0,1 a p_{max}	1 a p_{max}	0,1 a 1	1 a 10	10 a 100	100 a p_{max}
$\omega = 1000$	9,4	3,2	6,2	2,7	0,43	0,033
$\omega = 10000$	10,2	3,5	6,7	2,9	0,53	0,071

Esta tabla justifica la idea de que el esfuerzo más importante debe ser hecho para ajustar las funciones en el intervalo de p_1 entre 0,1 y 10 m.

Y conviene siempre tener presente el hecho de que al seleccionar la partícula menos energética estamos considerando un término dominante $d\sigma_B/dp_1$ que es levemente menor que $d\sigma_{\text{Boldyshev}}/dp_1$ en cada valor de p_1 , y completamente nulo para $p_1 \geq \frac{1}{2} \omega$.

Este comportamiento queda reflejado en las gráficas de la figura 5.3, que muestran la diferencia relativa, d_R , definida como:

$$d_R = \frac{\left(\frac{d\sigma_{\text{Boldyshev}}}{dp_1} - \frac{d\sigma_B}{dp_1} \right)}{\frac{d\sigma_{\text{Boldyshev}}}{dp_1}} \quad (5.3)$$

Notar que d_R tiende a 1 por definición cuando la abscisa vale $\frac{1}{2}$, porque todos los términos calculados con la condición $p_1 < p_2$ se anulan para $p_1 \geq \omega/2$.

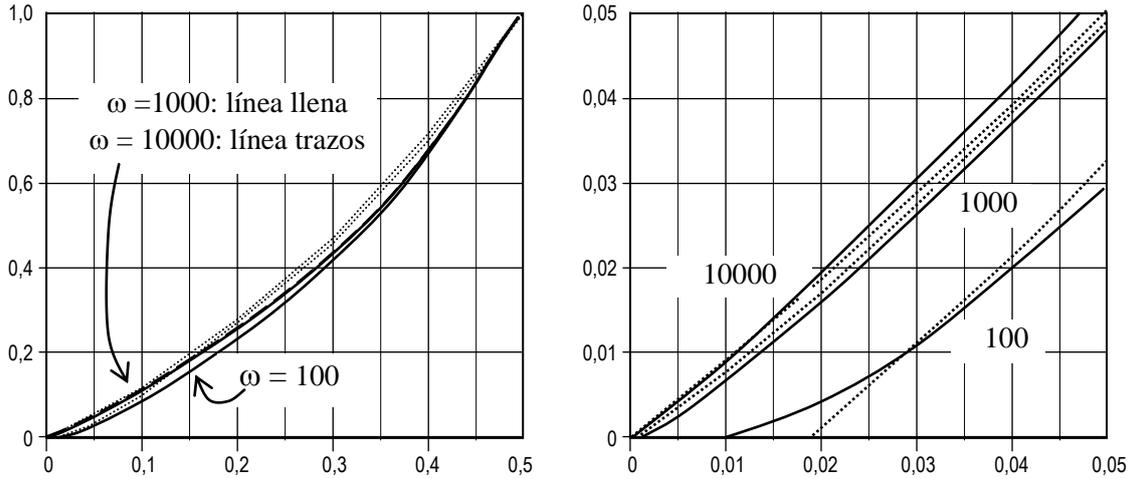


Fig. 5.3: Diferencia relativa d_R dada por la expresión (5.3) entre el término dominante para el negatrón menos energético según nuestros cálculos, $d\sigma_B/dp_1$, y la expresión de Boldyshev, para ω 100, 1000, y 10000 m, en función de la relación p_1/ω , que se muestra en abscisas. El cuadro derecho amplía la zona de p_1 bajo. En línea de puntos se muestran las aproximaciones correspondientes dadas por (5.4) para cada ω .

Estas figuras permiten ver que es posible aproximar adecuadamente el comportamiento de d_R , con funciones lineales, dado que para ω suficientemente grande sólo se requiere considerar la región de pequeños valores de p_1/ω . No obstante, dado lo simple del esquema que muestran estas figuras, se encuentra que el agregado de un término cuadrático permite un buen ajuste válido desde $\omega \approx 100$ en adelante.

Utilizaremos la expresión:

Para $p_1 < 2$ m:

$$d_R = 0$$

Para $p_1 \geq 2$ m:

$$d_R = (p_1 - 2) \frac{0,9}{\omega} + 2,2 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^2, \quad (5.4)$$

cuya gráfica se muestra en línea de puntos en la figura.

Con la ayuda de esta expresión podemos escribir nuestras expresiones en términos de la de Boldyshev. Para $p_1 \geq 2$ m:

$$\frac{d\sigma_B}{dp_1} = (1 - d_R) \frac{d\sigma_{\text{Boldyshev}}}{dp_1} \quad (5.5)$$

Y con la expresión (5.2) y ésta ahora podemos obtener una expresión que incluye todas las correcciones:

Para $p_1 < m$:

$$\frac{d\sigma_{\text{total}}}{dp_1} = \frac{d\sigma_{\text{Boldyshev}}}{dp_1}$$

Para $m \leq p_1 \leq 2 m$:

$$\frac{d\sigma_{total}}{dp_1} = \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1} \times \left(1 + 2,36 \frac{(p_1 - 1)}{\omega} \right)$$

Para $p_1 \geq 2 m$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{total}}{dp_1} &= (1 - d_R) \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1} \times \left(1 + 2,36 \frac{(p_1 - 1)}{\omega} \right) \\ &= \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1} \times \left\{ 1 + 1,46 \frac{p_1}{\omega} + 0,76 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^2 + 5,19 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^3 + \frac{0,56}{\omega} \left(-1 + 11,4 \frac{p_1}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4,25}{\omega^2} \left(1 + 1,22 \frac{p_1}{\omega} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Expresiones en las que, dado que $\omega > 100$, son posibles las siguientes simplificaciones:

1) para $m \leq p_1 \leq 2 m$ en el paréntesis se puede despreciar el segundo término, de manera que se extiende desde 0,1 m hasta 2 m el intervalo para el cual

$$\frac{d\sigma_{total}}{dp_1} = \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1}$$

2) Para $p_1 \geq 2 m$ pueden descartarse los últimos dos términos sin que se perciba modificación alguna por ello:

$$\frac{d\sigma_{total}}{dp_1} \cong \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1} \times \left(1 + 1,46 \frac{p_1}{\omega} + 0,76 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^2 + 5,19 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^3 \right) \quad (5.7)$$

Además, para el rango de valores en que debe funcionar, resulta aceptable la aproximación si también se elimina el término cúbico y se compensa esta eliminación modificando un poco los otros coeficientes. Manipulando un poco de esta manera se encuentra una solución que aproxima muy bien para $p_1/\omega < 0,3$, la cual adoptaremos y es:

$$\frac{d\sigma_{total}}{dp_1} \cong \frac{d\sigma_{Boldyshev}}{dp_1} \times \left(1 + 1,4 \frac{p_1}{\omega} + 2 \left(\frac{p_1}{\omega} \right)^2 \right) \quad (5.8)$$

Estos factores en corchetes no se anulan en $p \approx \omega/2$, pero automáticamente se considera definido nulo el valor de $d\sigma_{total}/dp_1$ para los p mayores que ese valor.

De manera que estamos en condiciones de calcular $d\sigma_{total}/dp_1$ a partir de la función (37) de Boldyshev, y se puede verificar que el acuerdo que existe entre lo que se obtiene con el miembro derecho de (5.8), y lo que se obtiene sumando todas las contribuciones calculadas con nuestros procedimientos de integración es excelente en todo el intervalo de interés de p_1 , para cualquier ω mayor que 200 m.

5.3.- Aproximaciones simplificadoras prácticas

Pero en realidad esta expresión de Boldyshev es demasiado complicada para la precisión que se necesita en este caso, y es posible aproximarla con otras mucho más sencillas y adecuadas para, por ejemplo, un proceso de simulación.

Boldyshev también desarrolla una aproximación más sencilla, numerada (56) en su trabajo [26], a la que denominaremos Bas, válida como límite superior asintótico de la anterior (37), para $\omega \rightarrow \infty$, con la condición de que p_1 sea mayor que algún valor umbral cualquiera:

$$\text{Bas} = \alpha r_0^2 \frac{2}{3E_1(E_1 - 1)^2} (p_1 + (2E_1 - 3)\ln(E_1 + p_1)) \quad (5.9)$$

En donde se ha tomado $m = 1$, lo que mantendremos por el resto de este capítulo.

Esta expresión, que no depende de ω , puede ser evaluada fácilmente en función de la variable continua p_1 , y comparada con lo que nosotros podemos calcular para valores discretos elegidos de esta variable en el intervalo de interés, para valores discretos elegidos también de ω .

En la figura 5.4 se muestran las gráficas que indican la diferencia relativa entre Fas y $d\sigma_{\text{total}}/dp_1$ calculada con nuestras expresiones en valores elegidos de p_1 entre 0,1 y 10 (siempre con la condición de ser la partícula 1 la menos energética), para $\omega = 100, 1000, \text{ y } 10000$. Estas gráficas exhiben un buen acuerdo entre estas funciones de p_1 para energías de los fotones superiores a 1000, y muestran claramente que Bas también constituye un límite superior para nuestros valores de $d\sigma_{\text{total}}/dp_1$ mientras $\omega \rightarrow \infty$.

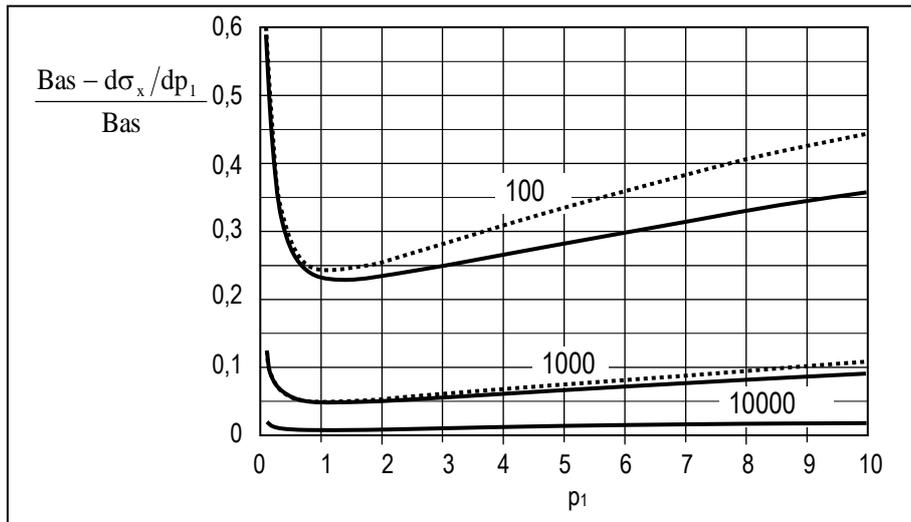


Figura 5.4: Línea llena: diferencias relativas entre la expresión asintótica (5.9) y nuestros valores de $d\sigma_{\text{total}}/dp_1$ para $\omega = 100, 1000, \text{ y } 10000$, en el rango de p_1 desde 0,1 hasta 10. Línea de puntos: lo mismo entre la expresión asintótica y $d\sigma_{\text{Boldyshev}}/dp_1$.

Ahora bien, a diferencia de la función completa de Boldyshev, (37), la función asintótica Bas es relativamente fácil de manipular para aproximar mejor nuestros valores de $d\sigma_{\text{total}}/dp_1$ en la zona de interés.

Así es que fácilmente se encuentra que:

- Para $p_1 \rightarrow 0$, mientras $E_1 \rightarrow 1$, $\text{Bas} \approx \alpha r_0^2 \frac{3,11}{p_1}$, lo que es lo mismo que decir

$$\approx \alpha r_0^2 \frac{3,11}{E_1 p_1}$$

- Para $p_1 \rightarrow \infty$, mientras $E_1 \cong p_1$, $Bas \approx \alpha r_0^2 \frac{0,67}{p_1} (1 + 2 \ln(2 p_1))$, lo que es lo mismo

que decir
$$\approx \alpha r_0^2 \frac{0,67}{E_1 p_1} (1 + 2 \ln(2 p_1))$$

Ahora bien, el crecimiento logarítmico es tan lento que, dado que no nos interesa ir mucho más allá de $p_1 \approx 100$, podríamos simplemente eliminar todo el término logarítmico y debilitar un poco el crecimiento del denominador sustituyendo E_1 por E_1^x , con $x < 1$ (también podría modificarse la potencia de p_1 , pero es mejor en E_1 porque para p_1 muy pequeño E_1 tiende a 1, y no se altera si su exponente cambia).

De este modo se encuentra una expresión muy simple que aproxima muy bien a Bas en todo el rango $0,1 < p_1 < 100$:

$$F = \alpha r_0^2 \frac{3,1}{p_1 E_1^{0,8}} \quad (5.10)$$

Tal es la bondad de la aproximación que la figura 5.4 prácticamente no se distingue si se utiliza en ella esta expresión sustituyendo a Bas .

En estas condiciones se puede advertir que, para $\omega = 100$, se podría atenuar el excesivo crecimiento de esta función en el extremo izquierdo de la escala haciendo que p_1 estuviera elevado a una potencia $x_1 < 1$. Pero esa modificación no debería alcanzar a los ω grandes, y no debería alterar el comportamiento que se obtiene con $p_1 E_1^{0,8}$ para p_1 grande, para cualquier ω .

Así resulta un mejor ajuste con la función:

$$F_1 = \alpha r_0^2 \frac{3,1}{p_1^{\left(1 - \frac{30}{\omega}\right)} E_1^{\left(0,8 + \frac{30}{\omega}\right)}} \quad (5.11)$$

Y una mejora sobre ésta se obtiene con un factor que disminuya el coeficiente 3,1 sólo para los ω más bajos. Y por último, esta función (y también la Bas) se beneficia de un factor exponencial que la atenúe en los grandes valores de p , en los que siempre se sitúa por encima de cualquiera de las $d\sigma_B/dp_1$.

Así se obtiene el mejor ajuste con:

$$F_2 = \alpha r_0^2 \frac{\left(3,1 - \frac{30}{\omega}\right)}{p_1^{\left(1 - \frac{30}{\omega}\right)} E_1^{\left(0,8 + \frac{30}{\omega}\right)}} \exp\left(-\frac{3p}{\omega}\right) \quad (5.12)$$

O bien como opción alternativa, aplicando los mismos factores a Bas :

$$F_3 = \left(1 - \frac{10}{\omega}\right) \left(\frac{p_1}{E_1}\right)^{\frac{30}{\omega}} \exp\left(-\frac{3p_1}{\omega}\right) \times Bas \quad (5.13)$$

En la siguiente figura 5.5 muestra la diferencia relativa entre F_2 y $d\sigma_{total}/dp_1$, y se puede ver allí cómo mejora la situación respecto de lo que se logra con la función asintótica Bas ,

mostrado en la figura 5.4, y también aquí en línea de trazos para comparación. Las gráficas representativas de la diferencia relativa entre F_3 y $d\sigma_{total}/dp_1$, no serían muy diferentes a éstas correspondientes a F_2 .

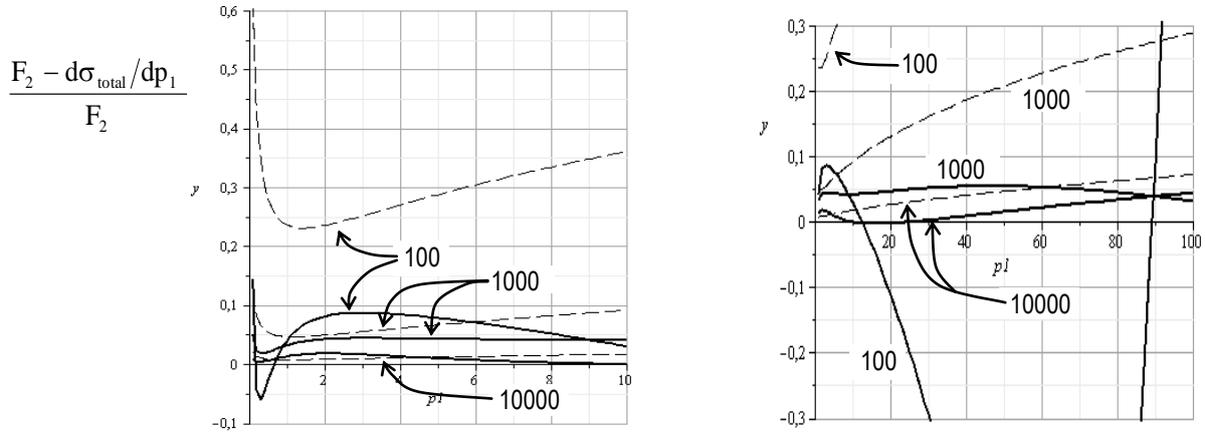


Figura 5.5: Diferencias relativas entre F_2 dada por (5.12) y nuestros valores de $d\sigma_{total}/dp_1$ para $\omega = 100, 1000,$ y 10000 , en el rango de p_1 desde $0,1$ hasta 10 , a la izquierda, y desde 10 a 100 , a la derecha. En líneas de trazos la diferencia relativa se hace con respecto a la función asintótica Bas, dada por (5.9).

Ahora bien, un criterio adecuado para juzgar si una función aproxima bien a la distribución correcta no puede establecerse solamente sobre la base de las diferencias relativas entre ellas, ya que la diferencia relativa no es importante en la zona de probabilidad muy baja. El criterio que adoptaremos para esto será calcular la integral del valor absoluto de la diferencia entre las funciones, y compararlo la integral de una de ellas (sección eficaz total), tratando de lograr el mínimo cociente posible.

En la siguiente Tabla 5.3 se muestran los valores absolutos de la diferencia de $d\sigma_{total}/dp_1$ con cada una de las funciones $F_2, F_3,$ y Bas, integrados desde $p_1 = 0,1$, o desde $p_1 = 1$, hasta el final del intervalo de interés ($p_1 = \omega/2$).

Tabla 5.3: Integral del valor absoluto de la diferencia con $d\sigma_{total}/dp_1$

ω	Desde $p_1 = 0,1$ hasta $\omega/2$				Desde $p_1 = 1$ hasta $\omega/2$			
	F_2	F_3	Bas	σ_{total}	F_2	F_3	Bas	σ_{total}
100	0,5	0,5	5	7,0	0,13	0,09	1,2	2,8
1000	0,3	0,3	1	9,4	0,11	0,09	0,3	3,2
10000	0,12	0,16	0,2	10,2	0,07	0,09	0,09	3,5

Esta tabla 5.3 confirma claramente que el ajuste que puede hacer la función asintótica de Boldyshev, Bas, sólo es adecuado para ω muy grande, entrando al orden 10^4 . Para ω entre 100 y 1000 es necesario recurrir a las funciones F_2 o F_3 , que se ve que son equivalentes en su comportamiento y posibilitan un ajuste adecuado en todo el rango de ω . Vale destacar que las mayores diferencias provienen del extremo izquierdo del intervalo ($p_1 = 0,1$), y disminuyen sustancialmente si por ejemplo se toma el mínimo umbral de detección q_u igual a $0,2$ en lugar de $0,1$.

Por último es necesario considerar que para el proceso de simulación Montecarlo es conveniente que la función de distribución sea integrable. En este caso ni Bas, ni ninguna de las otras F propuestas se puede integrar analíticamente.

De manera que es necesario encontrar una adecuada expresión $F_{\text{integrable}} \times F_{\text{rechazo}}$. Esto es posible de manera parecida para F_2 y F_3 .

Para F_2 se tiene:

$$F_{2\text{integrable}} = \frac{1}{p_1 E_1^2}, \quad (5.12a)$$

cuya primitiva es: $\ln(p_1) - \frac{1}{2} \ln(E_1)$

$$F_{2\text{rechazo}} = C_2 \left(\frac{p_1}{E_1} \right)^{\frac{30}{\omega}} E_1^{0.2} \exp\left(-\frac{3p_1}{\omega}\right) \quad (5.12b)$$

Y para F_3 :

$$F_{3\text{integrable}} = \frac{p_1}{E_1 (E_1 - 1)^2}, \quad (5.13a)$$

cuya primitiva es: $-\frac{1 + \sqrt{E_1}}{p^2}$

$$F_{3\text{rechazo}} = C_3 \left(\frac{p_1}{E_1} \right)^{\frac{30}{\omega}} \exp\left(-\frac{3p_1}{\omega}\right) \left(1 + \frac{(2E_1 - 3) \ln(E_1 + p_1)}{p_1} \right) \quad (5.13b)$$

Las dos funciones de rechazo tienen formas y alturas similares, con adecuadas constantes de normalización C_2 y C_3 .

CAPÍTULO 6

TRATAMIENTO GENERAL DEL NEGATRÓN MÁS ENERGÉTICO

En este capítulo se presentan las distribuciones de probabilidad obtenidas para el momento del electrón más energético, discutiéndose también similitudes importantes entre el movimiento de las dos partículas del par. Se estudian posibilidades de plantear simplificaciones en el manejo de todo el conjunto de contribuciones de los diagramas de Feynmann para que los cálculos sean accesibles.

También se procede a un análisis detallado de las posibilidades angulares del movimiento de las partículas del par, planteando algunas ideas de forma novedosa.

Finalmente se desarrollan aplicaciones a la determinación de la polarización lineal de la radiación incidente.

6.1.- Comentarios generales

De manera similar a lo que se hizo en la sección anterior, en ésta se procederá a integrar la expresión de la sección eficaz diferencial (2.17), con los elementos de matriz correspondientes a cada diagrama de Feynmann sobre todas las posibilidades de las variables \vec{p}_3 , \vec{p}_2 , y ϕ_1 , pero imponiendo ahora la condición de que p_2 sea menor que p_1 .

De esta manera se obtendrán las distintas contribuciones a la parte $d\sigma^{(t)}/dp_1d\theta_1$ de la sección eficaz (4.17), donde p_1 y de θ_1 son variables que corresponden al negatrón más energético.

En esta ocasión la contribución dominante vendrá del término B_{II} , el cual arrojará una distribución $d\sigma_{B_{II}}/dp_1d\theta_1$ muy similar, para grandes valores de ω , a la distribución de Bethe-Heitler ([10], [13]) para el caso de creación de pares en el campo del núcleo para $Z = 1$, y sin apantallamiento, distribución que distinguiremos con el índice BH.

La figura 6.1 ayuda a formarse un panorama viendo cómo la expresión BH se ajusta bien al caso de creación de pares en el campo de un electrón a partir de energías del orden de 1000 m (vale aclarar que la expresión BH tiene una versión simplificada para alta energía, pero que ambas coinciden entre sí para energías mucho más bajas que 100 m).

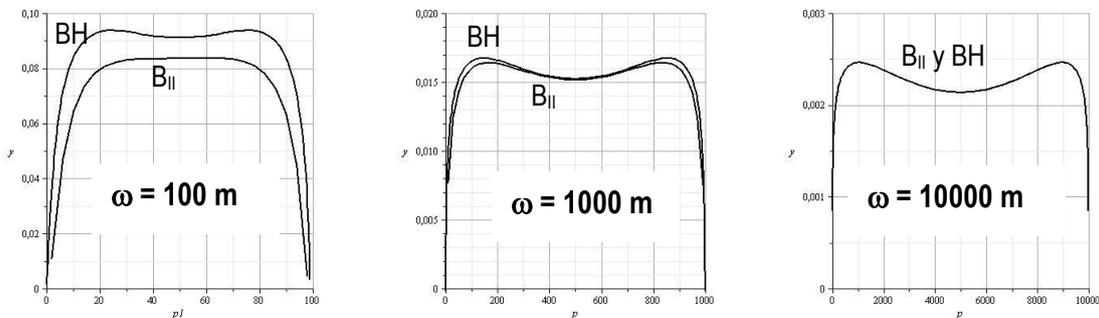


Fig. 6.1: Comparación de la sección eficaz diferencial de Bethe Heitler ($Z = 1$, sin apantallamiento) con $d\sigma_{B_{II}}/dp_1$ (para $p_1 > p_2$), para tres valores de energía de los fotones.

Para entender mejor algunos aspectos del fenómeno conviene hacer una comparación entre varias posibilidades de manipular todas las contribuciones.

Para comenzar digamos que el término B_{II} , integrado sobre las variables de las partículas 2 y 3, sin condición alguna sobre la magnitud de p_2 o p_1 , nos arroja la distribución $d^2\sigma_{B_{noI}}/dp_1d\theta_1$, usualmente llamada “de Borsellino sin intercambio” (B_{noI}), en la cual se ha denominado 1 al electrón del par.

Para $\omega \rightarrow \infty$ esta distribución tiende naturalmente a la BH ya que en ambos casos la partícula 1 es el electrón del par, y si la distribución se expresa en función de la fracción x de energía cinética de cada una de las partículas del par, se tendrá, por un lado, que cualquier valor de x que no esté infinitamente próximo a los extremos del intervalo indicará valores muy grandes de los momentos/energías de ambas, y por otro lado, que la probabilidad de transferencia de un momento lineal dado grande se mantendrá en un valor muy bajo, mientras dicho momento se hace cada vez más despreciable frente al de las partículas del par.

Por similares razones la condición $p_2 < p_1$ deja de hacer efectos apreciables a medida que ω se hace suficientemente grande, y así $d\sigma_{B_{II}}/dp_1 d\theta_1 \rightarrow d\sigma_{B_{noI}}/dp_1 d\theta_1$ (y también a la BH) para $\omega \rightarrow \infty$. Todo lo cual implica que además los términos de corrección resultantes de los diversos diagramas se hacen despreciables para ω suficientemente grande.

Pero para ω no tan grande, digamos del orden de 100, que es el valor más bajo que consideramos en este trabajo, es interesante discutir algunas diferencias entre estas distribuciones como veremos en el próximo punto.

6.2.- Distribución de energía entre las partículas del par

En principio desarrollaremos este análisis para $\omega = 100$ m, porque es ilustrativo de lo que sucede en las energías más grandes, pero muestra más acentuadamente algunas diferencias entre situaciones.

Para ese valor de ω tendremos:

$d^2\sigma_{B_{noI}}/dp_1 d\theta_1$: es la distribución obtenida integrando el término B_{II} sobre las variables de las partículas 2 y 3, sin condición alguna sobre la magnitud de p_2 o p_1 .

$d^2\sigma_{B_{noI}}/dp_3 d\theta_3$: es la distribución obtenida integrando el término B_{II} (el mismo resultado se obtendría si fuese el B) sobre las variables de las partículas 1 y 2, sin condición alguna sobre la magnitud de p_2 o p_1 .

En ambos casos el cálculo puede hacerse adoptando un valor umbral q_u por debajo del cual se descarta cualquiera de los p , y como es de esperar, sólo influye el umbral en la partícula 2, que en este esquema, es el electrón de retroceso, único que puede esperarse con muy bajo valor de momento. Es notable que mientras el umbral se mantiene alrededor de $q_u \cong m$, no se registra ninguna diferencia en la distribución obtenida ya sea que se considere o no dicho umbral para las partículas 1 y 3.

La característica notable de estas distribuciones es:

1) Son idénticas si se intercambia $1 \leftrightarrow 3$. En la figura 6.2 se muestra en línea de trazos la distribución $d\sigma_{B_{noI}}/dp_{1/3}$, que es la misma función exactamente, ya sea de p_1 o de p_3 , obtenida integrando $d^2\sigma_{B_{noI}}/dp_1d\theta_1$ sobre θ_1 , o $d^2\sigma_{B_{noI}}/dp_3d\theta_3$ sobre θ_3 respectivamente.

En esta figura se muestra esta distribución para dos condiciones: sin umbral, y con $q_u = m$, y se aprecia cómo en los dos casos ambas partículas del par indistintamente, tienen algo

aumentada la probabilidad de tener momentos más bajos a expensas de la probabilidad de los valores simétricos respecto del valor medio, $\omega/2$.

Es interesante notar cómo en ausencia de umbral aumenta mucho la sección eficaz en la zona de p_1 cercano a $\omega/2$ y disminuye la asimetría de la distribución respecto de ese valor, ya que suprimir los casos en que el electrón de retroceso (2) tiene muy bajo valor de momento lineal, para ω grande significa:

a) Suprimir la mayor parte de los eventos, que son los de gran parámetro de impacto, con p_1 y p_3 distribuidos mayormente en toda la parte de su intervalo alejada de los extremos.

b) El valor medio de la energía de cada una de las partículas del par (iguales ambas) debe disminuir conforme aumenta el (valor medio) de la energía del electrón de retroceso, y eso se refleja en la mencionada asimetría de la distribución respecto de $\omega/2$.

Lógicamente esta asimetría no existe en el caso de Bethe-Heitler, en el cual se considera que no se transfiere energía al núcleo.

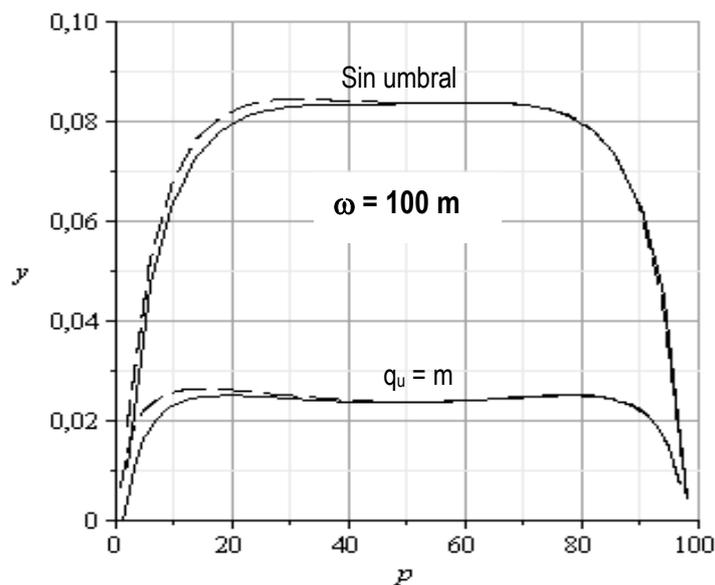


Fig. 6.2: en línea llena se muestra la distribución $d\sigma_{BII}/dp$ (en unidades de $1/\alpha r_0^2$) para $\omega = 100 m$, para dos situaciones: sin umbral, y con $q_u = m$. En línea de trazos la distribución $d\sigma_{BnoI}/dp$, en la que p puede representar indistintamente a p_1 o a p_3 en unidades de m .

Si en cambio se impone la condición $p_1 > p_2$, a la integración del término B_{II} sobre las variables de las partículas 2 y 3, y luego sobre θ_1 , se obtiene la distribución $d\sigma_{BII}/dp_1$, que representa la contribución dominante de todos los diagramas de Feynmann, y que es notablemente simétrica respecto del valor $\omega/2$, como se muestra en línea llena en la figura 6.2, nuevamente para los casos sin umbral, y con $q_u = m$.

La disminución de la altura de la mitad izquierda de estas figuras se explica porque la condición $p_1 > p_2$ elimina naturalmente muchas contribuciones de muy bajo valor de p_1 , mientras que no afecta en absoluto a la mitad derecha, para la cual siempre fue $p_1 > p_2$ (las mitades derechas correspondientes de la figura 6.2 son idénticas).

Es claro que esta condición no afecta de la misma manera a la distribución de probabilidades del positrón, ya que a la distribución $d\sigma_{\text{BnoI}}/dp_3$ la condición $p_1 > p_2$ le quita contribuciones tanto en la zona de p_3 chico como de p_3 grande.

También es claro que el cálculo de las contribuciones de todos los diagramas restantes de Feynmann, siempre con la condición $p_1 > p_2$ le van a restituir (con otros valores) la asimetría, ya que las mayores contribuciones, B y B_I , son positivas y tienden a cero en la mitad derecha.

6.3.- Contribuciones de todos los diagramas de Feynmann

En la figura 6.3 se muestran las contribuciones $d\sigma_x/dp_1$ de todos los diagramas de Feynmann a la distribución dada por el diagrama dominante que, con la condición $p_2 < p_1$, es el denominado B_{II} .

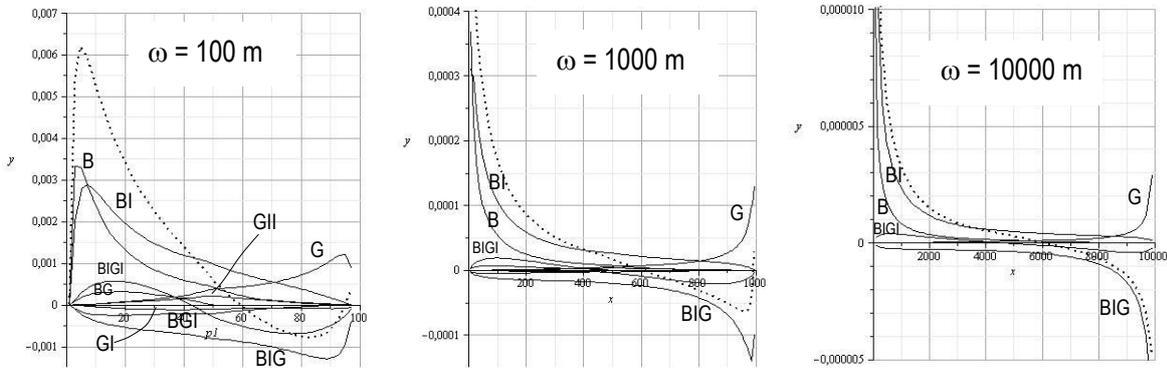


Fig. 6.3: Contribuciones $d\sigma_x/dp_1$ de los diagramas de Feynmann sin incluir el dominante, para $\omega = 100, 1000,$ y 10000 m. En línea de puntos la suma de todas las contribuciones.

En la tabla 6.1 se muestran los valores de todas las contribuciones para $p_1 > p_2$, integradas sobre todo el rango de valores de p_1 . Es muy notable pero razonable, que son los mismos valores de la tabla 5.1 (dentro de un 2 %) intercambiando: $B \leftrightarrow B_{II}$, $G \leftrightarrow G_{II}$, $BG \leftrightarrow B_I G_I$, $B_I G \leftrightarrow B G_I$, mientras que no cambian B_I , y G_I .

Tabla 6.1. Contribuciones totales a la sección eficaz (Umbral $q_u = m$)

ω ($m c^2$)	B_{II} ($\propto r_0^2$)	B/B_{II} (%)	B_I/B_{II} (%)	G_{II}/B_{II} (%)	G/B_{II} (%)	G_I/B_{II} (%)	$B_I G_I/B_{II}$ (%)	BG/B_{II} (%)	$B_I G/B_{II}$ (%)	$B G_I/B_{II}$ (%)	Total (%)
100	2,22	3,20	4,95	0,40	1,71	-0,34	-0,48	0,46	-3,4	-0,62	5,88
1000	3,19	0,67	1,46	0,05	0,36	-0,021	-0,07	0,07	-1,0	-0,07	1,45
10000	3,46	0,12	0,32	0,0057	0,060	-0,0016	-0,0075	0,0077	-0,23	-0,008	0,27

Al igual que en el Capítulo 5, el valor total de las contribuciones integradas sobre p_1 , no es tan importante como el conocimiento de las distribuciones en función de p_1 .

En la figura 6.4 se muestran la distribución dominante, la total, y su diferencia que es la suma de todas las contribuciones para tres valores de ω : 100m, 1000m y 10000m, siempre para un umbral $q_u = m$.

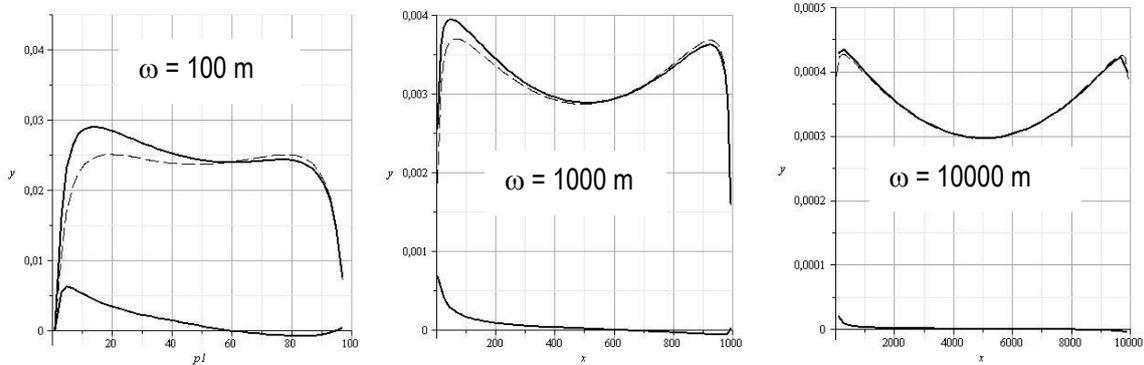


Fig. 6.4: Para $\omega = 100m$, $1000m$ y $10000m$, se muestran la contribución dominante, $d\sigma_{II}/dp_1$ (en línea de trazos), la contribución total sumada de los restantes diagramas y el resultado total $d\sigma_{total}/dp_1$, con p_2 por encima del umbral $q_u = m$.

Estas figuras permiten extraer como conclusión sobre la influencia de los diferentes diagramas sobre el dominante:

- 1) La influencia es considerable hasta ω del orden de 1000 m, energía en la que, en la zona de p_1 bajos, la corrección sobre el término dominante alcanza el orden del 10 %. A partir de $\omega = 10000$ m pueden despreciarse las contribuciones de los diagramas, cuyo valor total máximo ya entra en el orden del 1 % del término dominante.
- 2) Las afirmaciones del punto 1) pueden extenderse, cualitativamente, al positrón, que tendrá un comportamiento totalmente similar al del electrón más energético, aunque como ya se ha dicho, los valores no serán exactamente iguales, y si se requiere precisión deben calcularse en cada caso.
- 3) Un tratamiento simplificado de los términos de corrección puede hacerse considerando que la corrección total, si se descartan los extremos del intervalo de p_1 , es una recta que cruza el cero en $p_1 = 0,6 \omega$, con una pendiente que vale aproximadamente:

$$-\frac{6}{\omega^{2,5}}$$

Lo cual nos permitiría estimar esta corrección total en función de p_1 (en unidades naturales con $m = 1$), válida no muy cerca de los extremos del intervalo, 0 y ω , como:

$$C_{total} = \frac{3,6}{\omega^{1,5}} - \frac{6}{\omega^{2,5}} p_1 \quad (6.1)$$

6.4.- Distribución angular de las partículas del triplete

Sobre la distribución angular de las partículas es posible decir muchas cosas importantes, y algunas de ellas quedan determinadas por consideraciones muy básicas.

Para evitar confusiones vale repetir la consideración de que habrá un electrón menos energético, designado aquí e_2 , y al que eventualmente llamaremos “de retroceso”, mientras que las dos partículas restantes, el electrón más energético, e_1 , y el positrón, e_3 , constituirán el “par”.

Luego de esto, para comenzar es posible decir que, dado que para las partículas del par consideramos momentos lineales suficientemente grandes, la conservación del cuadrimomento lineal, a través de la expresión (1.33) (o de su consecuencia, que es la figura 1.4), permite inferir que los correspondientes ángulos polares son necesariamente pequeños.

Por otra parte la conservación de las componentes transversales del momento lineal implica que en el plano transversal (dado por los ejes x , y en nuestra elección de coordenadas), se debe cumplir:

$$-\vec{q}_\perp = \vec{p}_{1\perp} + \vec{p}_{3\perp} \quad (6.2)$$

En las condiciones consideradas, para estas dos partículas se tendrá $p_{i\perp} = p_i \sin\theta_i \cong p_i \theta_i$, y es muy interesante comenzar considerando cómo resulta la distribución de probabilidad de la variable θ para ellas.

Esta información es la indicada por $d\sigma^{(t)}/d\theta_1$, que puede obtenerse integrando sobre p_1 la expresión de $d^2\sigma^{(t)}/dp_1d\theta_1$ que estábamos tratando en párrafos anteriores, y que se caracteriza por partir de cero en $\theta_1 = 0$, crecer claramente hasta un máximo en $\theta_1 \cong m/p_1$, y luego decrecer de diversas maneras hasta anularse en algún valor de ángulo que depende de diversas variables involucradas. Esto indica que el valor más probable del momento lineal transversal es aproximadamente $p_\perp = m$, lo cual es igualmente válido para el positrón también.

Esto de por sí constituye ya una información suficientemente interesante, totalmente coherente con lo que requiere la conservación del momento lineal transversal, habida cuenta de lo que puede esperarse del momento transversal de retroceso, \vec{q}_\perp , que es el del electrón menos energético.

Comencemos revisando un poco lo que sabemos de éste último.

6.4.1.- Distribución angular del electrón menos energético

Para el electrón menos energético la mayor probabilidad es de los valores mínimos posibles del momento p_2 , mientras que el ángulo polar es grande y puede llegar a cerca de los 90° .

Pero los máximos ángulos polares posibles sólo son posibles con valores tan pequeños de p_2 , que en estos casos siempre resultan momentos transversales muy pequeños, mucho menores que m .

Estos valores tan pequeños en principio constituirían la mayor parte de las situaciones, pero si imponemos un umbral de detección a p_2 , entonces la mayor probabilidad, correspondiente a los valores mínimos posibles detectados, estará cerca del valor umbral, y el ángulo polar estará cercano al valor máximo posible, que invirtiendo la expresión (1.33), puede determinarse para energías grandes de los fotones como:

$$\cos \theta = \frac{E_2 - m}{p_2} \quad (6.3)$$

Independientemente de los valores particulares que pueden calcularse para situaciones determinadas, la situación en general es:

a) Para las situaciones más favorables, de mínima interacción, $p_{2\perp}$ puede tomar valores muy pequeños, desde absolutamente indetectables, hasta valores detectables mucho menores que m .

b) Con mucha menor probabilidad siempre se registrarán tripletes en los cuales p_2 supera el valor m , inclusive por mucho (digamos factores 10 o 100), aunque como hemos visto en el capítulo correspondiente, dicha probabilidad será aproximadamente inversamente proporcional a este valor de p_2 .

c) Para los valores grandes de p_2 el ángulo polar (y con él la componente transversal $p_{2\perp}$), estará limitado por la expresión (6.3), de la cual puede deducirse, aproximadamente para valores grandes de p_2 , que $p_{2\perp}$ puede llegar casi a $\sqrt{2p_2}$.

Esta expresión en principio no impide que $p_{2\perp}$ pueda llegar a cualquier valor grande, pero en la práctica las limitaciones en el valor de p_2 son las que hacen que difícilmente haya que considerar valores de $p_{2\perp}$ mucho mayores que 10 m .

d) El ángulo azimutal de $\vec{p}_{2\perp}$, φ_2 , se relaciona con la polarización del fotón incidente. Esto ya se mencionó en el punto Capítulo 4, y será examinado con un poco más de detalle al final de esta sección.

6.4.2.- Distribución angular de las partículas del par

Las posibilidades angulares de las dos partículas del par, por otra parte, resultan muy relacionadas con los valores del momento transversal de retroceso, dado que se debe verificar la conservación expresada por (6.2), de manera que su análisis se ve muy enriquecido si se discrimina para diferentes rangos de valores de los momentos lineales p_1 , p_2 , y p_3 .

Podemos comenzar el análisis examinando la figura 6.5, en la cual se muestran (todas normalizadas a la misma altura máxima), las distribuciones de probabilidad de θ_1 para un valor fijo de p_2 , en distintas condiciones de energía del fotón y del electrón 1.

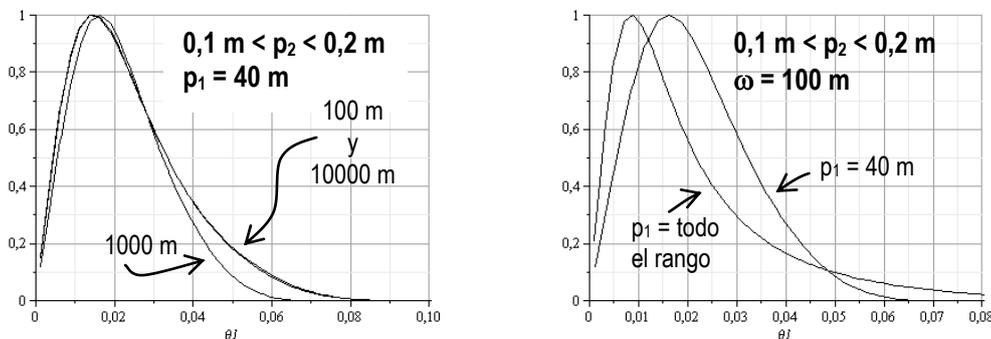


Figura 6.5. Izquierda: $d^2\sigma/d\theta_1 dp_1$ para $\omega = 100$ m, 1000 m, y 10000 m, para $p_1 = 40$ m, con p_2 entre 0,1 y 0,2 m. Derecha: $d^2\sigma/d\theta_1 dp_1$ para $\omega = 100$ m, con p_2 entre 0,1 y 0,2 m, para $p_1 = 40$ m, y $d\sigma/d\theta_1$ con p_1 integrado en todo el rango de 0 a ω .

En esta figura 6.5 izquierda podemos ver que, mientras las variables consideradas caigan dentro del rango de validez, esta distribución es esencialmente independiente de la energía del fotón incidente, lo cual justifica que podamos realizar el resto del análisis para cualquier valor fijo de ω .

La figura 6.5 derecha, por otra parte, muestra cómo depende esta distribución del valor del momento de la partícula del par. La gráfica que corresponde al valor determinado de $p_1 = 40$ m, tiene un máximo en $\theta_{1\text{máx}} \cong 0,66$ m / p_1 , detalle que es muy importante y que vamos a examinar en más detalle a continuación. El máximo corrido hacia los ángulos menores que presenta en la misma figura la gráfica que corresponde a p_1 integrado en todo el rango es claramente expresión del mismo comportamiento, ya que representa valores de p_1 que llegan hasta 100 m. Esta gráfica es lógicamente mucho más ancha y alta, ya que contiene a la anterior como expresión de una pequeña parte de los casos que la constituyen, pero al ser normalizada a la misma altura máxima sólo permite ver el corrimiento hacia la izquierda; queda claro que la superposición de un continuo de valores diferentes de p_1 oscurece la interpretación de los procesos involucrados, y en adelante nos limitaremos a determinados valores discretos de esta variable.

Por otra parte es muy importante destacar que el comportamiento de las dos partículas del par es totalmente equivalente, y que las gráficas correspondientes a $d\sigma/d\theta_3$ son exactamente iguales a éstas presentadas, razón por la cual no se las agrega al análisis, aunque en todos los razonamientos estará presente esta equivalencia mencionada.

También vale destacar que los cálculos podrían limitarse al término dominante, B_{II} , ya que el aporte de todos los otros, que puede llegar a un 3 %, para $\omega = 100$ m, y a menos del 1 % para $\omega = 1000$ m, de ninguna manera modifica las conclusiones que se desprenden de la forma de estas gráficas.

Continuando con este análisis en la figura 6.6 se muestra la distribución $d^2\sigma/dp_1d\theta_1$ para tres valores diferentes fijos de p_1 , siempre para un mismo valor pequeño de p_2 , y para $\omega = 1000$ m (ya quedó claro que sería lo mismo utilizar cualquier valor grande de ω).

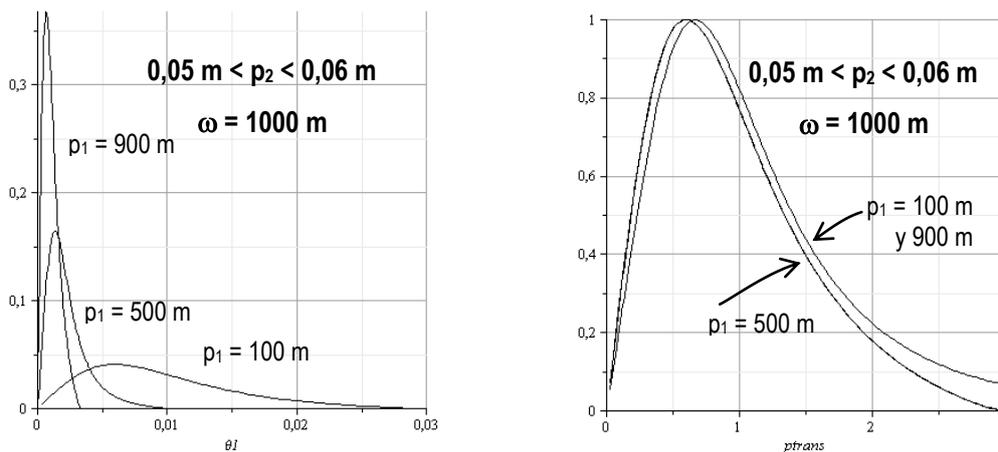


Fig. 6.6: Izquierda: $d^2\sigma/dp_1d\theta_1$ para $\omega = 1000$ m, y p_2 entre 0,05 y 0,06 m, para tres valores fijos de p_1 : 100 m, 500 m, y 900 m. Las ordenadas están en unidades arbitrarias, pero permiten calcular que las tres gráficas tienen aproximadamente la misma área. Derecha: las mismas gráficas normalizadas a la misma altura máxima, pero con el momento lineal transversal en abscisas.

En la figura 6.6 izquierda se puede ver cómo cada gráfica tiene el máximo en un valor de θ inversamente proporcional a p_1 , pero eso que mucho más claro en la figura de la derecha, de la cual se deduce que cada una tiene el máximo aproximadamente en:

$$\theta_{\text{más probable}} \cong \frac{0,65 \text{ m}}{p_1} \quad (6.4)$$

Es decir, todas definen aproximadamente un mismo momento lineal transversal, dado por:

$$p_{\perp} \cong 0,6 \text{ a } 0,7 \text{ m} \quad (6.4')$$

Ahora bien, el hecho de que en todos los casos la distribución $d\sigma/d\theta_1$ tienda a cero linealmente en el origen se relaciona directamente con el elemento de ángulo sólido de las coordenadas esféricas $d\Omega = \text{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$: es claro que dividiendo $d\sigma/d\theta_1$ por $\text{sen}\theta_1$ se obtiene algo que tiende a un valor no nulo aproximadamente constante en el origen, y que expresa la distribución por unidad de ángulo sólido.

Efectivamente, ésta sería:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{1}{\text{sen}\theta_1} \frac{d^2\sigma}{d\theta_1 \, d\varphi_1},$$

o bien, considerando un elemento de ángulo sólido $d\Omega^*_1 = 2\pi \text{sen}\theta_1 d\theta_1$, que sería $d\Omega_1$ una vez integrado sobre φ_1 , ($d\Omega^*_1$ sería un anillo de revolución de ancho $d\theta_1$; recordemos que para simplificar este análisis estamos limitándonos a la parte de la sección eficaz que no depende del ángulo azimutal):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*_1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\text{sen}\theta_1} \frac{d\sigma}{d\theta_1}$$

De cualquier manera que se considerase el elemento de ángulo sólido (sólo habría un factor 2π de diferencia entre las dos posibilidades), es claro que $d\sigma/d\Omega_1$ no se anula en $\theta_1 = 0$, y eso puede verse en la figura 6.7, que representa $d\sigma/d\Omega_1$ para exactamente las mismas condiciones de la figura 6.6.

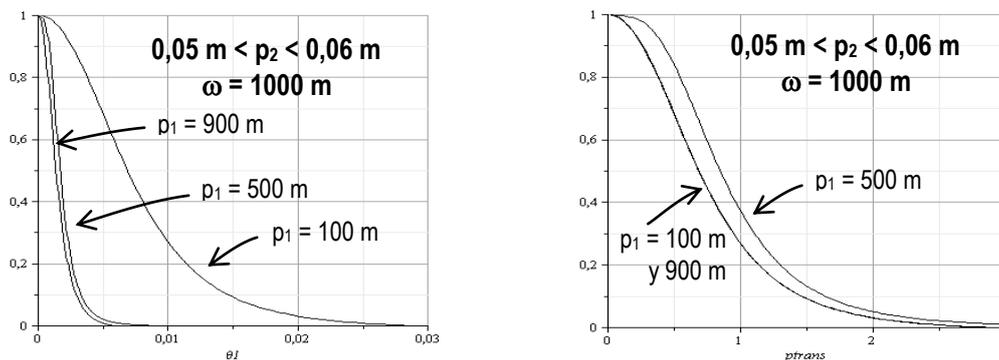


Fig. 6.7: Izquierda: $d^2\sigma/dp_1 d\Omega_1$ en función de θ_1 para $\omega = 1000 \text{ m}$, y p_2 entre $0,05$ y $0,06 \text{ m}$, para tres valores fijos de p_1 : 100 m , 500 m , y 900 m . Derecha: las mismas gráficas pero con el momento lineal transversal en abscisas. Todas las gráficas están normalizadas a la misma altura máxima.

Teniendo en cuenta que estas gráficas se refieren a un momento de retroceso mucho menor que los momentos transversales que están en juego (y más adelante esto es corroborado con situaciones en las que q_{\perp} toma los valores mínimos posibles), podemos pensar que estamos frente a la situación de mínima interacción posible, y lo que se observa sugiere como idea básica que para grandes energías, en presencia de mínima perturbación exterior, las partículas del par son creadas con máxima densidad de probabilidad en la *misma dirección de marcha del fotón*, con una cierta dispersión tal que ambas adquieren un momento transversal que en promedio es del orden de m .

Según esta idea, que seguiremos explorando en más profundidad, momentos transversales mayores se originarían en la interacción de *una* de las partículas creadas con el tercer electrón, el cual a su vez adquiriría el momento de retroceso de módulo correspondiente, como veremos.

Antes de seguir vale considerar la distribución $d\sigma/d\Delta$ respecto de la masa invariante del par, Δ , calculada en [26]. Esta distribución favorece los valores pequeños de Δ y alcanza su máximo cerca del mínimo $\Delta = 2m$, pero se anula exactamente allí, como ya se dijo en el capítulo 1.

Este valor mínimo de Δ correspondería a las dos partículas viajando exactamente en la misma dirección y con la misma velocidad, y el hecho de que la distribución se anule allí indica que las partículas del par deben separarse un poco, ya sea por diferencia en el ángulo o en la velocidad, para poder llegar a existir como partículas reales y no aniquilarse inmediatamente.

Pero es claro que las partículas pueden partir en la misma dirección del fotón incidente, y el hecho de que con gran energía de los fotones ésa sea la situación más probable con mínima perturbación exterior, es coherente con el hecho de que la situación de igual energía entre ambas partículas es menos probable que la de cierta diferencia entre ellas (como se ve en figuras típicas 6.1, 6.2, y 6.4).

Ahora avanzaremos en el análisis de la conservación del momento lineal transversal, aplicando la idea básica de que el momento transversal más probable en ausencia de interacción es del orden de m . Consideremos para ello el cumplimiento de dicha conservación en el caso general, y en los casos extremos de $p_{2\perp} \ll m$, y $p_{2\perp} \gg m$, en los esquemas presentados en la figura 6.8.

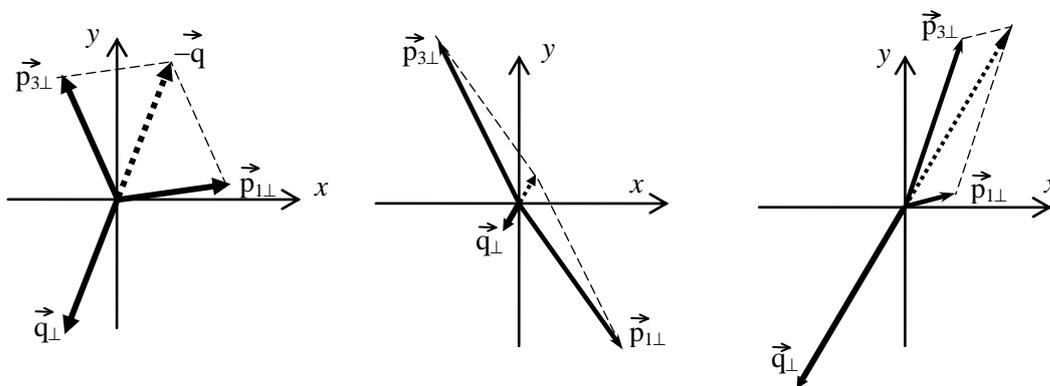


Fig. 6.8: Conservación del momento lineal transversal. **Izquierda:** caso general. **Centro:** $q_{\perp} \ll m$. En este caso los momentos $p_{1\perp}$ y $p_{3\perp}$ se han representado mucho más grandes que q_{\perp} porque la probabilidad de que sean del mismo orden es muy baja. **Derecha:** $q_{\perp} \gg m$ (por razones de espacio no se puede representar q_{\perp} en la misma escala que en el diagrama del centro).

El caso $p_{2\perp} \ll m$ de esta figura nos muestra cómo sería la situación cuando la interacción con otras partículas fuera arbitrariamente pequeña, considerando la tendencia del par a tener momentos transversales del orden de m .

El caso opuesto, $p_{2\perp} \gg m$, nos alerta sobre el hecho de que el momento transversal de ambas partículas del par no puede mantenerse en el orden de m en cualquier circunstancia, ya que en este caso al menos el de alguna de ellas tendrá que ser $\gg m$.

Teniendo en cuenta que por razones probabilísticas sólo una de las partículas del par interactuaría con el electrón externo, esto además implicaría que en los casos de gran momento de retroceso debería ser más probable que *sólo una* de las partículas del par tenga un valor grande de momento transversal, mientras que la otra debería mantener un valor del orden m . Eso se ha tratado de reflejar en el esquema de la derecha de la figura 6.8, no considerando el caso $\bar{p}_{1\perp} \approx \bar{p}_{3\perp} \approx -\bar{q}_{\perp}$, el cual dinámicamente sería posible, pero según estas especulaciones, *menos probable*.

Para confirmar estas especulaciones en la figura 6.9 se han superpuesto, normalizadas a la misma altura máxima, las distribuciones $d^2\sigma/dp_1d\theta_1$ (y obviamente $d^2\sigma/dp_3d\theta_3$, que serían las mismas) para el caso $\omega = 1000 m$ y $p_1 = 400 m$, con p_2 entre 0,002 y 0,004 m, entre 0,10 y 0,11 m, entre 1,1 y 1,2 m, y entre 5,0 y 5,1 m.

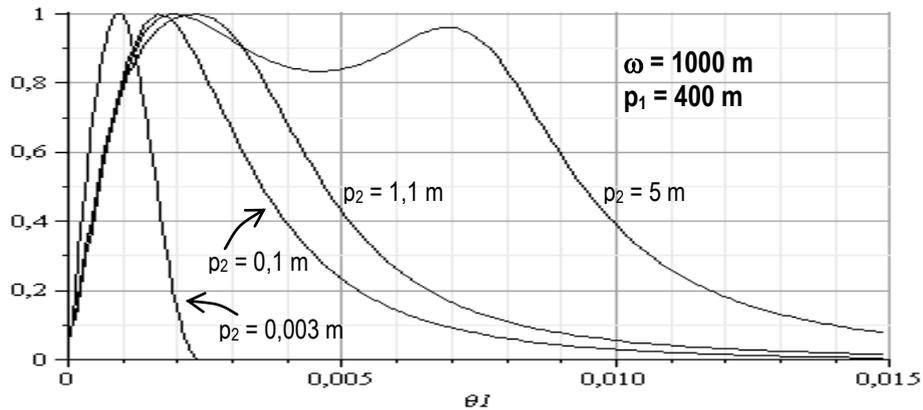


Fig. 6.9: Para $\omega = 1000 m$ y $p_1 = 400 m$ se muestran las distribuciones $d^2\sigma/dp_1d\theta_1$ para cuatro intervalos de p_2 : entre 0,002 y 0,004 m, entre 0,10 y 0,11 m, entre 1,1 y 1,2 m, y entre 5,0 y 5,1 m.

Esta figura muestra que la distribución $d\sigma/d\theta_1$, para un valor pequeño (pero no extremo) de p_2 , como es 0,1 m, tiene un claro valor máximo alrededor de $\theta_1 \cong 0,0018$ (es decir definiendo $p_{1\perp} \cong 0,70 m$). Si a continuación consideramos un valor mayor de p_2 , del orden de m , vemos que la gráfica es más ancha, y muestra un desplazamiento del máximo hacia ángulos mayores. Pero la gráfica correspondiente a un valor de p_2 decididamente mayor que m , como es 5 m, aclara la situación y muestra que lo que ocurre al aumentar p_2 no es un desplazamiento del máximo, sino la aparición de dos máximos diferentes: uno se mantiene en un valor muy parecido al de los p_2 pequeños: $\theta_1 \cong 0,002$ (es decir definiendo $p_{1\perp} \cong 0,80 m$), y el otro en $\theta_1' \cong 0,0070$ (es decir definiendo $p_{1\perp} \cong 2,8 m$).

Y lo más notable es que para un valor grande de p_2 , como es 5,15 m, se espera con gran probabilidad un ángulo polar cercano al límite dado por la expresión (6.3), es decir $\theta_2 \cong 0,60$, con el cual puede calcularse el límite máximo para el momento transversal de retroceso: $p_{2\perp} \cong 2,9 m$.

En la figura 6.10 se exploran otros valores que confirman la misma idea. Para $\omega = 1000$ m, con p_2 fijado en un valor grande: $50 \text{ m} < p_2 < 51 \text{ m}$, tres valores de p_1 : 200 m, 500 m, y 800 m, muestran dos picos en la distribución $d\sigma/d\theta_1$, que determinan dos valores de $p_{1\perp}$:

Pico 1: $(0,8 \pm 0,1) \text{ m}$

Pico 2: $(9,3 \pm 0,3) \text{ m}$

El valor 1 reproduce lo esperado para una partícula del par que ha sufrido muy poca interacción, y el 2 corresponde muy bien a un momento de retroceso de 50,5 m, para el cual se espera un ángulo polar cercano al máximo dado por (6.3), es decir $\theta_2 \cong 0,20$, que corresponde a un momento transversal de retroceso $p_{2\perp} \leq 10 \text{ m}$.

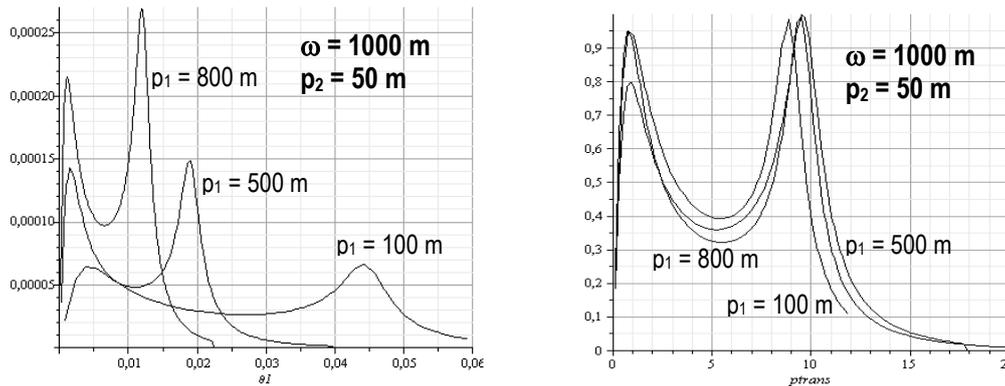


Fig. 6.10: Para $\omega = 1000$ m y p_2 entre 50 y 51 m, se muestran las distribuciones $d\sigma/dp_1d\theta_1$ para tres valores fijos de p_1 : 200 m, 500 m, y 800 m. **Izquierda:** unidades arbitrarias en ordenadas y ángulo polar en abscisas. **Derecha:** momentos lineales transversales en abscisas, y altura normalizada a la misma altura máxima.

Vale decir además que lo marcado de la separación entre estos picos indica que efectivamente en los casos de gran momento de retroceso se espera que con gran probabilidad sólo una de las partículas del par tenga el correspondiente momento transversal grande, mientras la otra se mantiene en el valor bajo correspondiente a la ausencia de interacción posterior a la creación.

Esto tiene consecuencias sobre la distribución azimutal de estas partículas, que examinaremos en el próximo punto.

6.4.3.- Distribución azimutal y polarización de la radiación incidente.

La consideración de los esquemas mostrados en la figura 6.8, a la luz de los resultados discutidos sobre los ángulos polares en las diferentes circunstancias, permite establecer algunas afirmaciones sobre los ángulos azimutales que deberán luego ser corroborados por los cálculos correspondientes.

Las afirmaciones más notables son:

1) Para los casos de muy pequeño momento de retroceso se espera un ángulo azimutal relativo, $\varphi_{31} = \varphi_3 - \varphi_1$, cercano a π . Esto significa además que el ángulo polar de una de las partículas será aproximadamente opuesto al de la otra, y cualquiera de ambos podrá servir para definir (aproximadamente) la orientación del plano definido por las dos trayectorias.

Por otra parte, además, es esperable que estos ángulos estén correlacionados directamente con la polarización de los fotones.

No se ve con tanta claridad, en cambio, sobre la base de estas ideas, si debe o no esperarse que el ángulo azimutal del momento de retroceso esté correlacionado directamente con dicha polarización.

2) Si el momento de retroceso es muy grande, en cambio, el ángulo azimutal relativo puede adoptar cualquier valor, pero el ángulo azimutal de la partícula que tiene momento transversal grande será parecido al del momento de retroceso, y debido a que ambos serán el resultado, altamente impredecible, de la colisión entre ambas partículas, no se espera, a priori, una correlación entre ellos y la polarización del fotón incidente.

En cambio continuaría esperándose la misma correlación entre la polarización del fotón y el ángulo azimutal de la partícula con menor momento transversal, que en el caso de momento de retroceso pequeño.

En las siguientes figuras diferentes gráficas confirman todas estas afirmaciones.

En la figura 6.11 se puede ver claramente como el ángulo azimutal relativo medio entre las dos partículas del par, φ_{31} , para p_2 pequeño se mantiene prácticamente igual a π , a menos que θ_3 o θ_1 , que es lo mismo, sean muy pequeños (en cuyo caso no se correspondería establecer condición alguna), mientras que para p_2 suficientemente grande el signo del $\cos\varphi_{31}$ cambia bruscamente haciéndose negativo en el ángulo polar en el que $p_{3\perp}$ (o $p_{1\perp}$) supera a $p_{2\perp}$, y luego tiende a -1 como corresponde, a medida que el dicho ángulo polar sigue aumentando.

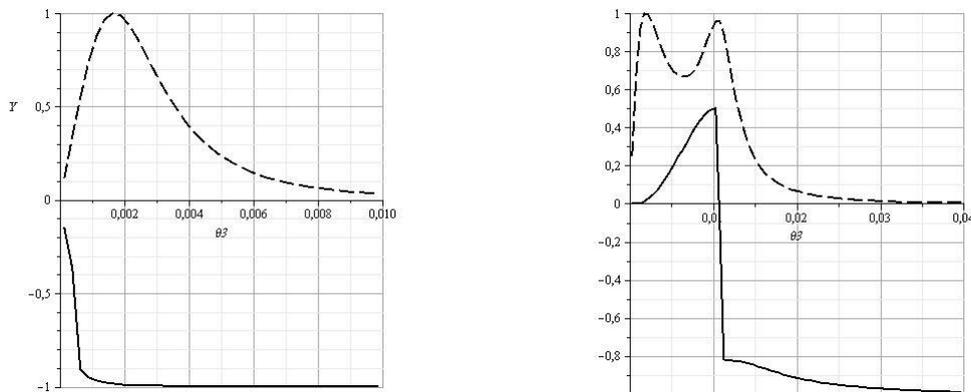


Fig. 6.11: Valor medio del $\cos\varphi_{31}$ en cada $d\theta_1$ para $\omega = 1000$ m, $p_1 = 400$ m, y diferentes valores del momento de retroceso. **Izquierda:** p_2 entre 0,1 m y 0,3 m. **Derecha:** p_2 entre 10 m y 11 m. En línea de trazos se muestran las respectivas gráficas de $d\sigma/d\theta_1$

En la figura 6.12 en cambio se puede ver el comportamiento del ángulo azimutal relativo entre el electrón del par (sería lo mismo para el positrón) y el de retroceso para las mismas condiciones de la figura anterior. En ella se puede ver que, para valores pequeños de p_2 , las partículas del par se ubican definiendo con el eje z un plano aproximadamente perpendicular al que define el electrón de retroceso, mientras que para p_2 grande, la partícula del par que tiene ángulo polar grande, en este caso el electrón, se ubica con un ángulo φ_{21} que siempre es obtuso y se acerca a π cuando $p_{1\perp}$ está cerca de $p_{2\perp}$. Notar que φ_{21} no se acerca necesariamente mucho a π si $p_{1\perp}$ supera mucho a $p_{2\perp}$, como se deduce de considerar que la conservación exige que también $p_{3\perp}$ sea grande en ese caso.

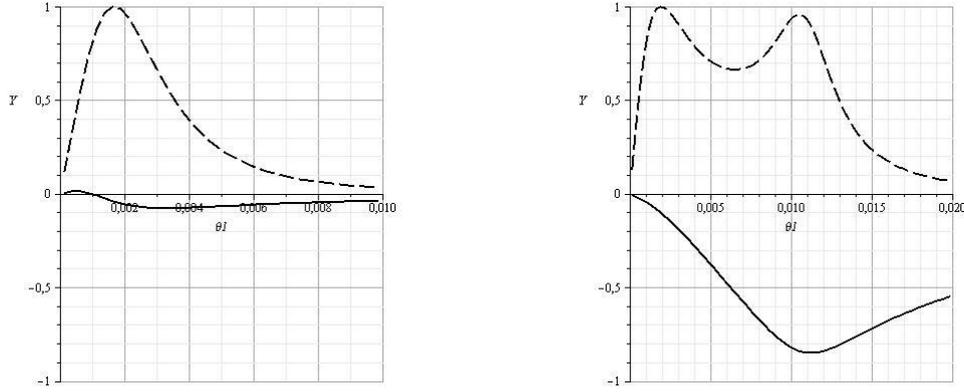


Fig. 6.12: Valor medio del $\cos(\varphi_{21})$ en cada $d\theta_1$ para $\omega = 1000$ m, $p_1 = 400$ m, y diferentes valores del momento de retroceso. **Izquierda:** p_2 entre 0,1 m y 0,3 m. **Derecha:** p_2 entre 10 m y 11 m. En línea de trazos se muestran las respectivas gráficas de $d\sigma/d\theta_1$ normalizadas a altura máxima unitaria.

De la perpendicularidad entre el ángulo azimutal de las partículas del par y el del electrón de retroceso para valores bajos de p_2 se deduce que si este último se relaciona con la polarización de los fotones, los otros también lo harán, y de manera opuesta.

La figura 6.13 ilustra aspectos que se relacionan con dicha polarización, recurriendo a la *asimetría*, Λ , que definimos de la siguiente manera:

$$\Lambda = \frac{d\sigma^{(l)}}{d\sigma^{(t)}} \quad (6.5)$$

Siendo $d\sigma^{(t)}$ y $d\sigma^{(l)}$ las partes independiente y dependiente de la polarización respectivamente, según la expresión (4.17): $d\sigma = d\sigma^{(t)}(p_1, \theta_1) + P d\sigma^{(l)}(p_1, \theta_1) \cos(2\varphi_1)$, y $P \leq 1$ el módulo del vector polarización lineal de los fotones, ubicado a lo largo del eje x.

Introduciendo la asimetría esta expresión quedaría:

$$d\sigma = d\sigma^{(t)}(p_1, \theta_1) \times \{1 + \Lambda(p_1, \theta_1) P \cos(2\varphi_1)\} \quad (6.6)$$

Pero vale aclarar que en esta expresión se presupuso que se ha integrado sobre todas las variables correspondientes a las partículas 2 y 3, mientras que en realidad hay muchas más posibilidades que interesa considerar en general.

En el tratamiento desarrollado en todo este trabajo se llega a la expresión (6.5) una vez que se utiliza la conservación del cuadrimomento para eliminar las tres variables de una de las partículas en función de las otras dos, y el ángulo azimutal de una de las otras. Luego se puede integrar sobre las variables que se desee, o aún sobre ninguna, y se obtiene una expresión similar a (6.6):

$$d\sigma = d\sigma^{(t)}(\text{variables}) \times \{1 + \Lambda(\text{variables}) P \cos(2\varphi_i)\} \quad (6.6')$$

En donde “variables” significa todas las variables que hayan quedado sin integrar excepto el ángulo azimutal restante, al cual designamos φ_i .

De manera que en nuestro planteo $d\sigma$, $d\sigma^{(t)}$, y Λ , son funciones de un cierto conjunto de variables elegidas según cada caso, pero nunca de un ángulo azimutal. Y podremos elegir tres tipos de coeficientes de asimetría, Λ_1 , Λ_2 , o Λ_3 , todos dependientes de esas variables elegidas, para expresar la dependencia de $d\sigma$ con el ángulo azimutal de cualquiera, según:

$$d\sigma = d\sigma^{(i)}(\text{variables}) \times \{1 + \Lambda_i(\text{variables}) P \cos(2 \varphi_i)\} \quad (6.6'')$$

En la figura 6.13 se han graficado las asimetrías Λ_1 y Λ_2 , para varios valores de ω y de p_1 (representativos del caso general, como veremos), y las demás variables integradas sobre todas sus posibilidades) en función del momento de retroceso p_2 que se considera hasta $p_2 = 30$ m.

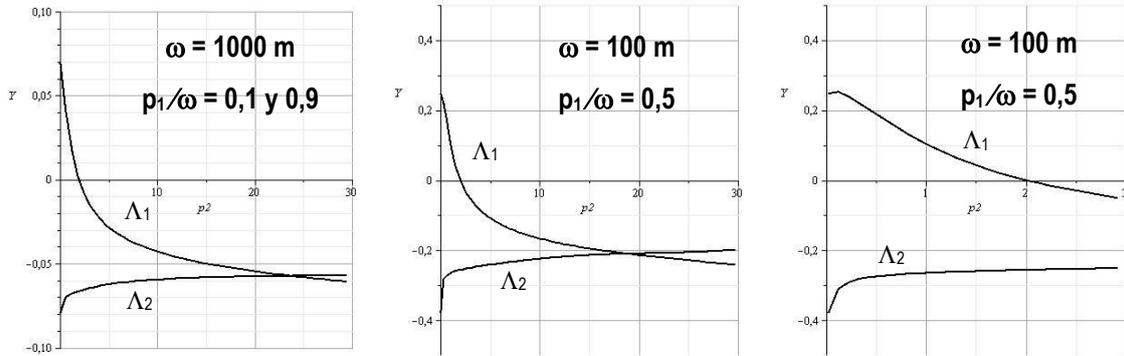


Fig. 6.13: Valor de las asimetrías Λ_1 y Λ_2 para distintos valores de ω y p_1/ω , en función del momento de retroceso, integrados sobre todas las restantes variables. **Izquierda:** $\omega = 1000$ m, $p_1 = 100$ m y 900 m, ambas confundidas; p_2 desde 0 hasta 30 m. **Centro:** $\omega = 100$ m, $p_1 = 50$ m; p_2 desde 0 hasta 30 m. **Derecha:** escala ampliada de abscisas hasta $p_2 = 3$ m, para en caso $\omega = 100$ m, $p_1 = 50$ m.

Es importante decir que el comportamiento mostrado en la figura 6.13 es totalmente independiente de la energía de los fotones (mientras sea suficientemente grande - las gráficas lo muestran para $\omega = 100$ y 1000 m, y dentro de la precisión que ellas pueden mostrar sería exactamente lo mismo para $\omega = 10000$ m) mientras se mantenga la misma relación p_1/ω .

Al cambiar la relación p_1/ω se mantienen las mismas características cualitativamente, pero el valor absoluto de las asimetrías es máximo en la condición $p_1/\omega \cong 1/2$, mostrada en las gráficas centro y derecha, y disminuye suavemente de manera bastante simétrica mientras el valor de esa relación se aleja hacia los extremos 0 o 1 .

Del análisis del comportamiento de las asimetrías se pueden extraer las siguientes conclusiones importantes (para fotones de gran energía):

1) La asimetría Λ_2 mantiene un valor negativo bastante constante para todo el rango de valores del momento de retroceso p_2 . Eso es muy importante desde el punto de vista de los posibles procedimientos de detección de la polarización, porque indica que el electrón menos energético se va a ubicar con mayor probabilidad con un ángulo azimutal perpendicular al vector \vec{P} , y que lo va a hacer para todos los valores del momento de retroceso (y de la energía de los fotones). De manera que la determinación del ángulo azimutal del momento de retroceso permite obtener la máxima información sobre la dirección de la polarización lineal de los fotones, sumando las contribuciones de todos los electrones de retroceso que puedan detectarse. Esto ha sido aprovechado para proponer sistemas de detección de la polarización por diversos autores ([25], [26], [38]).

2) Por otra parte, el hecho de que el valor de Λ_2 se mantenga sin variar mientras p_2 pasa de los valores pequeños a los grandes, contradice (e invalida) las expectativas previas de que el

momento de retroceso grande, por ser fruto de una colisión, no debería correlacionarse con la polarización de los fotones.

Si bien esta correlación no es demasiado fuerte, es difícil de comprender que se mantenga después de una colisión de parámetro de impacto bastante menor que r_0 (radio clásico del electrón). Es más, no es tanto que se mantenga sino que directamente el comportamiento de Λ_2 no muestra la menor señal de ser afectado por la existencia de esta colisión. De manera que es claro que en este punto la descripción puramente clásica del fenómeno no es suficiente, y debemos pensar que la ubicación azimutal (previa a la aniquilación), respecto de la polarización del fotón, del electrón en cuyo campo se va a producir la creación del par, tiene influencia decisiva sobre los elementos de matriz que permiten calcular la probabilidad de que el evento se concrete.

3) La única variación notable de Λ_2 es la disminución bastante marcada que tiene lugar en los valores muy bajos de p_2 , concretamente entre el valor mínimo posible y aproximadamente $0,2 m$, y para p_1/ω cercano a $1/2$. Esta variación tampoco admite una interpretación clásica.

4) La asimetría Λ_1 , por otra parte, comienza con un valor positivo considerable (del mismo orden que el valor absoluto de Λ_2) en los casos de muy bajo momento de retroceso, pero disminuye a medida que este momento aumenta, y se anula y cambia de signo antes de que alcance valores grandes.

Esta variación sí admite una interpretación clásica razonable: si el comportamiento de Λ_2 se interpreta diciendo que para fotones que viajan por el eje z , polarizados linealmente a lo largo de x , la probabilidad de ocurrir la creación de un par es mayor en la vecindad de electrones cercanos al plano definido por los ejes (z, y) , y en las condiciones de mínima interacción el par parte con mayor probabilidad en el plano (x, z) como lo indica el hecho de que Λ_1 sea positivo, al aumentar la intensidad de la interacción las partículas del par van a ser desviadas con más probabilidad en el plano (y, z) , haciendo que Λ_1 vaya disminuyendo gradualmente de valor hasta hacerse negativo.

Es más, en esta interpretación se explica naturalmente que al llegar p_2 a valores grandes, el valor de Λ_1 se aproxime al de Λ_2 .

Estos resultados correlacionan muy bien con algunas ideas que se están utilizando actualmente para diseñar polarímetros de rayos gamma [39], [40], [41], [42], utilizando los puntos de impacto de las partículas del par sobre un plano detector a cierta distancia grande (orden del metro) del punto de creación del mismo en una placa convertidora.

Según los diferentes diseños la polarización se determina a través de la asimetría azimutal ya sea de una de las partículas, ya sea de la línea que une los puntos de impacto de ambas, y realizando simulaciones estos trabajos muestran que ambas posibilidades son aceptables.

Es interesante aquí decir que los autores encuentran que (para fotones linealmente polarizados de energías grandes), la asimetría:

1) Es independiente de la energía ω de los fotones

2) Depende de la relación $E_{1/3}/\omega$: crece desde 0 para $E_{1/3} = 0$, hasta un máximo de 0,25 para $E_{1/3} = 1/2 \omega$

Estas afirmaciones coinciden totalmente con nuestras conclusiones anteriores, aunque se refieren a creación de pares en el campo nuclear, y esto es un punto muy interesante para

explorar porque esta coincidencia es muy plausible, pero no está justificada formalmente, y hay algunos aspectos en los que queda pendiente una profundización.

Porque de nuestro trabajo surge muy claramente que la asimetría azimutal en la distribución de las partículas del par (cualquiera de ellas), cambia de signo mientras el momento de retroceso pasa de valores muy pequeños a valores grandes, y el signo que corresponde a los resultados de [39/42] se obtiene descartando los valores más pequeños del momento de retroceso. Y todo sugiere que esto también debería valer el campo nuclear.

Es muy probable que los autores hayan descartado estos valores pequeños porque la expresión que utilizan para la sección eficaz considera el *apantallamiento* (de la carga nuclear por parte de los electrones atómicos), y este efecto suprime automáticamente los momentos de retroceso más bajos, pero en realidad ellos mencionan explícitamente las dificultades de integración que resultan del “pico” que tiene la sección eficaz en los valores muy bajos del momento de retroceso.

Este parece ser un campo en el que el formalismo que se ha desarrollado para este trabajo podría hacer algunas contribuciones interesantes.

CAPÍTULO 7

RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Puede decirse que todos los objetivos planteados se han alcanzado de manera satisfactoria.

En primer lugar hay una tarea más bien mecánica que se ha cumplido completamente, la cual es desarrollar los elementos de matriz correspondientes a los 8 diagramas de Feynmann de tres vértices correspondientes a este caso, y luego obtener las expresiones para el cálculo de todas las contribuciones posibles que integran la sección eficaz en este orden de aproximación.

El problema es de mucha complejidad práctica por el gran número de posibilidades que resulta de la existencia de tres partículas, agravado por la indistinguibilidad entre dos de ellas, y ha requerido, primero, que se encuentre una manera útil e inequívoca de tratarlas, lo que se ha logrado identificándolas como:

- electrón menos energético,
- electrón más energético,
- positrón.

Si bien esta clasificación obedece a una idea que puede considerarse implícita en toda la literatura sobre el tema, vale destacar que no ha sido explicitada de esta manera hasta este momento, de manera que éste ha sido un planteo *novedoso*, e *imprescindible* para un manejo inequívoco de las expresiones que resultan para las contribuciones a la sección eficaz diferencial escrita en términos de diferentes variables escogidas entre todo el espectro de posibilidades.

Adoptar esta denominación permite dejar a un lado las dificultades conceptuales que subyacen en la cuestión planteada por la mayoría de los autores, sobre si es muy probable o no, en determinadas circunstancias, que uno de los electrones sea o no el de retroceso: en el marco de la electrodinámica cuántica el electrón entrante es aniquilado en un vértice del diagrama de Feynmann que se considere, en el cual un nuevo electrón es creado.

Ninguno de los salientes es el entrante. Formalmente tenemos derecho a denominar “de retroceso” al electrón menos energético, pero no a pensar que tal vez es el mismo que existía previamente!

Una vez tomada esta decisión sobre la forma de identificar a las partículas del triplete, se han desarrollado y puesto a punto las expresiones y mecanismos de integración de las contribuciones a la sección eficaz diferencial escrita en términos de las variables dinámicas de cualquiera de las partículas, lo cual se ha organizado de manera natural en una contribución dominante, y nueve correcciones sobre ella para cada caso.

En el cálculo de la sección eficaz siempre hay una partícula cuyas variables se pueden reemplazar en términos de las otras dos aplicando la conservación del cuadrimomento, y ésa, en la casi totalidad de este trabajo ha sido la 3, que es el positrón.

Luego se ha procedido a la integración sobre las variables de la partícula 2, que en el Capítulo 5 ha sido el electrón más energético, y en el 6º ha sido el menos energético.

De esta manera en el Capítulo 5 se han estudiado propiedades del electrón menos energético, a través de la sección eficaz diferencial escrita en términos de las variables de ese electrón, que en este caso fue el 1. Y en el Capítulo 6 se han estudiado propiedades del electrón más

energético, a través de la sección eficaz diferencial escrita en términos de las variables del electrón 1, que fue el más energético en ese capítulo.

Con esta forma de identificar las variables, entonces, como se ha dicho, luego de una integración trivial sobre d^3p_3 , se ha procedido siempre a la integración sobre d^3p_2 , la cual se realiza analíticamente sobre θ_2 como se explica en el Capítulo 2, luego de que la integración sobre φ_2 se reemplaza por un procedimiento trivial debido a las propiedades generales de la interacción electromagnética en el caso de fotones linealmente polarizados.

Esta integración analítica sobre θ_2 hace que, debido a las diferentes formas de presentarse esta variable en los denominadores, haya un procedimiento diferente para cada uno de los diez términos que se consideran, según las fórmulas que se muestran en el Apéndice 6.

De manera que este aparato de cálculo se ha aplicado en el Capítulo 5 al estudio de la sección eficaz escrita en función de las variables del electrón menos energético, obteniéndose los elementos que se necesitan para el sorteo de esta partícula en una simulación Montecarlo:

- Una expresión simplificadora que permite incorporar todas las correcciones al término dominante en la zona de interés, sin calcularlas explícitamente
- Expresiones simplificadoras para reemplazar el cálculo del término dominante por expresiones más adecuadas para una simulación Montecarlo, a partir de los desarrollos de otros autores [25], y [26].

Además se ha procedido al análisis de las posibilidades experimentales de determinar la polarización del haz incidente a través de la asimetría en la distribución azimutal de la partícula menos energética, haciendo los aportes que surgen de nuestros cálculos [38], corroborando las propuestas ya conocidas [25], [26].

Luego el aparato de cálculo se ha aplicado en el Capítulo 6 al estudio de la sección eficaz escrita en términos de las variables de cualquiera de las partículas del par, definidas explícitamente como el conjunto del positrón y el electrón más energético.

Es este caso se ha realizado un estudio básico de las posibilidades de ambas partículas, seguido de un cálculo de las correcciones de todos los diagramas sobre el término dominante, encontrándose una expresión simplificadora para evitar el cálculo de todas estas correcciones dentro de cierto rango de valores de las variables.

Hasta este punto podría decirse que la tarea realizada cubre muy bien las necesidades de una simulación Montecarlo para fotones de energías superiores a 50 MeV, pero que para la partícula más energética aún queda pendiente el cálculo explícito de todas las contribuciones para *diferentes valores del umbral de detección*, ya que en razón de la enorme cantidad de horas de cálculo que insumen, los cálculos se han completado solamente para un umbral $q_u = m c^2$.

Pero la tarea más relevante que se ha hecho con las partículas del par ha sido la aplicación del aparato de cálculo al estudio de las posibilidades angulares de estas partículas, lo que ha permitido realizar un análisis de la influencia de la polarización lineal de los fotones sobre dichas posibilidades angulares, y de allí obtener conclusiones sobre métodos posibles para determinar experimentalmente dicha polarización.

Estas conclusiones avalan las propuestas de polarímetros existentes actualmente, pero en realidad el aval es parcial, y deja entrever un cierto campo de posibilidades que sería

necesario explorar mucho más, y estaría perfectamente al alcance de nuestro aparato de cálculo.

Por otra parte el estudio de las posibilidades angulares de las partículas del par ha mostrado las posibilidades de interpretar aspectos físicos de gran parte del fenómeno de una forma bastante simple, independiente de la parte compleja del formalismo matemático, a través de la cual puede llegarse a concebir posibilidades que luego los cálculos simplemente, o descartan, o completan y perfeccionan.

Este análisis además ha enriquecido considerablemente las formas de presentar los aspectos básicos del fenómeno, con un enfoque considerablemente didáctico y cercano a los razonamientos físicos, como se esperaba lograr.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]: R. Mirzoyan. *Brief history of ground-based very high energy gamma-ray astrophysics with atmospheric air Cherenkov telescopes*. Astroparticle Physics (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.astropartphys.2013.11.004>
- [2]: J. Buckley, K. Byrum, B. Dingus, A. Falcone, P. Kaaret, H. Krawczynski, M. Pohl, V. Vassiliev, D.A. Williams. *The Status and future of ground-based TeV gamma-ray astronomy. A White Paper prepared for the Division of Astrophysics of the American Physical Society*. Astroparticle Physics (2008), arXiv:0810.0444 [astro-ph]
- [3]: M. Tavani, et al. 2003, *The AGILE instrument*, Proc. SPIE 4851, X-Ray and Gamma-Ray Telescopes and Instruments for Astronomy, 1151 (March 10, 2003); doi: 10.1117/12.461312
- [4]: P.F. Michelson, 2003, *Instrumentation for the Gamma-ray Large Area Space Telescope (GLAST) mission*, Proc. SPIE 4851, X-Ray and Gamma-Ray Telescopes and Instruments for Astronomy, 1144 (March 10, 2003); doi:10.1117/12.461541
- [5]: W. Cui, 2009, *TeV gamma-ray astronomy*, Research in Astron. Astrophys. 9, No. 8, 841-860
- [6]: C.E. Fichtel, et al. 1976, *Significance of Medium-Energy Gamma-Ray Astronomy to the Study of Cosmic Rays*, ApJ, 208, 211-219
- [7]: Aharonian, F.A. *Astronomy: The cosmic accelerator*. Nature, 416, 797 (2002).
- [8]: Aharonian, F.A., et al., *High-energy particle acceleration in the shell of a supernova remnant*. Nature, 432, 75 (2004).
- [9]: A. Borsellino. Rev. Univ. Nac. Tucumán. 6, 7 (1947).
- [10]: W. Heitler. *The quantum theory of radiation*. Cap. V. §26. Oxford University Press. London. 3° Ed. 1954.
- [11]: J. M. Jauch, F. Rohrlich. *Theory of Photons and Electrons*. Addison-Wesley Publishing Company Inc. Cambridge. 1955.
- [12]: H. Davies, H. A. Bethe, L.C. Maximon. *Theory of bremsstrahlung and pair production. II. Integral cross section for pair production*. Phys. Rev. 93, 788 (1954).
- [13]: H. A. Bethe, L.C. Maximon. *Theory of bremsstrahlung and pair production. I. Differential cross section*. Phys. Rev. 93, 768 (1954).
- [14]: H. Olsen, L.C. Maximon. *Electron and photon polarization in bremsstrahlung and pair production*. Phys. Rev. 110, 589 (1958).
- [15]: L.C. Maximon, H. Olsen. *Measurement of linear photon polarization by pair photoproduction*. Phys. Rev. 126, 310 (1962).
- [16]: H. Olsen. *Opening angles of electron-positron pairs*. Phys. Rev. 131, 406 (1963).

- [17]: M. Shklyarevskii. *Inelastic scattering of photons by a coulomb field accompanied by electron-positron pair production*. Soviet Physics JETP, 19, 2, 470 (1964).
- [18]: J. W. Motz, H. A. Olsen, H. W. Koch. *Pair production by photons*. Rev. of Mod. Phys. 41.4.I. 581 - Octubre 1969.
- [19]: J. Joseph, F. Rohrlich. *Pair production and bremsstrahlung in the field of free and bound electrons*. Rev. of Modern Phys. 30, 354. Abril 1958.
- [20]: J. Wheeler, W. Lamb. *Influence of atomic electrons on radiation and pair production*. Phys. Rev. 55, 858. Mayo 1939.
- [21]: H. Olsen. *Differential bremsstrahlung and pair production cross sections at high energies*. Phys. Rev. D 68, 033008 (2003).
- [22]: K. J. Mork. *Pair production by photons on electrons*. Phys. Rev. 160, 5. 1065. Agosto 1967.
- [23]: E. Haug. *Bremsstrahlung and pair production in the field of free electrons*. Z. Naturforsch (Univ. Tübingen). 30 a. 1099. (1975).
- [24]: E. A. Vinokurov, É. A. Kuraev. *Production of triplets by polarized photons*. Sov. Phys. JETP 36, 602 (1973).
- [25]: V. F. Boldyshev, Yu. P. Peresun'ko. *Electron-positron pair photoproduction on electrons and analysis of photon beam polarization*. Sov. Jr. Nucl. Phys. 14, 5, 576 (1972).
- [26]: V. F. Boldyshev, E. A. Vinokurov, N. P. Perenkov, Yu. P. Peresun'ko. *Measurement of photon-beam linear polarization using asymmetry of the recoil electrons from the photoproduction of $e^+ e^-$ pairs of electrons*. Phys. Part. Nucl. 25 (3), May-June 1994.
- [27]: Akushevich, I. V., Anlauf, H., Kuraev, É. A., Shaikhatdenov, B. G., Ratcliffe, P. G. *Triplet production by linearly polarized photons*. Phys. Rev. A, 61, 032703 (2000).
- [28]: H. Olsen. *Differential bremsstrahlung and pair production cross sections at high energies*. Phys. Rev. D 68, 033008 (2003).
- [29]: M.L. Iparraguirre, G.O. Depaola. *Pair production by γ -rays on electrons threshold for the momentum recoil detection*. Eur. Phys. Jour. C 71 (2011) 1778.
- [30]: H. A: Grimm. *Cross sections for the photoproduction of electron-positron pairs in the field of atomic electrons*. Phys. Rev. A 25, 823 (1982).
- [31]: Yu. A. Chesnokov, V. A. Maiseev, D. Bolognini, S. Hasan, M. Prost, E. Vallazza. *Photoproduction of electron-positron pairs in bent single crystals*. Phys. Rev. S T Accel. Beams 13, 070706 (2010).
- [32]: V.N. Baier, V. M. Katkov. *Influence of medium on pair photoproduction and bremsstrahlung*. Phys. Rev. D 62, 036008 (2000).

- [33]: S. R. Klein. *e^+e^- Pair production from 10 GeV to 10 ZeV*. Radiation Physics and Chemistry 75. 696 (2006).
- [34]: H. D. Hansen, U. I. Uggerhøj. Landau-Pomeranchuk-Migdal effect for multihundred GeV electrons. Phys. Rev. D 69, 032001 (2004).
- [35]: G. Corbò. Radiative corrections in electron-positron pair photoproduction. Phys. Rev. D 17, 725 (1978).
- [36]: A. O. Barut, Z. Z. Aydin, I. H. Duru. Photoproduction of a ν pair from an electron and astrophysical implications of neutrino-emission processes. Phys. Rev. D 32, 3051 (1985).
- [37]: A. Szczurek, A. Szczepaniak. Diffractive photoproduction of opposite-charge pseudoscalar meson pairs at high energies. Phys. Rev. D 71, 054005 (2005).
- [38]: G.O. Depaola, M.L. Iparraguirre. *Angular distribution for the electron recoil in pair production by linearly polarized γ - rays on electrons*. Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A.Ms. Ref. No.: NIMA-D-09-00399R2.
- [39]: B. Wojtsekhowski, D. Tedeschi, B. Vlahovic. *A pair polarimeter for linearly polarized hig-energy photons*. Nuclear Ins. And Methods in Phys. Res. A . 515 (2003) 605-613.
- [40]: C. de Jager, B. Wojtsekhowski, D. Tedeschi, B. Vlahovic, D. Abbott, J. Asai, G. Feldman, T. Hotta, M. Khadaker, H. Kohri, T. Matsumara, T. Mibe, T. Nakano, V. Nelyubin, G. Orielly, A. Rudge, P. Weilhammer, M. Wood, T. Yorita, R. Zegers. *A pair polarimeter for linearly polarized hig-energy photons*. arXiv:physics/0702246v1 [physics.ins-det] 28 Feb 2007.
- [41]: D. Bernard. *TPC in γ -ray astronomy above pair creation threshold*. Nucl. Inst. and Meth. In Phys. Res. A 701, 225 (2013).
- [42]: D. Bernard. *Polarimetry of cosmic gamma-ray sources above pair creation threshold*. Nucl. Inst. and Meth. in Phys. Res. A 729, 765 (2013).
- [43]: F. Mandl, G. Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley & Sons. 1984 – Great Britain.
- [44]: V. N. Baier, V. S. Fadin, y V. A. Khoze. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **50**, 156 (1966) [Sov. Phys. JETP **23**, 104 (1966)].

APÉNDICE 1:

Expresión de la sección eficaz de creación de pares en el campo de un electrón.

Planteo general de la sección eficaz diferencial

El planteo general cuando se estudia la dispersión de partículas 1 incidentes sobre un blanco de partículas 2, está basado sobre una serie de convenciones usuales que permiten el tratamiento, y que se considerarán aquí.

Supongamos un haz de partículas 1 uniformemente distribuidas en una región lejana, viajando todas con velocidad $\vec{v}_0 = \vec{v}_1(-\infty)$ hacia la región del blanco, el cual, para comenzar el planteo puede considerarse una única partícula 2 fija en el origen de un referencial K.

Se supone que puede distinguirse una región de volumen V en torno a la partícula 2 dentro de la cual es posible la interacción con las 1. Fuera de esta región cada partícula 1 puede considerarse *libre*.

Además la densidad n_1 de partículas 1 por unidad de volumen es suficientemente pequeña como para que tampoco haya interacciones entre ellas.

Perpendicularmente a la dirección de \vec{v}_0 definimos un plano π . Sobre este plano definimos el elemento de superficie dS , por el cual pasarían $dN_1 = n_1 v_0 dS dt$ partículas 1 en el intervalo dt , en caso de no ocurrir interacción.

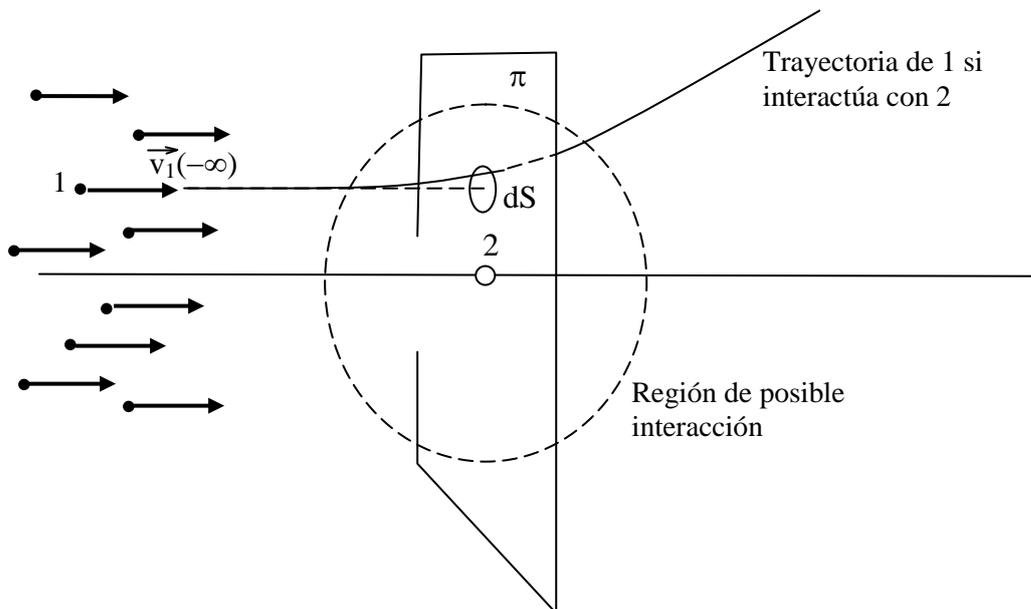


Figura 1.1: Esquema de la posible interacción entre un haz de partículas 1 que inciden sobre un blanco consistente en partículas 2 en reposo.

El flujo de partículas incidentes por unidad de área y de tiempo, I_0 estaría dado por:

$$I_0 = \frac{dN_1}{dt dS} = n_1 v_0$$

Ahora bien, si P es la probabilidad que tienen estas partículas 1 que pasarían por dS de interactuar con la 2 (aunque no lo especifiquemos P es función de todas las características de ambas partículas, de \vec{v}_0 , y también de la ubicación de dS), entonces el número de partículas dN_{II} que interactuaron en el intervalo dt y que de no haberlo hecho hubieran pasado por dS (sin interesar si lo hicieron o no) está dado por:

$$dN_{II} = P dN_1 = P I_0 dS dt$$

Ahora bien:

Para cada elemento de sección transversal dS , se define la *sección eficaz diferencial*, $d\sigma$, como el producto $P dS$:

$$d\sigma = P dS$$

De manera que:

$$I_0 d\sigma = \frac{dN_{II}}{dt}$$

Es decir que la sección eficaz diferencial es, para cada dS , el cociente entre el número de interacciones que sufren por unidad de tiempo las partículas que hubieran pasado por allí de no existir el centro dispersor, por cada partícula dispersora 2, y por unidad de flujo incidente I_0 .

Lo que ocurre a las partículas 1 que interactúan depende del fenómeno que se considera: en el caso de este trabajo la partícula 1 es un fotón antes de entrar en la región de volumen V , y luego de alejarse de allí es un par electrón positrón viajando cada uno por separado como momentos \vec{p}'_2 y \vec{p}'_3 orientados en distintos ángulos sólidos $d\Omega_2$ y $d\Omega_3$.

Es claro que cada elemento $d\sigma$ depende del dS que le corresponde, y puede ser escrito en función del movimiento de las partículas emergentes más allá de la región de interacción, pero eso no interesa aquí, ya que será hecho donde corresponda a lo largo del trabajo, a partir en cada caso, del elemento de volumen del espacio fásico, $d^3p'_j$, al cual corresponden los estados cuánticos posibles posteriores a la interacción.

Lo que interesa aquí es poder escribir la probabilidad de interacción en cada punto, a partir de los elementos de matriz de la interacción entre los estados iniciales y finales.

Probabilidad de transición y sección eficaz diferencial

Consideraremos la situación de un haz de partículas incidentes consistentes en fotones de energía ω linealmente polarizados, que inciden sobre electrones en reposo. El índice i indicará cada una de estas partículas.

El estado final está dado por el estado cuántico de tres electrones (dos negativos y uno positivo) cada uno con momento \vec{p}'_j orientado dentro del ángulo sólido $d\Omega_j$.

El proceso de transición desde el estado inicial a cada estado final posible está comandado por una probabilidad de transición por unidad de tiempo, w , que para cada diagrama de Feynmann está dada por Mandl & Shaw [18]:

$$w = V (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f' - p_i) \left(\prod_i \frac{1}{2V E_i} \right) \left(\prod_j \frac{1}{2V E_j'} \right) \left(\prod_{\text{leptones}} 2m \right) |M|^2$$

En donde:

- V es el volumen (en teoría infinitamente grande) en el cual tiene lugar la interacción,
- δ^4 es una delta de Dirac cuatridimensional que da cuenta de la conservación del cuatrimomento,
- El índice i toma valores 1 y 2, y el j 1, 2, y 3, indicando respectivamente cada partícula inicial o final, mientras que los leptones se cuentan indistintamente iniciales y finales.
- M es el elemento de matriz correspondiente al diagrama de Feynmann que se considera,
- Están sobreentendidos los índices indicativos de la polarización y demás detalles de cada estado, los cuales no se indican, pero claramente M depende de todos ellos,

Para nuestro caso particular esta expresión queda:

$$\begin{aligned} w &= V (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f' - p_i) \frac{1}{4V^2 \omega m} \frac{1}{8V^3 E_1' E_2' E_3'} 16m^4 |M|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f' - p_i) \frac{1}{2\omega} \frac{1}{V^4 E_1' E_2' E_3'} m^3 |M|^2 \end{aligned}$$

Esta es la probabilidad de transición desde el único estado inicial, a cada uno de los estados finales, de manera que deberemos considerar que para cada partícula (y para cada polarización) el número de estados entre \vec{p}'_j y $\vec{p}'_j + d\vec{p}'_j$ está dado por:

$$\frac{V d^3 p'_j}{(2\pi)^3}$$

Ahora bien, la sección eficaz diferencial $d\sigma$ escrita en términos de los estados dinámicos finales de las partículas producto de la interacción, \vec{p}'_1 , \vec{p}'_2 , y \vec{p}'_3 , es el ritmo de transición hacia el conjunto de estados en $d^3 p'_1 d^3 p'_2 d^3 p'_3$ por cada centro dispersor y por unidad de flujo incidente, de manera que considerando un electrón dispersor en el volumen V, y teniendo en cuenta que el flujo de fotones por unidad de área y tiempo es $1/V$ (no olvidar que $c = 1$), podremos escribir:

$$\begin{aligned} d\sigma &= w V \prod_j \frac{V d^3 p'_j}{(2\pi)^3} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f' - p_i) \frac{1}{2\omega} \frac{1}{V^4 E_1' E_2' E_3'} m^3 |M|^2 V \prod_j \frac{V d^3 p'_j}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{m^3}{2\omega} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p'_1}{E_1'} \frac{d^3 p'_2}{E_2'} \frac{d^3 p'_3}{E_3'} \delta^4(\sum p_f' - p_i) |M|^2 \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que los elementos de matriz de diagramas de tres vértices como los que nos ocupan estarán precedidos por el factor e^3 , y que irán elevados al cuadrado, podemos incorporar los factores que contienen las potencias adecuadas de e :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$$

Con los cuales quedará la expresión básica (2.1) de nuestro trabajo:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{4\pi^2 \omega m} \frac{d^3 p'_1}{E'_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} \frac{d^3 p'_3}{E'_3} \delta^4(\sum p'_i - p_i) \frac{4m^6}{e^6} |M|^2$$

APÉNDICE 2:

Valores extremos de p_2 , dados p_1 y θ_1 .

A continuación el programa de Maple con el cálculo de las expresiones.

```
> "CÁLCULO DE LOS VALORES EXTREMOS p2a y p2b, RESOLVIENDO LA
ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO C^2 = p2^2 G ":
>
> E1:='E1': E2:='E2': p1:='p1': p2:='p2':
>
>
> C:=(omega+1)*(E1+E2-1)-E1*E2-omega*p1*cos(theta1):
> G:=omega*omega+p1*p1-2*omega*p1*cos(theta1):
>
> solve(C^2-(E2^2-1)*G,E2);
```

$$\left(\begin{aligned} &(-\omega^2 EI - 2 EI + \omega p1 \cos(\theta1) - 3 \omega EI + \omega^2 p1 \cos(\theta1) + \omega EI^2 + 2 \omega + EI^2 \\ &- EI \omega p1 \cos(\theta1) + 1 + \omega^2 \\ &+ (2 \omega^2 p1^2 - 2 \omega^3 p1 \cos(\theta1) + 2 p1^3 \omega^2 \cos(\theta1) \\ &- 4 \omega^3 p1^2 \cos(\theta1)^2 + \omega^4 p1^2 \cos(\theta1)^2 - 2 \omega p1^3 \cos(\theta1) + 2 p1^2 \omega EI^2 \\ &- 2 p1^2 \omega^2 EI + p1^2 \omega^2 EI^2 - 2 \omega EI p1^2 + \omega^4 + 2 \omega^4 p1 \cos(\theta1) \\ &+ 4 \omega^2 EI p1 \cos(\theta1) + p1^4 + \omega^4 EI^2 + 2 \omega^3 EI^2 - 2 \omega^3 EI - 2 \omega^4 EI \\ &+ 2 \omega^3 EI p1 \cos(\theta1) - 2 p1^3 EI \omega \cos(\theta1) - 2 p1^3 \omega^2 EI \cos(\theta1) \\ &+ 4 \omega^3 p1^2 \cos(\theta1)^2 EI - 2 \omega^4 EI p1 \cos(\theta1) - 2 \omega^3 EI^2 p1 \cos(\theta1) \\ &- 4 \omega^2 p1 \cos(\theta1) EI^2 + 4 \omega^2 p1^2 \cos(\theta1)^2 EI + p1^4 \omega^2 \cos(\theta1)^2 \\ &- 2 \omega^3 p1^3 \cos(\theta1)^3)^{1/2} \Big/ (-2 \omega EI + 1 - p1^2 + EI^2 - 2 EI + 2 \omega \\ &+ 2 \omega p1 \cos(\theta1)), \left(-\omega^2 EI - 2 EI + \omega p1 \cos(\theta1) - 3 \omega EI \right. \\ &+ \omega^2 p1 \cos(\theta1) + \omega EI^2 + 2 \omega + EI^2 - EI \omega p1 \cos(\theta1) + 1 + \omega^2 \\ &- (2 \omega^2 p1^2 - 2 \omega^3 p1 \cos(\theta1) + 2 p1^3 \omega^2 \cos(\theta1) \\ &- 4 \omega^3 p1^2 \cos(\theta1)^2 + \omega^4 p1^2 \cos(\theta1)^2 - 2 \omega p1^3 \cos(\theta1) + 2 p1^2 \omega EI^2 \\ &- 2 p1^2 \omega^2 EI + p1^2 \omega^2 EI^2 - 2 \omega EI p1^2 + \omega^4 + 2 \omega^4 p1 \cos(\theta1) \\ &+ 4 \omega^2 EI p1 \cos(\theta1) + p1^4 + \omega^4 EI^2 + 2 \omega^3 EI^2 - 2 \omega^3 EI - 2 \omega^4 EI \\ &+ 2 \omega^3 EI p1 \cos(\theta1) - 2 p1^3 EI \omega \cos(\theta1) - 2 p1^3 \omega^2 EI \cos(\theta1) \\ &+ 4 \omega^3 p1^2 \cos(\theta1)^2 EI - 2 \omega^4 EI p1 \cos(\theta1) - 2 \omega^3 EI^2 p1 \cos(\theta1) \\ &- 4 \omega^2 p1 \cos(\theta1) EI^2 + 4 \omega^2 p1^2 \cos(\theta1)^2 EI + p1^4 \omega^2 \cos(\theta1)^2 \\ &- 2 \omega^3 p1^3 \cos(\theta1)^3)^{1/2} \Big/ (-2 \omega EI + 1 - p1^2 + EI^2 - 2 EI + 2 \omega \\ &+ 2 \omega p1 \cos(\theta1)) \end{aligned} \right)$$

```
>
> E2b:=(-2*E1+omega*E1^2-3*omega*E1-
omega^2*E1+omega^2*p1*cos(theta1)+2*omega+omega^2-
E1*omega*p1*cos(theta1)+1+omega*p1*cos(theta1)+E1^2+sqrt(-
2*p1^3*omega^2*E1*cos(theta1)-2*p1^3*E1*omega*cos(theta1)-
2*p1^2*omega^2*E1+p1^2*omega^2*E1^2+2*p1^2*omega*E1^2+2*p1^3*o
mega^2*cos(theta1)+p1^4*omega^2*(cos(theta1))^2-
4*E1^2*omega^2*p1*cos(theta1)+2*omega^3*E1*p1*cos(theta1)+4*om
```

```

ega^2*E1*p1*cos(theta1)+4*omega^3*p1^2*(cos(theta1))^2*E1-
2*omega^3*p1*cos(theta1)*E1^2+4*omega^2*p1^2*(cos(theta1))^2*E
1-2*omega*E1*p1^2+2*omega^3*E1^2-2*omega^4*E1-
2*omega^3*E1+omega^4*E1^2+omega^4-
2*omega^4*p1*cos(theta1)*E1+omega^4*p1^2*(cos(theta1))^2-
2*omega^3*p1*cos(theta1)+2*omega^4*p1*cos(theta1)-
2*omega^3*p1^3*(cos(theta1))^3-4*omega^3*p1^2*(cos(theta1))^2-
2*omega*p1^3*cos(theta1)+2*omega^2*p1^2+p1^4))/(-
2*omega*E1+1+2*omega-2*E1+E1^2-p1^2+2*omega*p1*cos(theta1)):
>
> E2a:=(-2*E1+omega*E1^2-3*omega*E1-
omega^2*E1+omega^2*p1*cos(theta1)+2*omega+omega^2-
E1*omega*p1*cos(theta1)+1+omega*p1*cos(theta1)+E1^2-sqrt(-
2*p1^3*omega^2*E1*cos(theta1)-2*p1^3*E1*omega*cos(theta1)-
2*p1^2*omega^2*E1+p1^2*omega^2*E1^2+2*p1^2*omega*E1^2+2*p1^3*o
mega^2*cos(theta1)+p1^4*omega^2*(cos(theta1))^2-
4*E1^2*omega^2*p1*cos(theta1)+2*omega^3*E1*p1*cos(theta1)+4*om
ega^2*E1*p1*cos(theta1)+4*omega^3*p1^2*(cos(theta1))^2*E1-
2*omega^3*p1*cos(theta1)*E1^2+4*omega^2*p1^2*(cos(theta1))^2*E
1-2*omega*E1*p1^2+2*omega^3*E1^2-2*omega^4*E1-
2*omega^3*E1+omega^4*E1^2+omega^4-
2*omega^4*p1*cos(theta1)*E1+omega^4*p1^2*(cos(theta1))^2-
2*omega^3*p1*cos(theta1)+2*omega^4*p1*cos(theta1)-
2*omega^3*p1^3*(cos(theta1))^3-4*omega^3*p1^2*(cos(theta1))^2-
2*omega*p1^3*cos(theta1)+2*omega^2*p1^2+p1^4))/(-
2*omega*E1+1+2*omega-2*E1+E1^2-p1^2+2*omega*p1*cos(theta1)):
>
> "VERIFICACIÓN DE LAS RAÍCES E2a y E2b ":
>
> E1:=sqrt(p1^2+1):
>
> E2:=E2b: simplify(C^2-(E2b^2-1)*G);
> E2:=E2a: simplify(C^2-(E2a^2-1)*G);
>
> "CÁLCULO DE p2a y p2b ":
> E1 := 'E1':
> p2B := sqrt(E2b^2-1);

```

$$\begin{aligned}
p2B := & \left(\left(-\omega^2 EI - 2EI + \omega pl \cos(\theta l) - 3\omega EI + \omega^2 pl \cos(\theta l) \right. \right. \\
& + \omega EI^2 + 2\omega + EI^2 - EI \omega pl \cos(\theta l) + 1 + \omega^2 \\
& + (2\omega^2 pl^2 - 2\omega^3 pl \cos(\theta l) + 2pl^3 \omega^2 \cos(\theta l) \\
& - 4\omega^3 pl^2 \cos(\theta l)^2 + \omega^4 pl^2 \cos(\theta l)^2 - 2\omega pl^3 \cos(\theta l) + 2pl^2 \omega EI^2 \\
& - 2pl^2 \omega^2 EI + pl^2 \omega^2 EI^2 - 2\omega EI pl^2 + \omega^4 + 2\omega^4 pl \cos(\theta l) \\
& + 4\omega^2 EI pl \cos(\theta l) + pl^4 + \omega^4 EI^2 + 2\omega^3 EI^2 - 2\omega^3 EI - 2\omega^4 EI \\
& + 2\omega^3 EI pl \cos(\theta l) - 2pl^3 EI \omega \cos(\theta l) - 2pl^3 \omega^2 EI \cos(\theta l) \\
& + 4\omega^3 pl^2 \cos(\theta l)^2 EI - 2\omega^4 EI pl \cos(\theta l) - 2\omega^3 EI^2 pl \cos(\theta l) \\
& - 4\omega^2 pl \cos(\theta l) EI^2 + 4\omega^2 pl^2 \cos(\theta l)^2 EI + pl^4 \omega^2 \cos(\theta l)^2 \\
& \left. \left. - 2\omega^3 pl^3 \cos(\theta l)^3 \right)^{1/2} \right)^2 / \left(-2\omega EI + 1 - pl^2 + EI^2 - 2EI + 2\omega \right. \\
& \left. + 2\omega pl \cos(\theta l) \right)^2 - 1
\end{aligned}$$

> p2A := sqrt(E2a^2-1);

$$\begin{aligned}
p2A := & \left(\left(-\omega^2 EI - 2EI + \omega pl \cos(\theta l) - 3\omega EI + \omega^2 pl \cos(\theta l) \right. \right. \\
& + \omega EI^2 + 2\omega + EI^2 - EI \omega pl \cos(\theta l) + 1 + \omega^2 \\
& - (2\omega^2 pl^2 - 2\omega^3 pl \cos(\theta l) + 2pl^3 \omega^2 \cos(\theta l) \\
& - 4\omega^3 pl^2 \cos(\theta l)^2 + \omega^4 pl^2 \cos(\theta l)^2 - 2\omega pl^3 \cos(\theta l) + 2pl^2 \omega EI^2 \\
& - 2pl^2 \omega^2 EI + pl^2 \omega^2 EI^2 - 2\omega EI pl^2 + \omega^4 + 2\omega^4 pl \cos(\theta l) \\
& + 4\omega^2 EI pl \cos(\theta l) + pl^4 + \omega^4 EI^2 + 2\omega^3 EI^2 - 2\omega^3 EI - 2\omega^4 EI \\
& + 2\omega^3 EI pl \cos(\theta l) - 2pl^3 EI \omega \cos(\theta l) - 2pl^3 \omega^2 EI \cos(\theta l) \\
& + 4\omega^3 pl^2 \cos(\theta l)^2 EI - 2\omega^4 EI pl \cos(\theta l) - 2\omega^3 EI^2 pl \cos(\theta l) \\
& - 4\omega^2 pl \cos(\theta l) EI^2 + 4\omega^2 pl^2 \cos(\theta l)^2 EI + pl^4 \omega^2 \cos(\theta l)^2 \\
& \left. \left. - 2\omega^3 pl^3 \cos(\theta l)^3 \right)^{1/2} \right)^2 / \left(-2\omega EI + 1 - pl^2 + EI^2 - 2EI + 2\omega \right. \\
& \left. + 2\omega pl \cos(\theta l) \right)^2 - 1
\end{aligned}$$

>

>

> p2a:= (1/4*(-1-2*omega-omega^2-E1^2-
omega^2*p1*cos(theta1)+2*E1-
omega*p1*cos(theta1)+E1*omega*p1*cos(theta1)+omega^2*E1-
omega*E1^2+3*omega*E1+(-1-2*omega+2*E1-2*omega^2-2*p1^2-
2*omega^3*p1*cos(theta1)+2*omega^4*p1*cos(theta1)+E1^4-
2*E1^3+6*omega^2*E1*p1*cos(theta1)+2*E1*omega*p1*cos(theta1)+4
*omega*E1-2*omega^2*p1*cos(theta1)-
omega^2*p1^2*cos(theta1)^2+omega^4*E1^2+omega^2*E1^4-
2*omega*p1^2+2*E1*p1^2-
2*omega^3*p1^3*cos(theta1)^3+omega^4+omega^4*p1^2*cos(theta1)^
2-4*omega^3*p1^2*cos(theta1)^2-
2*omega*p1^3*cos(theta1)+2*omega^3*E1*p1*cos(theta1)-
2*E1^2*omega^2*p1*cos(theta1)-
2*E1^3*omega*p1*cos(theta1)+4*omega^3*p1^2*cos(theta1)^2*E1-

```

2*omega^4*p1*cos(theta1)*E1-
2*omega^3*p1*cos(theta1)*E1^2+4*omega^2*p1^2*cos(theta1)^2*E1+
E1^2*omega^2*p1^2*cos(theta1)^2-
2*E1^3*omega^2*p1*cos(theta1)+omega^2*E1^2+2*omega^2*E1-
2*omega^3*E1-2*omega^4*E1+2*omega^3*E1^2-
2*E1^3*omega^2+2*E1^4*omega-
4*E1^3*omega+2*omega*E1*p1^2)^(1/2))^2/(omega*E1-omega-
omega*p1*cos(theta1)-1+E1)^2-1)^.5:
>
>
> p2b:= (1/4*(-1-2*omega-omega^2-E1^2-
omega^2*p1*cos(theta1)+2*E1-
omega*p1*cos(theta1)+E1*omega*p1*cos(theta1)+omega^2*E1-
omega*E1^2+3*omega*E1-(-1-2*omega+2*E1-2*omega^2-2*p1^2-
2*omega^3*p1*cos(theta1)+2*omega^4*p1*cos(theta1)+E1^4-
2*E1^3+6*omega^2*E1*p1*cos(theta1)+2*E1*omega*p1*cos(theta1)+4
*omega*E1-2*omega^2*p1*cos(theta1)-
omega^2*p1^2*cos(theta1)^2+omega^4*E1^2+omega^2*E1^4-
2*omega*p1^2+2*E1*p1^2-
2*omega^3*p1^3*cos(theta1)^3+omega^4+omega^4*p1^2*cos(theta1)^
2-4*omega^3*p1^2*cos(theta1)^2-
2*omega*p1^3*cos(theta1)+2*omega^3*E1*p1*cos(theta1)-
2*E1^2*omega^2*p1*cos(theta1)-
2*E1^3*omega*p1*cos(theta1)+4*omega^3*p1^2*cos(theta1)^2*E1-
2*omega^4*p1*cos(theta1)*E1-
2*omega^3*p1*cos(theta1)*E1^2+4*omega^2*p1^2*cos(theta1)^2*E1+
E1^2*omega^2*p1^2*cos(theta1)^2-
2*E1^3*omega^2*p1*cos(theta1)+omega^2*E1^2+2*omega^2*E1-
2*omega^3*E1-2*omega^4*E1+2*omega^3*E1^2-
2*E1^3*omega^2+2*E1^4*omega-
4*E1^3*omega+2*omega*E1*p1^2)^(1/2))^2/(omega*E1-omega-
omega*p1*cos(theta1)-1+E1)^2-1)^.5:
>
> "VERIFICACIÓN DE QUE p2a y p2b SON CORRECTOS":
>
> E1 := sqrt(p1^2+1):
> simplify(p2A-p2a);
0
> simplify(p2B-p2b);
0

```

APÉNDICE 3:**Variación φ_{21} mientras θ_2 recorre su rango de validez.**

Los extremos x^\pm del intervalo $x^- \leq x = \cos\theta_2 \leq x^+$, que están dados por (2.14), son las raíces de $F(\cos\theta_2) = 0$, y por lo tanto corresponden a $\cos\varphi_{21} = 0$, es decir, a $\cos\varphi_{21} = 1$ ó -1 .

Ahora bien, en la expresión (2.8'), con p_1 , θ_1 y p_2 fijados dentro de sus respectivos rangos, valuemos x en la menor raíz (x^- , que corresponde al mayor θ_2), y supongamos, para ver que *no es posible*, que $\cos\varphi_{21} = +1$:

$$(\omega - p_1 \cos\theta_1) p_2 \cos\theta_2^- - C = p_1 p_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2^-$$

Ahora bien, cuando se evalúe la expresión en la otra raíz, θ_2^+ , aumentará levemente $\cos\theta_2$ mientras disminuye $\sin\theta_2$, y dado que todos los términos son positivos, ya la expresión no podrá verificarse. Esto significa que para esta nueva raíz $\cos\varphi_{21}$ no podrá valer $+1$. Pero tampoco podrá valer -1 , porque ello implicaría hacer negativo el miembro derecho, mientras el izquierdo simplemente habría aumentado de valor sin cambiar de signo.

De manera que, para $x = x^-$ necesariamente se tiene $\cos\varphi_{21} = -1$, y ello significa que se cumple:

$$(\omega - p_1 \cos\theta_1) p_2 \cos\theta_2^- - C = - p_1 p_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2^-$$

Ahora tenemos que el primer término del miembro izquierdo debe ser menor que C , y cuando se evalúe la expresión en la otra raíz, θ_2^+ , al aumentar levemente $\cos\theta_2$, eso podrá resultar en que, o bien:

a) Todo el miembro disminuya en valor absoluto, conservando su signo negativo, lo cual corresponderá a que se mantenga la igualdad mientras disminuye $\sin\theta_2$, con $\cos\varphi_{21} = -1$,

O bien,

b) Cambie el signo del miembro izquierdo, lo cual corresponderá a que $\cos\varphi_{21} = +1$.

Vale decir que al efectuar explícitamente los cálculos se verifican estos resultados.

Efectivamente se encuentra, para $\theta_2 = \theta_2^+$, que en la gran mayoría de las situaciones $\cos\varphi_{21} = +1$, y en algunas pocas aparece el signo menos (mientras, por supuesto, que siempre se obtiene $\cos\varphi_{21} = -1$, para $\theta_2 = \theta_2^-$).

APÉNDICE 4:

La sección eficaz diferencial de Boldyshev.

En muchas partes de este trabajo se utilizan las funciones desarrolladas por Boldyshev [15] para expresar la sección eficaz diferencial correspondiente a los diagramas de Borsellino sin intercambio de electrones, expresada en función de las variables Δ^2 y X , referidas al electrón de retroceso, designado con el índice 1.

Es decir, Boldyshev presenta las funciones que aquí designaré por razones de compatibilidad práctica con la hoja de cálculo Maple: $\sigma_1(\Delta^2, X)$, y $\sigma_2(\Delta^2, X)$, numeradas (37) y (38) respectivamente por Boldyshev, para expresar la sección eficaz (4.17) como:

$$d\sigma = \left\{ \frac{1}{2\pi} \sigma_1(\Delta^2, X) + P \sigma_2(\Delta^2, X) \cos(2\varphi_1) \right\} d\Delta^2 dX d\varphi_1$$

Siendo X valor absoluto del cuadrado del cuadrimomento de retroceso, y Δ^2 el cuadrado de la masa invariante del par, variables ambas que pueden ser expresadas en términos exclusivamente de las variables del electrón de retroceso:

$$\begin{aligned} X &= -q^2 = 2m(E_1 - m) \\ \Delta^2 &= -2(E_1 - m)(\omega + m) + 2\omega p_1 \cos\theta_1 \end{aligned} \quad (1.15')$$

Cuando es necesario, un cambio de variables $(\Delta^2, X) \rightarrow (p_1, \theta_1)$ permite utilizar estas funciones para todos los cálculos que lo requieren en diferentes partes de este trabajo. Así por ejemplo, la expresión $d\sigma_{\text{Boldyshev}}/dp_1$ utilizada en el capítulo 5, es exactamente la que se obtiene haciendo el cambio de variables en $\sigma_1(\Delta^2, X)$, y luego integrando sobre θ_1 .

Además Boldyshev ha presentado las integrales indefinidas de estas funciones sobre X , numeradas como (50) la que corresponde a σ_2 , y (51) la que corresponde a σ_1 , las cuales también han sido de gran ayuda para muchos cálculos en este trabajo, porque las expresiones son bastante largas y trabajosas para manipular.

En este trabajo todas esas manipulaciones se han llevado a cabo a través de hojas de cálculo Maple, y en este Apéndice se reproduce la hoja de cálculo en la cual se definen todas estas funciones.

> "Se presentan la sección eficaz diferencial de Boldyshev independiente de la polarización, (37), y dependiente de la polarización (38), en función de las variables X y Δ . También se presentan las integrales indefinidas sobre X , (51) y (50) respectivamente, y las variables asociadas. Se han corregido signos y otros detalles del trabajo de Boldyshev, y se han escrito las funciones en unidades de αr_0^2 . Ω está representado por w ":

>

```
> beta := 'beta': X := 'X': w := 'w': Delta := 'Delta': E1 :=
'E1': p1 := 'p1': Sigmat := 'Sigmat': Signal:='Signal': c1 :=
'c1': c2 := 'c2': c3 := 'c3': c4 := 'c4': L1 := 'L1': Y:='Y':
>
```

```
> "sigma1 es la parte independiente de la polarización (37): sigma1 = dsigma(t) / dDelta^2 dX
":
```

```
> sigma1:= beta*( (2-X)*(c1+4*(c3-c2*X)/(Delta^2+X)^2) -
4*w*(2*w-Delta^2-X)*X*(c1+4*(c3-
c4*X)/(Delta^2+X)^2)/(Delta^2+X)^2)/(2*w^2*X^2);
```

$$\sigma_1 := \frac{1}{2} \frac{1}{w^2 X^2} \left(\beta \left((2-X) \left(c_1 + \frac{4(c_3 - c_2 X)}{(\Delta^2 + X)^2} \right) - \frac{4w(2w - \Delta^2 - X)X \left(c_1 + \frac{4(c_3 - c_4 X)}{(\Delta^2 + X)^2} \right)}{(\Delta^2 + X)^2} \right) \right)$$

```
>
```

```
> "sigma2 es la parte dependiente de la polarización (38) : sigma1 = dsigma(l)
/dDelta^2 dX":
```

```
> sigma2:= -2*beta*(Delta^2+X^2/2+2*L1*(X+1))*X^2*(2*w+1)-
2*X*(2*w^2-Delta^2*(w+1))+Delta^4)/(Y^4*w^2*X^2);
```

$$\sigma_2 := -\frac{1}{Y^4 w^2 X^2} \left(2\beta \left(\Delta^2 + \frac{1}{2} X^2 + 2L_1(X+1) \right) \left(X^2(2w+1) - 2X(2w^2 - \Delta^2(w+1)) + \Delta^4 \right) \right)$$

```
> Y := Delta^2+X;
```

$$Y := \Delta^2 + X$$

```
> "F1 es (51), la integral indefinida sobre X de sigma1":
```

```
> F1:= -beta*( (4*(2*w*(w-(1/2)*Delta^2)*c1+2*c2+c3*(1+(4*(1-
w))/Delta^2+(8*w*w)/Delta^4)))*log(X/Y)/Delta^4+c1*log(X)+(2*(
c1+4*c3/Delta^4))/X+(4*((2*w*w)*c1/Delta^2+(1+2/Delta^2)*c2+c3
*(1+(2*(1-
2*w))/Delta^2+(8*w*w)/Delta^4)/Delta^2))/Y+8*w*(c3*(2*w-
Delta^2)/Delta^4-
c4)/Y^2+(32*w*w)*(c3/Delta^2+c4)/((3*Y*Y)*Y)/(2*w*w);
```

$F1 :=$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{1}{w^2} \left(\beta \left(\frac{1}{\Delta^4} \left(4 \left(2w \left(w - \frac{1}{2} \Delta^2 \right) c1 + 2c2 + c3 \left(1 + \frac{4(1-w)}{\Delta^2} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. + \frac{8w^2}{\Delta^4} \right) \right) \ln \left(\frac{X}{\Delta^2 + X} \right) \right) + c1 \ln(X) + \frac{2 \left(c1 + \frac{4c3}{\Delta^4} \right)}{X} \right. \\
 & \left. + \frac{4 \left(\frac{2w^2 c1}{\Delta^2} + \left(1 + \frac{2}{\Delta^2} \right) c2 + \frac{c3 \left(1 + \frac{2(1-2w)}{\Delta^2} + \frac{8w^2}{\Delta^4} \right)}{\Delta^2} \right)}{\Delta^2 + X} \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{8w \left(\frac{c3(2w - \Delta^2)}{\Delta^4} - c4 \right)}{(\Delta^2 + X)^2} + \frac{32}{3} \frac{w^2 \left(\frac{c3}{\Delta^2} + c4 \right)}{(\Delta^2 + X)^3} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

>

> "F2 es (50), la integral indefinida sobre X de sigma2":

```

> F2:= -2*beta*((2*L1*(2*Delta^2-Delta^4+4*w^2-
2*Delta^2*w)+2*Delta^4+4*Delta^2*w^2-
2*w*Delta^4)*log(Y/X)/Delta^8-
(Delta^2+2*L1)/(X*Delta^4)+(2*L1*(Delta^4-Delta^2-
4*w^2+2*Delta^2*w)-Delta^4-4*Delta^2*w^2+2*Delta^4*w-
Delta^6*(2*w+1)/2)/(Y*Delta^6)+(2*L1*w*(-2*w+Delta^2-
Delta^4)/Delta^4-
2*w^2/Delta^2+w+w*(2*w+Delta^2)/2)/Y^2+4*w^2*(2*L1*(1-
1/Delta^2)-1-Delta^2/2)/(3*Y^3))/(w*w);

```

F2 :=

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{w^2} \left(2 \beta \left(\frac{1}{\Delta^8} \left((2 LI (2 \Delta^2 - \Delta^4 + 4 w^2 - 2 \Delta^2 w) + 2 \Delta^4 + 4 \Delta^2 w^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - 2 w \Delta^4 \right) \ln \left(\frac{\Delta^2 + X}{X} \right) \right) - \frac{\Delta^2 + 2 LI}{X \Delta^4} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\Delta^2 + X) \Delta^6} \left(2 LI (\Delta^4 - \Delta^2 - 4 w^2 + 2 \Delta^2 w) - \Delta^4 - 4 \Delta^2 w^2 + 2 w \Delta^4 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \Delta^6 (2 w + 1) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\frac{2 LI w (-2 w + \Delta^2 - \Delta^4)}{\Delta^4} - \frac{2 w^2}{\Delta^2} + w + \frac{1}{2} w (2 w + \Delta^2)}{(\Delta^2 + X)^2} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4}{3} \frac{w^2 \left(2 LI \left(1 - \frac{1}{\Delta^2} \right) - 1 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right)}{(\Delta^2 + X)^3} \right) \right)
 \end{aligned}$$

> "Verificación de que F1 es la integral de sigma1"

> `simplify(diff(F1, X)-sigma1);`

0

>

> "Verificación de que F2 es la integral de sigma2":

> `simplify(diff(F2, X)-sigma2);`

0

>

Y la suma de estos elementos será:

$$M_{s r r_1 r_2 r_3} =$$

$$= i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) [\gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha] v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7)$$

$$= i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7')$$

Donde, siguiendo la notación Boldyshev [25], [26], denominamos L al corchete recto, es decir:

$$L^{\alpha\nu} = \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \quad (8)$$

De manera que en (7) o (7') tenemos el elemento de matriz correspondiente a los dos diagramas considerados, M_{s, r, r_1, r_2, r_3} , el cual depende de todas las polarizaciones, como lo indican sus índices.

A continuación se debe calcular el módulo cuadrado de este elemento:

$$M_{s r r_1 r_2 r_3} M_{s r r_1 r_2 r_3}^* = \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{q^4} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \}$$

$$\{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}^{\beta\lambda} u_{r_2}(\vec{p}_2) \} \{ \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\rho u_{r_1}(\vec{p}_1) \}$$

$$= \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{q^4} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\rho u_{r_1}(\vec{p}_1) \}$$

$$\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}^{\beta\lambda} u_{r_2}(\vec{p}_2) \} \quad (9)$$

En donde

$$\tilde{L}^{\beta\lambda} = \gamma^0 (L^{\beta\lambda})^\dagger \gamma^0 = \gamma^\lambda \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\beta + \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\lambda \quad (8')$$

Es necesario sumar sobre todas las polarizaciones de los fermiones salientes, y promediar sobre las del electrón inicial, para obtener un elemento que sólo dependerá de la polarización del fotón incidente (dada por el índice s).

Para efectuar el cálculo se aplican las relaciones usuales:

$$\sum_r u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{p + m}{2m} \quad y \quad \sum_r v_r(\vec{p}_3) \bar{v}_r(\vec{p}_3) = \frac{p_3 - m}{2m} \quad (10)$$

Resulta:

$$\frac{1}{2} \sum_{r r_1 r_2 r_3} M_{s r r_1 r_2 r_3} M_{s r r_1 r_2 r_3}^* =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{32 m^4 q^4} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) L^{\alpha\mu} (\mathbf{p}_3 - m) \tilde{L}^{\beta\lambda} \} \\
&= \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{32 m^4 q^4} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \} \\
&\quad \times \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\beta \right. \\
&\quad + (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\lambda \\
&\quad + (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\beta \\
&\quad \left. + (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\lambda \right\} \quad (11) \\
&= \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{32 m^4 q^4} J^{\mu\rho} T^{\alpha\beta\nu\lambda} \quad (11')
\end{aligned}$$

En donde se han utilizado J y T (con índices) para designar las trazas:

$$J^{\mu\rho} = \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \} \quad (12)$$

$$T^{\alpha\beta\nu\lambda} = \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) L^{\alpha\nu} (\mathbf{p}_3 - m) \tilde{L}^{\beta\lambda} \} \quad (12')$$

La traza T puede descomponerse en diferentes sumandos según su denominador, que es quien luego determinará el algoritmo de integración correspondiente:

$$T_a^{\alpha\beta\nu\lambda} = \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\beta \right\} \quad (12a)$$

$$T_b^{\alpha\beta\nu\lambda} = \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\beta \right\} \quad (12b)$$

$$T_c^{\alpha\beta\nu\lambda} = \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\lambda \right\} \quad (12c)$$

$$T_d^{\alpha\beta\nu\lambda} = \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\lambda \right\} \quad (12d)$$

Es posible unificar los términos b y c, que tienen el mismo denominador, en un término bc:

$$T_{bc}^{\alpha\beta\nu\lambda} = T_b^{\alpha\beta\nu\lambda} + T_c^{\alpha\beta\nu\lambda}$$

Para simplificar el cálculo de este término es posible aplicar $\text{Tr}(A B C \dots D) = \text{Tr}(D \dots C B A) = \text{Tr}(A D \dots C B)$, para mostrar que Tb es igual a Tc si se trasponen los índices $\nu \leftrightarrow \lambda$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$:

$$Tb^{\alpha\beta\nu\lambda} = Tc^{\beta\alpha\lambda\nu} \quad (13)$$

De manera que:

$$Tbc^{\alpha\beta\nu\lambda} = Tb^{\alpha\beta\nu\lambda} + Tb^{\beta\alpha\lambda\nu} \quad (14)$$

Por último es importante calcular los denominadores de T:

$$k p_2 = \omega (E_2 - p_2 \cos\theta_2) \quad (15)$$

$$k p_3 = \omega (E_3 - p_3 \cos\theta_3) \quad (16)$$

Las expresiones (15) y (16) sirven para mostrar claramente que ninguno de ambos denominadores puede anularse en ninguna condición.

Ahora bien, en los cálculos que efectivamente se hacen, p_3 es reemplazado en términos de los demás momentos a partir de la ley de conservación ($k + p = p_1 + p_2 + p_3$).

Expresando de esta manera p_3 , resulta:

$$k p_3 = \omega (m - E_1 - E_2 + p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2) \quad (17)$$

Una vez fijados p_1 , θ_1 , y p_2 dentro de sus respectivos intervalos (correspondientes a la conservación del cuadrimomento), (17) expresa el denominador ($k p_3$) como función lineal de la variable de integración $x = \cos\theta_2$, y permite escribirlo en la forma $cte \times (x - H_3)$, necesaria para ese procedimiento.

Efectivamente, (17) puede reescribirse como:

$$\frac{k p_3}{\omega p_2} = \cos\theta_2 - \frac{E_1 + E_2 - p_1 \cos\theta_1 - m}{p_2} \quad (17')$$

De (16) se obtiene que el miembro izquierdo es positivo, y por lo tanto, si todas las variables están dentro de su intervalo de validez, dado que el primer término del miembro derecho es positivo y menor que 1, el segundo, que es claramente positivo, al cual denominamos H_3 , debe cumplir con:

$$H_3 \equiv \frac{E_1 + E_2 - p_1 \cos\theta_1 - m}{p_2} < \cos\theta_2 \quad (18)$$

Tenemos ahora que H_3 es un valor constante para la integración sobre θ_2 , fuera del intervalo de integración ($H_3 < x^-$), con el cual podemos escribir:

$$k p_3 = \omega p_2 (\cos\theta_2 - H_3) \quad (19)$$

De esta manera, al efectuar la integración sobre θ_2 , con el cambio de variable $x = \cos\theta_2$, los términos que tienen $k p_3$ y $(k p_3)^2$ en el denominador, extrayendo adecuadamente el factor ωp_2 , darán lugar a integrales con $(x - H_3)$ y $(x - H_3)^2$ respectivamente en el denominador.

Y de manera similar pero más sencilla, los términos que tienen $k p_2$ y $(k p_2)^2$ en el denominador, extrayendo adecuadamente el factor ωp_2 , dan lugar a integrales con $(H_2 - x)$ y $(H_2 - x)^2$ respectivamente en el denominador, siendo:

$$H_2 = \frac{E_2}{p_2} \quad (18')$$

Ahora se debe introducir la polarización (lineal) del haz incidente, dada por el vector $\vec{P} = (P, 0, 0)$, que determina que el conjunto de los elementos $\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}$ ordenados adecuadamente constituya la matriz de 2×2 , $\rho_{\alpha\beta} = \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}$, denominada *matriz densidad*, que para este caso es (ver Capítulo 4):

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+P & 0 \\ 0 & 1-P \end{bmatrix} \quad (20)$$

Utilizando esto para los índices $\alpha\beta$ se puede escribir:

$$J_{\mu\lambda} T^{\alpha\beta\mu\lambda} \rho_{\alpha\beta} = u + P v \quad (21)$$

En donde, utilizando $(JT)^{\alpha\beta}$ para indicar el producto $J_{\mu\lambda} T^{\alpha\beta\mu\lambda}$:

$$u = \frac{(JT)^{11} + (JT)^{22}}{2} \quad (22)$$

$$v = \frac{(JT)^{11} - (JT)^{22}}{2} \quad (22')$$

Es claro que todo este tratamiento también puede ser hecho con los elementos $T^{\alpha\beta\mu\lambda}$ antes de efectuar la multiplicación por $J_{\mu\lambda}$. Los resultados se traducen directamente de un caso a otro.

De manera que el elemento designado genéricamente $|M|^2$ en la expresión (2.17) de la DCS, (que incluye la suma sobre todas las polarizaciones de los fermiones salientes y el promedio sobre las del electrón inicial, del módulo al cuadrado del elemento de matriz que corresponda en cada caso), para este caso resulta:

$$|M|^2 = \frac{e^6}{32 m^4 q^4} \left\{ J_{\mu\lambda} \left(\frac{T^{11\mu\lambda} + T^{22\mu\lambda}}{2} \right) + P J_{\mu\lambda} \left(\frac{T^{11\mu\lambda} - T^{22\mu\lambda}}{2} \right) \right\} \quad (23)$$

En donde el término $J_{\mu\lambda} (T^{11\mu\lambda} + T^{22\mu\lambda})/2$, debe ser u , independiente de ϕ_1 , mientras que el $J_{\mu\lambda} (T^{11\mu\lambda} - T^{22\mu\lambda})/2$ debe ser igual a $-v_0 \cos(2\phi_1)$. Obviamente, para que la DCS sea positiva en todas las condiciones posibles del triplete, debe ser $|v_0| \leq u$.

Acerca de la notación utilizada en el cálculo

Para proceder a estos cálculos es necesario separar los elementos de $T^{\alpha\beta\mu\lambda}$ en función de los diferentes denominadores. Dado que cada $L^{\alpha\mu}$ es suma de dos términos, uno de los cuales tiene denominador $2kp_2$, y el otro $2kp_3$, al multiplicarse estos elementos como lo requiere el cálculo de $T^{\alpha\beta\mu\lambda}$ aparecen términos denominados a, con denominador $(2kp_2)^2$, términos b, y c (que denominaremos bc), con denominador $(2kp_2)(2kp_3)$, y términos d, con denominador $(2kp_3)^2$.

Por simplicidad extraeremos ωp_2 como factor común de los denominadores.

Es decir, según estas consideraciones (y sobreentendiendo que ya se pasó por el procedimiento de sumar cada elemento sobre los dos signos posibles del $\text{sen}\varphi_{21}$), la estructura de cada elemento $T^{\alpha\beta\mu\lambda}$ es:

$$T^{\alpha\beta\mu\lambda} = \frac{1}{\omega^2 p_2^2} \left\{ \frac{\text{NumTa}^{\alpha\beta\mu\nu}}{4 \left(\frac{k p_2}{\omega p_2} \right)^2} + \frac{\text{NumTbc}^{\alpha\beta\mu\nu}}{4 \left(\frac{k p_2}{\omega p_2} \right) \left(\frac{k p_3}{\omega p_2} \right)} + \frac{\text{NumTd}^{\alpha\beta\mu\nu}}{4 \left(\frac{k p_3}{\omega p_2} \right)^2} \right\} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{4\omega^2 p_2^2} \left\{ \frac{\text{NumTa}^{\alpha\beta\mu\nu}}{(H_2 - x)^2} + \frac{\text{NumTbc}^{\alpha\beta\mu\nu}}{(H_2 - x)(x - H_3)} + \frac{\text{NumTd}^{\alpha\beta\mu\nu}}{(x - H_3)^2} \right\} \quad (24')$$

En donde (sobreentendiendo los índices para cada elemento):

- NumT designa el numerador de la parte correspondiente de T,
- a, bc, y d, indican a qué tipo de denominador corresponde el elemento,
- $x = \cos\theta_2$ es la variable que se elige para la integración sobre θ_2 ,
- H_2 y H_3 son los valores de x que anularían al respectivo denominador, dados por las funciones (18) y (18') de p_1 , θ_1 , y p_2 .

Al efectuar cada uno de los productos J por T indicados en (23), separando los denominadores, y conservando los índices que corresponden a la polarización y los indicadores a, bc, y d, del tipo de denominador, se obtiene, para cada uno:

$$J_{\mu\lambda} T^{\alpha\beta\mu\lambda} = \frac{1}{4\omega^2 p_2^2} \left\{ \frac{Xa^{\alpha\beta}}{(H_2 - x)^2} + \frac{Xbc^{\alpha\beta}}{(H_2 - x)(x - H_3)} + \frac{Xd^{\alpha\beta}}{(x - H_3)^2} \right\} \quad (25)$$

En donde X simboliza el numerador correspondiente a cada término, obtenido a partir de las operaciones indicadas, que para este caso serían:

$$\begin{aligned} Xa^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr}\{(\mathbf{p}_1 + m)\gamma^\mu(\mathbf{p} + m)\gamma^\rho\} \\ &\quad \times \text{Tr}\{(\mathbf{p}_2 + m)\gamma^\alpha(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m)\gamma^\nu(\mathbf{p}_3 - m)\gamma^\lambda(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta\} \\ Xbc^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr}\{(\mathbf{p}_1 + m)\gamma^\mu(\mathbf{p} + m)\gamma^\rho\} \\ &\quad \times \left\{ \text{Tr}\{(\mathbf{p}_2 + m)\gamma^\nu(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m)\gamma^\alpha(\mathbf{p}_3 - m)\gamma^\lambda(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta\} \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}\{(\mathbf{p}_2 + m)\gamma^\alpha(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m)\gamma^\nu(\mathbf{p}_3 - m)\gamma^\beta(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m)\gamma^\lambda\} \right\} \\ Xd^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr}\{(\mathbf{p}_1 + m)\gamma^\mu(\mathbf{p} + m)\gamma^\rho\} \\ &\quad \times \text{Tr}\{(\mathbf{p}_2 + m)\gamma^\nu(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m)\gamma^\alpha(\mathbf{p}_3 - m)\gamma^\beta(\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m)\gamma^\lambda\} \end{aligned}$$

Si ahora se calcula q^4 :

$$q^2 = (p - p_1)^\alpha (p - p_1)_\alpha = 2 m (m - E_1) \rightarrow q^4 = 4 m^2 (E_1 - m)^2 \quad (26)$$

Finalmente (23) queda:

$$\frac{4 m^6}{e^6} |M|^2 = \frac{1}{128(E_1 - m)^2 \omega^2 p_2^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{U_a}{(H_2 - x)^2} + \frac{U_{bc}}{(H_2 - x)(x - H_3)} + \frac{U_d}{(x - H_3)^2} + \\ P \left(\frac{V_a}{(H_2 - x)^2} + \frac{V_{bc}}{(H_2 - x)(x - H_3)} + \frac{V_d}{(x - H_3)^2} \right) \end{array} \right\} \quad (27)$$

En donde:

$$U_a = \frac{1}{2} (X_a^{11} + X_a^{22}) \quad (27^I)$$

$$U_{bc} = \frac{1}{2} (X_{bc}^{11} + X_{bc}^{22}) \quad (27^{II})$$

$$U_d = \frac{1}{2} (X_d^{11} + X_d^{22}) \quad (27^{III})$$

$$V_a = \frac{1}{2} (X_a^{11} - X_a^{22}) \quad (27^{IV})$$

$$V_{bc} = \frac{1}{2} (X_{bc}^{11} - X_{bc}^{22}) \quad (27^{IV})$$

$$V_d = \frac{1}{2} (X_d^{11} - X_d^{22}) \quad (27^{IV})$$

Con estos elementos podemos escribir la contribución principal a la sección eficaz según la expresión (2.17), agregando desde este momento la letra B para indicar que corresponde a los diagramas de Borsellino.

$$d\sigma_B = \alpha r_0^2 \frac{1}{256m\omega^3} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (E_1 - m)^2 \sqrt{G}} \frac{dp_2}{p_2 E_2} \frac{1}{\pi} (\{ \}_{UB} + P \{ \}_{VB}) \quad (28)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{UB / VB} = & \int_{x^-}^{x^+} \frac{UBa / VBa}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)} (H_2 - x)^2} dx + \int_{x^-}^{x^+} \frac{UBbc / VBbc}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)} (H_2 - x)(x - H_3)} dx \\ & + \int_{x^-}^{x^+} \frac{UBd / VBd}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)} (x - H_3)^2} dx \end{aligned} \quad (29)$$

En principio el primer paso de la integración sería la suma sobre los dos signos de φ_{21} , pero dado que esta suma puede efectuarse antes, durante el cálculo de los elementos U y V, se entiende que todos ellos están calculados de esa manera (incluyendo la suma sobre los dos signos de φ_{21}).

A5.2.- Diagramas de Borsellino con intercambio de electrones.

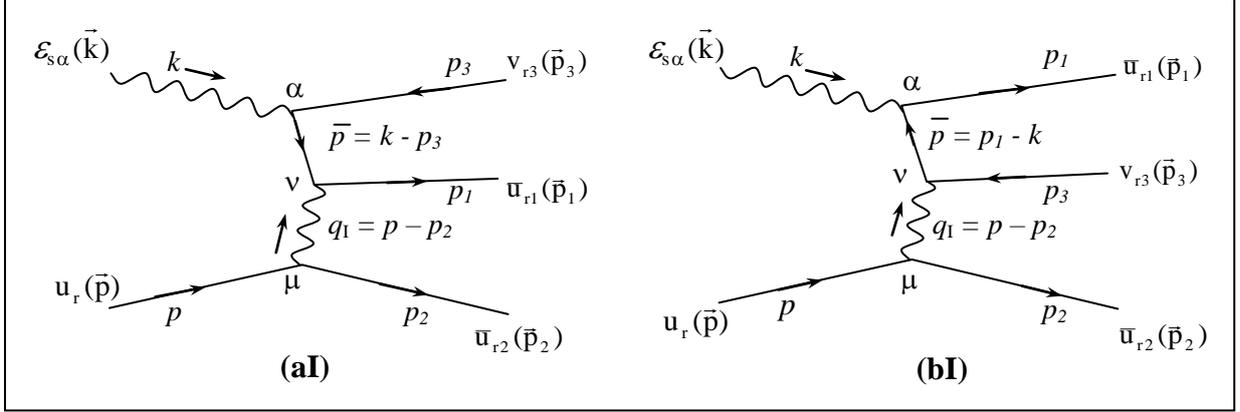


Fig. A5.2: Diagramas de Borsellino con los electrones intercambiados, y la misma notación anterior. La designación (a) y (b) corresponde al diagrama original en el cual se produce el intercambio.

Reproduciendo los procedimientos utilizados en A5.1, ahora encontramos que los elementos de matriz (aI), y (bI), son simplemente los que antes encontramos como (a) y (b), introduciendo el cambio $1 \leftrightarrow 2$ en cada uno:

$$\begin{aligned} \text{MaI}_{s r r_1 r_2 r_3} &= i e^3 \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \\ &\quad \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{MbI}_{s r r_1 r_2 r_3} &= i e^3 \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \\ &\quad \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

En donde, como corresponde ahora:

$$q_1^2 = 2 m (m - E_2) \quad (32)$$

Y la suma de estos elementos será:

$$\begin{aligned} \text{MBI}_{s r r_1 r_2 r_3} &= i e^3 \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \\ &\quad \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \left[\gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \right] v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$= i e^3 \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) L_{\text{BI}}^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (33')$$

Donde:

$$L_{\text{BI}}^{\alpha\nu} = \gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \quad (34)$$

Ahora se debe tener en cuenta que este elemento de matriz debe restarse del obtenido anteriormente, y que luego al tomar el módulo al cuadrado aparecerán las contribuciones que se pueden representar como sigue (se sobreentiende aquí la suma sobre las polarizaciones):

$$(MB - MBI)(MB^* - MBI^*) = MB \cdot MB^* + MBI \cdot MBI^* - MB \cdot MBI^* - MB^* \cdot MBI^* \quad (6)$$

El primer término en esta suma es el elemento $|MB|^2$ ya calculado, y el segundo debe ser el mismo, intercambiando los electrones entre sí. Dado que el procedimiento de integración es simétrico respecto de ambos electrones, ambos términos deben contribuir exactamente en la misma cantidad a la sección eficaz total, aunque lo hagan con diferente distribución de valores de variables para cada electrón. El segundo término agrega para el electrón 1 lo que el primero tiene para el 2 (y viceversa), haciendo así indistinguibles ambos electrones.

Luego el conjunto $(MB \cdot MBI^* + MB^* \cdot MBI) = 2 \text{Re}(MB \cdot MBI^*)$, contiene la modificación neta en la DCS debida a la indistinguibilidad, y ése es el elemento cuyo cálculo vamos a desarrollar ahora.

Cálculo del producto $MB \cdot MBI^*$

Comenzamos con el producto de los elementos dados por (7'), y (33') de esta sección:

$$\begin{aligned} MB_{s r_1 r_2 r_3} MBI^*_{s r_1 r_2 r_3} &= \\ &= e^6 \frac{1}{q^2} \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\lambda u_r(\vec{p}) \}^\dagger g_{\mu\nu} \\ &\quad g_{\rho\lambda} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) L_{BI}^{\beta\rho} v_{r_3}(\vec{p}_3) \}^\dagger \\ &= e^6 \frac{1}{q^2} \frac{1}{q_1^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\lambda u_{r_2}(\vec{p}_2) \\ &\quad \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}_{BI}^{\beta\rho} u_{r_1}(\vec{p}_1) \} \end{aligned} \quad (35)$$

Donde

$$\tilde{L}_{BI}^{\beta\rho} = \gamma^0 (L_{BI}^{\beta\rho})^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\beta + \gamma^\beta \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\rho \quad (36)$$

Ahora bien, sumando sobre todas las polarizaciones de los fermiones salientes, y promediando sobre las del electrón inicial, tendremos un elemento que sólo dependerá de la polarización del fotón incidente (dada por el índice s), el cual, aplicando los procedimientos usuales puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} MB_{s r_1 r_2 r_3} MBI^*_{s r_1 r_2 r_3} = \\ &= \frac{e^6}{8m^2 (E_1 - m)(E_2 - m)} \text{Tr} \left\{ \frac{p_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{p + m}{2m} \gamma^\lambda \frac{p_2 + m}{2m} L_B^{\alpha\nu} \frac{p_3 - m}{2m} \tilde{L}_{BI}^{\beta\rho} \right\} \\ &= \frac{e^6}{4m^6 32 (E_1 - m)(E_2 - m)} \text{Tr} \left\{ (p_1 + m) \gamma^\mu (p + m) \gamma^\lambda (p_2 + m) L_B^{\alpha\nu} (p_3 - m) \tilde{L}_{BI}^{\beta\rho} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Y finalmente, desarrollando los elementos denominados L, esta expresión queda:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MBI}^*_{s r_1 r_2 r_3} = \\
& = \frac{e^6}{4m^6} \frac{\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{128\omega^2(E_1 - m)(E_2 - m)} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda (\not{p}_2 + m) \right. \\
& \quad \times \left[\gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2/\omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k p_1/\omega} \gamma^\beta \right. \\
& \quad + \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3/\omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{k p_1/\omega} \gamma^\beta \\
& \quad + \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2/\omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3/\omega} \gamma^\rho \\
& \quad \left. \left. + \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3/\omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\beta \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3/\omega} \gamma^\rho \right] \right\} \quad (38)
\end{aligned}$$

En donde han quedado claramente separados los términos según los diferentes denominadores, manteniendo validez las expresiones (15) a (19):

$$\begin{aligned}
\frac{k p_1}{\omega} &= E_1 - p_1 \cos\theta_1 \\
\frac{k p_2}{\omega} &= E_2 - p_2 \cos\theta_2 = p_2 (H_2 - x) \\
\frac{k p_3}{\omega} &= p_2 (\cos\theta_2 - H_3) = p_2 (x - H_3)
\end{aligned}$$

Ahora, denominando X a los numeradores, con índices a, b, c, y d, para designar el tipo de denominador al que corresponden, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MBI}^*_{s r_1 r_2 r_3} &= \frac{e^6}{4m^6} \frac{\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{128\omega^2(E_1 - m)(E_2 - m)} \left\{ \frac{Xa^{\alpha\beta}}{(E_1 - p_1 \cos\theta_1) p_2 (H_2 - x)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{Xb^{\alpha\beta}}{(E_1 - p_1 \cos\theta_1) p_2 (x - H_3)} + \frac{Xc^{\alpha\beta}}{p_2^2 (x - H_3)(H_2 - x)} + \frac{Xd^{\alpha\beta}}{p_2^2 (x - H_3)^2} \right\} \quad (39)
\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
Xa^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - \not{k} + m) \right. \\
& \quad \left. \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho (\not{p}_1 - \not{k} + m) \gamma^\beta \right\} \quad (39a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Xb^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p}_3 + m) \right. \\
& \quad \left. \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho (\not{p}_1 - \not{k} + m) \gamma^\beta \right\} \quad (39b)
\end{aligned}$$

$$Xc^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - \not{k} + m) \right.$$

$$\gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\rho \} \quad (39c)$$

$$X d^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m)$$

$$\gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\beta (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\rho \} \quad (39d)$$

Dado que resultará que todos estos elementos son reales, entonces la suma $MB \cdot MBI^* + MB^* \cdot MBI$ se hará (más adelante) multiplicando todo por un factor 2.

Por otra parte se simplifica la notación si, tomando nota de que el primer paso de la integración consistirá en sumar sobre los dos signos de φ_{21} , se efectúa esa suma en este momento sobre estos elementos.

De manera que ahora, con las mismas consideraciones anteriores sobre la polarización, los índices $\alpha\beta$ toman los valores 1,1, y 2,2, y sobreentendiendo los indicadores del tipo de denominador, a, b, c, d, queda:

$$\begin{aligned} \text{UBI} &= \frac{X^{11}(\varphi_{21}) + X^{22}(\varphi_{21}) + X^{11}(-\varphi_{21}) + X^{22}(-\varphi_{21})}{2} \\ &= X^{11} + X^{22} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{VBI} = \frac{X^{11}(\varphi_{21}) - X^{22}(\varphi_{21}) + X^{11}(-\varphi_{21}) - X^{22}(-\varphi_{21})}{2} \quad (40')$$

En donde se ha hecho uso de que los elementos UBI resultan funciones pares de φ_{21} , cosa que no ocurre con los VBI, para los cuales es imprescindible efectuar explícitamente dicha suma.

De manera que finalmente la contribución al elemento $(4 m^6/e^6) |M|^2$ que debe ser integrado, agregando el factor 2 que resulta de la suma $M MI^* + M^* MI$, y el signo negativo para explicitar que debe restarse, queda:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{4 m^6}{e^6} |M|^2 \right\}_{\text{BI}} &= \frac{-1}{64(E_1 - m)(E_2 - m)\omega^2} \left\{ \frac{\text{UBIa}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (H_2 - x)} \right. \\ &+ \frac{\text{UBIb}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (x - H_3)} + \frac{\text{UBIc}}{p_2^2 (x - H_3)(H_2 - x)} + \frac{\text{UBId}}{p_2^2 (x - H_3)^2} \\ &+ P \left[\frac{\text{VBIa}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (H_2 - x)} + \frac{\text{VBIb}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (x - H_3)} \right. \\ &\left. \left. + \frac{\text{VBIc}}{p_2^2 (x - H_3)(H_2 - x)} + \frac{\text{VBId}}{p_2^2 (x - H_3)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Donde como corresponde, los términos U son independientes de φ_1 , mientras que los V resultan múltiplos de $\cos(2\varphi_1)$.

Al introducir estos términos en la integral (2.17) tendremos la contribución a la sección eficaz:

$$d\sigma_{\text{BI}} = \alpha r_0^2 \frac{-1}{128 \omega^3 m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (E_1 - m)\sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2 (E_2 - m)} \frac{1}{\pi} \left(\{ \}_{\text{UBI}} + P \{ \}_{\text{VBI}} \right) \quad (42)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{\text{UBI} / \text{VBI}} = & \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIa} / \text{VBIa}}{p_2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(H_2 - x)}} dx \\ & + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIb} / \text{VBIb}}{p_2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(x - H_3)}} dx \\ & + \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIc} / \text{VBIc}}{p_2^2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(H_2 - x)(x - H_3)}} dx \\ & + \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBId} / \text{VBIId}}{p_2^2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(x - H_3)^2}} dx \end{aligned} \quad (42')$$

Cálculo de la contribución del producto $\text{MBI} \cdot \text{MBI}^*$

Como ya se ha dicho este producto aporta a la sección eficaz total exactamente lo mismo que el $\text{MB} \cdot \text{MB}^*$ correspondiente a los diagramas de Borsellino, pero es necesario calcularlo independientemente si se desea conocer la dependencia de dicha sección con la distribución de valores particulares de las variables de algún electrón.

De manera que para su cálculo se puede partir del elemento de matriz de Borsellino intercambiando en él las variables de los electrones 1 y 2.

Esto significa, entre otras cosas, que el denominador $k p_2 = \omega (E_2 - p_2 \cos \theta_2) = \omega p_2 (H_2 - x)$, debe ser sustituido por $k p_1 = \omega (E_1 - p_1 \cos \theta_1)$, el cual es constante para la integración sobre θ_2 .

De acuerdo con esto, el elemento de matriz de Borsellino, dado por (27), se modifica de la siguiente manera (se utilizan los índices II para distinguir los nuevos elementos, que son los viejos con el intercambio $1 \leftrightarrow 2$)

$$\frac{4 m^6}{e^6} (|M|^2)_{\text{BII}} = \frac{1}{128(E_2 - m)^2 \omega^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\text{UBIIa}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} + \frac{\text{UBIIbc}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (x - H_3)} + \frac{\text{UBIIId}}{p_2^2 (x - H_3)^2} + \\ & P \left(\frac{\text{VBIIa}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} + \frac{\text{VBIIbc}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (x - H_3)} + \frac{\text{VBIIId}}{(x - H_3)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

De donde se obtiene que la contribución final a la integral (2.17) será:

$$d\sigma_{\text{BII}} = \alpha r_0^2 \frac{1}{256 \omega^3 m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2 (E_2 - m)^2} \frac{1}{\pi} (\{ \}_{\text{UBII}} + P \{ \}_{\text{VBII}}) \quad (44)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{\text{UBII} / \text{VBII}} &= \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIIa} / \text{VBIIa}}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} dx \\ &+ \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIIbc} / \text{VBIIbc}}{p_2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)} (x - H_3)} dx \\ &+ \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UBIIId} / \text{VBIIId}}{p_2^2 \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)} (x - H_3)^2} dx \end{aligned} \quad (44')$$

A5.3.- DIAGRAMAS G (γ -e).

Estos diagramas son los que tienen en cuenta la creación del par a partir de un fotón emitido por un electrón que absorbe el fotón incidente.

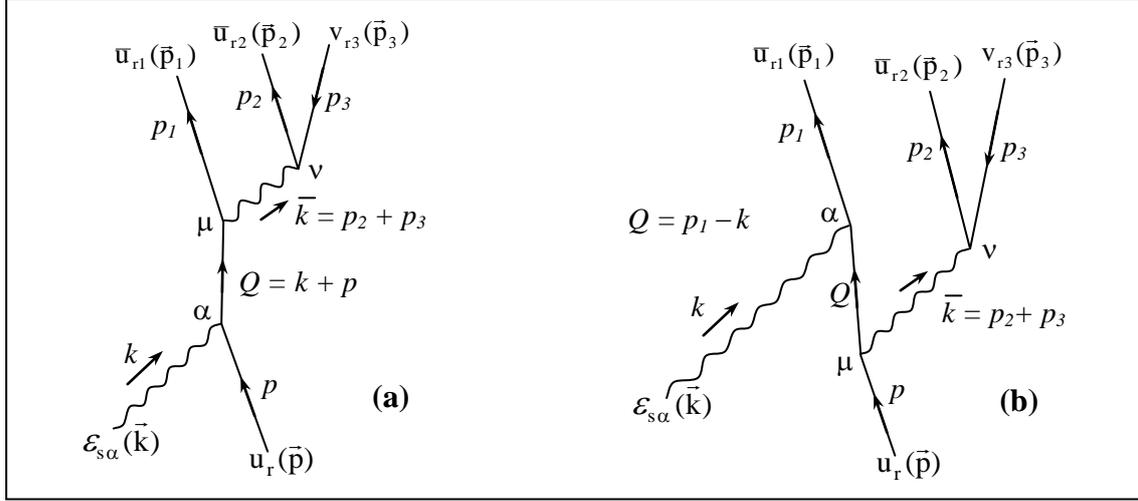


Fig. A5.3.1: Diagramas γ -e.

A partir del procedimiento standard obtenemos los elementos de matriz correspondientes.

$$M a_{s_{r_1} r_2 s_3} = (i e)^3 \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu i S_F(Q) \gamma^\alpha u_r(\vec{p}) \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) i D_{F\mu\nu}(\vec{k}) \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \quad (45)$$

Teniendo en cuenta que:

$$i D_{F\mu\nu}(\vec{k}) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{\bar{k}^2} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p_2 + p_3)^2} \quad (46)$$

$$i S_F(Q) = \frac{i(Q + m)}{Q^2 - m^2} = i \frac{k + p + m}{2 \omega m} \quad (47)$$

$$(p_2 + p_3)^2 = \Delta^2 = -2(\omega + m)(E_1 - m) + 2 \omega p_1 \cos \theta_1 \quad (48)$$

La expresión anterior queda:

$$-i e^3 \frac{1}{\Delta^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu \frac{k + p + m}{2 \omega m} \gamma^\alpha u_r(\vec{p}) \} \quad (49)$$

Y para el diagrama (b) se tiene el cambio:

$$\begin{aligned} i S_F(Q) &= \frac{i(Q + m)}{Q^2 - m^2} = i \frac{p_1 - k + m}{-2 k p_1} \\ &= i \frac{k - p_1 - m}{2 \omega (E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \end{aligned} \quad (50)$$

$$M b_{s_{r_1} r_2 s_3} = -i e^3 \frac{1}{\Delta^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\alpha \frac{k - p_1 - m}{2 \omega (E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \quad (51)$$

Y la suma de estos elementos será:

$$\begin{aligned}
\text{MG}_{s r_1 r_2 r_3} = & -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{4\omega \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \left\{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \left[\gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu \right] u_r(\vec{p}) \right\}
\end{aligned} \tag{52}$$

Ahora se debe obtener el módulo cuadrado de este elemento.

$$\begin{aligned}
\text{MG}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3}^* = & \\
& \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{16 \omega^2 (\Delta^2/2)^2} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \left\{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \left[\gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu \right] u_r(\vec{p}) \right\} \left\{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \gamma^\lambda u_{r_2}(\vec{p}_2) \right\} \left\{ \bar{u}_r(\vec{p}) \left[\gamma^\beta \frac{k+p+m}{m} \gamma^\rho \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma^\rho \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \right] u_{r_1}(\vec{p}_1) \right\}
\end{aligned} \tag{53}$$

Ahora se puede plantear la suma sobre las polarizaciones de los fermiones aplicando las relaciones usuales (10):

$$\sum_r u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{p+m}{2m} \quad \text{y} \quad \sum_r v_r(\vec{p}_3) \bar{v}_r(\vec{p}_3) = \frac{p_3-m}{2m}$$

De manera que sumando sobre todas las polarizaciones de los fermiones salientes, y promediando sobre las del electrón inicial, tendremos un elemento que sólo dependerá de la polarización del fotón incidente (dada por el índice s), el cual, aplicando los procedimientos usuales puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3}^* = \\
& = \frac{e^6 g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{4 \cdot 128 m^4 \omega^2 (\Delta^2/2)^2} \text{Tr} \left\{ (p_2+m) \gamma^\nu (p_3-m) \gamma^\lambda \right\} \text{Tr} \left\{ (p_1+m) \left[\gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu \right] (p+m) \left[\gamma^\beta \frac{k+p+m}{m} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \right] \right\} \\
& = \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{128 \omega^2 (\Delta^2/2)^2} \text{Tr} \left\{ (p_2+m) \gamma^\nu (p_3-m) \gamma^\lambda \right\} \\
& \quad \times \text{Tr} \left\{ (p_1+m) \gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha (p+m) \gamma^\beta \frac{k+p+m}{m} \gamma^\rho \right. \\
& \quad \left. + (p_1+m) \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu (p+m) \gamma^\beta \frac{k+p+m}{m} \gamma^\rho \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \\
& + (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \} \quad (54)
\end{aligned}$$

En este caso θ_2 no aparece en ninguno de los denominadores de estos términos, de manera que para la integración sobre esta variable no sería necesario agrupar los términos según sus denominadores. Pero conviene mantener esa estructura a los efectos de ordenar el cálculo, y por ello, denominando X a los numeradores, con índices a, b, c, y d, para designar el tipo de denominador al que corresponden, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MG}^*_{s r_1 r_2 r_3} = \\
& = \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{128 \omega^2 (\Delta^2/2)^2} \left\{ \frac{\text{Xa}^{\alpha\beta}}{m^2} + \frac{\text{Xb}^{\alpha\beta} + \text{Xc}^{\alpha\beta}}{m(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} + \frac{\text{Xd}^{\alpha\beta}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} \right\} \quad (55)
\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
\text{Xa}^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\
&\quad \times \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\rho \} \quad (55a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Xb}^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\
&\quad \times \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\rho \} \quad (55b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Xc}^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\
&\quad \times \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta \} \quad (55c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Xd}^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\
&\quad \times \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta \} \quad (55d)
\end{aligned}$$

Nota:

Dado que siempre se tiene $\alpha = \beta$, es posible aplicar $\text{Tr}(A B C \dots D) = \text{Tr}(D \dots C B A) = \text{Tr}(A D \dots C B)$ a la traza escrita en segundo lugar en los términos b y c, que tienen el mismo denominador, para mostrar que la de uno de ellos, considerada matriz con índices μ, ρ , es la traspuesta de la del otro término:

$$\text{Tr}\{c\}^{\mu\rho} = \text{Tr}\{b\}^{\rho\mu} = (\text{Tr}\{b\}^{\mu\rho})^{\text{traspuesta}}$$

Con esto es posible ahorrar un pequeño paso en el cálculo definiendo un término bc, para el cual $\text{Tr}\{bc\} = \text{Tr}\{b\} + \text{Tr}\{b\}^{\text{traspuesta}}$.

Teniendo siempre en cuenta que el primer paso de la integración consistirá en sumar sobre los dos signos de φ_{21} , ahora, con las mismas consideraciones anteriores sobre la polarización, los índices $\alpha\beta$ toman los valores 1,1, y 2,2, y sobreentendiendo los indicadores del tipo de denominador, a, b, c, d, queda:

$$UG = \frac{X^{11}(\varphi_{21}) + X^{22}(\varphi_{21}) + X^{11}(-\varphi_{21}) + X^{22}(-\varphi_{21})}{2} \quad (56)$$

$$VG = \frac{X^{11}(\varphi_{21}) - X^{22}(\varphi_{21}) + X^{11}(-\varphi_{21}) - X^{22}(-\varphi_{21})}{2} \quad (56')$$

Donde como corresponde, los términos U son independientes de φ_1 , mientras que los V resultan múltiplos de $\cos(2\varphi_1)$.

Al introducir estos términos en la integral (2.17), tendremos la contribución a la sección eficaz:

$$d\sigma_G = \alpha r_0^2 \frac{1}{256 \omega^3 m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (\Delta^2/2)^2 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} (\{ \}_{UG} + P \{ \}_{VG}) \quad (57)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{UG/VG} = & \int_{x^-}^{x^+} \frac{UGa / VGa}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} dx + \frac{m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \int_{x^-}^{x^+} \frac{UGbc / VGbc}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} dx \\ & + \frac{m^2}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} \int_{x^-}^{x^+} \frac{UGd / VGd}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} dx \end{aligned} \quad (57')$$

Se ve que en este caso hay un solo tipo de integral que efectuar, y no es imprescindible la descomposición en términos, a, bc, o d. Sólo es útil mantenerla a los fines de ordenar los denominadores para las integraciones sobre $d^3 p_1$.

A5.4.- DIAGRAMAS G CON INTERCAMBIO DE ELECTRONES.

Estos diagramas son los que resultan de intercambiar los electrones salientes 1 y 2 en los diagramas γ -e vistos en el punto anterior.

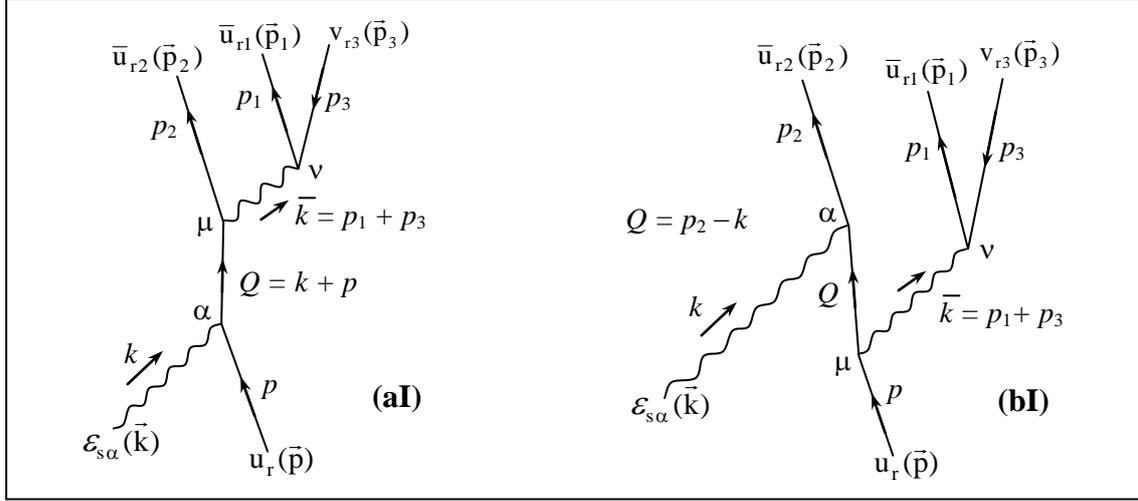


Fig.1: Diagramas γ -e con los electrones salientes intercambiados.

A partir del procedimiento standard obtenemos los elementos de matriz correspondientes, que son los anteriores con el cambio $1 \leftrightarrow 2$.

$$\text{MaI}_{s_r r_1 r_2 r_3} = (i e)^3 \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu i S_F(Q) \gamma^\alpha u_r(\vec{p}) \epsilon_{s\alpha}(\vec{k}) i D_{F\mu\nu}(\vec{k}) \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que:

$$i D_{F\mu\nu}(\vec{k}) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{\bar{k}^2} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_3)^2} \quad (59)$$

$$i S_F(Q) = \frac{i(Q + m)}{Q^2 - m^2} = i \frac{k + p + m}{2 \omega m} \quad (60)$$

$$(p_1 + p_3)^2 = -2(\omega + m)(E_2 - m) + 2 \omega p_2 \cos \theta_2 \quad (61)$$

La expresión anterior queda:

$$-i e^3 \frac{1}{(p_1 + p_3)^2} \epsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \frac{k + p + m}{2 \omega m} \gamma^\alpha u_r(\vec{p}) \} \quad (62)$$

Y para el diagrama (b) se tiene el cambio:

$$\begin{aligned} i S_F(Q) &= \frac{i(Q + m)}{Q^2 - m^2} = i \frac{p_2 - k + m}{-2 k p_2} \\ &= i \frac{k - p_2 - m}{2 \omega (E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\text{MbI}_{s_r r_1 r_2 r_3} = -i e^3 \frac{1}{(p_1 + p_3)^2} \epsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \}$$

$$g_{\mu\nu} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{2 \omega (E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \right\} \quad (64)$$

Y la suma de estos elementos será:

$$\begin{aligned} \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} = & -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{4\omega \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \\ & \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \left[\gamma^\mu \frac{k + p + m}{m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu \right] u_r(\vec{p}) \right\} \end{aligned} \quad (65)$$

Como corresponde este elemento coincide con $\text{MG}_{s r_1 r_2 r_3}$ calculado en el punto anterior, si se efectúa el cambio $1 \leftrightarrow 2$.

Y a partir de esto, ahora es necesario calcular, por un lado, el módulo cuadrado $\text{MGI} \times \text{MGI}^*$, y por otro lado el producto cruzado $\text{MG} \times \text{MGI}^*$.

CÁLCULO DEL MÓDULO CUADRADO $\text{MGI} \times \text{MGI}^*$.

En principio es claro que se obtendrá la misma expresión del módulo cuadrado de MG, con el cambio $1 \leftrightarrow 2$. Pero al estar $\cos \theta_2$ en los denominadores cambiarán drásticamente los términos a integrar.

Es decir, con los procedimientos usuales se obtendrá:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MGI}^*_{s r_1 r_2 r_3} \\ & = \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{128 \omega^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)^2} \text{Tr} \left\{ (p_1 + m) \gamma^\nu (p_3 - m) \gamma^\lambda \right\} \\ & \quad \times \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu \frac{k + p + m}{m} \gamma^\alpha (p + m) \gamma^\beta \frac{k + p + m}{m} \gamma^\rho \right. \\ & \quad + (p_2 + m) \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu (p + m) \gamma^\beta \frac{k + p + m}{m} \gamma^\rho \\ & \quad + (p_2 + m) \gamma^\mu \frac{k + p + m}{m} \gamma^\alpha (p + m) \gamma^\rho \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \\ & \quad \left. + (p_2 + m) \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu (p + m) \gamma^\rho \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right\} \end{aligned} \quad (66)$$

En donde, considerando la variable de integración $x = \cos \theta_2$:

$$E_2 - p_2 \cos \theta_2 = p_2 (H_2 - x) \quad (67)$$

$$\begin{aligned} (p_1 + p_3)^2 / 2 & = \omega p_2 \cos \theta_2 - (\omega + m) (E_2 - m) \\ & = \omega p_2 (x - H_4) \end{aligned} \quad (68)$$

Siendo

$$H_2 = E_2 / p_2 \quad (18')$$

$$H_4 = \left(1 + \frac{m}{\omega}\right) \frac{E_2 - m}{p_2} \quad (69)$$

Es importante notar que tanto H_2 como H_4 siempre están fuera del intervalo de integración. Esto es claro, por un lado porque $H_2 > 1$, y por otro porque la simetría entre las variables de los tres electrones implica que $(p_1 + p_3)^2 \geq 4$, de manera que: $H_4 < x^- < x^+ < 1 < H_2$.

De manera que introduciendo estas variables se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3}^* = \\ = \frac{e^6}{4 m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}}{128 \omega^4 p_2^2 (x - H_4)^2} \left\{ \frac{\text{XGIIa}^{\alpha\beta}}{m^2} + \frac{\text{XGIIb}^{\alpha\beta} + \text{XGIIc}^{\alpha\beta}}{m p_2 (H_2 - x)} + \frac{\text{XGII d}^{\alpha\beta}}{p_2^2 (H_2 - x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \text{XGIIa}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\ \times \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\rho \} \end{aligned} \quad (70a)$$

$$\begin{aligned} \text{XGIIb}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\ \times \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\not{k} - \not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\rho \} \end{aligned} \quad (70b)$$

$$\begin{aligned} \text{XGIIc}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\ \times \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma^\rho (\not{k} - \not{p}_2 - m) \gamma^\beta \} \end{aligned} \quad (70c)$$

$$\begin{aligned} \text{XGII d}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\lambda \} \\ \times \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\not{k} - \not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\rho (\not{k} - \not{p}_2 - m) \gamma^\beta \} \end{aligned} \quad (70d)$$

Nota:

Al igual que en el caso anterior, es posible unificar los términos b y c trasponiendo la traza correspondiente ($\text{Tr}\{bc\} = \text{Tr}\{b\} + \text{Tr}\{b\}^{\text{traspuesta}}$).

Ahora, con las consideraciones usuales sobre la polarización y la suma sobre los dos signos de φ_{21} , queda:

$$\text{UGII} = \frac{\text{XGII}^{11}(\varphi_{21}) + \text{XGII}^{22}(\varphi_{21}) + \text{XGII}^{11}(-\varphi_{21}) + \text{XGII}^{22}(-\varphi_{21})}{2} \quad (71)$$

$$\text{VGII} = \frac{\text{XGII}^{11}(\varphi_{21}) - \text{XGII}^{22}(\varphi_{21}) + \text{XGII}^{11}(-\varphi_{21}) - \text{XGII}^{22}(-\varphi_{21})}{2} \quad (71')$$

Donde como corresponde, los términos U son independientes de ϕ_1 , mientras que los V resultan múltiplos de $\cos(2\phi_1)$.

Al introducir estos términos en la integral (2.17), tendremos la contribución a la sección eficaz:

$$d\sigma_{\text{GII}} = \alpha r_0^2 \frac{1}{256 \omega^5 m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{dp_2}{p_2 E_2} \frac{1}{\pi} \left(\{ \}_{\text{UGII}} + P \{ \}_{\text{VGII}} \right) \quad (72)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{\text{UGII} / \text{VGII}} &= \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UGIIa} / \text{VGIIa}}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)} (x-H_4)^2} dx \\ &+ \frac{m}{p_2} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UGIIbc} / \text{VGIIbc}}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)} (x-H_4)^2 (H_2-x)} dx \\ &+ \frac{m^2}{p_2^2} \int_{x^-}^{x^+} \frac{\text{UGIIId} / \text{VGIIId}}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)} (x-H_4)^2 (H_2-x)^2} dx \end{aligned} \quad (72')$$

CÁLCULO DEL PRODUCTO CRUZADO MG×MGI*.

A partir de los elementos antes calculados se escribe el producto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MGI}^*_{s r_1 r_2 r_3} &= e^6 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{32\omega^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right) \left(\frac{(p_1+p_3)^2}{2}\right)} \sum_{r_1 r_2 r_3} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \\ &\left\{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \left[\gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu \right] u_r(\vec{p}) \right\} \left(\left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\lambda v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \right. \\ &\left. \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \left[\gamma^\rho \frac{k+p+m}{m} \gamma^\beta + \gamma^\beta \frac{k-p_2-m}{(E_2-p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\rho \right] u_r(\vec{p}) \right\} \right)^\dagger \\ &= e^6 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{32\omega^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right) \left(\frac{(p_1+p_3)^2}{2}\right)} \sum_{r_1 r_2 r_3} \left\{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \left[\gamma^\mu \frac{k+p+m}{m} \gamma^\alpha \right. \right. \\ &\left. \left. + \gamma^\alpha \frac{k-p_1-m}{(E_1-p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu \right] u_r(\vec{p}) \right\} \left\{ u_r(\vec{p}) \left[\gamma^\beta \frac{k+p+m}{m} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{k-p_2-m}{(E_2-p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right] u_{r_2}(\vec{p}_2) \right\} \\ &\left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \left\{ v_{r_3}(\vec{p}_3) \gamma^\lambda u_{r_1}(\vec{p}_1) \right\} \end{aligned} \quad (73)$$

Al efectuar la suma sobre las polarizaciones de los fermiones, y aplicar las relaciones habituales (10) esta expresión queda:

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}}{128 \omega^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right) \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2}\right)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda \right. \\
&\quad \left[(\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\rho \right. \\
&\quad + (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \\
&\quad + (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\rho \\
&\quad \left. \left. + (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right] \right\} \quad (73')
\end{aligned}$$

Es decir con la notación habitual para las variables de los denominadores:

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k})}{128 \omega^3 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right) p_2 (\cos \theta_2 - H_4)} \left\{ \frac{\text{XGIa}^{\alpha\beta}}{m^2} + \frac{\text{XGIb}^{\alpha\beta}}{m(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\text{XGIc}^{\alpha\beta}}{m p_2 (H_2 - x)} + \frac{\text{XGI d}^{\alpha\beta}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) p_2 (H_2 - x)} \right\} \quad (74)
\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
\text{XGIa}^{\alpha\beta} &= \\
&= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\rho \right\} \quad (74a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{XGIb}^{\alpha\beta} &= \\
&= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\rho \right\} \quad (74b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{XGIc}^{\alpha\beta} &= \\
&= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta \right\} \quad (74c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{XGI d}^{\alpha\beta} &= \\
&= g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\rho (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta \right\} \quad (74d)
\end{aligned}$$

Luego, con las definiciones usuales $\text{UGI} = \frac{1}{2} (\text{XGI}^{11} + \text{XGI}^{22})$, y $\text{VGI} = \frac{1}{2} (\text{XGI}^{11} - \text{XGI}^{22})$, (se han omitido los índices indicativos del tipo de denominador, y se sobreentiende la suma sobre los dos signos de φ_{21}), y agregando el signo negativo correspondiente a estos términos cruzados y el factor 2 que resulta de la suma $M \cdot MI^* + M^* \cdot MI$, debido a que ambos términos son reales, se puede escribir la contribución a la integral (2.17) que expresa la sección eficaz:

$$d\sigma_{GI} = \alpha r_0^2 \frac{-1}{128 \omega^4 (\Delta^2/2)} \frac{d^3 p_1}{2\pi(E_1 - p_1 \cos \theta_1) E_1 \sqrt{G}} \frac{dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} (\{ \}_{UGI} + P \{ \}_{VGI}) \quad (75)$$

En donde las llaves indicadas representan las siguientes integrales, calculadas en el Apéndice 6 para los diferentes denominadores.

$$\begin{aligned} \{ \}_{UGI/VGI} = & \int_{x^-}^{x^+} \frac{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) \left(\frac{UGIa}{VGIa} \right) + \left(\frac{UGIb}{VGIb} \right)}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(x - H_4)}} dx \\ & + \frac{1}{p_2} \int_{x^-}^{x^+} \frac{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) \left(\frac{UGIc}{VGIc} \right) + m \left(\frac{UGId}{VGI d} \right)}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)(x - H_4)(H_2 - x)}} dx \quad (75') \end{aligned}$$

A5.5.- TÉRMINOS DE INTERFERENCIA.

Luego de haber considerado las contribuciones de los diagramas de Borsellino y de los diagramas γ -e, incluyendo en cada uno la indistinguibilidad de los electrones, resta agregar los términos de interferencia entre Borsellino y γ -e.

Es decir, teniendo MB, MBI, MG, y MGI, ahora deberemos calcular los productos:

$$XBG = MB \cdot MG^* + MB^* \cdot MG + MBI \cdot MGI^* + MBI^* \cdot MGI$$

y

$$XBGI = - (MB \cdot MGI^* + MB^* \cdot MGI + MBI \cdot MG^* + MBI^* \cdot MG)$$

Tomando los siguientes elementos de resultados anteriores

De A5.1:

$$MB_{s_r r_1 r_2 r_3} =$$

$$i e^3 \frac{1}{q^2} \mathcal{E}_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) [\gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha] v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7)$$

$$= i e^3 \frac{1}{q^2} \mathcal{E}_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7')$$

Donde:

$$q^2 = (p - p_1)^2 = 2m(m - E_1) \quad (26)$$

$$L_B^{\alpha\nu} = \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \quad (8)$$

De A5.2:

$$MBI_{s_r r_1 r_2 r_3} =$$

$$i e^3 \frac{1}{q_1^2} \mathcal{E}_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) [\gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha] v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (33)$$

$$= i e^3 \frac{1}{q_1^2} \mathcal{E}_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) L_{BI}^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (33')$$

Donde:

$$q_1^2 = 2m(m - E_2) \quad (32)$$

$$L_{BI}^{\alpha\nu} = \gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{2 k p_1} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \quad (34)$$

De A5.3:

$$\begin{aligned}
 \text{MG}_{s, r, r_1, r_2, r_3} &= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{2 \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{2\omega m} \gamma^\alpha \\
 &\quad + \gamma^\alpha \frac{k - p_1 - m}{2\omega(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu] u_r(\vec{p}) \} \\
 &= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{2 \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) L_G^{\alpha\mu} u_r(\vec{p}) \}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Donde:

$$L_G^{\alpha\mu} = [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{2\omega m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_1 - m}{2\omega(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\mu]$$

Y de A5.4:

$$\begin{aligned}
 \text{MGI}_{s, r, r_1, r_2, r_3} &= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{4\omega \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \\
 &\quad \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu] u_r(\vec{p}) \} \\
 &= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\alpha\mu} u_r(\vec{p}) \}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\alpha\mu} u_r(\vec{p}) \} \tag{8'}$$

Donde:

$$L_{GI}^{\alpha\mu} = [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{2\omega m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{2\omega(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu] \tag{9}$$

Cálculo de la contribución XBG

Veamos los correspondientes términos.

$$\text{MB}_{s, r, r_1, r_2, r_3} \cdot \text{MG}_{s, r, r_1, r_2, r_3}^* =$$

$$\begin{aligned}
 &= i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \times \\
 &\quad \{ -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\lambda\rho}}{4\omega \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) L_G^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \} \}^*
 \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4\omega q^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \times \\
&\quad \{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \gamma^\rho u_{r_2}(\vec{p}_2) \} \{ \bar{u}_r(\vec{p}) \tilde{L}_G^{\beta\lambda} u_{r_1}(\vec{p}_1) \} \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4\omega q^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \text{Tr} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) \tilde{L}_G^{\beta\lambda} \} \times \\
&\quad \text{Tr} \{ u_{r_2}(\vec{p}_2) \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \gamma^\rho \}
\end{aligned}$$

Y con las relaciones usuales (10):

$$\sum_r u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad y \quad \sum_r v_r(\vec{p}_3) \bar{v}_r(\vec{p}_3) = \frac{\not{p}_3 - m}{2m}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3} \text{MG}^*_{s r_1 r_2 r_3} = \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{2 q^2 \Delta^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{L}_G^{\beta\lambda} \right\} \times \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}_2 + m}{2m} L_B^{\alpha\nu} \frac{\not{p}_3 - m}{2m} \gamma^\rho \right\} \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \\
&\quad \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \left[\gamma^\beta \frac{\not{k} + \not{p} + m}{m} \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \frac{\not{k} - \not{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \right] \right\} \\
&\quad \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \left[\gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha \right] (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (77) \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \times \\
&\quad \times \left[\text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\beta \frac{\not{k} + \not{p} + m}{m} \gamma^\lambda \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right. \\
&\quad + \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\beta \frac{\not{k} + \not{p} + m}{m} \gamma^\lambda \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&\quad + \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda \frac{\not{k} - \not{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda \frac{\not{k} - \not{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\beta \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right] \quad (78)
\end{aligned}$$

$$= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \times []_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (79)$$

Representamos con $[]_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}$ a todo el corchete de (4), el cual puede ser descompuesto separando los términos según cada denominador como sigue:

$$[]_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} = \left[\frac{\mathbf{Xa}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}}{m k p_2 / \omega} + \frac{\mathbf{Xb}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}}{m k p_3 / \omega} + \frac{\mathbf{Xc}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) k p_2 / \omega} + \frac{\mathbf{Xd}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) k p_3 / \omega} \right] \quad (79')$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Xa}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} &= \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda \} \\ &\quad \times \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Xb}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} &= \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda \} \\ &\quad \times \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Xc}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} &= \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta \} \\ &\quad \times \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Xd}_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho} &= \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta \} \\ &\quad \times \text{Tr}\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \} \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que $\varepsilon_{s\alpha}\varepsilon_{s\beta}$, para el caso de polarización parcial a lo largo de x , $\vec{P} = (P \leq 1, 0, 0)$, puede escribirse como la siguiente matriz 2×2 : $\varepsilon_{s\alpha}\varepsilon_{s\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+P & 0 \\ 0 & 1-P \end{bmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \mathbf{MB}_{sr_1 r_2 r_3} \mathbf{MG}^*_{sr_1 r_2 r_3} &= \frac{-e^6 \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \times \frac{[]_{11}^{\mu\nu\lambda\rho} + []_{22}^{\mu\nu\lambda\rho}}{2} + P \frac{[]_{11}^{\mu\nu\lambda\rho} - []_{22}^{\mu\nu\lambda\rho}}{2} \\ &= \frac{-e^6}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \times \frac{[]_{11} + []_{22}}{2} + P \frac{[]_{11} - []_{22}}{2} \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-e^6}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \left[\frac{1}{m k p_2 / \omega} \left(\frac{\mathbf{Xa}_{11} + \mathbf{Xa}_{22}}{2} + P \frac{\mathbf{Xa}_{11} - \mathbf{Xa}_{22}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m k p_3 / \omega} \left(\frac{\mathbf{Xb}_{11} + \mathbf{Xb}_{22}}{2} + P \frac{\mathbf{Xb}_{11} - \mathbf{Xb}_{22}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) k p_2 / \omega} \left(\frac{\mathbf{Xc}_{11} + \mathbf{Xc}_{22}}{2} + P \frac{\mathbf{Xc}_{11} - \mathbf{Xc}_{22}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1) k p_3 / \omega} \left(\frac{\mathbf{Xd}_{11} + \mathbf{Xd}_{22}}{2} + P \frac{\mathbf{Xd}_{11} - \mathbf{Xd}_{22}}{2} \right) \right] \quad (80') \end{aligned}$$

En donde cada corchete $[]_{\alpha\beta}$ representa el resultado de las contracciones $g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} []_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}$, y para cada denominador (indicado con x), $Xx_{\alpha\beta}$, representa el resultado de $g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} Xx_{\alpha\beta}^{\mu\nu\lambda\rho}$.

Con estos últimos se definen, para cada denominador, los elementos que deberán constituir las funciones a integrar:

$$U_X = \frac{Xx_{11} + Xx_{22}}{2} \quad (81)$$

$$V_X = \frac{Xx_{11} - Xx_{22}}{2} \quad (81')$$

Veamos ahora el conjugado complejo

$$MB_{s, r, r_1, r_2, r_3}^* \cdot MG_{s, r, r_1, r_2, r_3} =$$

$$\begin{aligned} &= -i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \}^\dagger g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \}^\dagger \times \\ &\quad \left(-i e^3 \frac{\varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\lambda\rho}}{4\omega \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) L_G^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \} \right) \\ &= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4\omega q^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \{ \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\mu u_{r_1}(\vec{p}_1) \} \{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}_B^{\alpha\nu} u_{r_2}(\vec{p}_2) \} \times \\ &\quad \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) L_G^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \} \\ &= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4\omega q^2 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right)} \text{Tr} \{ u_{r_1}(\vec{p}_1) \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) L_G^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\mu \} \times \\ &\quad \text{Tr} \{ u_{r_2}(\vec{p}_2) \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}_B^{\alpha\nu} \} \end{aligned}$$

Y con las relaciones usuales (10) de A5.1 resulta:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} MB_{s r_1 r_2 r_3}^* MG_{s r_1 r_2 r_3} = \\ &= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4\omega q^2 \Delta^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}_1 + m}{2m} L_G^{\beta\lambda} \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\rho \frac{\not{p}_3 - m}{2m} \tilde{L}_B^{\alpha\nu} \right\} \\ &= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \left[\gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{p} + m}{m} \gamma^\beta + \gamma^\beta \frac{\not{k} - \not{p}_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\lambda \right] \right. \\ &\quad \left. (\not{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 - m) \left[\gamma^\nu \frac{\not{p}_2 - \not{k} + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{\not{k} - \not{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q^2 \Delta^2} \times \\
&\times \left[\text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\lambda \frac{k + \not{p} + m}{m} \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 - m) \gamma^\nu \frac{p_2 - k + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\alpha \right\} \right. \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\lambda \frac{k + \not{p} + m}{m} \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 - m) \gamma^\alpha \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu \right\} \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\beta \frac{k - p_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\lambda (\not{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 - m) \gamma^\nu \frac{p_2 - k + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\alpha \right\} \\
&\left. + \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\beta \frac{k - p_1 - m}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \gamma^\lambda (\not{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 - m) \gamma^\alpha \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu \right\} \right]
\end{aligned}$$

Expresión que puede escribirse de la misma manera que la (78) anterior, con el único cambio del contenido de los corchetes correspondientes.

Ahora veamos el término MBI-MGI*.

Este es el producto MB·MG* intercambiando $1 \leftrightarrow 2$, de manera que intercambiando $1 \leftrightarrow 2$ en (78):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MBI}_{sr_1 r_2 r_3} \text{MGI}^*_{sr_1 r_2 r_3} = \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q_1^2 (p_1 + p_3)^2} \times \\
&\left[\text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\beta \frac{k + \not{p} + m}{m} \gamma^\lambda \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{k p_1 / \omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right. \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\beta \frac{k + \not{p} + m}{m} \gamma^\lambda \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha \frac{p_1 - k + m}{k p_1 / \omega} \gamma^\nu (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&\left. + \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\not{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right] \quad (82)
\end{aligned}$$

Y por último, con el mismo criterio, el conjugado complejo de éste será:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MBI}^*_{sr_1 r_2 r_3} \text{MGI}_{sr_1 r_2 r_3} = \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 m^4 \omega^2 q_1^2 (p_1 + p_3)^2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\lambda \frac{k + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\beta (\mathbf{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\nu \frac{\mathbf{p}_1 - k + m}{k p_1 / \omega} \gamma^\alpha \right\} \right. \\
& + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\lambda \frac{k + \mathbf{p} + m}{m} \gamma^\beta (\mathbf{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\alpha \frac{k - \mathbf{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu \right\} \\
& + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\beta \frac{k - \mathbf{p}_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\lambda (\mathbf{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\nu \frac{\mathbf{p}_1 - k + m}{k p_1 / \omega} \gamma^\alpha \right\} \\
& \left. + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\beta \frac{k - \mathbf{p}_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\lambda (\mathbf{p} + m) \gamma^\mu \right\} \times \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\alpha \frac{k - \mathbf{p}_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu \right\} \right] \quad (83)
\end{aligned}$$

Ahora tratemos de escribir la expresión a integrar para cada contribución, partiendo de (2.17),

con $x = \cos \theta_2$, y con $|M|^2 = \sum_{\pm \varphi_{21}} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} M_{sr_1 r_2 r_3}^* M_{sr_1 r_2 r_3}$ (donde la última sumatoria

agregada indica la suma sobre los dos signos de φ_{21} , como primer paso de la integración):

$$d\sigma = \alpha r_0^2 \frac{1}{2 \omega m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} \left(\frac{4m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.17)$$

Con

$$G = \omega^2 + p_1^2 - 2 \omega p_1 \cos \theta_1 \quad (2.12)$$

Tendremos así que la contribución que nos interesa se partirá naturalmente en dos, $d\sigma_{BG} + d\sigma_{BIGI}$.

Veamos cada una organizada según los diferentes denominadores.

$d\sigma_{BG} =$

$$\begin{aligned}
& \alpha r_0^2 \frac{1}{128 \omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (E_1 - m) \sqrt{G}} \left(m - (E_1 - p_1 \cos \theta_1) - \frac{m(E_1 - m)}{\omega} \right) \frac{dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{(H_2 - x)} \left(\frac{U_{BGa}}{m} + \frac{U_{BGc}}{E_1 - p_1 \cos \theta_1} + P \left(\frac{V_{BGa}}{m} + \frac{V_{BGc}}{E_1 - p_1 \cos \theta_1} \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{(x - H_3)} \left(\frac{U_{BGb}}{m} + \frac{U_{BGd}}{E_1 - p_1 \cos \theta_1} + P \left(\frac{V_{BGb}}{m} + \frac{V_{BGd}}{E_1 - p_1 \cos \theta_1} \right) \right) \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

Expresión en la que ya está incluida la multiplicación por 2 que corresponde a la suma del conjugado complejo (en el factor 128, que sin eso sería 256), y en cual cada U_{BG} / V_{BG} corresponde a los elementos definidos en (81) / (81').

Y, con los mismos criterios:

$d\sigma_{\text{BIGI}} =$

$$\alpha r_0^2 \frac{1}{128\omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2(E_2 - m) \left(m - (E_2 - p_2 \cos \theta_2) - \frac{m(E_2 - m)}{\omega} \right)} \frac{1}{\pi \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} dx$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \left(\frac{U_{\text{BIGla}}}{m} + \frac{U_{\text{BIGlc}}}{E_2 - p_2 \cos \theta_2} + P \left(\frac{V_{\text{BIGla}}}{m} + \frac{m V_{\text{BIGlc}}}{E_2 - p_2 \cos \theta_2} \right) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p_2 (x - H_3)} \left(\frac{U_{\text{BIGlb}}}{m} + \frac{U_{\text{BIGld}}}{E_2 - p_2 \cos \theta_2} + P \left(\frac{V_{\text{BIGlb}}}{m} + \frac{V_{\text{BIGld}}}{E_2 - p_2 \cos \theta_2} \right) \right) \right\} \quad (85)$$

Y teniendo en cuenta que $p_2 \cos \theta_2 - (E_2 - m) (1 + m/\omega) = p_2 (x - H_4)$, con

$$H_4 = \frac{E_2 - m}{p_2} \left(1 + \frac{m}{\omega} \right) \quad (69)$$

Queda:

$$d\sigma_{\text{BIGI}} = \alpha r_0^2 \frac{1}{128\omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{dp_2}{E_2(E_2 - m) p_2 (x - H_4)} \frac{1}{\pi \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} dx$$

$$\times \left\{ \frac{p_2}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \left(\frac{U_{\text{BIGla}}}{m} + \frac{U_{\text{BIGlc}}}{p_2 (H_2 - x)} + P \left(\frac{V_{\text{BIGla}}}{m} + \frac{V_{\text{BIGlc}}}{p_2 (H_2 - x)} \right) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(x - H_3)} \left(U_{\text{BIGlb}} + \frac{m U_{\text{BIGld}}}{p_2 (H_2 - x)} + P \left(V_{\text{BIGlb}} + \frac{m V_{\text{BIGld}}}{p_2 (H_2 - x)} \right) \right) \right\} \quad (86)$$

$$d\sigma_{\text{BIGI}} = \alpha r_0^2 \frac{1}{128\omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (E_1 - p_1 \cos \theta_1) \sqrt{G}} \frac{dp_2}{p_2 E_2 (E_2 - m)} \frac{1}{\pi \sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}} dx$$

$$\times \left\{ \frac{p_2}{m(x - H_4)} (U_{\text{BIGla}} + P V_{\text{BIGla}}) \right.$$

$$+ \frac{1}{(H_2 - x)(x - H_4)} (U_{\text{BIGlc}} + P V_{\text{BIGlc}}) + \frac{E_1 - p_1 \cos \theta_1}{(x - H_3)(x - H_4)} (U_{\text{BIGlb}} + P V_{\text{BIGlb}})$$

$$\left. + \frac{m(E_1 - p_1 \cos \theta_1)}{p_2 (x - H_3)(H_2 - x)(x - H_4)} (U_{\text{BIGld}} + P V_{\text{BIGld}}) \right\} \quad (87)$$

Por último vamos a los términos $X_{BGI} = - (MB \cdot MGI^* + MB^* \cdot MGI + MBI \cdot MG^* + MBI^* \cdot MG)$

Comencemos por $MB \cdot MGI^*$

De A5.1:

$$MB_{s_r r_1 r_2 r_3} =$$

$$i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) [\gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha] v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7)$$

$$= i e^3 \frac{1}{q^2} \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} g_{\mu\nu} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \quad (7')$$

Donde:

$$q^2 = (p - p_1)^2 = 2m(m - E_1) \quad (26)$$

$$L_B^{\alpha\nu} = \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{2 k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{2 k p_3} \gamma^\alpha \quad (8)$$

Y de A5.4:

$$MGI_{s_r r_1 r_2 r_3} = -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{4\omega \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \\ \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu] u_r(\vec{p}) \} \quad (65)$$

$$= -i e^3 \frac{\varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) g_{\mu\nu}}{2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\alpha\mu} u_r(\vec{p}) \} \quad (65')$$

Donde:

$$L_{GI}^{\alpha\mu} = [\gamma^\mu \frac{k + p + m}{2\omega m} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{k - p_2 - m}{2\omega(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\mu] \quad (9)$$

Entonces:

$$MB_{s_r r_1 r_2 r_3} \cdot MGI_{s_r r_1 r_2 r_3}^* = \\ = \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{2q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \\ \times \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \}^* \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \}^*$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{2q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \} \{ \bar{u}_r(\vec{p}) \tilde{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} u_{r_2}(\vec{p}_2) \} \\
&\quad \{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \} \{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \gamma^\rho u_{r_1}(\vec{p}_1) \} \\
\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3} \cdot \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} &^* = \\
&= \sum_{r_1} \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{4q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu \frac{\mathbf{p} + \mathbf{m}}{2m} \tilde{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} \frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}}{2m} L_B^{\alpha\nu} \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}}{2m} \gamma^\rho u_{r_1}(\vec{p}_1) \} \\
&= \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{4q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \text{Tr} \left\{ \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}}{2m} \gamma^\mu \frac{\mathbf{p} + \mathbf{m}}{2m} \tilde{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} \frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}}{2m} L_B^{\alpha\nu} \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}}{2m} \gamma^\rho \right\} \\
&= -\frac{e^6}{4m^4} \frac{\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{16q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \left[\gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{2\omega m} \gamma^\lambda + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \gamma^\lambda \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{m}}{2\omega(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right] (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \left[\gamma^\alpha \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{2k p_2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{2k p_3} \gamma^\alpha \right] (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
&= \frac{e^6}{4m^4} \frac{\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{128\omega^2 \left(-\frac{q^2}{2} \right) \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \left[\gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{m} \gamma^\lambda + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \gamma^\lambda \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{m}}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta \right] (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \left[\gamma^\alpha \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha \right] (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{128\omega^2 \left(-\frac{q^2}{2} \right) \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \times \\
&\quad \times \left[\text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{m} \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{m} \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
& + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
& = \frac{e^6}{4m^6} \frac{m \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{128 \omega^3 (E_1 - m) p_2 (\cos \theta_2 - H_4)} \times \\
& \quad \times \left[\text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{k + p + m}{m} \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \right. \\
& \quad + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{k + p + m}{m} \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
& \quad + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{p_2 - k + m}{k p_2 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \\
& \quad \left. + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k - p_2 - m}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{k - p_3 + m}{k p_3 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\rho \right\} \right] \tag{88}
\end{aligned}$$

Ahora veamos el conjugado complejo de éste (se verá que ambos son reales, y por lo tanto iguales, de manera que, aunque no sería necesario calcularlo, lo hacemos para tener elementos de verificación al elaborar el programa de cálculo).

$$\begin{aligned}
& \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3}^* \cdot \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} = \\
& = \frac{-e^6 \varepsilon_{s\alpha}(\vec{k}) \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{2q^2 \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\mu u_r(\vec{p}) \right\}^* \cdot \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_B^{\alpha\nu} v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\}^* \\
& \quad \times \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \right\} \\
& = \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{4 \left(-\frac{q^2}{2} \right) \left(\frac{(p_1 + p_3)^2}{2} \right)} \left\{ \bar{u}_r(\vec{p}) \gamma^\mu u_{r_1}(\vec{p}_1) \right\} \left\{ \bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \gamma^\rho v_{r_3}(\vec{p}_3) \right\} \\
& \quad \left\{ \bar{v}_{r_3}(\vec{p}_3) \tilde{L}_B^{\alpha\nu} u_{r_2}(\vec{p}_2) \right\} \left\{ \bar{u}_{r_2}(\vec{p}_2) L_{GI}^{\beta\lambda} u_r(\vec{p}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} \text{MB}_{s r_1 r_2 r_3}^* \cdot \text{MGI}_{s r_1 r_2 r_3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbf{r}} \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{8 \left(-q^2/2 \right) \left((p_1 + p_3)^2/2 \right)} \left\{ \bar{u}_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{p}}) \gamma^\mu \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}}{2m} \gamma^\rho \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}}{2m} \tilde{\mathbf{L}}_B^{\alpha\nu} \frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}}{2m} \mathbf{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} u_{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{p}}) \right\} \\
&= \frac{e^6 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{8 \left(-q^2/2 \right) \left((p_1 + p_3)^2/2 \right)} \text{Tr} \left\{ \frac{\mathbf{p} + \mathbf{m}}{2m} \gamma^\mu \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}}{2m} \gamma^\rho \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}}{2m} \tilde{\mathbf{L}}_B^{\alpha\nu} \frac{\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}}{2m} \mathbf{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} \right\} \\
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{32 \left(-q^2/2 \right) \left((p_1 + p_3)^2/2 \right)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \tilde{\mathbf{L}}_B^{\alpha\nu} (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \mathbf{L}_{\text{GI}}^{\beta\lambda} \right\} \\
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{32 \left(-q^2/2 \right) \left((p_1 + p_3)^2/2 \right)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \left[\gamma^\nu \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{2k p_2} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{k - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{2k p_3} \gamma^\nu \right] (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \left[\gamma^\lambda \frac{k + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{2\omega m} \gamma^\beta + \gamma^\beta \frac{k - \mathbf{p}_2 - \mathbf{m}}{2\omega(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\lambda \right] \right\} \\
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m^2 \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{g}_{\lambda\rho}}{128\omega^2 \left(-q^2/2 \right) \left((p_1 + p_3)^2/2 \right)} \times \\
&\times \left[\text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{k p_2 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{m} \gamma^\beta \right\} \right. \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{k - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\lambda \frac{k + \mathbf{p} + \mathbf{m}}{m} \gamma^\beta \right\} \\
&+ \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\nu \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + \mathbf{m}}{k p_2 / \omega} \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{k - \mathbf{p}_2 - \mathbf{m}}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\lambda \right\} \\
&\left. + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p} + \mathbf{m}) \gamma^\mu (\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}) \gamma^\rho (\mathbf{p}_3 - \mathbf{m}) \gamma^\alpha \frac{k - \mathbf{p}_3 + \mathbf{m}}{k p_3 / \omega} \gamma^\nu (\mathbf{p}_2 + \mathbf{m}) \gamma^\beta \frac{k - \mathbf{p}_2 - \mathbf{m}}{(E_2 - p_2 \cos \theta_2)} \gamma^\lambda \right\} \right]
\end{aligned} \tag{89}$$

Aplicando las propiedades de las trazas de estas matrices se verifica que estos cuatro términos son iguales a cada uno de los anteriores en el mismo orden, con lo cual la suma $\text{MB} \cdot \text{MGI}^* + \text{MB}^* \cdot \text{MGI}$ equivale a un factor 2, y podemos escribir esta primer parte como:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} (\text{MB}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} \cdot \text{MGI}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}^* + \text{MB}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}^* \cdot \text{MGI}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{64\omega^3 (E_1 - m) p_2 (\cos\theta_2 - H_4)} \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{m p_2 (H_2 - \cos\theta_2)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right. \\
&\quad + \frac{1}{m p_2 (\cos\theta_2 - H_3)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \right. \\
&\quad \quad \left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&\quad + \frac{1}{p_2^2 (H_2 - \cos\theta_2)^2} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu \right. \\
&\quad \quad \left. (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
&\quad + \left. \frac{1}{p_2^2 (\cos\theta_2 - H_3)(H_2 - \cos\theta_2)} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right] \quad (90)
\end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que la variable de la integración analítica será $\cos\theta_2$, agrupamos los términos según los diferentes factores $(\cos\theta_2 - H_i)$ en los denominadores, denominando a cada término $X_{\text{BGI}x}$, con x que puede ser a, b, c , o d :

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k})}{64\omega^3 (E_1 - m) p_2^2} \times \left[\frac{1}{m (H_2 - \cos\theta_2)(\cos\theta_2 - H_4)} X_{\text{BGI}a}^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad + \frac{1}{m (\cos\theta_2 - H_3)(\cos\theta_2 - H_4)} X_{\text{BGI}b}^{\alpha\beta} + \frac{1}{p_2 (H_2 - \cos\theta_2)^2 (\cos\theta_2 - H_4)} X_{\text{BGI}c}^{\alpha\beta} \\
&\quad \left. + \frac{1}{p_2 (\cos\theta_2 - H_3)(H_2 - \cos\theta_2)(\cos\theta_2 - H_4)} X_{\text{BGI}d}^{\alpha\beta} \right] \quad (91)
\end{aligned}$$

Siendo la expresión de los términos $X_{\text{BGI}x}^{\alpha\beta}$ (se sobreentiende la suma sobre los índices cuadvectoresiales μ, ν, λ, ρ):

$$X_{\text{BGI}a}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \right. \\
\left. (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (91a)$$

$$X_{\text{BGI}b}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \right. \\
\left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (91b)$$

$$X_{\text{BGI}c}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\alpha \right. \\
\left. (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (91c)$$

$$X_{\text{BGI}d}^{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\nu \right. \\
\left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (91d)$$

Por último quedan los términos $\text{MBI} \cdot \text{MG}^* + \text{MBI}^* \cdot \text{MG}$, pero éstos son exactamente los anteriores intercambiando $1 \leftrightarrow 2$ en ellos, de manera que quedará:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} (\text{MBI}_{s r_1 r_2 r_3} \cdot \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3}^* + \text{MBI}_{s r_1 r_2 r_3}^* \cdot \text{MG}_{s r_1 r_2 r_3}) = \\
& = \frac{e^6}{4 m^6} \frac{m \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k}) g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}}{64 \omega^3 (E_2 - m)(p_1 \cos \theta_1 - (1 + m/\omega)(E_1 - m))} \times \\
& \quad \times \left[\frac{1}{m(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \right. \\
& \quad + \frac{1}{m p_2 (\cos \theta_2 - H_3)} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu \right. \\
& \quad \quad \left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
& \quad + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu \right. \\
& \quad \quad \left. (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \\
& \quad + \frac{1}{p_2 (\cos \theta_2 - H_3)(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu \right. \\
& \quad \quad \left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \left. \right] \quad (92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{e^6}{4 m^6} \frac{m \varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta}(\vec{k})}{64 \omega^3 (E_2 - m)(p_1 \cos \theta_1 - (1 + m/\omega)(E_1 - m))} \times \\
& \quad \times \left[\frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \left\{ \frac{1}{m} X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{a} + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{b} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{p_2 (\cos \theta_2 - H_3)} \left\{ \frac{1}{m} X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{c} + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{d} \right\} \right] \quad (93)
\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{a} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha \right. \\
\left. (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (93a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{b} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\alpha \right. \\
\left. (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (93b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{c} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (p_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\beta (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu \right. \\
\left. (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \right\} \quad (93c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\text{BIG}}^{\alpha\beta} \mathbf{d} = g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} \text{Tr} \{ (\mathbf{p}_2 + m) \gamma^\mu (\mathbf{p} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - m) \gamma^\beta (\mathbf{p}_1 + m) \gamma^\nu \\ (\mathbf{k} - \mathbf{p}_3 + m) \gamma^\alpha (\mathbf{p}_3 - m) \gamma^\rho \} \end{aligned} \quad (93d)$$

Ahora escribiendo:

$$\varepsilon_{s\alpha} \varepsilon_{s\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+P & 0 \\ 0 & 1-P \end{bmatrix},$$

y, para cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} U_X &= \frac{Xx_{11} + Xx_{22}}{2} \\ V_X &= \frac{Xx_{11} - Xx_{22}}{2} \end{aligned}$$

Se llega a las expresiones finales:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} (\text{MB}_{sr_1 r_2 r_3} \cdot \text{MGI}_{sr_1 r_2 r_3}^* + \text{MB}_{sr_1 r_2 r_3}^* \cdot \text{MGI}_{sr_1 r_2 r_3}) = \\ &= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m}{64\omega^3 (E_1 - m) p_2^2} \times \left[\frac{1}{m(H_2 - \cos \theta_2)(\cos \theta_2 - H_4)} (U_{\text{BIG}a} + P V_{\text{BIG}a}) \right. \\ & \quad + \frac{1}{m(\cos \theta_2 - H_3)(\cos \theta_2 - H_4)} (U_{\text{BIG}b} + P V_{\text{BIG}b}) \\ & \quad + \frac{1}{p_2(H_2 - \cos \theta_2)^2 (\cos \theta_2 - H_4)} (U_{\text{BIG}c} + P V_{\text{BIG}c}) \\ & \quad \left. + \frac{1}{p_2(\cos \theta_2 - H_3)(H_2 - \cos \theta_2)(\cos \theta_2 - H_4)} (U_{\text{BIG}d} + P V_{\text{BIG}d}) \right] \quad (91') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} (\text{MBI}_{sr_1 r_2 r_3} \cdot \text{MG}_{sr_1 r_2 r_3}^* + \text{MBI}_{sr_1 r_2 r_3}^* \cdot \text{MG}_{sr_1 r_2 r_3}) = \\ &= \frac{e^6}{4m^6} \frac{m}{64\omega^3 (E_2 - m)(p_1 \cos \theta_1 - (1 + m/\omega)(E_1 - m))} \times \\ & \quad \times \left[\frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} \left\{ \frac{1}{m} (U_{\text{BIG}a} + P V_{\text{BIG}a}) + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} (U_{\text{BIG}b} + P V_{\text{BIG}b}) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p_2(\cos \theta_2 - H_3)} \left\{ \frac{1}{m} (U_{\text{BIG}c} + P V_{\text{BIG}c}) + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)} (U_{\text{BIG}d} + P V_{\text{BIG}d}) \right\} \right] \quad (93') \end{aligned}$$

Y por último escribamos la expresión a integrar para cada contribución, partiendo de (2.17), con $x = \cos\theta_2$, y con $|M|^2 = -\sum_{\pm\varphi_{21}} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2 r_3} M_{sr_1 r_2 r_3}^* M_{sr_1 r_2 r_3}$ (donde por un lado el signo menos da cuenta de que estos términos deben restarse, y por otro la última sumatoria agregada indica la suma sobre los dos signos de φ_{21} , como primer paso de la integración):

$$d\sigma = \alpha r_0^2 \frac{1}{2\omega m} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} \left(\frac{4m^6}{e^6} |M|^2 \right) \quad (2.17)$$

Tendremos así las dos últimas contribuciones: $d\sigma_{\text{BGI}}$ y $d\sigma_{\text{BIG}}$:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{BGI}} = & \alpha r_0^2 \frac{-1}{128\omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 (E_1 - m) \sqrt{G}} \frac{dp_2}{p_2 E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} \times \\ & \times \left[\frac{1}{m(H_2 - x)(x - H_4)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BGI}} a + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BGI}} a \right) \right. \\ & + \frac{1}{m(x - H_3)(x - H_4)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BGI}} b + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BGI}} b \right) \\ & + \frac{1}{p_2 (H_2 - x)^2 (x - H_4)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BGI}} c + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BGI}} c \right) \\ & \left. + \frac{1}{p_2 (x - H_3)(H_2 - x)(x - H_4)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BGI}} d + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BGI}} d \right) \right] \quad (91'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{BIG}} = & \alpha r_0^2 \frac{-1}{128\omega^4} \frac{d^3 p_1}{2\pi E_1 \left(p_1 \cos\theta_1 - \left(1 + \frac{m}{\omega}\right) (E_1 - m) \right) \sqrt{G}} \frac{p_2 dp_2}{(E_2 - m) E_2} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}} \\ & \times \left[\frac{1}{(E_1 - p_1 \cos\theta_1)} \left\{ \frac{1}{m} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BIG}} a + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BIG}} a \right) + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos\theta_1)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BIG}} b + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BIG}} b \right) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{p_2 (x - H_3)} \left\{ \frac{1}{m} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BIG}} c + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BIG}} c \right) + \frac{1}{(E_1 - p_1 \cos\theta_1)} \left(\sum_{\pm\varphi_{21}} U_{\text{BIG}} d + P \sum_{\pm\varphi_{21}} V_{\text{BIG}} d \right) \right\} \right] \quad (93'') \end{aligned}$$

APÉNDICE 6:

Fórmulas y procedimientos de integración sobre θ_2

La integral sobre θ_2 queda planteada según la expresión (2.16) como sigue:

$$\int \frac{A \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2}{\sqrt{F}} = \frac{\delta}{2\sqrt{F_0}} \int_{x^-}^{x^+} \frac{A dx}{\sqrt{(x - x^-)(x^+ - x)}}$$

En donde A representa los elementos que se obtienen al calcular el módulo cuadrado de los elementos de matriz, procedimiento en el cual se deben obtener expresiones del tipo:

$$\frac{\text{Polinomio de grado } \leq 3}{(H_i - x)^{n_i} (x - H_j)^{n_j}}$$

En donde:

- H_i y H_j son constantes que están fuera del intervalo de integración, en general $H_i > x^+$, y $H_j < x^-$,
- n_i y n_j son dos números naturales (incluyendo el cero) tales que $n_i + n_j = 2$.
- $\delta = b - a$, siendo a y b otra denominación para los extremos: $a = x^-$, $b = x^+$.

Las constantes H_i y H_j (que sólo son constantes para la integral sobre x) resultan respectivamente de los denominadores $k p_i$ y $k p_j$ de los propagadores correspondientes a los fermiones virtuales en los diagramas de Feynmann considerados.

Así, para los diagramas de Borsellino habrá tres tipos de denominador: $(H_2 - x)^2$, $(H_2 - x)(x - H_3)$, y $(x - H_3)^2$, pero en general, al incluir otros diagramas aparecerán denominadores correspondientes a un par cualquiera de los propagadores $k p_1$, $k p_2$, y $k p_3$, a los cuales eventualmente se puede agregar algún factor del mismo tipo proveniente de otra parte del desarrollo, que hace aparecer otra constante H_4 .

Polinomios del numerador

En cada numerador encontramos que la dependencia con la variable de integración, θ_2 , aparece ya sea directamente o ya sea a través de φ_{21} . Un procedimiento directo de integración podría haber sido sustituir φ_{21} en términos de p_1 , p_2 , θ_1 , θ_2 , por medio de la expresión (2.8), pero se ha escogido otro, que ha sido factorar cada numerador separando las contribuciones según las potencias de $\cos(\theta_2)$, $\operatorname{sen}(\theta_2)$, $\cos(\varphi_{21})$, y $\operatorname{sen}(\varphi_{21})$ que contengan.

Se han encontrado las siguientes combinaciones de estos factores:

Numerador = Cte

$$\begin{aligned} &+ CT \times \cos(\theta_2) \\ &+ CT2 \times \cos^2(\theta_2) \\ &+ CT3 \times \cos^3(\theta_2) \\ &+ CFi2 \times \cos^2(\varphi_{21}) \\ &+ STCFi \times \operatorname{sen}(\theta_2) \times \cos(\varphi_{21}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& + \text{STCTCFi} \times \text{sen}(\theta_2) \times \cos(\theta_2) \times \cos(\varphi_{21}) \\
& + \text{STCT2CFi} \times \text{sen}(\theta_2) \times \cos^2(\theta_2) \times \cos(\varphi_{21}) \\
& + \text{ST2CFi2} \times \text{sen}^2(\theta_2) \times \cos^2(\varphi_{21}) \\
& + \text{CT2CFi2} \times \cos^2(\theta_2) \times \cos^2(\varphi_{21})
\end{aligned}$$

Donde cada sigla representa todos los términos que no dependen ni de θ_2 , ni de φ_{21} , que aparecen multiplicando al correspondiente factor escrito a su derecha.

Cada una de estas siglas además llevará letras que mostraremos más adelante, indicativas del denominador que le corresponde.

Ahora bien, a partir de la expresión (2.8') es posible transformar cada producto $\text{sen}(\theta_2) \times \cos(\varphi_{21})$, en un polinomio de primer grado en $\cos(\theta_2)$, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned}
\text{sen}\theta_2 \cos \varphi_{21} &= \frac{(\omega - p_1 \cos \theta_1) p_2 \cos \theta_2 - C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \\
&= \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} \cos \theta_2 - \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1}
\end{aligned} \quad (2)$$

Siendo, según (2.11), $C = (\omega + m)(E_1 + E_2 - m) - E_1 E_2 - \omega p_1 \cos \theta_1$

Con esto se tiene que las siguientes expresiones se transforman automáticamente en polinomios en $\cos(\theta_2)$:

$$\text{sen}\theta_2 \times \cos\theta_2 \times \cos\varphi_{21} = \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} \cos^2 \theta_2 - \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \cos \theta_2 \quad (3)$$

$$\text{sen}\theta_2 \times \cos^2\theta_2 \times \cos\varphi_{21} = \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} \cos^3 \theta_2 - \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \cos^2 \theta_2 \quad (4)$$

$$\text{sen}^2\theta_2 \times \cos^2\varphi_{21} = \frac{(\omega - p_1 \cos \theta_1)^2}{p_1^2 \text{sen}^2\theta_1} \cos^2 \theta_2 - \frac{2(\omega - p_1 \cos \theta_1)C}{p_1^2 p_2 \text{sen}^2\theta_1} \cos \theta_2 + \frac{C^2}{p_1^2 p_2^2 \text{sen}^2\theta_1} \quad (5)$$

Ahora bien, los restantes términos requieren un tratamiento especial.

Los términos con $\cos^2(\theta_2) \times \cos^2(\varphi_{21})$ pueden ser reducidos en parte a (5):

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta_2) \times \cos^2(\varphi_{21}) &= (1 - \text{sen}^2\theta_2) \times \cos^2\varphi_{21} \\
&= \cos^2\varphi_{21} - \text{sen}^2\theta_2 \times \cos^2\varphi_{21} \\
&= 1 - \text{sen}^2\theta_2 \times \cos^2\varphi_{21} - \text{sen}^2\varphi_{21}
\end{aligned} \quad (6)$$

La parte restante es un término con $\text{sen}^2\varphi_{21}$, que también se obtendrá de los términos $\text{CFi2} \times \cos^2\varphi_{21}$ aplicando $\cos^2\varphi_{21} = 1 - \text{sen}^2\varphi_{21}$. Todas estas contribuciones, para cada denominador, darán lugar a un término $\text{SFi2} \times \text{sen}^2\varphi_{21}$ que requerirá el siguiente procedimiento de integración.

Partamos de la parte correspondiente de (2.16):

$$\frac{A \text{sen}\theta_2 d\theta_2}{\sqrt{F}} \rightarrow \frac{\text{SFi2} \text{sen}^2\varphi_{21} \text{sen}\theta_2 d\theta_2}{D \sqrt{F}}$$

Donde D es el denominador que le corresponde al término en cuestión. Ahora bien, a partir de (2.14) tenemos que $\sqrt{F} = |\text{sen}\varphi_{21}| p_1 p_2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2$, de manera que:

$$\frac{\text{SF}i2 \text{sen}^2\varphi_{21} \text{sen}\theta_2 d\theta_2}{D \sqrt{F}} = \frac{\text{SF}i2 \sqrt{F} \text{sen}\theta_2 d\theta_2}{D p_1^2 p_2^2 \text{sen}^2\theta_1 \text{sen}^2\theta_2}$$

Expresión que, una vez hecho el cambio de variable $x = \cos\theta_2$, y aplicando (2.15), queda:

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{SF}i2 \sqrt{F} dx}{p_1^2 p_2^2 \text{sen}^2\theta_1 D (1-x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{G} \text{SF}i2}{p_1^2 \text{sen}^2\theta_1 p_2} \frac{\sqrt{(x-x^-)(x^+-x)}}{D (1-x^2)} dx \end{aligned} \quad (7)$$

De manera que, finalmente, una vez que cada numerador ha sido factorado según las expresiones (1), podemos obtener los coeficientes de los polinomios $P(x) = S x^3 + M x^2 + N x + R$:

$$\begin{aligned} R = & \text{Cte} + \text{CF}i2 + \text{CT}2\text{CF}i2 - \text{STCF}i \times \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \\ & + (\text{ST}2\text{CF}i2 - \text{CT}2\text{CF}i2) \times \frac{C^2}{p_1^2 p_2^2 \text{sen}^2\theta_1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} N = & \text{CT} + \text{STCF}i \times \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} - \text{STCTCF}i \times \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \\ & - (\text{ST}2\text{CF}i2 - \text{CT}2\text{CF}i2) \times \frac{2(\omega - p_1 \cos \theta_1) C}{p_1^2 p_2 \text{sen}^2\theta_1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M = & \text{CT}2 + \text{STCTCF}i \times \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} - \text{STCT}2\text{CF}i \times \frac{C}{p_1 p_2 \text{sen}\theta_1} \\ & + (\text{ST}2\text{CF}i2 - \text{CT}2\text{CF}i2) \times \frac{(\omega - p_1 \cos \theta_1)^2}{p_1^2 \text{sen}^2\theta_1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$S = \text{CT}3 + \text{STCT}2\text{CF}i \times \frac{\omega - p_1 \cos \theta_1}{p_1 \text{sen}\theta_1} \quad (11)$$

Y por último tenemos el término SFi2 para las integrales tipo (7), que resulta:

$$\text{SF}i2 = -(\text{CF}i2 + \text{CT}2\text{CF}i2) \quad (12)$$

Integrales de interés

Comencemos con integrales del tipo:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)^{n_j} (x - H_k)^{n_k}} dx \quad (13)$$

En donde:

- $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, $P(x) = S x^3 + M x^2 + N x + R$,
- H_j y H_k son constantes que están fuera del intervalo de integración, $H_k < a$, y $H_j > b$,
- n_j y n_k son dos números naturales (incluyendo el cero).

Tenemos entonces:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi \left\{ R + N x_0 + M x_0^2 + S x_0^3 + \frac{\delta^2 (M + 3S x_0)}{8} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)} dx &= \\ &= \pi \left\{ -S \left(\frac{\delta^2}{8} + H_j^2 + x_0^2 + x_0 H_j \right) - M(H_j + x_0) - N + \frac{S H_j^3 + M H_j^2 + N H_j + R}{R_j} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (x - H_k)} dx &= \\ &= \pi \left\{ S \left(\frac{\delta^2}{8} + H_k^2 + x_0^2 + x_0 H_k \right) + M(H_k + x_0) + N + \frac{S H_k^3 + M H_k^2 + N H_k + R}{R_k} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)(x - H_k)} dx &= \\ &= \pi \left\{ -S(H_k + H_j + x_0) - M + \frac{S H_k^3 + M H_k^2 + N H_k + R}{(H_j - H_k) R_k} + \frac{S H_j^3 + M H_j^2 + N H_j + R}{(H_j - H_k) R_j} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)^2} dx &= \\ &= \pi \left\{ S(2H_j + x_0) + M - \frac{3S H_j^2 + 2M H_j + N}{R_j} + \frac{(H_j - x_0)(S H_j^3 + M H_j^2 + N H_j + R)}{R_j^3} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (x - H_k)^2} dx &= \\ &= \pi \left\{ S(2H_k + x_0) + M + \frac{3S H_k^2 + 2M H_k + N}{R_k} + \frac{(x_0 - H_k)(S H_k^3 + M H_k^2 + N H_k + R)}{R_k^3} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)^2 (x - H_k)} dx = \\
& = \pi \left\{ S + \frac{SH_k^3 + MH_k^2 + NH_k + R}{(H_j - H_k)^2 R_k} - \frac{3SH_j^2 + 2MH_j + N}{(H_j - H_k) R_j} \right. \\
& \quad \left. + \frac{SH_j^3 + MH_j^2 + NH_j + R}{(H_j - H_k) R_j} \left(\frac{1}{H_j - H_k} + \frac{H_j - x_0}{R_j^2} \right) \right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)(x - H_k)^2} dx = \\
& = \pi \left\{ -S + \frac{3SH_k^2 + 2MH_k + N}{(H_j - H_k) R_k} + \frac{SH_k^3 + MH_k^2 + NH_k + R}{(H_j - H_k) R_k} \left(\frac{1}{H_j - H_k} + \frac{x_0 - H_k}{R_k^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{SH_j^3 + MH_j^2 + NH_j + R}{(H_j - H_k)^2 R_j} \right\} \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_j - x)^2 (x - H_k)^2} dx = \\
& = \pi \left\{ \frac{3SH_k^2 + 2MH_k + N}{(H_j - H_k)^2 R_k} + \frac{SH_k^3 + MH_k^2 + NH_k + R}{(H_j - H_k)^2 R_k} \left(\frac{2}{H_j - H_k} + \frac{x_0 - H_k}{R_k^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{3SH_j^2 + 2MH_j + N}{(H_j - H_k)^2 R_j} + \frac{SH_j^3 + MH_j^2 + NH_j + R}{(H_j - H_k)^2 R_j} \left(\frac{2}{H_j - H_k} + \frac{H_2 - x_0}{R_j^2} \right) \right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (x - H_{k1})(x - H_{k2})} dx = \\
& = \frac{\pi}{R_{k1} R_{k2} (H_{k1} - H_{k2})} \times \\
& \left\{ S (R_{k1} R_{k2} (H_{k1} - H_{k2}) (H_{k1} + H_{k2} + b/2 - 5a/2) + R_{k1} (a - H_{k2})^3 - R_{k2} (a - H_{k1})^3) \right. \\
& \quad + (3Sa + M) (R_{k1} R_{k2} (H_{k1} - H_{k2}) - R_{k1} (a - H_{k2})^2 + R_{k2} (a - H_{k1})^2) \\
& \quad + (3Sa^2 + 2Ma + N) (R_{k1} (a - H_{k2}) - R_{k2} (a - H_{k1})) \\
& \quad \left. + (Sa^3 + Ma^2 + Na + R) (-R_{k1} + R_{k2}) \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (x - H_{k1})(x - H_{k2})(H_2 - x)} dx = \\
& \frac{\pi}{-H_j^2 (H_{k2} - H_{k1}) - H_{k1}^2 (H_2 - H_{k2}) + H_{k2}^2 (H_2 - H_{k1})} \left\{ \frac{H_2 - H_{k2}}{R_{k1}} (R + NH_{k1} + MH_{k1}^2 + SH_{k1}^3) \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{H_{k1} - H_{k2}}{R_2} \left(R + NH_2 + MH_2^2 + SH_2^3 \right) - \frac{H_2 - H_{k1}}{R_{k2}} \left(R + NH_{k2} + MH_{k2}^2 + SH_{k2}^3 \right) \} \quad (24)$$

Siendo, tanto para k_1 como para k_2 , subíndices ambos indicadores de valores $H_k < a$:

$$R_j = \sqrt{(H_j - a)(H_j - b)}, \text{ y } R_k = \sqrt{(a - H_k)(b - H_k)} \quad (25)$$

Ahora pasemos a las integrales del tipo (7):

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(H_j - x)^{n_j} (x - H_k)^{n_k} (1 - x^2)} dx \quad (26)$$

Para éstas utilizaremos:

Si $H_k < a < b < H_j$, $b < 1$, y $H_j \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - H_k)(H_j - x)(1 - x^2)} &= \\ &= \frac{1}{(H_j - H_k)(1 - H_k^2)} \frac{1}{(x - H_k)} + \frac{1}{(H_j - H_k)(1 - H_j^2)} \frac{1}{(H_j - x)} \\ &\quad - \frac{1}{2(1 - H_k)(1 - H_j)} \frac{1}{(1 - x)} - \frac{1}{2(1 + H_k)(1 + H_j)} \frac{1}{(1 + x)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{(x - H)(1 - x^2)} = \frac{1}{(1 - H^2)} \frac{1}{(x - H)} + \frac{1}{2(1 - H)} \frac{1}{(1 - x)} - \frac{1}{2(1 + H)} \frac{1}{(1 + x)} \quad (28)$$

Tenemos:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x - H_k} dx = \pi (x_0 - H_k) - \pi \sqrt{(a - H_k)(b - H_k)} \quad (29)$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{H_j - x} dx = \pi (H_j - x_0) - \pi \sqrt{(H_j - a)(H_j - b)} \quad (30)$$

De todo lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(H_j - x)(1 - x^2)} dx &= \\ &= \frac{\pi (H_j - x_0 - R_j)}{(1 - H_j^2)} - \frac{\pi \left(1 - x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)} \right)}{2(1 - H_j)} + \frac{\pi \left(1 + x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)} \right)}{2(1 + H_j)} \end{aligned} \quad (31)$$

$$= \pi \left\{ \frac{-R_j}{1 - H_j^2} + \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{2(1 - H_j)} - \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2(1 + H_j)} \right\} \quad (31')$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(x - H_k)(1 - x^2)} dx =$$

$$= \frac{\pi(-H_k + x_0 - R_k)}{(1-H_k^2)} + \frac{\pi(1-x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1-H_k)} - \frac{\pi(1+x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)})}{2(1+H_k)} \quad (32)$$

$$= -\pi \left\{ \frac{R_k}{1-H_k^2} + \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{2(1-H_k)} - \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2(1+H_k)} \right\} \quad (32')$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(H_j-x)(x-H_k)(1-x^2)} dx &= \\ &= \frac{\pi(x_0 - H_k - R_k)}{(H_j - H_k)(1 - H_k^2)} + \frac{\pi(H_j - x_0 - R_j)}{(H_j - H_k)(1 - H_j^2)} - \frac{\pi(1 - x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1 - H_k)(1 - H_j)} \\ &\quad - \frac{\pi(1 + x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)})}{2(1 + H_k)(1 + H_j)} \end{aligned} \quad (33)$$

Si $a < b < 1$, $b < H_j$, $b < H_k$, y $H_j \neq 1$, $H_k \neq 1$, y $H_j \neq H_k$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(H_j-x)(H_k-x)(1-x^2)} dx &= \\ &= \frac{\pi(H_k - x_0 - R_k)}{(H_j - H_k)(1 - H_k^2)} - \frac{\pi(H_j - x_0 - R_j)}{(H_j - H_k)(1 - H_j^2)} + \frac{\pi(1 - x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1 - H_k)(1 - H_j)} \\ &\quad + \frac{\pi(1 + x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)})}{2(1 + H_k)(1 + H_j)} \end{aligned} \quad (34)$$

Si $a < b < 1$, $b < H_j = H_k \neq 1$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(H_j-x)^2(1-x^2)} dx &= \\ &= \frac{\pi(R_j + x_0 - H_j)(H_j^2 + 2H_jR_j - 1)}{R_j(1-H_j^2)^2} + \frac{\pi(1 - x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1-H_j)^2} \\ &\quad + \frac{\pi(1 + x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)})}{2(1+H_j)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

Si $a < b < 1$, $H_j < a$, $H_k < a$, y $H_j \neq H_k$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(x-H_j)(x-H_k)(1-x^2)} dx &= \\ &= \frac{\pi(x_0 - H_j - R_j)}{(H_j - H_k)(1 - H_j^2)} - \frac{\pi(x_0 - H_k - R_k)}{(H_j - H_k)(1 - H_k^2)} + \frac{\pi(1 - x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1 - H_k)(1 - H_j)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi \left(1 + x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)}\right)}{2(1+H_k)(1+H_j)} \quad (36)$$

Si $a < b < 1$, $H_j = H_k < a$.

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{(x-H_j)^2(1-x^2)} dx =$$

$$= \frac{\pi(H_j + R_j - x_0)(H_j^2 - 2H_j R_j - 1)}{R_j(1-H_j^2)^2} + \frac{\pi(1-x_0 - \sqrt{(1-a)(1-b)})}{2(1-H_j)^2}$$

$$+ \frac{\pi(1+x_0 - \sqrt{(1+a)(1+b)})}{2(1+H_j)^2} \quad (37)$$

Otras integrales útiles.

Puede ser de interés considerar las mismas integrales, si se escribe el polinomio $P(x)$ como una expansión centrada en $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$, es decir:

$$P(x) = s(x-x_0)^3 + m(x-x_0)^2 + n(x-x_0) + r$$

En este caso las relaciones entre los coeficientes son:

$$s = S$$

$$m = M + 3Sx_0$$

$$n = N + 2Mx_0 + 3Sx_0^2$$

$$r = R + Nx_0 + Mx_0^2 + Sx_0^3,$$

O bien, inversamente:

$$S = s$$

$$M = m - 3sx_0$$

$$N = n - 2mx_0 + 3sx_0^2$$

$$R = r - nx_0 + mx_0^2 - sx_0^3.$$

De manera que aunque valen las expresiones anteriores sustituyendo los correspondientes coeficientes, de ello resultarán las siguientes expresiones que también es útil considerar:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}(H_2-x)^2} dx =$$

$$\pi \left\{ 2sh_2 + m - \frac{3sh_2^2 + 2mh_2 + n}{R_2} + \frac{sh_2^4 + mh_2^3 + nh_2^2 + rh_2}{R_2^3} \right\}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (x-H_3)^2} dx =$$

$$\pi \left\{ 2sh_3 + m + \frac{3sh_3^2 + 2mh_3 + n}{R_3} - \frac{sh_3^4 + mh_3^3 + nh_3^2 + rh_3}{R_3^3} \right\}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)} (H_2-x)(x-H_3)} dx =$$

$$\pi \left\{ -s(H_2 + H_3 - 2x_0) - m + \frac{sh_2^3 + mh_2^2 + nh_2 + r}{(H_2 - H_3) R_2} + \frac{sh_3^3 + mh_3^2 + nh_3 + r}{(H_2 - H_3) R_3} \right\}$$

Siendo:

$$h_2 = H_2 - x_0, h_3 = H_3 - x_0, R_2 = \sqrt{(H_2 - a)(H_2 - b)}, \text{ y } R_3 = \sqrt{(a - H_3)(b - H_3)}$$

Por otra parte, vale saber que si se elige utilizar los polinomios $P(x)$ para aproximar una función $f(x)$ cualquiera, de manera tal que coincidan con dicha función $f(x)$ en cuatro puntos x_i equiespaciados, dos de los cuales son los extremos del intervalo (cuya longitud es $\delta = b - a$), los coeficientes deberán ser:

$$s = \frac{9}{2\delta^3} (f_4 - f_1 + 3(f_2 - f_3))$$

$$m = \frac{9}{4\delta^2} (f_4 + f_1 - (f_3 + f_2))$$

$$n = \frac{f_1 - f_4 + 27(f_3 - f_2)}{8\delta}$$

$$r = \frac{-f_4 - f_1 + 9(f_3 + f_2)}{16}$$

Siendo $f_i = f(x_i) = P(x_i)$, para $x_1 = a$, $x_2 = a + \delta/3$, $x_3 = a + 2\delta/3$, y $x_4 = a + \delta = b$.

Otras integrales que se han utilizado para diversas aproximaciones son:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi \left\{ r + \frac{\delta^2 m}{8} \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{4} + \frac{f_2 + f_3 - f_1 - f_4}{32} \right\}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}(x-H)} dx =$$

$$= \pi \left\{ \frac{s\delta^2}{8} + sh^2 + mh + n + \frac{sh^3 + mh^2 + nh + r}{\sqrt{(a-H)(b-H)}} \right\}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}(x-H)^2} dx =$$

$$= \pi \left\{ 2sh + m + \frac{3sh^2 + 2mh + n}{\sqrt{(a-H)(b-H)}} - \frac{sh^4 + mh^3 + nh^2 + rh}{((a-H)(b-H))^{3/2}} \right\}$$

Siendo $h = H - x_0$, (notar que $h < 0$, pues $H < a$).

Pero si tenemos $H_2 > x_0$, entonces $h_2 = H_2 - x_0 > 0$, y será:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}(H_2-x)} dx =$$

$$= \pi \left\{ -\frac{s\delta^2}{8} - sh^2 - mh - n + \frac{sh^3 + mh^2 + nh + r}{\sqrt{(H_2-a)(H_2-b)}} \right\}$$

$$= \pi \left\{ -\frac{s\delta^2}{8} - SH_2^2 - MH_2 - N - Sx_0^2 - Sx_0H_2 - Mx_0 + \frac{SH_2^3 + MH_2^2 + NH_2 + R}{\sqrt{(H_2-a)(H_2-b)}} \right\}$$

APÉNDICE 7:

La contribución de los diagramas de Feynmann según Mork y Haug

En el capítulo 5 se ha comentado algo del análisis que estos autores hacen en [22] y [23] sobre la importancia de las contribuciones de los distintos diagramas de Feynmann en el valor total de la sección eficaz.

Algunas pequeñas discrepancias entre estos autores, unidas a la dificultad para comparar sus valores con los de este trabajo han motivado que en este Apéndice tratemos de calcular los valores de las contribuciones de todos los diagramas en las condiciones de estos autores, es decir sin separar las partículas en más energética y menos energética. Estos cálculos deberán servir tanto para contribuir a aclarar la discrepancia, como para servir de cierto control sobre la corrección de nuestros procedimientos.

Como ya se ha dicho, en [22] Mork calcula las contribuciones de los diferentes diagramas obteniendo un valor total para cada una integrada sobre todas las variables de todas las partículas, mientras que en [23] Haug calcula por otro método, sin recurrir a los diagramas de Feynmann, la sección eficaz total, integrada, y además representativa de todos los diagramas, que denominaremos aquí σ_{Haug} .

De manera que Haug no calcula las contribuciones de los diagramas, que para su trabajo no tienen sentido, sino que calcula la sección eficaz total para diferentes valores de la energía ω de los fotones, y resta el valor que corresponde a los diagramas de Borsellino, para obtener el valor correspondiente a la contribución total de los restantes diagramas.

Aquí es necesario aclarar que al calcular la “sección eficaz de Borsellino”, sin distinguir entre los electrones, estos autores se refieren a los términos que hemos denominado B, y B_{II} (integrales (3.1’), y (3.1’’) del Capítulo 3), los que integrados sobre todas las variables dan exactamente lo mismo, aunque su dependencia funcional de la variable p_1 sea totalmente diferente, como se puede ver en la figura 3.2. Así es que Mork explícitamente considera que *la mitad* de la suma de estos dos elementos, que son iguales, es la sección eficaz de Borsellino. Coherentemente con este tratamiento, luego divide por dos cada una de las contribuciones que se obtienen de los diagramas de Feynmann, lo que también haremos con nuestros valores a los efectos de comparación.

Ahora bien, Mork considera en sus integrales numéricas una precisión del 2 %, pero tanto él como Haug pueden calcular la sección eficaz de Borsellino sin esa incerteza a partir de alguna de las expresiones existentes en la literatura del tema ([10], [26], [18]), que no requieren de integración numérica. Esta aclaración es importante porque todos nuestros valores también resultan de integraciones numéricas con una precisión del orden del 1 %, de manera que no trataremos de establecer comparaciones sobre los valores de la sección eficaz, que todos podemos calcular con las mismas expresiones, sino sobre los valores de las correcciones.

Y para Haug sólo tendremos un valor de corrección total, obtenido como diferencia entre σ_{Haug} y la sección eficaz de Borsellino.

Por otra parte, Mork agrupa las correcciones de manera que, en nuestra notación (y sin distinguir electrones) serían:

$$X_B = \text{“Borsellino”} = \frac{1}{2} (\sigma_B + \sigma_{B_{\text{II}}})$$

$$X_\gamma = \frac{1}{2} (\sigma_G + \sigma_{G_{\text{II}}})$$

$$X_{B\gamma} = \frac{1}{2} (\sigma_{BG} + \sigma_{B_{\text{II}}G_{\text{II}}})$$

$$X_{BE} = \frac{1}{2} \sigma_{BE}$$

$$X_{\gamma E} = \frac{1}{2} \sigma_{GI}$$

$$X_{B\gamma E} = \frac{1}{2} (\sigma_{BGI} + \sigma_{BIG})$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados de la comparación para los valores de ω considerados

Tabla A7.1. Contribuciones a la sección eficaz para $\omega = 6$ m (valores en αr_0^2)

$\omega = 6$ m	Borsellino	X_γ	$X_{B\gamma}$	X_{BE}	$X_{\gamma E}$	$X_{B\gamma E}$	Contribución total
Mork	0,102	0,0194	0	-0,0053	-0,010	-0,025	-0,0223
Haug	0,101						-0,0222
Este trabajo	0,102	0,0202	-0,00030	-0,0065	-0,0153	-0,0209	-0,0228

Tabla A7.2. Contribuciones a la sección eficaz para $\omega = 16$ m (valores en αr_0^2)

$\omega = 16$ m	Borsellino	X_γ	$X_{B\gamma}$	X_{BE}	$X_{\gamma E}$	$X_{B\gamma E}$	Contribución total
Mork	1,51						0,000
Haug	1,51						-0,0103
Este trabajo	1,52	0,0684	-0,00013	0,0605	-0,0315	-0,1085	-0,0112

Tabla A7.3. Contribuciones a la sección eficaz para $\omega = 50$ m (valores en αr_0^2)

$\omega = 50$ m	Borsellino	X_γ	$X_{B\gamma}$	X_{BE}	$X_{\gamma E}$	$X_{B\gamma E}$	Contribución total
Mork	4,77						0,000 ?
Haug	4,77						0,0534
Este trabajo	4,77	0,0655	0,0003	0,130	-0,0156	-0,122	0,0582

Cabe agregar dos comentarios:

- 1) Un posible error de Mork: este autor muestra las diferentes contribuciones de los diagramas en una gráfica que llega hasta $\omega = 9$ m, en la cual se ve entre otras cosas, que la contribución BE, negativa, ha disminuido su valor absoluto hasta anularse en ese lugar. Todo el comentario de este autor sugiere que él piensa que esa contribución será prácticamente nula para los ω mayores. Pero esto dista mucho de ser así, ya que un cálculo cuidadoso muestra que se anula en $\omega \cong 7,8$ m, y luego cambia de signo y crece hasta ser la mayor contribución para todas las energías siguientes, tal como lo muestra esta tabla para $\omega = 50$ m, así como las tablas 5.1 y 6.1, para valores mucho mayores como 100, 1000, y 10000 m.
- 2) Los valores totales de las contribuciones ya integradas sobre todo el rango de las variables, no siempre reflejan adecuadamente su influencia en el resultado. Un caso notable es el del término BIGI, cuya forma típica para todas las energías es la que se muestra en la figura A7.1 para $\omega = 50$ m.

Su valor total integrado es muy pequeño ($0,0002 \alpha r_0^2$, que es el 0,005 % de la sección eficaz total) y puede fluctuar mucho con las incertezas de la integración numérica porque resulta de la diferencia de las partes de signo opuesto. Pero la altura de su gráfica llega hasta un orden de ± 1 % de la altura del Borsellino.

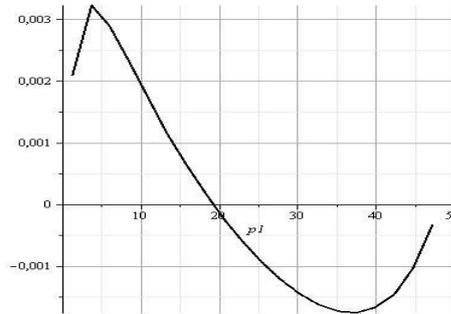


Fig. A7.1: Contribución del término $d\sigma_{BIG}/dp_1$ en función de p_1 , para $\omega = 50$ m (La ordenada está en $(1/m)\alpha r_0^2$ y debe dividirse por 2).