

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Tesis Doctoral



Análisis Teórico y Numérico de Atractores e Intermitencia en la Ecuación DNLS

Autor: Ing. Gustavo J. Krause

Director: Prof. Dr. Sergio Elaskar

17 de febrero de 2014

Análisis Teórico y Numérico de Atractores e Intermitencia en la Ecuación DNLS

por

Ing. Gustavo J. Krause

Tesis para alcanzar el grado de:
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Director:

Prof. Dr. Sergio Elaskar

Comisión Asesora:

Dra. Walkiria Schulz

Dra. Andrea Costa

Fecha de Presentación:

17 de febrero de 2014



Universidad
Nacional
de Córdoba



Facultad de
Ciencias Exactas
Físicas y Naturales



ACTA DE EXAMENES

Libro: 00001

Acta: 02278

Hoja 01/01

LLAMADO: 1

14/02/2014

CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGRESO	COND.	NOTA	FIRMA
29965873	KRAUSE, GUSTAVO JAVIER	DNI: 29965873	2009	T	<u>Aprobado</u>	

[Handwritten signatures]
SPIES, Rubén - CARANTI, Giorgio - BRITO, Héctor - SCHULZ, WALKIRIA -

Observaciones:

Córdoba, 17/02/2014.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: _____

Agradecimientos

Antes de introducir los contenidos formales de la presente investigación, quisiera agradecer a todas aquellas personas que colaboraron para la realización de este proyecto.

En primer lugar quiero agradecer especialmente al Prof. Sergio Elaskar, quien hace ya varios años me brindó la oportunidad de integrarme al equipo de investigación del Departamento de Aeronáutica de nuestra facultad, a cuyos integrantes hago extensivo el agradecimiento, a los miembros de la comisión asesora Dra. Andrea Costa y Dra. Walkiria Schulz, al Ing. Eduardo Zapico por su apoyo y motivación, al Dr. José Tamagno quien allá por 2007 me presentó este intrigante mundo de la investigación, y por supuesto a cada uno de mis compañeros becarios con quienes tengo el privilegio de compartir los desafíos.

También quisiera agradecer la importante colaboración del Dr. Ezequiel del Río de la Universidad Politécnica de Madrid por sus múltiples aportes y comentarios, los cuales fueron de gran ayuda para el desarrollo de la segunda parte de esta investigación.

Finalmente quiero extender mi agradecimiento a cada miembro de mi familia y muy especialmente a Andrea por su paciencia y compromiso.

Resumen

Las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica (MHD) constituyen la manera convencional para el análisis macroscópico del comportamiento de un plasma, sin embargo cuando los fenómenos en estudio involucran frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica, la influencia de dicho movimiento no puede despreciarse. La incorporación de este efecto, conocido como efecto Hall, resulta en el modelo “MHD-Hall” en el cual los modos de propagación de ondas se acoplan y el sistema es dispersivo, pero para propagación paralela (o casi paralela) al campo magnético ambiente ocurre la degeneración de los modos, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos y las ondas son circularmente polarizadas pudiendo describirse mediante la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS).

En la primera parte de este trabajo se realiza el estudio de dicha ecuación utilizando un esquema basado en métodos espectrales para el análisis numérico y un modelo de truncamiento a tres ondas para un estudio analítico aproximado, considerando efectos difusivos y excitación. Los resultados muestran la existencia de soluciones muy variadas, registrándose puntos fijos estables para niveles de difusión relativamente grandes, mientras que para amortiguamiento pequeño las soluciones presentan una dinámica compleja con atractores caóticos, fenómenos de intermitencia y crisis. Por otro lado, la comparación entre los resultados numéricos y los del modelo de truncamiento indica que el nivel de difusión del sistema determina el rango de aplicabilidad del segundo método, el cual es válido únicamente para coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes.

La segunda parte de la investigación surge del análisis del fenómeno de intermitencia que se registra en las soluciones dinámicas de la DNLS, el cual presenta una serie de particularidades que no permiten la utilización de técnicas tradicionales. En consecuencia se propone la adaptación de una metodología recientemente desarrollada para el cálculo de la densidad de probabilidades de reinyección (RPD) y la posterior determinación de las restantes propiedades estadísticas. Este estudio permite, además de la eficaz aplicación al caso específico de la ecuación DNLS, obtener algunas conclusiones adicionales respecto al fenómeno general de intermitencia tipo I.

Abstract

The Derivative Nonlinear Schrödinger (DNLS) equation arises from the magnetohydrodynamics (MHD) model for parallel to the ambient magnetic field propagation when the Hall term is preserved. In that case, the Alfvén mode decouples from the magnetosonic modes and the waves are circularly polarized being described by the DNLS equation. In this work, the diffusive DNLS equation for periodic boundary condition is studied using spectral methods for the numerical analysis, and a three-mode truncation model for an approximate analytical study. The results show that for a linearly excited mode there exist stationary solutions when relatively large damping levels are used, but dynamic solutions with chaotic attractor and intermittency processes appear for small diffusion. In addition, the diffusion level defines the application range of the truncation model which is valid only for large damping. On the other hand, in the intermittency characterization a discontinuous reinjection probability density (RPD) appears, therefore a traditional analysis is not possible. This problem results in the second part of this research, in which a recent technique to obtain the RPD is extended to consider discontinuous RPD functions for type-I intermittency. This analysis allows not only to calculate the RPD in the specific case of the DNLS equation, but also to obtain new generalizations regarding the understanding of the general phenomenon of type-I intermittency.

Resumo

As equações da Magnetohidrodinâmica (MHD) são o caminho convencional para analisar macroscopicamente o comportamento de um plasma. No entanto, quando o fenômeno em estudo envolve frequências da ordem de frequência de cíclotron de íons, a influência deste movimento de cíclotron, conhecido como efeito Hall, não pode ser negligenciada. No modelo “MHD-Hall” resultante, os modos de propagação de ondas são acoplados e o sistema é dispersivo, mas para a propagação em paralelo (ou quase em paralelo) ao campo magnético ambiente, ocorre a degeneração dos modos. O modo de Alfvén é desacoplado dos modos magnetosônicos, as ondas são circularmente polarizadas e podem ser descritas pela equação derivada não-linear de Schrödinger (DNLS).

Na primeira parte deste trabalho se encontra o estudo da equação DNLS utilizando um sistema baseado em métodos espectrais para análise numérica, assim como um modelo de truncagem de três ondas como uma aproximação analítica, considerando os efeitos de difusão e excitação. Os resultados mostram a existência de soluções variadas, com pontos fixos estáveis para grandes níveis de difusão e uma dinâmica complexa com atratores caóticos, intermitência e crises para pequeno amortecimento. Por outro lado, a comparação entre os resultados numéricos e o modelo de truncagem indica que o nível de difusão do sistema determina a gama de aplicabilidade do segundo método, que apenas é válido para grandes coeficientes de amortecimento.

A segunda parte da pesquisa emerge da análise do fenômeno da intermitência que é registrado nas soluções dinâmicas da DNLS, que tem uma série de características que não permitem a utilização de técnicas tradicionais. Deste modo, a adaptação de uma teoria recentemente desenvolvida para o cálculo da densidade de probabilidade de reinjeção (RPD) é proposta, e a identificação subsequente das outras propriedades estatísticas se dá. Este estudo permite, além da efetiva aplicação ao caso específico da equação DNLS, obter algumas conclusões adicionais sobre o fenômeno geral da intermitência do tipo I.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Aspectos generales	2
1.2. Contenido de la investigación	4
1.2.1. Estudio de la ecuación DNLS	4
1.2.2. Caracterización de la intermitencia	6
1.3. Organización de la Tesis	7
2. Los Plasmas y sus Propiedades	9
2.1. Conceptos Básicos	9
2.1.1. Frecuencia del plasma y Longitud de Debye	9
2.1.2. Movimiento de partículas individuales	11
2.2. El Modelo MHD-Hall	12
2.2.1. La aproximación Magnetohidrodinámica	14
2.2.2. El efecto Hall	17
2.3. Ondas en el Modelo MHD	18
2.3.1. Propagación Paralela ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k$)	21
2.3.2. Propagación perpendicular ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$)	22
2.3.3. Caso general ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k \cos \theta$)	22
2.4. Ondas en el Modelo MHD-Hall	23
3. Ondas No Lineales en el Modelo MHD-Hall: La Ecuación DNLS	25
3.1. Ondas No Lineales	26
3.1.1. Baja frecuencia $\omega \ll \Omega_i$	27
3.1.2. Alta frecuencia $\omega \lesssim \Omega_i$	28
3.2. Derivación de la Ecuación DNLS	29
3.3. La Ecuación DNLS	33
3.4. Resultados previos de la ecuación DNLS	35
3.4.1. Soluciones exactas	35
3.4.2. Reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias	37
3.4.3. Soluciones numéricas	40
4. Solución Numérica Mediante Métodos Espectrales	43
4.1. Introducción a los Métodos Espectrales	43

4.1.1.	Funciones de expansión ortogonales	44
4.1.2.	La Expansión de Fourier continua	45
4.1.3.	La Expansión de Fourier Discreta	47
4.1.3.1.	El error de “aliasing”	49
4.2.	Implementación en la Ecuación DNLS	50
4.3.	Verificación de la estabilidad del esquema numérico	53
4.3.1.	Consideraciones iniciales	53
4.3.2.	DNLS no difusiva con condición inicial de una onda	56
4.3.2.1.	Condiciones analíticas de estabilidad modular	56
4.3.2.2.	Evolución de las configuraciones inestables	60
4.3.3.	Ecuación DNLS no difusiva con condición inicial de tres ondas	67
4.3.3.1.	Resultados numéricos	68
5.	Resultados Numéricos y Analíticos de la Ecuación DNLS	77
5.1.	Consideraciones iniciales	77
5.2.	Soluciones estacionarias de la ecuación DNLS	80
5.2.1.	Análisis de los Resultados	84
5.3.	Soluciones dinámicas de la ecuación DNLS	92
6.	Nueva Metodología para la Caracterización de Intermitencia	101
6.1.	Introducción al fenómeno de intermitencia	101
6.1.1.	Caracterización de la intermitencia	104
6.1.2.	Descripción de la Metodología	105
6.1.3.	Longitudes laminares	106
6.1.4.	Limitaciones de la metodología	107
6.2.	Adaptación de la Metodología	109
6.2.1.	Aproximación analítica de la RPD	112
6.2.2.	Relaciones características	115
6.3.	Efecto del ruido en Intermitencia tipo I	120
6.3.1.	Caracterización de la Intermitencia tipo I con efecto del ruido	121
6.3.2.	Evaluación de resultados con efecto del ruido	126
6.3.3.	Influencia del ruido en la relación característica	129
6.3.4.	Influencia del ruido en la región laminar	132
7.	Análisis y Caracterización de la Intermitencia en la Ecuación DNLS	135
7.1.	Intermitencia en la solución numérica de la ecuación DNLS	135
7.1.1.	Aproximación analítica de la RPD en las soluciones numéricas de la ecuación DNLS	137
7.2.	Intermitencia en el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS	142
7.2.1.	Modelo de amortiguamiento de Landau lineal	142
7.2.2.	Análisis de la intermitencia	145
7.2.3.	Densidad de probabilidad de las longitudes laminares	148

8. Discusión y Conclusiones	153
8.1. Validación del esquema numérico para la resolución de la DNLS	153
8.2. Solución numérica de la DNLS y limitaciones del método de truncamiento	154
8.2.1. Soluciones estacionarias de la DNLS	155
8.2.2. Soluciones dinámicas y presencia de caos	156
8.3. Conclusiones generales de la solución de la DNLS	156
8.4. Caracterización de la intermitencia	157
8.4.1. Nueva metodología para la caracterización de intermitencia tipo I	157
8.4.2. Caracterización de la intermitencia en la DNLS	158
8.5. Aportes originales de esta investigación	159
8.6. Trabajos futuros	160
Apéndices	161
A. Parámetros de Descripción del Plasma	163
B. Modelo de Truncamiento de la Ecuación DNLS	167
C. Publicaciones y Presentaciones	171
Referencias	178

Índice de figuras

4.1. Ejemplo de aliasing para una grilla con $N = 8$. Ambos modos toman los mismos valores en los puntos de la grilla	49
4.2. Esquemas de filtrado de Philips (izquierda) y de Orszag (derecha) disponibles para corregir el error de aliasing.	50
4.3. Tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial A_0 para diferentes números de onda inicial n_0	59
4.4. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 2$	62
4.5. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 5$	63
4.6. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 10$	64
4.7. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 15$	65
4.8. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 20$	66
4.9. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas	70
4.10. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas	71
4.11. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas	72
4.12. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas	73
4.13. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas	74
4.14. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas	75
5.1. Función de amortiguamiento/excitación en el espacio de Fourier	79
5.2. Evolución de la energía E_m para distintas configuraciones de ondas resonantes iniciales con $\eta = 0,12$ y $\hat{\gamma}_0 = 0,02$	82

5.3. Influencia en la evolución de la energía del parámetro N para $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$ y $\eta = 0,30$	83
5.4. Atractor A_8 ($n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	85
5.5. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_8	85
5.6. Atractor A_7 ($n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	87
5.7. Atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	87
5.8. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_6	88
5.9. Atractor A_5 ($n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	89
5.10. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_5	89
5.11. Atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	90
5.12. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_4	91
5.13. Atractor A_3 ($n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	91
5.14. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_3	92
5.15. Evolución de la amplitud de la onda madre del atractor A_2 para diferentes coeficientes de amortiguamiento η	94
5.16. Diagrama de bifurcación para el atractor A_2 ($n_0 = 9$, $n_1 = 7$ y $n_2 = 11$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). Los puntos indican los resultados del esquema numérico. Las soluciones del modelo de truncamiento corresponden a la línea continua (rama de puntos fijos) y la línea de trazos (amplitud máxima de la solución periódica).	95
5.17. Evolución de la relación entre la energía de los modos iniciales y la energía total del sistema, Ec. (5.12), y distribución de la energía entre los distintos modos para el atractor A_2	96
5.18. Igual que la Figura 5.16 pero para el atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). En este caso las soluciones del modelo de truncamiento superan ampliamente a los resultados numéricos quedando fuera de la escala del gráfico.	98
5.19. Igual que la Figura 5.16 pero para el atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). En este caso las soluciones del modelo de truncamiento superan ampliamente a los resultados numéricos quedando fuera de la escala del gráfico.	99
6.1. Ejemplos de mapas unidimensionales que ilustran la transición a intermitencia tipo I. (a) Coexistencia de un punto fijo estable y otro inestable. (b) Bifurcación tangente (umbral de intermitencia). (c) Desaparición de puntos fijos, iteraciones en la fase laminar.	103
6.2. Distintas formas de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares $\phi_l(l)$ en función de los parámetros \hat{x} y α que definen la RPD.	108
6.3. (a) Mapa $F(x)$ indicado en la ecuación (6.16) para distintos valores de γ . (b) Disposición de los puntos $-c = x_i$ y $x_s = F(x_i)$	111
6.4. (a) Diagrama de bifurcación para el mapa (6.16). (b) Visualización de las fases laminares y las explosiones caóticas para $\varepsilon = 0,001$	112
6.5. Función $M(x)$ para $\varepsilon = 10^{-3}$, $c = 10^{-2}$, $\gamma = 1$ y $\gamma = 1/4$. (a) Subintervalo $[x_i, x_s]$: $m_{\gamma=1} = 0,386$, $m_{\gamma=1/4} = 0,502$. (b) Subintervalo $[x_s, c]$: $m_{\gamma=1} = 0,504$, $m_{\gamma=1/4} = 0,519$. En ambos casos $M(x)$ es aproximadamente lineal.	114

6.6. Resultados de la función $M(x)$ y la RPD para mapas con $a = 1$	116
6.7. Densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.16) y distintos valores del parámetro de control ε	116
6.8. Longitud laminar media en función del parámetro de control para $c = 0,10$. Las cruces correspondientes a los resultados analíticos prácticamente coinciden con los círculos que representan los datos numéricos. La línea continua indica la longitud laminar máxima $l(-c, c)$ y la línea de trazos la tendencia $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$	119
6.9. Mapa $F(x)$ indicado en la ecuación (6.34) para distintos valores de γ , donde se indica el desplazamiento del punto LBR por efecto del ruido.	122
6.10. Comparación de los resultados de $M(x)$ con diferentes niveles de ruido para $\varepsilon = 10^{-4}$, $c = 0,05$ y los valores indicados. Las líneas de trazos indican las pendientes aproximadas de cada función $M(x)$. Las pendientes son $m = 0,320$ ($\alpha = -0,529$) y $m' = 0,595$ ($\alpha' = 0,472$) para el caso (a), y $m = 0,570$ ($\alpha = -0,325$) y $m' = 0,697$ ($\alpha' = 1,296$) para (b). En ambos casos se verifica $\alpha' \approx \alpha + 1$. Además debe notarse que para valores mayores de x las pendientes de ambas funciones son similares. La pendiente de la línea de trazo y punto es $1/2$ indicando la pendiente de la reinyección uniforme.	124
6.11. Resultados de la funciones $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $\hat{x} = 0$, $\gamma = 2$ y $c = 0,05$. Las pendientes son $m = 0,320$ ($\alpha = -0,529$) para el caso sin ruido y $m' = 0,596$ ($\alpha' = 0,479$) para la región izquierda de la función $M(x)$ con efecto del ruido.	127
6.12. Igual que la Figura 6.11 con $\varepsilon = 10^{-3}$, $a = 1$, $\hat{x} = -0,05$, $\gamma = 1$ y $c = 0,05$, resultando $\alpha = -0,011$ (reinyección aproximadamente uniforme). En este caso no se pueden establecer las relaciones entre α y α' ya que $M(x)$ pierde la linealidad debido a la discontinuidad en la RPD. Las pendientes de $M(x)$ en el extremo derecho del intervalo laminar son muy similares: $m = 0,496$ para $\sigma_r = 0$ y $m = 0,491$ para $\sigma_r = 0,04$. El coeficiente de concentración es $k_r = 7,885$	128
6.13. Funciones $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $\hat{x} = 0,01$, $\gamma = 2$ y $c = 0,05$. El caso con efecto ruido parece ser un caso sin ruido con su correspondiente función $M(x)$ lineal y una RPD continua. Las pendientes son $m' = 0,594$ ($\alpha' = 0,464$) para $\sigma_r = 0,06$ y $m = 0,323$ ($\alpha = -0,523$), verificándose la relación $\alpha' \approx \alpha + 1$	129
6.14. Función $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $c = 0,05$ y los valores indicados. Los resultados son muy similares en ambos casos: la pendiente de $M(x)$ con efecto ruido es $m' = 0,623$ ($\alpha' = 643$) y $m = 0,624$ ($\alpha = 665$) para el caso sin ruido.	130
6.15. Longitud laminar media en función del parámetro de control para el mapa (6.34) con $a = 1$, $c = 0,05$ y los valores indicados. El exponente crítico del caso (b) es $\beta \approx -0,32$, indicando la transición que se produce para $\hat{x} - \sigma_r \approx 0$	131
6.16. Densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $a = 1$, $c = 0,05$ y los valores indicados. El ruido de intensidad σ se aplica en todo el mapa ($\sigma_r = \sigma_l = \sigma$).	132

6.17. Relación característica $\langle l \rangle \propto \varepsilon^\beta$ para el mapa (6.34) con $a = 1$, $c = 0,05$ y los valores indicados. El ruido se aplica en todo el mapa. Los cuadrados indican los resultados numéricos y la línea continua une los datos, alcanzándose la correspondiente saturación para pequeños valores de ε	133
7.1. Diagrama de bifurcación de la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$ en función del coeficiente de amortiguamiento η para el atractor A_2 con un modelo de amortiguamiento resistivo.	136
7.2. Evolución de la amplitud de la onda madre del atractor A_2 . (a) Solución periódica. (b) Caos.	136
7.3. Mapa de Poincaré de la amplitud máxima de la onda madre para $\eta = 0,0325076$	137
7.4. (a) Función $M(x)$ para la solución numérica del atractor A_2 con $\eta = 0,0325076$. (b) Forma de la función RPD. La abscisa x representa la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$	138
7.5. (a) Función $M(x)$ obtenida de la manera convencional. (b) Función $M(x)$ calculada con puntos de reinyección auxiliares $x'_j = x_s + (x_s - x_j)$ para recuperar la linealidad.	139
7.6. Aproximación analítica de la función $M(x)$ y la RPD para la solución numérica de la amplitud máxima de la onda madre para el atractor A_2 con $\eta = 0,0325076$. La abscisa x representa la amplitud $a_{0\max}$	141
7.7. Diagrama de bifurcación del modelo de truncamiento de la DNLS para $\Gamma = 0,1$ y $\kappa = 0,95$	143
7.8. Evolución de la amplitud máxima de la onda madre para $\Gamma = 0,1$ y $\kappa = 0,95$ para un modelo de amortiguamiento de Landau lineal y los valores indicados de $\bar{\nu}$	144
7.9. Mapas de Poincaré de la evolución de la amplitud máxima $a_{0\max}$ para $\Gamma = 0,1$, $\kappa = 0,95$ y un modelo de amortiguamiento de Landau lineal. Los valores de los coeficientes son $\bar{\nu}_1 = 0,993$ y $\bar{\nu}_2 = 0,988$. La línea de trazos representa el mapa con $\bar{\nu}_c = 0,990415$ donde se produce la bifurcación.	144
7.10. Visualización del menor punto de retorno (LBR) y del mecanismo de reinyección del mapa del modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$ y amortiguamiento de Landau.	145
7.11. Forma típica de la función $M(x)$ para el mapa de la Figura 7.9.	146
7.12. Comparación entre los datos numéricos y la aproximación analítica de la RPD para el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con amortiguamiento de Landau.	149
7.13. Aproximación analítica de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con amortiguamiento de Landau.	150

Capítulo 1

Introducción

En la primera mitad del siglo pasado se descubrió que, a diferencia de lo que ocurre en conductores rígidos, ondas electromagnéticas de baja frecuencia son capaces de propagarse en fluidos conductores tales como plasmas. Hannes [Alfvén](#) en 1942 investigó las propiedades de los plasmas asumiendo a éstos como un fluido incompresible, magnetizado y altamente conductor ([Alfvén, 1942](#)). Allí encontró que en estos fluidos surge un modo característico de ondas que se propagan en la dirección del campo magnético, las cuales se conocen actualmente como Ondas de Alfvén, cuya existencia fue verificada posteriormente por [Lundquist \(1949\)](#) de manera experimental. La importancia del descubrimiento de Alfvén fue rápidamente detectada y el caso de plasmas compresibles, el cual conduce a las ondas magnetosónicas rápida y lenta además de las ondas de Alfvén, fue tratado por [Herlofsen \(1950\)](#).

Existen diversos modelos para estudiar el comportamiento de un plasma. Desde el punto de vista microscópico, un análisis basado en la ecuación de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell permite determinar el comportamiento individual de cada partícula, pero aunque este esquema resulta sencillo de entender conceptualmente, en general no es posible implementar una metodología en ese sentido ya que el número de partículas suele ser extremadamente grande. Por este motivo se han desarrollado técnicas como la teoría cinética que emplean aproximaciones estadísticas sobre un gran número de partículas individuales. Este enfoque permite desarrollar modelos para el estudio del plasma desde un punto de vista macroscópico, ya que el mismo no se dirige al comportamiento individual de cada partícula sino que se focaliza sobre las propiedades colectivas.

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) surgen de considerar que el plasma se comporta como un fluido conductor. Con ellas es posible determinar los modos característicos de

propagación de ondas, es decir las ondas magnetosónicas rápida y lenta y las ondas de Alfvén. Sin embargo, cuando los fenómenos en estudio ameritan que se consideren frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica o las longitudes de interés son del orden de la llamada longitud inercial iónica, las ecuaciones MHD ya no resultan apropiadas. En esos casos es necesario incorporar al modelo los efectos de considerar una frecuencia de ciclotrón iónica finita, extendiendo así el rango de aplicación de las ecuaciones. La incorporación de estos efectos se denomina usualmente como el “efecto Hall”, el cual surge explícitamente en la ecuación de inducción magnética de las ecuaciones MHD. A este modelo se lo conoce como el modelo MHD-Hall, aunque algunos autores se refieren a éste como el modelo MHD en el rango dispersivo (Mjølhus y Hada, 1997).

En el modelo MHD-Hall, si bien los modos magnetosónicos y de Alfvén pueden aún diferenciarse, se produce entre ellos un acoplamiento que genera que estos modos sean dispersivos, situación que constituye la principal diferencia con las ondas correspondientes al modelo MHD convencional. Además, para el caso de propagación paralela (o casi paralela) al campo magnético ambiente ocurre la degeneración de las ondas, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos y experimenta una resonancia a la frecuencia de ciclotrón iónica cuando las ondas son polarizadas a izquierda. En plasmas uniformes inmersos en un campo magnético ambiente también uniforme se determinó que ondas de Alfvén no lineales pueden propagarse paralelas a la dirección del campo ya que el efecto Hall constituye el término dispersivo que permite balancear las no linealidades.

1.1. Aspectos generales

Las ondas de Alfvén son un rasgo característico en plasmas magnetizados. Tanto en plasmas espaciales como en plasmas de laboratorio, ondas de Alfvén de amplitud finita son excitadas por numerosas fuentes: haces de partículas cargadas, parámetros del plasma ambiente no uniformes, ondas electromagnéticas y electrostáticas (Shukla y Stenflo, 1999). El entendimiento de las propiedades no lineales de las ondas de Alfvén dispersivas es un requisito indispensable para interpretar correctamente las numerosas observaciones de ondas electromagnéticas de baja frecuencia en plasmas espaciales. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith et al., 1995), además se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini et al., 1985), de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jetenco-Pereira, 1995), e incluso se han registrado fluctuaciones de larga amplitud en la magnetósfera de la Tierra con períodos de onda del orden del período de ciclotrón

del protón local (Tsurutani et al., 1985), entre otros fenómenos. Este tipo de situaciones demuestran que en ocasiones el efecto de la frecuencia de ciclotrón iónica finita no puede despreciarse y debe ser incorporado.

Además de los fenómenos observacionales existen posibles aplicaciones en ingeniería aeroespacial relacionadas con las ondas de Alfvén. La interacción de amarras espaciales electrodinámicas (tethers) con la ionósfera de la Tierra y el campo magnético ambiente, más allá de la generación de ondas electromagnéticas (Dobrowolny y Melchioni, 1993), puede ser utilizada para la producción de potencia eléctrica y propulsión, generación de auroras boreales artificiales (Sanmartín et al., 2006) o mitigación de basura espacial (Ahedo y Sanmartín, 2002). La emisión de ondas de Alfvén debida a la presencia de un elemento conductor como la amarra espacial se produce en forma de estructuras denominadas Alas de Alfvén. El estudio de estas estructuras puede abordarse diferenciando las regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para el caso del campo lejano un análisis lineal puede resultar suficiente (Sanmartín y Estes, 1997), pero en las cercanías del elemento existen diversos fenómenos que obligan a un estudio más detallado, ya que se esperan ondas de mayor intensidad con efectos no lineales más importantes.

No linealidades débiles de las ondas dispersivas en el modelo MHD-Hall pueden estudiarse mediante la aplicación de la teoría de perturbaciones (Cramer, 2001). Mediante ese estudio y otras técnicas se demostró que los modos magnetosónicos obedecen a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) cuando los ángulos de propagación son suficientemente grandes (Morton, 1964; Kever y Morikawa, 1969; Kakutani et al., 1968), mientras que el modo de Alfvén está representado por la ecuación KdV modificada. Para propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente, las ondas MHD se degeneran y, si la velocidad de Alfvén es significativamente mayor que la velocidad del sonido, sólo el modo de Alfvén y el magnetosónico rápido son degenerados, pudiendo describirse mediante la ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) (Rogister, 1971; Mjølhus, 1976; Mio et al., 1976, entre otros).

La ecuación DNLS tiene la capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas cuando la relación entre la presión cinética y la presión magnética del plasma (parámetro β) es distinta de la unidad. Actualmente se conoce una gran cantidad de soluciones exactas de la DNLS (Belashov y Vladimirov, 2005), además esta ecuación ha sido estudiada por técnicas alternativas como ser la integración numérica (Spangler et al., 1985; Dawson y Fontan, 1988) y la reducción a un sistema

de ecuaciones diferenciales ordinarias suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) o utilizando un número finito de modos (Sanmartín et al., 2004; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007). Además la ecuación DNLS ha sido modificada para incluir efectos cinéticos (ecuación KDNLS) (Mjolhus y Wyller, 1988), y también para considerar el caso donde el modo acústico se acopla a los modos magnéticos (ecuación TDNLS para $\beta \sim 1$) (Hada, 1993).

El estudio de la ecuación DNLS se encuentra justificado en el hecho de que esto permitiría comprender las propiedades de las ondas de Alfvén, más allá de la utilidad que pueda tener la descripción de la propagación de ondas en amarras electrodinámicas para aplicaciones aeroespaciales. Además, desde el punto de vista matemático, la ecuación DNLS tiene una importancia teórica relevante.

1.2. Contenido de la investigación

El presente trabajo puede dividirse en dos partes principales, la primera correspondiente al análisis de la ecuación DNLS propiamente dicho, donde se comparan resultados numéricos y aproximaciones analíticas para conocer las limitaciones de cada uno de los métodos. Por otro lado, a partir de estos resultados surge el análisis posterior que comprende el estudio de los atractores caóticos de la ecuación DNLS y la proposición de nuevas técnicas para la caracterización de la intermitencia.

1.2.1. Estudio de la ecuación DNLS

La investigación desarrollada en este trabajo tiene como objetivo primario el estudio de la ecuación DNLS unidimensional con condiciones de contorno periódicas, para describir la propagación paralela (o casi paralela) al campo magnético ambiente de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. La suposición de condiciones de contorno periódicas se fundamenta en el hecho de que la ecuación DNLS, al igual que las ecuaciones tipo KdV, admiten que este tipo de condiciones sean utilizadas cuando las condiciones iniciales son periódicas (Drazin y Johnson, 1989). Por lo tanto, teniendo en cuenta que para los problemas en estudio el campo magnético en general tiene una característica oscilatoria, es usual considerar este tipo de condiciones (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta propiedad favorece la utilización de esquemas numéricos de métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier para la resolución de las derivadas espaciales, ya que los mismos satisfacen de manera automática las condiciones de contorno periódicas; mientras

que el avance en el tiempo puede tratarse explícitamente a través de un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden. Además del análisis numérico también se utiliza un método analítico aproximado que consiste en un modelo de truncamiento a tres ondas.

Para la validación del esquema numérico propuesto se estudia primeramente la ecuación DNLS sin efectos difusivos, con el término no lineal y el dispersivo, considerando plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y derecha. Bajo esa situación y con una condición inicial de una onda es posible determinar condiciones analíticas de estabilidad modular (Fla, 1992), las cuales deben ser satisfechas por el método numérico. Posteriormente, en base a los resultados obtenidos previamente, se evalúa el caso con condición inicial de tres ondas que cumplen la condición de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$, donde k_0 , k_1 y k_2 son los números de onda de las ondas iniciales. El objetivo del análisis es determinar cómo influyen los diferentes parámetros que intervienen en la simulación y establecer el paso de tiempo y la mínima cantidad de puntos a utilizar en la discretización. Estos valores se obtienen considerando que las simulaciones deben verificar la estabilidad de ondas polarizadas a derecha independientemente de los parámetros iniciales utilizados (Buti et al., 2000).

El segundo análisis corresponde al estudio de la ecuación DNLS con efectos difusivos, con el término no lineal y el dispersivo, considerando plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y utilizando como condición inicial una configuración de tres ondas cerca de resonancia, con un modo inestable (linealmente excitado) y los restantes amortiguados. El modelo planteado de esa manera podría emplearse para describir la propagación de ondas de Alfvén en amarras espaciales electrodinámicas (Sánchez-Arriaga, 2009). El modo inestable es fruto de la interacción paramétrica con las amarras mientras que los modos estables extraen energía del sistema a través de algún mecanismo disipativo (en estas simulaciones se utiliza el modelo de amortiguamiento resistivo). El objetivo del estudio bajo las condiciones mencionadas consiste en evaluar cómo se produce la transferencia de energía entre los distintos modos para una serie de atractores que se obtienen numéricamente, comparando los resultados con aquellos hallados mediante técnicas de truncamiento a tres ondas (Sánchez-Arriaga et al., 2009).

En las simulaciones de la ecuación DNLS con efectos difusivos se obtienen dos tipos de resultados desde el punto de vista de la dinámica, los cuales dependen del nivel de disipación del sistema. Para coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes las soluciones son del tipo de puntos fijos (soluciones estacionarias). Por el contrario, para coeficientes de amortiguamiento pequeños, aparecen soluciones dinámicas complejas que presentan atractores caóticos con procesos

de intermitencia y crisis. Los resultados del segundo caso son los que motivan la segunda parte de la investigación.

1.2.2. Caracterización de la intermitencia

Del análisis de las soluciones dinámicas de la ecuación DNLS probablemente surge el mayor aporte de la presente investigación. Como se dijo anteriormente, entre las características de estas soluciones se observa la presencia de fenómenos de intermitencia en los atractores caóticos encontrados.

La intermitencia es una de las rutas conocidas hacia caos determinístico. En este tipo de fenómeno, el desarrollo de soluciones regulares se ve abruptamente interrumpido ante un mínimo cambio en un parámetro de control, dando lugar a soluciones que alternan períodos aparentemente regulares de cierta duración (fases laminares) con explosiones caóticas cortas a intervalos irregulares de tiempo. Para la caracterización estadística del fenómeno interesa conocer fundamentalmente cuál es la probabilidad de que una fase laminar tenga una duración determinada.

La intermitencia puede clasificarse principalmente en tres tipos (I, II y III) de acuerdo a la forma del mapa de Poincaré local ([Manneville y Pomeau, 1979](#)) o más precisamente, según el valor de los multiplicadores de Floquet o los valores propios del mapa local ([Nayfeh y Balachandran, 1995](#)). La principal propiedad estadística de la intermitencia es la densidad de probabilidad de las longitudes laminares, la cual establece la probabilidad de duración de las fases laminares. Para establecer esta propiedad es necesario conocer de qué manera se distribuyen las trayectorias que devuelven o “reinyectan” las órbitas a la región laminar. Esta propiedad se representa en la llamada Densidad de Probabilidad de Reinyección (RPD), cuya correcta determinación es de crucial importancia para la correcta evaluación de las demás propiedades.

La obtención directa de la RPD a través de los datos numéricos es muchas veces dificultosa o imposible de aplicar debido a la gran cantidad de datos que se necesitan para un cálculo estadístico adecuado. Por otro lado, la determinación analítica en general no es posible sobre todo cuando los resultados provienen de procesos experimentales cuyas ecuaciones de gobierno no son conocidas o de simulaciones numéricas que presentan ruido. Además, en las pocas situaciones donde es posible determinar analíticamente la RPD, estas soluciones sólo son válidas para ese problema particular. Por estos motivos, una metodología tradicionalmente utilizada consiste en imponer modelos simplificados para la RPD, en la cual la distribución de probabilidad uniforme, independiente del punto

de reinyección, es la más difundida (Dubois et al., 1983; Pikovsky, 1983; Cho et al., 2002; Malasoma et al., 2004, entre otros). Otros autores propusieron modelos un poco más generales consistentes en funciones monótonamente decrecientes cuyos comportamientos extremos son la distribución uniforme y la reinyección concentrada en el extremo izquierdo del intervalo laminar (Kim et al., 1994; Kwon et al., 1996). Sin embargo, estas nuevas definiciones no producen un cambio cualitativo en la densidad de probabilidad de las longitudes laminares y en consecuencia aún se emplea la definición clásica de dicha función (Schuster y Just, 2005; Klimaszewska y Zebrowski, 2009).

Naturalmente, cuando se presentan resultados más complejos no es posible utilizar modelos tan simplificados, por lo cual existen actualmente métodos alternativos recientemente propuestos para la representación de la RPD. En estos métodos se utilizan aproximaciones basadas en cantidades relacionadas a los datos numéricos que minimizan los efectos de las fluctuaciones, permitiendo obtener una expresión analítica de la RPD de una manera más general (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2014). Estos métodos han mostrado reproducir correctamente la densidad de probabilidad en los tres casos principales de intermitencia (I, II y III). Sin embargo durante esta investigación quedó demostrado que incluso esta nueva técnica presenta limitaciones para modelar la RPD en intermitencia tipo I cuando el problema presenta ciertas particularidades.

En vista de lo anterior, en la segunda parte del trabajo se proponen adaptaciones a esta metodología para permitir su aplicación en la representación de la RPD, no sólo en el caso específico de la ecuación DNLS sino también en situaciones generales donde la RPD presenta discontinuidades y formas arbitrarias. Los resultados de este análisis permiten en primer término extender algunas de las conclusiones más importantes referidas al fenómeno general de intermitencia tipo I. Por otro lado, mediante la aplicación de esta técnica se obtienen nuevas conclusiones para el caso de presencia de ruido en intermitencia tipo I. Finalmente, la caracterización de la intermitencia en las soluciones de la ecuación DNLS muestra que esta metodología constituye una herramienta eficaz para la representación de la RPD ya sea en mapas o sistemas dinámicos continuos.

1.3. Organización de la Tesis

Como se dijo anteriormente, el presente trabajo puede dividirse en dos partes principales: la primera de ellas, correspondiente a la búsqueda de soluciones de la ecuación DNLS, abarca desde el Capítulo 2 al Capítulo 5, mientras que la segunda parte donde se presenta el análisis del fenómeno de intermitencia tipo I comprende los Capítulos 6 y 7. A continuación se detallan los contenidos

más importantes de cada capítulo.

En el Capítulo 2 se hace una introducción de los principales conceptos de la física de plasmas para luego presentar los fundamentos de la Magnetohidrodinámica, destacando las consecuencias de considerar el efecto Hall en la ecuación de inducción magnética, especialmente en lo referente a los modos de propagación de ondas.

En el Capítulo 3 se presenta la derivación formal de la ecuación DNLS partiendo de las ecuaciones de la MHD con efecto Hall. Luego se detallan las características principales de esta ecuación y se realiza un resumen de los trabajos más importantes referidos a la misma.

En el Capítulo 4 se muestra la propuesta de resolución de la ecuación DNLS mediante métodos espectrales. En primer término se presentan los fundamentos principales de los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier y su implementación para la solución de la ecuación DNLS. Posteriormente se realiza la validación del código numérico a través de la verificación de las condiciones analíticas de estabilidad modular para el caso de la DNLS no difusiva.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados de las simulaciones numéricas obtenidos para la ecuación DNLS con efectos difusivos y un modo linealmente excitado, comparando los mismos con los correspondientes a los del modelo de truncamiento a tres ondas. En la primera parte del capítulo se muestran las soluciones estacionarias (puntos fijos) y en la segunda los atractores caóticos.

En el Capítulo 6 se desarrollan los conceptos referidos al fenómeno de intermitencia I destacando las limitaciones de las metodologías actuales para la caracterización del proceso. Seguidamente se presenta la propuesta desarrollada en esta investigación para dicha caracterización y se muestran los resultados de la misma sobre un mapa teórico ampliamente utilizado. Finalmente se incorpora al análisis el efecto del ruido.

En el Capítulo 7 se muestran los resultados de las propiedades estadísticas en la intermitencia presente en los atractores caóticos de la ecuación DNLS. Además se extiende la aplicación a otros atractores caóticos que aparecen en el modelo de truncamiento de la DNLS cuando se utiliza amortiguamiento de Landau (disipación lineal).

En el Capítulo 8 se presenta la discusión de resultados y se detallan las principales conclusiones del trabajo. Finalmente se detallan posibles trabajos futuros surgidos de esta investigación.

Capítulo 2

Los Plasmas y sus Propiedades

En este capítulo se presentan los conceptos básicos para el estudio de los plasmas, destacando sus propiedades y los diferentes modelos que existen para describir su comportamiento. En primer término se introducen los conceptos fundamentales referidos al estudio de los plasmas, para luego presentar formalmente las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica (MHD), explicitando las hipótesis y simplificaciones que definen sus limitaciones. Seguidamente se describen los distintos modos de propagación de ondas presentes en este modelo para finalmente mostrar las consecuencias de considerar el efecto Hall en la ecuación de inducción magnética.

2.1. Conceptos Básicos

Un plasma es un medio relativamente complejo consistente en un fluido formado por un gran número de iones, electrones y partículas neutras, el cual está sujeto a fuerzas eléctricas y magnéticas, además de las fuerzas clásicas que actúan sobre los fluidos convencionales. La característica fundamental de un plasma es el hecho de que las partículas cargadas exhiben un comportamiento colectivo debido a la acción de largo alcance de las fuerzas de Coulomb, lo cual implica que no puede definirse como plasma a cualquier gas ionizado, sino que necesariamente el efecto colectivo debe predominar por sobre la interacción debida a las colisiones interpartículas.

2.1.1. Frecuencia del plasma y Longitud de Debye

Una de las propiedades fundamentales de un plasma es la tendencia del mismo a permanecer eléctricamente neutro. Esta propiedad se manifiesta frente a cualquier cambio en la neutralidad local de una región del plasma que se produce por la separación de cargas. Bajo esa situación se

generan campos eléctricos que actúan sobre las partículas cargadas para devolverlas a su posición original y, debido a la inercia de las mismas, se produce una oscilación alrededor de la posición inicial a una frecuencia generalmente muy elevada. Este comportamiento permite asumir una cuasi neutralidad del plasma siempre que los tiempos de interés sean mucho mayores que el período de la oscilación.

La frecuencia de esta oscilación se conoce como frecuencia del plasma, y existe una frecuencia para cada especie que conforma el plasma (e : electrones; i : iones):

$$\omega_{pe,i} = \left(\frac{n_{e,i} e^2}{\varepsilon_0 m_{e,i}} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

donde $n_{e,i}$ es la densidad de partículas de la especie, e es la carga del electrón (se consideran iones de carga $+e$), $m_{e,i}$ es la masa del electrón (ion) y ε_0 es la permitividad eléctrica en el vacío.

En la Ec. (2.1) se observa que la frecuencia de plasma de los electrones es mucho mayor que la de los iones, ya que $m_e \ll m_i$. Por otro lado, como el plasma es globalmente neutro y se considera que los iones son de carga $+e$ resulta $n_e \approx n_i \approx n$.

Para establecer la escala de longitud se utiliza la distancia recorrida por una partícula en un tiempo correspondiente a un período de oscilación ω_{pe}^{-1} . Para definir esta longitud se hace uso de la velocidad térmica de las partículas dada por:

$$v_{te,i} = \left(\frac{2T\kappa}{m_{e,i}} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

donde T es la temperatura y κ la constante de Boltzmann. Con esta ecuación resulta:

$$\lambda_D = v_{te,i} \omega_{pe,i}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa T}{n e^2} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

El parámetro λ_D es conocido como longitud de Debye y puede pensarse como la mínima longitud a la cual la cuasi neutralidad del plasma no es violada por las fluctuaciones espontáneas del mismo. Con este valor y la frecuencia del plasma quedan definidas las escalas de longitud y tiempo para las cuales los fenómenos pueden describirse dentro de la teoría de plasmas:

$$\begin{aligned} t &\gg \omega_{pe}^{-1}, \\ L &\gg \lambda_D. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además de estas dos condiciones, una tercera restricción es requerida para asegurar que el comportamiento colectivo de las partículas prevalece por sobre las interacciones debidas a las colisiones, esto es

$$\nu \ll \omega_{pe}, \quad (2.5)$$

siendo ν la frecuencia de colisiones.

2.1.2. Movimiento de partículas individuales

Una de las razones que hace que los plasmas sean particularmente difíciles de estudiar se debe a que la densidad de los mismos se encuentra dentro de un rango intermedio. El análisis de fluidos densos no requiere que los movimientos individuales de las moléculas sean tenidos en cuenta, ya que en este caso las colisiones dominan el comportamiento. Sin embargo, un plasma en ocasiones se comporta como una colección de partículas individuales y por lo tanto es necesario considerar el movimiento de partículas cargadas individuales en presencia de campos eléctricos y magnéticos externos.

Para el análisis del movimiento de las partículas individuales se utiliza esencialmente la segunda ley de Newton en términos de la fuerza debida al campo eléctrico y la fuerza de Lorentz:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

siendo m la masa de la partícula, \mathbf{v} su velocidad, q su carga eléctrica, \mathbf{E} el campo eléctrico y \mathbf{B} el campo magnético, los cuales están dados en acuerdo con las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Faraday),} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 q \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{(Ampère),} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{\varepsilon_0} && \text{(Poisson),} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, && \text{(ausencia de monopolos magnéticos),} \end{aligned} \quad (2.6)$$

siendo μ_0 la permeabilidad magnética del vacío y c la velocidad de la luz, con $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

Suponiendo que el campo eléctrico es nulo y el campo magnético es uniforme y constante en el tiempo, se obtiene que las partículas cargadas presentan un movimiento circular en un plano normal a las líneas de campo el cual se denomina movimiento de ciclotrón, cuya frecuencia de

rotación es llamada frecuencia de ciclotrón (o girofrecuencia) y está dada por la intensidad del campo magnético, la carga de la partícula y su masa. Para electrones y iones de carga $+e$ esta frecuencia es

$$\Omega_{e,i} = \frac{eB}{m_{e,i}}. \quad (2.7)$$

Las frecuencias de ciclotrón constituyen los límites de las escalas temporales para los cuales el efecto de este movimiento debe ser tenido en cuenta, mientras que el radio de giro determina el límite de la escala espacial. Por otro lado, siendo $m_e \ll m_i$ resulta $\Omega_e \gg \Omega_i$ y el radio de giro es mucho mayor para el caso de los iones.

2.2. El Modelo MHD-Hall

Existen diferentes formas para describir el comportamiento de un plasma. Probablemente la manera más precisa de realizar este estudio es conocer los valores iniciales de posición y velocidad de cada partícula y de los campos eléctrico y magnético en cada punto del dominio, para luego resolver las ecuaciones de movimiento del sistema junto con las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, esta descripción microscópica en general resulta imposible de implementar ya que el número total de partículas es extremadamente grande.

Por otro lado, la teoría cinética utiliza para el análisis una aproximación estadística. En este caso la información individual de cada partícula se pierde, pero lo relevante al comportamiento colectivo del plasma es conservado y se expresa en términos de funciones de distribución dependientes del tiempo $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ para cada especie $\alpha = e, i$ (electrones y iones). El número probable de partículas de la especie α en el elemento de volumen de seis dimensiones $d^3r d^3v$ centrado en \mathbf{r}, \mathbf{v} será entonces $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v$. La variación en el tiempo de estas funciones de distribución está determinada por la ecuación de Boltzmann para cada especie:

$$\frac{df_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \mathcal{C}_\alpha. \quad (2.8)$$

Aquí, el término \mathcal{C} indica el cambio de la función de distribución debido a las interacciones de corto alcance entre dos partículas, es decir el efecto de las colisiones. Al despreciar el término de colisiones ($\mathcal{C} = 0$) se obtiene la llamada ecuación de Vlasov.

El procedimiento para determinar ecuaciones macroscópicas que no involucren detalles del es-

pacio de velocidades consiste en expandir en un número finito de momentos de la ecuación de Boltzmann, obtenidos al multiplicar las funciones de distribución por potencias de \mathbf{v} y luego integrando sobre el espacio de velocidades. El momento cero está relacionado al número de partículas por unidad de volumen $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$, mientras que el primer momento se asocia a la velocidad promedio $\langle \mathbf{v} \rangle_\alpha \equiv \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} n_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \\ \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con las expresiones anteriores, el momento cero y el primer momento de la ecuación de Boltzmann (2.8) pueden escribirse como:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \int \mathcal{C}_\alpha m_\alpha \mathbf{v} d^3v, \quad (2.11)$$

donde la primera ecuación es la de conservación de la masa y la segunda la conservación de la cantidad de movimiento.

Para alcanzar un enfoque totalmente macroscópico es necesario separar los efectos de las fluctuaciones térmicas del comportamiento colectivo. Esto se logra definiendo una velocidad aleatoria $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ de la partícula con respecto a la velocidad promedio \mathbf{u}_α :

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha, \quad \text{donde } \langle \tilde{\mathbf{v}}_\alpha \rangle = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

De esta manera, la parte aleatoria del término $\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha$ en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, Ec. (2.11), resulta en el tensor de presión definido como:

$$n_\alpha m_\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}_\alpha \tilde{\mathbf{v}}_\alpha \rangle = \Pi_\alpha + p_\alpha \mathbf{I} \quad (2.13)$$

donde la parte isotrópica (presión escalar p_α) está directamente relacionada con la temperatura ($p_\alpha \propto \langle \tilde{v}^2 \rangle$), y el tensor Π_α es la contribución debida a la anisotropía de la función de distribución. Finalmente la Ec. (2.11) resulta:

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B} \right) - \nabla \cdot \Pi_\alpha - \nabla p_\alpha + \mathcal{C} \quad (2.14)$$

donde las consideraciones sobre el término de colisiones \mathcal{C} se realizan más adelante.

La validez de esta aproximación exige la verificación de una serie de suposiciones. En primer lugar se asume que la temperatura es lo suficientemente alta como para garantizar la ionización total del plasma, tal que no se produzcan procesos de recombinación e intercambio de cargas. Por otro lado se considera que el número de partículas de cada especie es constante, es decir que no existen reacciones nucleares. A pesar de estas restricciones, aún con una fracción relativamente grande de partículas neutras todavía puede demostrarse la supremacía de los procesos magnetohidrodinámicos frente a los demás fenómenos (Goedbloed y Poedts, 2004).

2.2.1. La aproximación Magnetohidrodinámica

Las ecuaciones de la MHD se obtienen al suponer inicialmente que el plasma está compuesto por dos especies, iones y electrones cuyos comportamientos están acoplados a través de la transferencia de cantidad de movimiento debida a las colisiones entre partículas y las ecuaciones de Maxwell. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.6), (2.10) y (2.14) resulta:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0, \quad (2.15)$$

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \Pi_\alpha - \nabla p_\alpha + \mathcal{C}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (n_e q_e + n_i q_i), \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 (n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i). \quad (2.18)$$

Combinando la densidad y velocidad de los iones y electrones surgen ecuaciones cuyas variables son la densidad de masa total ρ , la velocidad del centro de masa \mathbf{u} , la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y la densidad de carga eléctrica ρ_c :

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u} = \frac{n_e m_e \mathbf{u}_e + n_i m_i \mathbf{u}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \approx \mathbf{u}_i, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{j} = n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i = e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e), \quad (2.21)$$

$$\rho_c = n_e q_e + n_i q_i = e (n_i - n_e), \quad (2.22)$$

donde se ha considerado que los iones son partículas de carga eléctrica $+e$. Estas ecuaciones junto

a las Ecs. (2.15) a (2.18) conducen al siguiente conjunto de ecuaciones (Krall y Trivelpiece, 1973):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.24)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \cdot \Pi + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u} \rho_c) = \\ \frac{(n_e + n_i) e^2}{m_e + m_i} \mathbf{E} + \frac{e^2}{c} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \frac{\rho}{m_e + m_i} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \\ - \frac{e}{c} \left(\frac{m_e}{m_i} + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{1}{m_e + m_i} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} \Pi_i - \Pi_e \right) + \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde, en la ecuación (2.25) se ha incorporado al tensor Π la presión electrónica p_e y la presión iónica p_i .

Las Ecs. (2.23) a (2.26) constituyen el conjunto de ecuaciones para fluido simple o mono fluido, donde la ecuación de cierre del sistema es la ecuación de estado del gas que relaciona la presión y la densidad. La Ec. (2.26) es llamada la Ley de Ohm generalizada, ya que relaciona la densidad de corriente \mathbf{j} con el campo eléctrico \mathbf{E} . El término de colisiones \mathcal{C} normalmente se estima mediante una aproximación lineal:

$$\mathcal{C} \approx \nu \mathbf{j}.$$

donde ν es un promedio de la frecuencia de colisiones, en base al cual pueden definirse la resistividad η y la conductividad σ :

$$\eta = \frac{\nu m_e}{n_e e^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\eta}, \quad (2.27)$$

de manera que la Ec. (2.26) se reduzca a la Ley de Ohm $\mathbf{E} = \eta \mathbf{j}$ en el límite $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, estático y con presión uniforme (Krall y Trivelpiece, 1973).

A continuación se realiza una serie de simplificaciones e hipótesis que conducen a la forma final de las ecuaciones MHD que se utiliza habitualmente. Se debe tener en cuenta que las simplificaciones que se efectúan definen el rango de validez del modelo.

Cuasineutralidad $\rho_{ce} \approx \rho_{ci}$: la mayor simplificación se logra al asumir que la densidad de carga se anula ($\rho_c = 0$). Esto conduce a que $n_e \approx n_i \equiv n$, ya que previamente se asumió que

los iones son partículas de carga $+e$. Esta suposición exige que la escala de referencia debe cumplir $L \gg \lambda_D$, lo cual es también una de las restricciones dadas en la expresión (2.4) para que un fenómeno pueda ser descrito dentro de la teoría de plasmas. Otro resultado que se desprende de esta hipótesis arroja $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ cuando $\rho_c = 0$, según se deduce de la Ec. (2.24).

Masa del electrón despreciable $m_e \ll m_i$: una simplificación trivial es despreciar los términos $m_e/m_i \ll 1$. Por otro lado, esto lleva además a que, considerando la Ec. (2.19), la densidad de masa resulta $\rho = n_i m_i$

Efectos viscosos despreciables $\nabla \cdot \Pi_\alpha = \nabla p_\alpha$: esta hipótesis es estrictamente válida cuando las colisiones interpartículas son suficientemente frecuentes, lo cual en principio exige que la frecuencia de colisiones sea mayor que la correspondiente frecuencia de ciclotrón. Sin embargo, esta simplificación es utilizada para el estudio de plasmas casi no colisionales donde la condición anterior no se cumple, ya que los resultados concuerdan con los experimentos a pesar de la falta de fundamento para la aplicación de esta aproximación (Krall y Trivelpiece, 1973; Boyd y Sanderson, 2003).

Pequeñas perturbaciones en la velocidad: si se considera un marco de referencia en el cual la velocidad no perturbada es nula, para perturbaciones suficientemente pequeñas es posible despreciar los términos cuadráticos en \mathbf{u} , simplificando de esa manera la Ley de Ohm generalizada, Ec. (2.26).

Velocidades del plasma no relativistas $V_0 \ll c$: esta suposición permite despreciar el término de la corriente de desplazamiento $(1/c^2)(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ en la ecuación de Ampere. Esto implica suponer que los procesos estudiados son lentos quedando excluidas, por ejemplo, las ondas electromagnéticas que necesitan de este término para ser obtenidas. Con esta simplificación la densidad de corriente se obtiene únicamente en términos del campo magnético ($\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$).

Eliminación del término $\partial \mathbf{j}/\partial t$ en la Ley de Ohm generalizada: la posibilidad de realizar esta simplificación surge de la hipótesis de cuasi neutralidad, ya que según esta suposición se puede escribir

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \approx n e \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

y este término es pequeño cuando los electrones y los iones se desplazan en conjunto. Si

además se considera la Ec. (2.18), un argumento dimensional permite despreciar $\partial \mathbf{j} / \partial t$ frente al término en \mathbf{E} para frecuencias mucho menores que la frecuencia de plasma ($\omega \ll \omega_{pe}$).

Eliminación de la presión electrónica: esta es una simplificación no trivial, la misma puede realizarse para el caso de plasmas fríos en escalas que cumplen $LV_0\Omega_e \gg \kappa (T_e/m_e)$, donde V_0 es una velocidad de referencia, T_e la temperatura electrónica y Ω_e la frecuencia de ciclotrón del electrón dada en la Ec. (2.7).

Resistividad despreciable $\eta = 0$: cuando se elimina el término resistivo se habla de MHD ideal.

Esta simplificación permite reducir la expresión de la Ley de Ohm, siendo válida para números de Reynolds magnético suficientemente grandes ($R_M = \mu_0 LV_0 / \eta \gg 1$).

Con estas simplificaciones, considerando que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son uniformes, con las Ecs. (2.23) a (2.26) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.28)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{m_i}{\mu_0 e} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right], \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.31)$$

que son las ecuaciones de la MHD-Hall ideal, cuyas ecuaciones de cierre son:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.32)$$

y la ecuación de estado del gas, que en general está dada por una ley politrópica del tipo

$$p \propto \rho^\gamma, \quad (2.33)$$

siendo γ el coeficiente politrópico.

2.2.2. El efecto Hall

El efecto Hall está asociado con el movimiento de ciclotrón de los iones, y resulta de considerar un radio de Larmor finito (Cramer, 2001). El mismo aparece explícitamente en el segundo término

del miembro derecho de la Ec. (2.30). Teniendo en cuenta la expresión que define la frecuencia de ciclotrón iónica Ω_i , Ec. (2.7), la Ec. (2.30) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{B}{\mu_0 \Omega_i} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (2.34)$$

donde $B = |\mathbf{B}|$ es el módulo del campo magnético.

En la Ec. (2.34) puede observarse que el término de Hall es de orden B/Ω_i . Por otro lado, si se introduce la llamada longitud inercial iónica del plasma dada por la relación entre la velocidad de la luz c y la frecuencia iónica del plasma ω_{pi} :

$$l_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = \left(\frac{m_i}{\mu_0 n e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.35)$$

donde fue utilizada la relación $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$, se deduce que el término de Hall también es proporcional a l_i^2 . De este modo, si se consideran frecuencias ω y escalas de longitud L tales que $\omega/\Omega_i \ll 1$ y $(l_i/L)^2 \ll 1$, el término de Hall no es importante y puede despreciarse en la Ec. (2.30), dando lugar a las ecuaciones MHD habituales. Por el contrario, si $\omega \approx \Omega_i$ o $L \approx l_i$, el efecto Hall adquiere importancia y por lo tanto debe utilizarse el modelo MHD-Hall.

Sin tener en cuenta el término de difusión magnética ($\eta = 0$), la ley de Ohm generalizada que interviene en el modelo MHD-Hall también puede escribirse como:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{m_i}{\rho e} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.36)$$

En el miembro de la derecha de la Ec. (2.36), el primer término está presente en el modelo MHD ordinario, mientras que el segundo corresponde al efecto Hall.

2.3. Ondas en el Modelo MHD

En esta sección se presentan los distintos tipos de ondas que se propagan al considerar el modelo MHD ideal, ya que un primer desarrollo sin tener en cuenta el efecto Hall permitirá más adelante visualizar con mayor claridad las consecuencias de considerar una frecuencia de ciclotrón finita. Tomando las Ecs. (2.28) a (2.30) sin tener en cuenta el término de Hall, se realizan las siguientes

sustituciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_1, \\
 \rho &= \rho_0 + \rho_1, \\
 p &= p_0 + p_1,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde las cantidades con subíndice 1 representan perturbaciones de los valores de equilibrio indicados con subíndice 0. Se desprende de la expresión de \mathbf{u} que se considera un marco de referencia en el cual $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, además se asume un equilibrio uniforme con $\rho_0 = \text{cte}$. $\mathbf{B}_0 = \text{cte}$ y $p_0 = \text{cte}$.

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones de la MHD y considerando únicamente los términos de primer orden se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \tag{2.38}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0), \tag{2.40}$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1, \tag{2.41}$$

siendo c_s la velocidad del sonido dada por

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{2.42}$$

Se proponen soluciones de onda plana de la forma

$$f = \hat{f} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \tag{2.43}$$

donde f representa una de las cantidades perturbadas, \mathbf{k} es el vector de onda y ω la frecuencia de la oscilación. Utilizando las siguientes identidades vectoriales

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

las Ecs. (2.38) a (2.41) pueden expresarse como:

$$-\omega \hat{\rho} + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.44)$$

$$-\rho_0 \omega \hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{k} \hat{p} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mu_0} (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{k}, \quad (2.45)$$

$$-\omega \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{B}_0, \quad (2.46)$$

$$\hat{p} = c_s^2 \hat{\rho}. \quad (2.47)$$

Para obtener los modos de propagación de ondas presentes en el modelo MHD se reduce el sistema a una descripción en términos de la velocidad, lo cual permite expresar las perturbaciones ρ_1 , \mathbf{B}_1 y p_1 en función de \mathbf{u}_1 . Este procedimiento permite eliminar el valor propio espurio $\omega = 0$ asociado a la llamada onda de entropía que no tiene relevancia para los propósitos de este desarrollo (Goedbloed y Poedts, 2004). Reemplazando $\hat{\rho}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ en la Ec. (2.45) por las igualdades dadas en las Ecs. (2.44) y (2.46), respectivamente, y teniendo en cuenta la Ec. (2.47) se obtiene una expresión para la amplitud de la perturbación de la velocidad $\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{u}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ (Goedbloed y Poedts, 2004; Schwartz et al., 2004, entre otros):

$$\begin{aligned} -\rho_0 \omega^2 \hat{\mathbf{u}} = & -\rho_0 c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{B}_0] + \\ & + \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) (\mathbf{B}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) B_0^2 \mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La Ec. (2.48) puede escribirse como $[\mathbf{A}] \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, donde $[\mathbf{A}]$ es una matriz función de \mathbf{k} , ω , \mathbf{B}_0 y ρ_0 . Para que exista una solución no trivial de este sistema debe cumplirse que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo ($\det [\mathbf{A}] = 0$). La ecuación que resulta de esta condición entrega una relación entre el vector de onda \mathbf{k} y la frecuencia ω que se conoce como relación de dispersión. Esta relación es una propiedad muy importante que permite conocer las características de la solución. Si la velocidad de fase ω/k es una constante que no depende de ω y \mathbf{k} , el sistema no es dispersivo ya que las ondas de un tren de ondas con diferentes números de onda viajan a la misma velocidad. Por el contrario, cuando $\omega/k = f(\omega, \mathbf{k})$ la velocidad de propagación es diferente para cada onda y en consecuencia los distintos modos se “dispersan” con el avance del tiempo, dando lugar al carácter dispersivo del problema.

Para el siguiente análisis se considera que el campo magnético de equilibrio es paralelo a la dirección z , es decir, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$.

2.3.1. Propagación Paralela ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k$)

Considerando el caso de ondas que se propagan paralelas al campo magnético ambiente ($\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$), donde \mathbf{B}_0 está alineado con el eje z , al tener en cuenta únicamente las componentes en esa dirección, la Ec. (2.48) resulta:

$$\omega^2 \hat{u}_z = k^2 c_s^2 \hat{u}_z. \quad (2.49)$$

Esta expresión indica que para $\hat{u}_z \neq 0$ se cumple $\omega^2 = c_s^2 k^2$, que es la relación de dispersión para ondas sónicas. Se observa además que estas ondas son longitudinales con una velocidad de fase

$$\frac{\omega}{k} = \pm c_s. \quad (2.50)$$

Si ahora se considera la componente transversal al campo de la Ec. (2.48)

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad (2.51)$$

resulta que para $\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \neq \mathbf{0}$ la relación de dispersión es

$$\frac{\omega}{k} = \pm V_A, \quad (2.52)$$

donde

$$V_A = \frac{B_0}{(\rho_0 \mu_0)^{1/2}} \quad (2.53)$$

es la llamada velocidad de Alfvén.

La Ec. (2.52) es la relación de dispersión para las ondas de Alfvén. La perturbación $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ es perpendicular a la dirección de propagación y por ello la onda se denomina transversal o de corte. Por otro lado, de la Ec. (2.46) resulta

$$\hat{\mathbf{B}} = -\frac{k B_0}{\omega} \hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad (2.54)$$

lo que indica que la perturbación del campo magnético es también perpendicular a la dirección de la propagación y por lo tanto normal al campo magnético ambiente \mathbf{B}_0 . En cuanto a la densidad

y la presión, las Ecs. (2.44) y (2.47) muestran que $\hat{\rho} = \hat{p} = 0$, es decir, no existe compresión del plasma y las ondas de Alfvén son esencialmente magnéticas.

2.3.2. Propagación perpendicular ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$)

Considerando ahora un vector de onda \mathbf{k} perpendicular al campo magnético \mathbf{B}_0 , la Ec. (2.48) indica que $\hat{u}_z = 0$, mientras que la componente perpendicular es:

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = -\rho c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp}) \mathbf{k} - \frac{B_0^2}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp}) \mathbf{k} \quad (2.55)$$

De la Ec. (2.55) se deduce que $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ es paralela a la dirección de la propagación \mathbf{k} y entonces, para la solución no trivial se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = k^2 (c_s^2 + V_A^2) \quad (2.56)$$

la cual corresponde al denominado modo magnetosónico rápido, ya que según se observa en las Ecs. (2.44), (2.46) y (2.47), tanto ρ , \mathbf{B} como p muestran variación ($\hat{\rho} \neq 0$, $\hat{\mathbf{B}} \neq \mathbf{0}$ y $\hat{p} \neq 0$).

2.3.3. Caso general ($\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k \cos \theta$)

En el caso general donde el vector de onda es oblicuo al campo magnético, siendo θ el ángulo entre ambos, existen tres modos de ondas, esencialmente porque hay tres fuerzas restituyentes: tensión magnética, presión magnética y presión cinética (Pécseli, 2012). Sin pérdida de generalidad se escoge un sistema de referencia donde el campo magnético sin perturbar es paralelo al eje z , es decir $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, con lo cual la Ec. (2.48) resulta:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - V_A^2 k^2 \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{u}} + V_A^2 k \cos \theta (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{e}_z + \\ - [(c_s^2 + V_A^2) (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) - V_A^2 k \cos \theta (\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}})] \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación anterior por \mathbf{k} y \mathbf{e}_z se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} [\omega^2 - k^2 (c_s^2 + V_A^2)] (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) + V_A^2 k^3 \cos^2 \theta (\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}) = 0, \\ \omega^2 (\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}) - c_s^2 k \cos \theta (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

La solución trivial de este sistema da como resultado el modo de Alfvén, mientras que anulando el determinante de la matriz de coeficientes aparecen los llamados modos magnetosónicos:

Alfvén:

$$\omega^2 = V_A^2 k^2 \cos^2 \theta = V_A^2 k_z^2 \quad (2.59)$$

Magnetosónico rápido:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} \left\{ V_A^2 + c_s^2 + \left[(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad (2.60)$$

Magnetosónico lento:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} \left\{ V_A^2 + c_s^2 - \left[(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad (2.61)$$

Se observa que la velocidad de fase es independiente de la frecuencia y del vector de onda para todos los casos, por lo tanto ningún modo es dispersivo, aunque la dependencia con el ángulo de propagación θ evidencia la anisotropía de la propagación.

2.4. Ondas en el Modelo MHD-Hall

Como se vio en la sección anterior, las ondas presentes en el modelo MHD sin efecto Hall no son dispersivas, sin embargo, cuando este término es incorporado, si bien los modos de Alfvén y magnetosónicos aún pueden diferenciarse, se produce un acoplamiento entre ellos y los mismos se hacen dispersivos. Considerando el término del efecto Hall en la Ec. (2.30), la Ec. (2.40) resulta

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{\Omega_i} \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0]. \quad (2.62)$$

El segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior representa el efecto Hall. Considerando soluciones de onda plana como la utilizada en la sección anterior, Ec. (2.43), la ecuación (2.62) se escribe como:

$$-\omega \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{B}_0 - \frac{i}{\Omega_i} \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}). \quad (2.63)$$

Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de Alfvén, Ec. (2.53), y considerando nuevamente un sistema de referencia donde el campo magnético de equilibrio está alineado con el eje z , al combinar las Ecs. (2.44), (2.45) y (2.63) es posible determinar la relación de dispersión del modelo MHD-Hall (Stringer, 1963; Brodin y Stenflo, 1990):

$$(\omega^2 - V_A^2 k_z^2) [\omega^2 (\omega^2 - c_s^2 k^2) - V_A^2 k^2 (\omega^2 - c_s^2 k_z^2)] = \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 V_A^4 k_z^2 k^2 (\omega^2 - c_s^2 k^2). \quad (2.64)$$

El término del miembro derecho de la Ec. (2.64) surge del término de Hall, y acopla la relación de dispersión del modo de Alfvén (primer factor del miembro izquierdo) con las relaciones de los modos magnetosónicos (segundo factor). Para el caso de propagación paralela (o casi paralela), ocurre la degeneración de los modos, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos, y experimenta una resonancia a la frecuencia de ciclotrón iónica. Para $\theta = 0$ ($k_z = k$) la Ec. (2.64) resulta:

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) = \mp \frac{\omega}{\Omega_i} V_A^2 k^2, \quad (2.65)$$

donde el signo superior corresponde a ondas polarizadas a izquierda y el inferior a derecha. Reescribiendo la Ec. (2.65) se obtiene:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2 \left(1 \mp \frac{\omega}{\Omega_i}\right)}, \quad (2.66)$$

donde queda explicitada la resonancia cuando $\omega = \Omega_i$ para ondas polarizadas a izquierda. Esta resonancia se denomina resonancia de ciclotrón iónica. Por el contrario, las ondas con polarización derecha atraviesan la frecuencia de ciclotrón iónica sin experimentar resonancia, terminando en la bifurcación de *whistler* cuando las frecuencias se hacen tan grandes que el aporte de la inercia de los electrones resulta importante (Cramer, 2001; Pécseli, 2012).

Capítulo 3

Ondas No Lineales en el Modelo MHD-Hall: La Ecuación DNLS

En el capítulo anterior se presentaron las características fundamentales del modelo MHD con efecto Hall para la descripción del comportamiento de un plasma. Allí pudo verse que la consecuencia principal de considerar una frecuencia de ciclotrón finita se manifiesta en el acoplamiento de los modos de propagación de ondas los cuales resultan dispersivos. Este carácter dispersivo de los modos hace que sea posible la propagación de ondas no lineales, ya que la dispersión balancea los efectos no lineales.

Bajo ciertas condiciones, la propagación de ondas de Alfvén no lineales puede describirse a través de una ecuación diferencial no lineal, en derivadas parciales denominada Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS), la cual tiene una forma conocida y ha sido ampliamente estudiada. Esta ecuación posee la capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas.

La ecuación DNLS ha sido obtenida por numerosos autores utilizando condiciones y técnicas diferentes ([Rogister, 1971](#); [Mio et al., 1976](#); [Mjølhus, 1976](#); [Spangler y Sheerin, 1982](#); [Sakai y Sonnerup, 1983](#); [Baccelli et al., 1992](#); [Medvedev, 1999](#)). En la primera parte de este capítulo se realiza la derivación de dicha ecuación a partir del modelo MHD-Hall presentado en el capítulo anterior, utilizando un método de pequeñas perturbaciones. Posteriormente se describen las características fundamentales de la DNLS y se hace un resumen de los principales resultados obtenidos para la misma.

3.1. Ondas No Lineales

En un plasma con densidad uniforme y con un campo magnético ambiente también uniforme, se ha encontrado que ondas de Alfvén no lineales pueden propagarse paralelamente a la dirección del campo, siempre que las no linealidades estén balanceadas por un término dispersivo en las ecuaciones de onda. El término dispersivo se debe al efecto de la frecuencia de ciclotrón iónica finita, a veces referido como el efecto de la inercia de los iones, que surge explícitamente del término de Hall en la Ley de Ohm generalizada, Ec. (2.30). En ese caso, las ondas no lineales son circularmente polarizadas y las ondas del campo magnético satisfacen la ecuación DNLS (Mjølhus, 1976; Spangler et al., 1985; Sakai y Sonnerup, 1983).

Por otro lado, para propagación a ángulos suficientemente grandes del campo magnético base, las ondas MHD rápida y lenta obedecen a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y el modo de Alfvén a la ecuación KdV modificada (MKdV) (Cramer, 2001). En efecto, muchas de las soluciones exactas conocidas para la DNLS pueden interpretarse como extensiones de las soluciones exactas de los modelos KdV, MKdV y NLS (ecuación no lineal de Schrödinger válida para ondas altamente dispersivas (Taniuti y Washimi, 1968)) los cuales son casos límite de la DNLS (Mjølhus y Hada, 1997).

En el caso de propagación paralela o casi paralela, las soluciones de la ecuación DNLS han demostrado ser útiles para el análisis de múltiples fenómenos astrofísicos (Spangler y Sheerin, 1982; Ghosh y Papadopoulos, 1987; Machida et al., 1987; Kennel et al., 1988; Hada et al., 1989, entre otros). Por otra parte, en el caso de plasmas colisionales la DNLS muestra ser válida para propagación oblicua en una dimensión con $\beta > 1$ (Ruderman, 2002).

A continuación se procede a establecer la ecuación diferencial no lineal para propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén considerando primeramente baja frecuencia ($\omega \ll \Omega_i$) y luego alta frecuencia ($\omega \lesssim \Omega_i$). Para este desarrollo se toman las ecuaciones del modelo MHD-Hall, Ecs. (2.28)–(2.30), normalizando la densidad ρ y el campo magnético \mathbf{B} por los valores de referencia ρ_0 y B_0 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + V_A^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{V_A^2}{\Omega_i} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (3.3)$$

3.1.1. Baja frecuencia $\omega \ll \Omega_i$

En este análisis se considera propagación unidimensional en la dirección del eje z . La escala de tiempo de los fenómenos de interés es mucho mayor que el período de ciclotrón de los iones y entonces el término de Hall en la Ec. (3.3), proporcional a $1/\Omega_i$ puede despreciarse, por lo tanto esta solución corresponde al modelo MHD convencional. El campo magnético ambiente se asume constante y alineado con la dirección z , y se toma un marco de referencia tal que $u_z = 0$, lo cual implica que $\partial\rho/\partial t = 0$ según la Ec. (3.1). De esta manera se asume que ρ es constante en la dirección z y entonces también lo es la presión p .

Con las condiciones anteriores la Ec. (3.2) resulta:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [p + V_A^2 (B_x^2 + B_y^2)], \quad (3.4)$$

por lo tanto, ya que $\partial\rho/\partial t = 0$, el cuadrado del módulo del campo magnético transversal $\mathbf{B}_\perp = (B_x, B_y)$ es constante:

$$|\mathbf{B}_\perp|^2 = B_x^2 + B_y^2 = \text{cte.} \quad (3.5)$$

De las Ecs. (3.2) y (3.3), teniendo en cuenta la definición de la velocidad de Alfvén, Ec. (2.53), resulta la siguiente expresión para las componentes transversales del campo magnético:

$$\frac{\partial^2 B_{x,y}}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 B_{x,y}}{\partial z^2}, \quad (3.6)$$

donde se ha establecido $B_0 = 1$ y $\rho_0 = 1$. Una solución para las Ecs. (3.5) y (3.6) es:

$$\begin{aligned} B_x &= B_A \cos [k(z - V_A t) - \psi], \\ B_y &= \pm B_A \sin [k(z - V_A t) - \psi], \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde B_A es una amplitud real constante, k es un número de onda arbitrario y ψ es un ángulo de fase. El signo superior (inferior) en la ecuación de B_y corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha).

La Ec. (3.7) indica que una onda incompresible circularmente polarizada, de cualquier sentido de polarización y amplitud arbitraria, es una solución exacta de la ecuación no lineal (3.6), siempre que la frecuencia sea mucho menor que la frecuencia de ciclotrón iónica (Sagdeev y Galeev, 1969).

El campo magnético transversal y la velocidad del plasma para esta onda se relacionan por:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{B}_\perp}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}, \quad (3.8)$$

independientemente del tamaño de la amplitud de la onda.

Debe notarse que en el modelo MHD, si se construyera una onda de Alfvén no lineal de propagación paralela linealmente polarizada, por combinación de las soluciones polarizadas opuestamente, Ecs. (3.7), resulta que B_\perp^2 ya no es constante, por lo tanto u_z y ρ , según las Ecs. (3.1) y (3.4), tampoco lo son. Esto implica que una solución simple linealmente polarizada de la ecuación no lineal no es una solución exacta posible, sin embargo en ocasiones podría ser utilizada como una aproximación (Hollweg, 1971).

3.1.2. Alta frecuencia $\omega \lesssim \Omega_i$

La razón para el estudio del modelo no lineal de propagación paralela (o casi paralela) de ondas MHD en el rango dispersivo radica en las numerosas observaciones realizadas en astrofísica. Fluctuaciones de larga amplitud de la MHD fueron detectadas en la magnetósfera de la Tierra, con períodos de onda del orden del período de ciclotrón del protón local (Tsurutani et al., 1985). Otro caso similar es el de ondas de larga amplitud que se observaron acompañando al viento solar (Smith et al., 1995). Estas situaciones hacen necesario incluir el efecto de la frecuencia de ciclotrón finita de los iones en el modelo MHD para la correcta descripción de algunos fenómenos de interés.

Considerando el término del efecto Hall en las Ecs. (3.1) a (3.3) se encuentra que la onda circularmente polarizada dada en las Ecs. (3.7) ya no es una solución exacta del problema. Tomando nuevamente la propagación de la onda únicamente en la dirección z y asumiendo que las ondas son circularmente polarizadas, se define el campo magnético transversal complejo como:

$$b = B_x \pm i B_y, \quad (3.9)$$

donde el signo superior (inferior) corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha), similarmente al caso de la expresión de B_y en las Ecs. (3.7).

Notando que B_z es otra vez constante, de las Ecs. (3.2) y (3.3) se obtiene (Ovenden et al.,

1983)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_A^2}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[u_z \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (u_z b) \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u_z b) \right] + \\ \pm i \frac{V_A^2}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para una ecuación de estado $p \propto \rho$ con movimiento isotérmico, las Ecs. (3.1) y (3.3) resultan (Cramer, 2001):

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{V_A^2}{2} |b|^2 + \rho u_z^2 \right), \quad (3.11)$$

siendo c_s la velocidad del sonido dada en (2.42) con $\gamma = 1$.

Las Ecs. (3.10) y (3.11) conforman el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la evolución del campo magnético cuando se consideran frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica.

3.2. Derivación de la Ecuación DNLS

A diferencia de lo realizado en las secciones anteriores, el conjunto de ecuaciones de la MHD-Hall, Ecs. (3.1)–(3.3), puede reducirse a una simple ecuación no lineal la cual tiene soluciones conocidas, siempre que el término de Hall sea relativamente pequeño, esto es, que la frecuencia sea una fracción no nula de la frecuencia de ciclotrón iónica. Para el desarrollo es necesario definir un nuevo conjunto de coordenadas, utilizando un parámetro que cuantifica la importancia de los términos dispersivos:

$$\varepsilon = \frac{V_A}{\Omega_i} k = l_i k, \quad (3.12)$$

siendo l_i la longitud inercial de los iones dada en la Ec. (2.35) y k el número de onda paralelo a la dirección z .

Un tiempo característico del problema es el período de ciclotrón iónico Ω_i^{-1} , por lo tanto la frecuencia en esta escala de tiempo es de orden ε , al igual que el término de Hall en la Ec. (3.3). Entonces una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales con soluciones del tipo solitón puede obtenerse exigiendo que los términos no lineales sean también de orden ε , ya que de ese

modo las no linealidades son balanceadas por el efecto dispersivo del término de Hall.

Para el caso de propagación paralela al campo magnético ambiente alineado con la dirección z , en un marco de referencia que se mueve a la velocidad de propagación (velocidad de Alfvén), la onda es estacionaria para orden ε , y la dispersión produce un cambio de orden ε^2 en la frecuencia. Partiendo de la relación de dispersión para propagación paralela de ondas de Alfvén lineales del modelo MHD, Ec. (2.52), si se suma un término de dispersión debido al efecto Hall se encuentra una relación de dispersión no lineal de la forma (Medvedev, 1999):

$$\omega = kV_A \left(1 \pm \frac{1}{2\Omega_i} kV_A \right) = V_A k \pm \frac{V_A^2}{2\Omega_i} k^2, \quad (3.13)$$

que es la relación de dispersión para propagación paralela (o casi paralela) de ondas de Alfvén no lineales, entonces, de acuerdo a la Ec. (3.12)

$$\frac{\omega}{\Omega_i} \sim \varepsilon \pm \frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad (3.14)$$

La Ec. (3.14) indica que una coordenada de tiempo adecuada debería ser de orden ε^2 , por lo tanto se define $\tau = \varepsilon^2 t$. Por otro lado, en el marco de referencia que se mueve a velocidad de Alfvén V_A , el número de onda k es de orden ε , que resulta en una coordenada espacial $\xi = \varepsilon(z - V_A t)$.

El punto clave del desarrollo es asumir que las perturbaciones de los campos se deben principalmente a fluctuaciones alfvénicas, es decir que las variaciones de densidad del plasma y velocidad paralela a la dirección del campo son más pequeñas que las variaciones del campo magnético y velocidad transversales. Tomando $\rho_0 = 1$, las variables son expandidas en series de potencias de ε de la siguiente forma (Mio et al., 1976):

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots, \\ B_x &= \varepsilon^{1/2} B_{x1} + \varepsilon^{3/2} B_{x2} + \dots, \\ B_y &= \varepsilon^{1/2} B_{y1} + \varepsilon^{3/2} B_{y2} + \dots, \\ u_z &= \varepsilon u_{z1} + \varepsilon^2 u_{z2} + \dots, \\ u_x &= \varepsilon^{1/2} u_{x1} + \varepsilon^{3/2} u_{x2} + \dots, \\ u_y &= \varepsilon^{1/2} u_{y1} + \varepsilon^{3/2} u_{y2} + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con estas definiciones, utilizando el campo magnético complejo b definido en la Ec. (3.9), la

Ec. (3.11) de orden ε queda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{V_A^2}{2} |b|^2 \right), \quad (3.16)$$

la cual indica que las perturbaciones de la densidad están conducidas por la fuerza debida al gradiente de presión magnética transversal (fuerza ponderomotiva).

Reemplazando las Ecs. (3.15) en las ecuaciones de la MHD-Hall (3.1)–(3.3), utilizando las variables τ y ξ definidas anteriormente, y considerando los términos del mismo orden en ε , se obtienen las siguientes ecuaciones (Cramer, 2001):

$$\begin{aligned} -V_A \frac{\partial B_{x1}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial u_{z1}}{\partial \xi} &= -c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{V_A^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2), \\ V_A \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{z1}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones correspondientes al siguiente orden en ε son:

$$\begin{aligned} -V_A \frac{\partial u_{x2}}{\partial \xi} - V_A^2 \frac{\partial B_{x2}}{\partial \xi} &= - \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial \tau} + u_{z1} \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi} \right) + V_A \rho_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial u_{y2}}{\partial \xi} - V_A^2 \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} &= - \left(\frac{\partial u_{y1}}{\partial \tau} + u_{z1} \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi} \right) + V_A \rho_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial B_{x2}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial \xi} &= - \frac{\partial B_{x1}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{z1} B_{x1}) - \frac{V_A}{\Omega_i} \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial \xi^2}, \\ -V_A \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{y2}}{\partial \xi} &= - \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{z1} B_{y1}) - \frac{V_A}{\Omega_i} \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

A diferencia de un factor $1/V_A$, la primera y la segunda ecuación de las (3.18) son iguales a la tercera y cuarta, respectivamente, lo cual resulta en las siguientes expresiones para los campos de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{x1}}{\partial \tau} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \xi} [B_{x1} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2)] - \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \xi} [B_{y1} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2)] - \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial \xi^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\beta = \frac{c_s^2}{V_A^2} = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2}, \quad (3.20)$$

es el llamado parámetro β , el cual indica la relación entre la presión del gas y la presión magnética del plasma. Cuando $\beta < 1$ la presión magnética es mayor que la presión cinética y por lo tanto la dinámica es gobernada por el campo magnético. Caso contrario, cuando $\beta > 1$ la presión del gas es mayor y por lo tanto la dinámica es dominada por el fluido.

Cambiando a las coordenadas originales t y z , y teniendo en cuenta que

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + V_A \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.21)$$

se obtiene la siguiente ecuación, donde nuevamente se ha utilizado el campo magnético complejo b definido en la Ec. (3.9):

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_A \frac{\partial b}{\partial z} \pm i \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{V_A}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_1 b) = 0. \quad (3.22)$$

Si se desprecia el último término de la Ec. (3.22), los tres primeros términos dan la relación de dispersión (3.13). De las Ecs. (3.17), la perturbación de la densidad forzada por la presión del campo magnético transversal es:

$$\rho_1 = \frac{1}{2(1-\beta)} |b|^2 + \text{cte.} \quad (3.23)$$

Si ahora se desprecia el tercer término de la Ec. (3.22) (término dispersivo), una solución de las Ecs. (3.22) y (3.23) resulta:

$$|b|^2 = \text{cte}, \quad \rho_1 = 0, \quad (3.24)$$

que representa una onda plana circularmente polarizada, transversal de amplitud constante de extensión infinita, como en la solución obtenida para el caso de baja frecuencia ($\omega \ll \Omega_i$) de la Sección 3.1.1. Obviamente, cuando se incluye el término dispersivo, la solución dada por la Ec. (3.24) ya no es válida.

Considerando la Ec. (3.23) con $\text{cte} = 0$, la Ec. (3.22) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_A \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0, \quad (3.25)$$

donde $b = (B_x \pm iB_y)/B_0$ es el campo magnético transversal complejo adimensionalizado, ya que para la derivación de esta ecuación se utilizaron las ecuaciones MHD-Hall normalizadas por los valores de referencia B_0 y ρ_0 .

La Ec. (3.25) es llamada Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger, DNLS por sus siglas en inglés, de acuerdo a la denominación utilizada por [Kaup y Newell \(1978\)](#) en su trabajo donde demostraron que esta ecuación admite soluciones del tipo solitón. Los solitones son definidos normalmente como formaciones de ondas que son localizadas en el espacio, (localmente) estacionarias y estables con respecto a las interacciones.

La ecuación DNLS es el punto de partida de la investigación aquí presentada. Más adelante se detallan los aspectos más importantes referidos a esta ecuación.

3.3. La Ecuación DNLS

En el capítulo anterior se realizó una revisión de los conceptos preliminares referidos a la física de plasmas para posteriormente presentar la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS), Ec. (3.25). De acuerdo a lo desarrollado, esta ecuación permite describir la propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente alineado con el eje z de ondas de Alfvén no lineales de amplitud finita circularmente polarizadas.

La ecuación DNLS ha sido derivada por distintos autores utilizando técnicas y condiciones diferentes. En primer término fue [Rogister \(1971\)](#) quien utilizando las ecuaciones de Vlasov encontró que para el caso de propagación paralela o casi paralela, en lugar de dos ecuaciones separadas (KdV y MKdV) para los dos modos, se obtienen dos ecuaciones acopladas que se pueden expresar mediante una sola ecuación (la DNLS) cuando se emplea variable compleja. Posteriormente [Mio et al. \(1976\)](#) y [Mjølhus \(1976\)](#) arribaron a esta ecuación partiendo de las ecuaciones MHD-Hall para $\beta = 0$ (plasmas fríos), mientras que [Spangler y Sheerin \(1982\)](#) y [Sakai y Sonnerup \(1983\)](#) lo hicieron para $\beta > 0$. Además de éstos, existen otros autores que alcanzaron la misma solución ([Baccelli et al., 1992](#); [Medvedev, 1999](#), entre otros).

En general, es conveniente expresar la Ec. (3.25) de una forma adimensional para lo cual se

establecen variables adimensionales. En el caso del campo magnético transversal b la adimensionalización ya está implícita en la ecuación ya que para su derivación se utilizó el campo normalizado por el valor de referencia B_0 , aunque en este caso se incorpora además un factor $1/2$:

$$b = \frac{B_x \pm iB_y}{2B_0}. \quad (3.26)$$

Con respecto al tiempo t y a la coordenada espacial z , se realizan las siguientes adimensionalizaciones:

$$2\Omega_i t \rightarrow t, \quad \frac{2\Omega_i}{V_A} z \rightarrow z, \quad (3.27)$$

donde, como en lo visto hasta el momento, B_0 es el campo magnético no perturbado, Ω_i es la frecuencia de ciclotrón iónica y V_A la velocidad de Alfvén. De acuerdo a estas definiciones, la Ec. (3.25) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0, \quad (3.28)$$

siendo, de acuerdo a la Ec. (3.25)

$$\alpha = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (3.29)$$

En el caso de plasmas fríos ($\beta \rightarrow 0$), α no puede ser negativo y puede asumirse $\alpha = 1$. En cambio, en plasmas calientes el término no lineal puede cambiar de signo, lo cual trae importantes consecuencias en cuanto a la estabilidad de algunas soluciones, sin embargo, si se utiliza teoría cinética, el coeficiente α se hace negativo únicamente cuando la temperatura electrónica es mucho mayor que la iónica, permaneciendo positivo para la mayor parte de los casos de interés (Mjølhus y Wyller, 1986, 1988).

La Ec. (3.28) corresponde al caso no difusivo, ya que para su derivación se asumió inicialmente $\eta = 0$ en la ecuación de la Ley de Ohm generalizada del modelo MHD-Hall (ver sección 2.2). Cuando se consideran efectos difusivos, es posible modelar el amortiguamiento o excitación mediante un operador lineal apropiado (Russell y Ott, 1981) y la ecuación DNLS se escribe como:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0, \quad (3.30)$$

donde $\hat{\gamma}$ es el operador lineal de amortiguamiento o excitación mencionado. En adelante se hace referencia a esta ecuación como la DNLS difusiva.

El término lineal $\partial b/\partial z$ presente tanto en la Ec. (3.28) como en la (3.30), se debe a que el marco de referencia utilizado son ejes laboratorio. Si en cambio se utiliza un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad de Alfvén en la dirección z , este término desaparece sin incidir sobre la solución (Spangler y Sheerin, 1982). Por último hay que recordar que, de acuerdo a la definición realizada en la Ec. (3.9), el signo superior en el término dispersivo corresponde a ondas con polarización izquierda, mientras que el inferior a polarización derecha.

3.4. Resultados previos de la ecuación DNLS

Existen numerosas razones que justifican la utilización de la ecuación DNLS. Probablemente la más importante se debe a que esta ecuación, al igual que las ecuaciones KdV y MKdV, “pertenece” a la *teoría de solitones*, la cual permite un amplio conocimiento de las soluciones de este tipo de ecuaciones aun cuando ellas son no lineales. Además, las estructuras de onda asociadas a las soluciones (solitones) pueden atribuirse a procesos físicos específicos.

En el caso particular de la ecuación DNLS, existe una gran cantidad de soluciones exactas disponibles (Belashov y Vladimirov, 2005), las cuales en algunos casos han llegado a ser experimentalmente comprobadas (Galperin et al., 1986). Por otro lado, esta ecuación ha sido estudiada por tres técnicas alternativas: búsqueda de soluciones exactas (Mjolhus y Hada, 1997), integración numérica (Spangler et al., 1985; Dawson y Fontan, 1988), y reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante dos procedimientos: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) y utilizando un número finito de modos (Sanmartín et al., 2004; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007). A continuación se presentan los detalles más importantes acerca de cada una de estas técnicas.

3.4.1. Soluciones exactas

La ecuación DNLS, al igual que otras ecuaciones, tiene la propiedad de lo que usualmente se denomina invarianza del campo lejano, la cual es una invarianza de escala que establece que si $b(z, t)$ es solución de la ecuación, entonces

$$b_\varepsilon(z, t) = \varepsilon^{1/2} b(\varepsilon z, \varepsilon^2 t) \tag{3.31}$$

es también solución. A continuación se enumeran las soluciones exactas tomando como referencia el trabajo de [Mjølhus y Hada \(1997\)](#).

1. Ondas polarizadas circularmente:

$$\begin{aligned} b &= A_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ \omega &= \alpha A_0 k - k^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Estas soluciones dependen del número de onda k y de la amplitud A_0 . El sentido de polarización está dado por el signo de k : izquierda para $k > 0$ y derecha para $k < 0$. Mediante un análisis de estabilidad es posible deducir que la onda es inestable cuando $\alpha A_0 < 2k$.

2. Trenes periódicos de ondas oblicuas: si se asumen ondas viajeras estacionarias $\chi = z - Vt$ y se integra la ecuación ordinaria resultante, puede obtenerse la extensión a propagación oblicua de la solución anterior. Realizando estas operaciones el campo magnético viene dado por la siguiente ecuación algebraica:

$$-(bC_0^* + b^*C_0) + V|b|^2 = H_0. \tag{3.33}$$

Esta ecuación está en función de los parámetros V , C_0 y H_0 , los cuales están relacionados con la velocidad, la amplitud y la oblicuidad de la propagación. El análisis de estabilidad de esta solución muestra que, frente a modulación paralela, todas las soluciones polarizadas a derecha son estables mientras que la mayor parte de las polarizadas a izquierda son inestables.

3. Solitones de un parámetro: la solución expuesta previamente engloba dos familias uniparamétricas de solitones a las que se llama solitón brillante (polarización izquierda) y solitón oscuro (polarización derecha). Las expresiones analíticas pueden darse en forma modulacional o como expresiones racionales de funciones exponenciales.
4. Solitones de dos parámetros: las soluciones de solitones dependientes de dos parámetros también son admitidas por la ecuación DNLS, tanto en propagación paralela como oblicua. Las expresiones correspondientes pueden encontrarse en los trabajos de [Kaup y Newell \(1978\)](#), [Mjølhus y Wyller \(1986\)](#) y [Mjølhus \(1989\)](#).
5. Modulación sobre un estado circularmente polarizado: en el caso de que el estado en el infinito consista en un campo magnético circularmente polarizado, aparece una nueva colección de

soluciones exactas, sin embargo las mismas no tienen gran interés físico ya que se trata de una condición de contorno muy particular.

Luego del desarrollo de la teoría para propagación paralela de [Kaup y Newell \(1978\)](#), otros autores han extendido el estudio para propagación oblicua ([Kawata y Inoue, 1978](#)), ondas circularmente polarizadas en el infinito ([Kawata et al., 1980](#)) y con condiciones de contorno periódicas ([Prikarpatskii, 1981](#)).

Los métodos IST (inverse scattering transform) también han sido utilizados para estudiar la ecuación DNLS. Estos métodos permiten determinar qué clase de perfiles iniciales de onda $b = b(z, 0)$ evolucionan hacia soluciones de solitones. Además, debido a que se han observado estructuras solitónicas en plasmas espaciales, su utilización cobró importancia para la descripción de este tipo de fenómenos.

3.4.2. Reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Como se dijo anteriormente, la reducción de la ecuación DNLS a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias fue realizada mediante dos procedimientos: suponiendo ondas viajeras estacionarias ([Hada et al., 1990](#)) y utilizando un número finito de modos ([Sanmartín et al., 2004](#); [Elaskar et al., 2006](#); [Sánchez-Arriaga et al., 2007](#)). A continuación se presentan algunos detalles de cada uno de ellos.

Ondas viajeras estacionarias

En este procedimiento se suponen soluciones de ondas viajeras estacionarias que cumplen la siguiente condición:

$$b = b(\xi), \quad \xi = z - Vt. \tag{3.34}$$

Siguiendo el trabajo de [Hada et al. \(1990\)](#), al considerar la ecuación DNLS con un término de amortiguamiento resistivo e introduciendo un forzamiento monocromático y circularmente polarizado ($S = A_0 e^{ik\xi}$), integrando la ecuación resultante y realizando ciertas definiciones se llega a un

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo:

$$\begin{aligned}\frac{dw_y}{d\zeta} - \nu \frac{dw_z}{d\zeta} &= \frac{dh}{dw_z} + a \cos \theta \\ \frac{dw_z}{d\zeta} + \nu \frac{dw_y}{d\zeta} &= -\frac{dh}{dw_y} + a \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \Omega\end{aligned}\tag{3.35}$$

donde la función h está dada por

$$h(\mathbf{w}) = \frac{1}{4} (\mathbf{w}^2 - 1)^2 - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{e}_x)^2,$$

y se realizaron las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{1}{b_0} \mathbf{b}, & a &= \frac{A_0}{\alpha b_0^3 k}, & \zeta &= \frac{ab_0^2 \xi}{\mu}, \\ \nu &= \frac{\eta}{\mu}, & \Omega &= \frac{\mu k}{\alpha b_0^2}, & \lambda &= \frac{V}{\alpha b_0^2},\end{aligned}$$

siendo $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

El caso de $a = 0$ y $\nu = 0$ constituye la solución de onda estacionaria que se presentó en el apartado de soluciones analíticas. Por otro lado, para $a \neq 0$ y $\nu = 0$ se tiene un sistema Hamiltoniano forzado, mientras que el caso general $a \neq 0$ y $\nu \neq 0$ es un sistema disipativo forzado.

El estudio del sistema de ecuaciones (3.35) arrojó los siguientes resultados.

- Para sistemas forzados no disipativos ($a \neq 0, \nu = 0$) soluciones cercanas a las separatrices de solitones cuyo sentido de polarización es igual al del forzamiento presentaron comportamiento caótico con el aumento de la amplitud del forzamiento. Sin embargo, para el caso de polarización contraria al forzamiento no se encuentra caos.
- Sistemas forzados disipativos ($a \neq 0, \nu \neq 0$) presentan una dinámica compleja cuando se varía la amplitud del forzamiento, exhibiendo órbitas periódicas, bifurcaciones de doblamiento de período con transiciones a caos y transiciones duras a caos, diversos tipos de atractores y distintos tipos de intermitencias (Hada et al., 1990; Chian et al., 1998; Borotto et al., 2004).
- El sistema forzado disipativo también presenta una dinámica muy compleja cuando se toma ν como parámetro de control. Nuevamente aparece una variedad de bifurcaciones, atractores y crisis de fronteras (Chian et al., 2002).

La existencia de fenómenos de intermitencia y de crisis ha sido comprobada a través de diversos ensayos con plasmas de laboratorio y numerosas observaciones en plasmas espaciales, por lo tanto, el modelo anterior puede utilizarse para entender y predecir este tipo de comportamientos, siempre teniendo en cuenta las simplificaciones que se realizaron para su desarrollo.

Truncamiento

El otro método utilizado para reducir la ecuación DNLS a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en realizar el truncamiento de la DNLS suponiendo que la solución es la suma de un número finito de modos. Este análisis permite aplicar las herramientas para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, obteniendo resultados que posteriormente ayudan a investigar la ecuación original.

El orden de las ecuaciones diferenciales ordinarias depende directamente del número de modos utilizados para hacer el truncamiento, por este motivo se ha de seleccionar el número mínimo de modos que reproduzca correctamente las soluciones. Estudios numéricos en los cuales se ha integrado la DNLS completa (Ghosh y Papadopoulos, 1987; Nariyuki y Hada, 2005) indican que existen tres modos dominantes cuyos números de ondas cumplen la condición de resonancia:

$$2k_0 = k_1 + k_2. \tag{3.36}$$

En el método de truncamiento se realiza una aproximación en la cual existe una coherencia de fase, es decir, las ondas son monocromáticas y la relación entre las fases tiene significado físico. Para ondas con un ancho de banda $\Delta\omega$ sólo se justifica la aproximación de coherencia de fase si $T\Delta\omega \ll 1$, siendo T el tiempo característico, por ejemplo el período de oscilación del plasma (Robinson y Drysdale, 1996). Por otro lado, si las amplitudes de onda son tan grandes que el tiempo de interacción entre ellas es del mismo orden que el período de las propias ondas, el truncamiento deja de ser válido (de Oliveira et al., 1997).

El análisis de la DNLS mediante técnicas de truncamiento fue llevado a cabo por primera vez por Ghosh y Papadopoulos (1987), incluyendo en la ecuación un término de amortiguamiento o excitación. En ese trabajo se integró numéricamente la DNLS y mediante un análisis del espectro en frecuencia, se observó que existían tres modos dominantes, lo que sugirió realizar el truncamiento. Sin embargo, una mala elección de los parámetros llevó a que se concluyera erróneamente que el truncamiento a tres modos de la DNLS no presenta caos, siendo necesario un número mínimo de

siete.

Un trabajo posterior (Sanmartín et al., 2004), que utilizaba un modelo que incluía un modo excitado (inestable) y dos modos amortiguados con iguales coeficientes de amortiguamiento, demostró que el truncamiento a tres modos de la DNLS presenta caos, y que dependiendo del parámetro de control seleccionado, los caminos de transición podían ser por doblamiento de período o transición dura. Además, este estudio reveló que al tomar coeficientes de amortiguamiento diferentes y utilizar un modelo de amortiguamiento de Landau, continuaba existiendo un dominio paramétrico para el cual la dinámica era caótica.

3.4.3. Soluciones numéricas

La ecuación DNLS, tanto en la versión presentada en la Ec. (3.28) como en variaciones de la misma, ha sido estudiada mediante análisis numérico por numerosos autores. Además, la variedad de soluciones analíticas que se conocen y la existencia de un número infinito de cantidades que se conservan, ayudan a la interpretación de los resultados.

Las dos primeras cantidades que se conservan en la DNLS son (Kaup y Newell, 1978):

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} bb^* dz, \quad (3.37)$$

$$C_1 = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial b^*}{\partial z} b - \frac{\partial b}{\partial z} b^* \right) dz \right]. \quad (3.38)$$

las cuales constituyen, desde el punto de vista numérico, una herramienta de validación de los métodos.

La integración numérica de la ecuación DNLS fue llevada a cabo en primer término por Spangler (1985) utilizando un método que conserva las cantidades anteriores y que impone explícitamente condiciones de contorno periódicas. Este método permite obtener la evolución de un campo magnético $b(z, t)$ partiendo de una condición inicial $b(z, t_i)$, mediante la transformada espacial de Fourier del campo magnético b y de $|b|^2 b$, resolviendo la DNLS en el dominio de los números de onda (dominio de Fourier). La integración de este código permitió comprobar que los solitones que fueron obtenidos analíticamente eran numéricamente estables, sin embargo, en ciertas combinaciones de sentido de polarización y signo del factor α en el término no lineal de la Ec. (3.28), aparecía una inestabilidad de colapso.

Seguidamente, se realizaron dos trabajos que incluían términos de amortiguamiento o excitación

en la DNLS. En el primero de ellos (Spangler, 1986), las ondas con mayores longitudes de onda se amplificaban debido a la presencia de una corriente de iones a una velocidad superior a la velocidad de Alfvén, mientras que las de longitud de onda corta se amortiguaban a causa de la resonancia de absorción ion-ciclotrón. En un segundo trabajo (Ghosh y Papadopoulos, 1987) se utilizó el mismo algoritmo que en el anterior pero cambiando el método de integración trapezoidal por un método de Adams, resultando en este caso que el sistema podía tener soluciones caóticas y la coexistencia de varios atractores. Además, el espectro en potencia reveló que la dinámica era dominada por tres modos, lo que sugirió realizar un estudio de truncamiento de la DNLS, pero en ese análisis no se encontraron soluciones caóticas. Estudios posteriores demostraron que esta falla se debió a una inadecuada elección de los parámetros, evidenciando que el truncamiento a sólo tres modos es capaz de reproducir la dinámica del sistema completo y en particular desarrollar caos (López-Rebollal et al., 1998; Sanmartín et al., 2004; Elaskar et al., 2005).

Los métodos basados en la transformada de Fourier pueden presentar inestabilidades debido a que se utiliza un número finito de modos. Para evitar esta situación, Fla (1992) desarrolló un esquema numérico implícito basado en el método de Whitham-Fornberg que además reproduce la conservación de las constantes del movimiento. Debido a estas características no se encontraron inestabilidades adicionales a las que se obtienen mediante un análisis lineal, lo que hace al método eficaz para estudiar la inestabilidad modular de la ecuación DNLS.

Simulaciones numéricas de la DNLS para $\beta \sim 1$ han sido desarrolladas en el trabajo de Buti et al. (2000). Para estas situaciones deben incluirse efectos cinéticos debido a que el acoplamiento entre las fluctuaciones de densidad y de campo magnético cobra importancia. Los resultados de estas simulaciones confirman que para $\beta < 1$ las ondas polarizadas a izquierda son inestables mientras que a derecha son estables. Para $\beta > 1$ la situación se invierte, y además se observa que ondas inicialmente polarizadas a izquierda pueden cambiar el sentido de polarización.

Más recientemente se ha utilizado un esquema de integración numérica que emplea métodos espectrales para las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta para el avance en el tiempo (Nariyuki y Hada, 2005), con y sin término de amortiguamiento y excitación. Los resultados obtenidos comprobaron nuevamente que el sistema evoluciona con tres modos dominantes que satisfacen la condición de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$ cuando se utiliza una onda como condición inicial y valores de amplitud relativamente bajos. En esta investigación se trabaja en la misma dirección, tal como se presenta en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Solución Numérica Mediante Métodos Espectrales

Como es sabido, existen diversos métodos para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, entre los cuales pueden mencionarse los métodos de diferencias finitas, los métodos de elementos finitos o los métodos espectrales. A su vez, dentro de cada uno de ellos existen distintas variaciones que dan origen a los métodos específicos que se emplean habitualmente. En este trabajo se busca solucionar numéricamente la ecuación DNLS utilizando métodos espectrales para la resolución de las derivadas espaciales, y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para el avance en el tiempo.

El objetivo del presente capítulo es, en primer lugar, introducir las características principales de los métodos espectrales, justificando posteriormente su utilización en la resolución de la ecuación DNLS, presentando luego la implementación de este tipo de soluciones en dicha ecuación.

En la segunda parte del capítulo se procede a verificar la validez del código a través del análisis de la ecuación DNLS sin efectos difusivos. Esto es, verificar que las soluciones numéricas cumplen las condiciones analíticas de estabilidad del problema, determinando a su vez la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la simulación.

4.1. Introducción a los Métodos Espectrales

A diferencia de los métodos de diferencias finitas, los métodos espectrales no utilizan expansiones en series de Taylor para la representación de la solución aproximada, sino que se valen de expansiones en serie de funciones de base, de manera similar a lo realizado en los métodos

de elementos finitos, pero empleando funciones globales en el dominio infinitamente derivables o polinomios de alto orden.

Cuando las condiciones de borde de la función estudiada requieren que la solución sea espacialmente periódica, los senos y cosenos de una serie de Fourier, los cuales son las funciones de base naturales para todos los problemas periódicos, automáticamente e individualmente satisfacen las condiciones de borde. En el caso de problemas no periódicos, los polinomios de Chebyshev son la opción natural para funciones de base. En ese caso las condiciones de borde no se satisfacen apropiadamente, pero es factible incorporar explícitamente restricciones para minimizar el residuo, o utilizar funciones de base que satisfagan independientemente las condiciones de contorno homogéneas y adicionar funciones conocidas que cumplan las condiciones no homogéneas (Boyd, 2000).

En numerosas simulaciones para la ecuación DNLS se pudo observar que cuando las condiciones iniciales son periódicas, pueden aplicarse condiciones de contorno de este tipo (Drazin y Johnson, 1989). Por lo tanto, teniendo en cuenta que el fenómeno de interés en la ecuación DNLS generalmente tiene una característica oscilatoria, simulaciones numéricas con condiciones de contorno periódicas resultan ser una buena implementación (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta cualidad permite utilizar los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier, cuyas características principales se revisan más adelante.

En cuanto a la dependencia temporal, si bien es posible tratar esta evolución espectralmente, en general es más eficiente aplicar los métodos espectrales únicamente a la dependencia espacial. La razón es que la integración en el tiempo puede hacerse explícitamente, lo cual es mucho menos costoso en términos computacionales que calcular la solución simultáneamente en el dominio espacio-tiempo. Una discretización espectral sólo espacial reduce la ecuación diferencial en derivadas parciales original a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable tiempo que pueden integrarse mediante alguna de las variantes del método de Runge-Kutta o utilizando cualquier otro esquema de avance en el tiempo.

4.1.1. Funciones de expansión ortogonales

La teoría subyacente a los métodos espectrales se construye a partir de la expansión de una función $\phi(x)$ sobre un intervalo finito (aquí tomado $[0, 2\pi]$) en términos de una sucesión infinita de

funciones ortogonales $\varphi_k(x)$

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k \varphi_k(x), \quad (4.1)$$

donde los coeficientes $\hat{\phi}_k$ se determinan mediante la integral

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \varphi_k(x) dx, \quad (4.2)$$

y las funciones de expansión y sus complejas conjugadas satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(x) \varphi_\ell^*(x) dx = 2\pi \delta_{k\ell}, \quad (4.3)$$

siendo $\delta_{k\ell}$ el delta de Kronecker.

La transformación indicada en las Ecs. (4.1) a (4.3) es llamada “transformación finita de ϕ ” entre el espacio físico y el espacio de transformación, ya que la integral se realiza sobre un intervalo finito. Si el conjunto de funciones ortogonales es completo, lo cual significa que la precisión de la serie para representar la función original aumenta al incrementar el número de funciones de base consideradas, la transformación puede invertirse, y de esta manera las funciones pueden representarse tanto por sus valores en el espacio físico como por sus coeficientes en el espacio de transformación. Por otro lado, debe notarse que los coeficientes de expansión $\hat{\phi}_k$ en la Ec. (4.2) dependen de todos los valores de ϕ en el espacio físico y entonces en general no pueden computarse de manera exacta cuando se cuenta con descripciones discretas.

Cuando en la expansión dada en la Ec. (4.1) se utiliza un número finito de coeficientes usando los valores de ϕ en un número finito de puntos seleccionados, correspondientes por ejemplo a una grilla, el procedimiento se denomina como una “transformación discreta” entre el conjunto de valores de ϕ en la grilla y el conjunto de coeficientes aproximados (o discretos).

4.1.2. La Expansión de Fourier continua

La expansión de Fourier continua es la expansión más común dentro de los métodos espectrales y es la que se utiliza en este trabajo. Como se mencionó anteriormente, esta expansión es natural

para problemas con condiciones de contorno periódicas, es decir para funciones que cumplen:

$$\phi(x) = \phi(x + L), \tag{4.4}$$

donde L es la longitud del dominio de integración.

En la expansión de Fourier, las funciones de base son funciones trigonométricas, las cuales conforman una base ortogonal completa de la forma

$$\varphi_k(x) = e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{4.5}$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$, y de donde resultan, según la Ec. (4.2), los coeficientes de Fourier de ϕ :

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.6}$$

La relación dada en (4.6) asocia la función ϕ con una sucesión de números complejos (los coeficientes de Fourier $\hat{\phi}_k$) llamada la “transformada de Fourier de ϕ ”. El análisis consiste en evaluar qué tan bien la función $\phi(x)$ es aproximada por esta sucesión de polinomios trigonométricos

$$P_N\phi(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\phi}_k e^{ikx}, \tag{4.7}$$

cuando $N \rightarrow \infty$, donde la función $P_N\phi(x)$ es la serie de Fourier truncada (o finita) de orden N de $\phi(x)$.

Si se define el producto interno y la norma en la manera habitual, tal que para dos funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$

$$(\phi, \psi) = \int_0^{2\pi} \phi(x)\psi^*(x) dx, \tag{4.8}$$

$$\|\phi\|^2 = \int_0^{2\pi} |\phi(x)|^2 dx, \tag{4.9}$$

insertando la Ec. (4.1) en la (4.9), y haciendo uso de la relación de ortogonalidad dada en la Ec. (4.3), se obtiene la identidad de Parseval

$$\|\phi\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_k|^2. \tag{4.10}$$

Con la ecuación anterior y utilizando la Ec. (4.7) resulta

$$\|\phi - P_N\phi\|^2 = 2\pi \sum_{|k| \geq N/2} |\hat{\phi}_k|^2. \quad (4.11)$$

Esta última expresión indica que el error generado al reemplazar ϕ con su serie de Fourier truncada de orden N depende de qué tan rápido los coeficientes de Fourier $\hat{\phi}_k$ decaen a cero. Se puede demostrar que esto está relacionado con la regularidad de ϕ en el dominio considerado.

Integrando la Ec. (4.6) por partes y haciendo uso de las condiciones de borde periódicas de ϕ se obtiene

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dx} e^{-ikx} dx.$$

Al iterar sobre este resultado se encuentra que si ϕ es m veces continuamente derivable en $[0, 2\pi]$ y si las derivadas son periódicas para todo orden $j \leq m - 2$, entonces (Canuto et al., 2006)

$$\hat{\phi}_k = \mathcal{O}(k^{-m}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.12)$$

lo cual demuestra que el coeficiente de Fourier k -ésimo de una función infinitamente derivable cuyas derivadas son periódicas decae más rápidamente que cualquier potencia negativa de k .

4.1.3. La Expansión de Fourier Discreta

En la mayoría de las aplicaciones se utiliza una expansión de Fourier discreta, ya que la misma provee una eficiente manera de computar los coeficientes de Fourier de una función que sólo es conocida en una distribución discreta de puntos, y recuperar en el espacio físico la información que fue calculada en el espacio de transformación.

En la transformada de Fourier discreta se hace uso de los puntos

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.13)$$

normalmente referidos como puntos de la grilla, para definir el par de transformaciones

$$\mathcal{F}[\phi_j] = \bar{\phi}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{\phi}_k] = \phi_j = \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \bar{\phi}_k e^{ikx_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.15)$$

donde se ha utilizado la notación $\phi(x_j) = \phi_j$ y $\bar{\phi}(k) = \bar{\phi}_k$.

Las Ecs. (4.14) y (4.15) definen una transformación biyectiva y su inversa entre los N valores de ϕ sobre la grilla y los N coeficientes de Fourier discretos $\bar{\phi}_k$. La transformación puede hacerse en uno u otro sentido sin pérdida de información, lo cual puede demostrarse introduciendo la Ec. (4.14) en la (4.15), teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} e^{-2\pi i k(j-\ell)/N} = \delta_{j\ell}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las definiciones (4.14) y (4.15) resulta

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n \phi_j}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}[\phi_j] = (ik)^n \bar{\phi}_k, \quad (4.16)$$

por lo tanto

$$\frac{d^n \phi_j}{dx^n} = \mathcal{F}^{-1}[(ik)^n \bar{\phi}_k], \quad (4.17)$$

y de esta forma es posible evaluar la derivada de cualquier orden de la función discreta $\phi(x)$ en cualquier punto de la muestra.

En las simulaciones mediante métodos espectrales las transformaciones entre un espacio y otro son normalmente quienes definen la eficiencia de un cálculo espectral, por lo tanto es de vital importancia utilizar para estas transformaciones algoritmos altamente eficientes. La transformada de Fourier discreta definida anteriormente puede computarse de una manera “rápida”, realizando del orden de $N \log_2(N)$ operaciones en lugar de N^2 (Jardin, 2010), a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), para la cual se han desarrollado numerosos algoritmos altamente probados. De esta manera no es necesario realizar un código para resolver la FFT, sino que pueden utilizarse las librerías disponibles para este propósito, aunque deben conocerse las características del algoritmo

empleado, la manera en que se redistribuyen los puntos en el espacio de transformación y cómo se definen los límites de las expansiones para asegurar el correcto funcionamiento del esquema numérico.

4.1.3.1. El error de “aliasing”

La relación entre los coeficientes de Fourier discretos $\bar{\phi}_k$, Ec. (4.14), y los coeficientes de Fourier exactos $\hat{\phi}_k$, Ec. (4.6), se obtiene igualando ϕ_j en la Ec. (4.1) con el dado en la expresión (4.15):

$$\bar{\phi}_k = \hat{\phi}_k + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \hat{\phi}_{k+Nm}. \quad (4.18)$$

siendo N el número de puntos de la discretización.

Puede verse que el modo k -ésimo de la transformación discreta depende no sólo del modo k -ésimo de ϕ , sino también de todos los modos que distorsionan el modo k -ésimo de la grilla discreta.

Este error se denomina “aliasing” y se ilustra en la Figura 4.1.

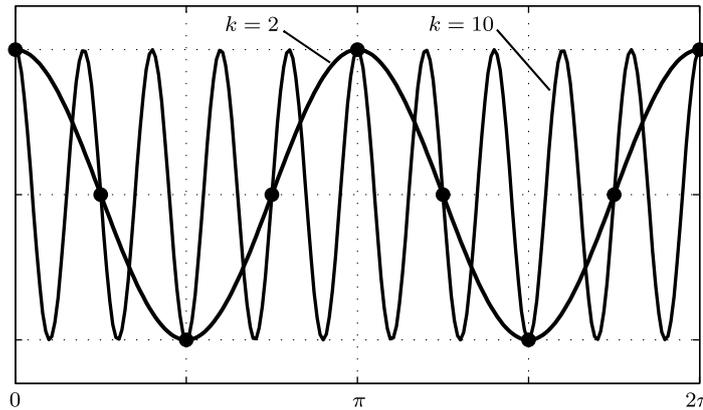


Figura 4.1: Ejemplo de aliasing para una grilla con $N = 8$. Ambos modos toman los mismos valores en los puntos de la grilla

El error de aliasing puede causar inestabilidades numéricas en la integración en el tiempo de ecuaciones no lineales, ya que la interacción no lineal puede generar que números de onda aislados sumamente grandes, los cuales estarán “aliados” dentro de los números de onda pertenecientes al dominio considerado, produzcan una alta transferencia de energía hacia los números de onda más bajos (Boyd, 2000).

Una de las estrategias empleadas para eliminar las consecuencias de los modos distorsionados es la de filtrado “todo o nada”, en la cual se anulan los coeficientes de Fourier ubicados fuera de una porción determinada del dominio.

El método de Philips (1959), originalmente utilizado para modelos de diferencias finitas, aplica un filtro espacial que suprime la mitad del espectro de transformación, utilizando solamente los coeficientes ubicados en la mitad central del dominio de Fourier y anulando aquellos que se encuentran en los cuartos externos. Sin embargo, Orszag (1971) mostró que no es necesario purgar la mitad de los coeficientes del espectro, sino que sólo se necesita eliminar un tercio de los mismos, dejando dos tercios de la porción central sin filtrar. En su trabajo Orszag sostiene que la interacción cuadrática de dos números de onda se distorsiona únicamente fuera de la porción central establecida. En la Figura 4.2 se muestran de manera gráfica las dos estrategias de filtrado mencionadas.

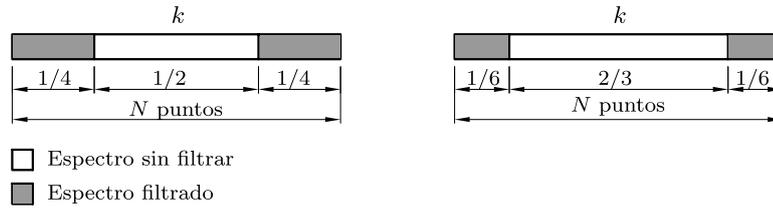


Figura 4.2: Esquemas de filtrado de Philips (izquierda) y de Orszag (derecha) disponibles para corregir el error de aliasing.

4.2. Implementación en la Ecuación DNLS

Como se mencionó en la sección anterior, la solución numérica de la ecuación DNLS admite condiciones de contorno periódicas para la mayoría de los casos de interés (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta característica hace que los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier sean especialmente apropiados para la resolución de la ecuación.

Se considera la ecuación DNLS en coordenadas adimensionalizadas, tal como se presenta en la Sección 3.3 del capítulo anterior:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0, \quad (4.19)$$

donde el campo magnético b satisface en todo momento condiciones de contorno periódicas, es decir:

$$b(z, t) = b(z + L, t), \quad \forall t, \quad (4.20)$$

siendo L la longitud del dominio de integración.

En este trabajo se soluciona numéricamente la ecuación DNLS utilizando métodos espectrales para el cálculo de las derivadas espaciales, y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. Teniendo en cuenta la Ec. (4.19), la derivada temporal puede escribirse en función de los términos restantes que conforman la ecuación DNLS:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial z} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \mp i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \hat{\gamma} b \quad (4.21)$$

Aplicando las transformaciones definidas en las Ecs. (4.14) y (4.15), y considerando la expresión (4.17) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1} \left[-ik\mathcal{F}[b] - \alpha ik\mathcal{F}[|b|^2 b] \pm ik^2\mathcal{F}[b] \right] - \hat{\gamma} b, \quad (4.22)$$

donde, de acuerdo a lo establecido en la Sección 3.3

$$\begin{aligned} \text{Término dispersivo } \pm ik^2\mathcal{F}[b] & \begin{cases} \text{Signo superior } \rightarrow \text{polarización izquierda} \\ \text{Signo inferior } \rightarrow \text{polarización derecha} \end{cases} \\ \text{Término no lineal } \alpha ik\mathcal{F}[|b|^2 b] & \begin{cases} \text{Plasmas fríos } \rightarrow \alpha = 1 \\ \text{Plasmas calientes } \rightarrow \alpha = \frac{1}{1-\beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para una colección de N valores de b igualmente espaciados en un dominio de longitud L centrado en el origen $(-L/2, L/2]$ donde está definida la siguiente distribución de puntos

$$z_j = \frac{L}{N} \left(-\frac{N}{2} + j \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

las transformaciones de Fourier dadas en las Ecs. (4.14) y (4.15) resultan

$$\mathcal{F}[b_j] = \bar{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_j e^{-ikz_j}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{b}_k] = b_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{N/2} \bar{b}_k e^{ikz_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.25)$$

donde se ha utilizado la notación $b(z_j) = b_j$ y $\bar{b}(k) = \bar{b}_k$.

Reagrupando los términos en la Ec. (4.22) y con las definiciones anteriores, la ecuación DNLS

puede descomponerse en sus partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[-k_j (-1 \pm k_j) \operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] + \alpha k_j \operatorname{Im} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] - \operatorname{Re}[\hat{\gamma} b_j], \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[k_j (-1 \pm k_j) \operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] - \alpha k_j \operatorname{Re} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] - \operatorname{Im}[\hat{\gamma} b_j], \end{aligned} \quad (4.26)$$

siendo

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}. \quad (4.27)$$

La nueva distribución de puntos tanto en el espacio físico como en el espacio de Fourier obedece al algoritmo de la FFT utilizado para calcular las transformaciones. Normalmente estos algoritmos requieren una cantidad de puntos N par, lo cual significa que la distribución alrededor del origen no será simétrica, y en consecuencia uno de los extremos del dominio queda fuera del mismo. De este modo, los puntos del espacio físico resultan

$$z \in \left(-\frac{L}{2} + h, -\frac{L}{2} + 2h, \dots, \frac{L}{2} - h, \frac{L}{2} \right], \quad \text{con } h = \frac{L}{N},$$

por lo tanto los puntos del espacio de Fourier son

$$k \in \left(\frac{2\pi}{L} \left(-\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} \right) \right].$$

De esta manera queda establecido el procedimiento para obtener la derivada temporal en la ecuación DNLS. Con la definición de un término de amortiguamiento/excitación, es posible determinar las Ecs. (4.26) para realizar la integración en el tiempo de la DNLS, la cual se lleva a cabo mediante un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden. Debe tenerse en cuenta que antes de realizar la transformada de Fourier inversa en (4.26), debe aplicarse alguno de los filtros descritos en la Sección 4.1.3.1 para evitar que se produzcan inestabilidades debidas al error de aliasing.

La implementación computacional del esquema numérico se hace mediante una serie de subrutinas desarrolladas en lenguaje FORTRAN 95, utilizando además las capacidades de programación en paralelo con memoria compartida que permiten las directivas de OpenMP para este lenguaje. La paralelización no se realiza sobre la discretización del dominio, ya que se comprobó que

ese enfoque resulta eficiente únicamente cuando se utilizan grillas suficientemente densas, de lo contrario el tiempo que significa la creación y destrucción de hilos de procesamiento penaliza la rapidez de efectuar los cálculos en paralelo cuando se dispone de un número relativamente bajo de procesadores. Por este motivo, la paralelización se realiza de manera de poder realizar simulaciones simultáneas para distintas configuraciones iniciales utilizando una sola computadora de múltiples procesadores.

En cuanto a los tiempos de procesamiento, si bien la reducción del costo computacional es una de las propiedades más atractivas de los esquemas numéricos basados en expansiones de Fourier, la naturaleza del problema relativiza en cierta medida esta característica, ya que las no linealidades requieren que se utilicen pasos de integración pequeños y, en general, se necesita simular durante tiempos prolongados, especialmente en los procesos de comprobación de condiciones de estabilidad. Estas características indican que es de suma importancia no utilizar discretizaciones excesivamente densas ya que esto repercute fuertemente en los costos computacionales.

4.3. Verificación de la estabilidad del esquema numérico

En los párrafos anteriores se presentaron los fundamentos de la aplicación de métodos espectrales para solucionar numéricamente la ecuación DNLS. El objetivo de esta sección es analizar el comportamiento del método, para lo cual se realizan simulaciones numéricas de la DNLS sin considerar efectos difusivos.

4.3.1. Consideraciones iniciales

Para el análisis de la ecuación DNLS no difusiva se utiliza la Ec. (4.19) sin término de amortiguamiento/excitación ($\hat{\gamma} = 0$):

$$\frac{\partial b}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0, \quad (4.28)$$

donde, por simplicidad, se ha tomado $\alpha = \pm 1$. La aplicación de los distintos signos en los términos no lineal y dispersivo se hace según las condiciones dadas en (4.23). Por otro lado, en la Ec. (4.28) no se ha incorporado el término lineal $\partial b / \partial z$ que se observa en la Ec. (4.19). Esto es posible asumiendo la utilización de un sistema de referencia que se mueve con velocidad de Alfvén en la dirección z , por lo tanto dicho término puede eliminarse sin afectar la solución (Spangler y Sheerin,

1982).

Un aspecto importante de analizar previo a la realización de las simulaciones numéricas, es evaluar la habilidad del método para reproducir la relación de dispersión de la Ec. (4.28) para una onda polarizada circularmente, de amplitud constante A_0 con frecuencia ω y número de onda k_0 de la forma:

$$b(z, t) = A_0 e^{i(k_0 z - \omega t)}, \quad (4.29)$$

la cual, según lo visto en el Capítulo 3 constituye una solución exacta del sistema. Considerando polarización izquierda (signo positivo en el término dispersivo) y plasma con $\beta \approx 0$ (signo positivo en el término no lineal), la solución anterior produce:

$$\omega = k_0 A_0^2 - k_0^2. \quad (4.30)$$

La descripción discreta de la onda dada en la Ec. (4.29) se escribe como:

$$b_j^m = A_0 e^{i(k_0 z_j - \omega m \tau)}, \quad (4.31)$$

donde $b_j^m = b(z_j, m\tau)$, siendo m el número de paso de tiempo y τ el paso de integración temporal. Con esta expresión se obtiene la relación de dispersión discreta (Fla, 1992)

$$\sin [(\omega + k_0^2) \tau] = \frac{1}{4} A_0^2 k_0 \tau (1 + \cos [(\omega + k_0^2) \tau])^2,$$

la cual, de acuerdo a la Ec. (4.30), para $A_0^2 k_0 \tau \ll 1$ resulta

$$\omega \approx A_0^2 k_0 \left[1 - \frac{1}{2} (A_0^2 k_0 \tau)^2 \right] - k_0^2, \quad (4.32)$$

donde se ha utilizado la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$.

De esta última ecuación se deduce que el error relativo de la relación de dispersión (4.32) respecto a (4.30) es $\mathcal{O} \left[\frac{1}{2} (A_0^2 k_0 \tau)^2 \right]$, por lo tanto el esquema numérico reproducirá de manera satisfactoria la relación de dispersión no lineal de una onda de amplitud constante para un paso

de tiempo tal que:

$$\tau \ll \frac{\sqrt{2}}{A_0^2 k_0}. \quad (4.33)$$

Por otro lado, una estimación del error relativo debido al truncamiento para la onda basada en la Ec. (4.32) después de un tiempo $t = m\tau$ puede obtenerse mediante

$$\Delta = \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \approx \frac{1}{2} t (A_0^2 k_0)^3 \tau^2. \quad (4.34)$$

Esta expresión indica que aun cuando se utilice un paso de integración temporal que cumpla con la condición (4.33), los resultados obtenidos pueden considerarse correctos únicamente si se verifica $\Delta \ll 1$, es decir

$$t \ll \frac{2}{(A_0^2 k_0)^3 \tau^2}. \quad (4.35)$$

Las condiciones dadas en las Ecs. (4.34) y (4.35), aunque son estrictamente válidas para el caso de solución de una onda de amplitud constante, permiten estimar en primer término un paso de integración temporal adecuado, y posteriormente evaluar el límite de tiempo para el cual la simulación puede considerarse válida.

La solución numérica de la ecuación DNLS no difusiva se hace implementando las Ecs. (4.26) en la Ec. (4.28) para obtener la derivada temporal $\partial b / \partial t$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\mp k_j^2 \operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] \pm k_j \operatorname{Im} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right], \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\pm k_j^2 \operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] \mp k_j \operatorname{Re} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde

$$k_j = \frac{2\pi n}{L}, \quad b_j = b(z_j), \quad n = -\frac{N}{2} + j \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.37)$$

siendo N la cantidad de puntos de la discretización y L la longitud del dominio de integración. Además, como ya fue mencionado, la aplicación de los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier requiere que la solución de la ecuación DNLS cumpla en todo momento condiciones de borde periódicas, es decir $b(z, t) = b(z + L, t)$.

4.3.2. DNLS no difusiva con condición inicial de una onda

El objetivo principal de este estudio es verificar las condiciones de estabilidad modular de la DNLS con condiciones de contorno periódicas. Para ello se sigue el desarrollo presentado en el trabajo de Fla (1992), quien estableció condiciones de estabilidad modular para la DNLS cuando se utiliza como condición inicial una onda de la forma

$$b(z, 0) = b_0 = A_0 e^{ik_0 z}, \quad (4.38)$$

donde el vector de onda está dado por

$$k_0 = \frac{2\pi n_0}{L}, \quad (4.39)$$

con n_0 el número de onda inicial, L la longitud del dominio y A_0 la amplitud de la onda.

4.3.2.1. Condiciones analíticas de estabilidad modular

El análisis que se realiza a continuación representa la referencia teórica con la cual se comparan los resultados numéricos que se obtienen más adelante. El desarrollo corresponde al estudio de la estabilidad modular de la DNLS con condiciones de contorno periódicas, para lo cual se utiliza la expresión de la modulación de un tren de ondas de amplitud constante:

$$b(z, t) = A_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} [1 + \varepsilon(z, t)], \quad (4.40)$$

donde b y ε son funciones complejas periódicas en el intervalo $[-L/2, L/2]$ y $|\varepsilon|^2 \ll 1$.

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación DNLS se obtiene la siguiente ecuación aproximada:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + ik_0 A_0^2 (\varepsilon + \varepsilon^*) + 2(A_0^2 - k_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + A_0^2 \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial z} = 0.$$

Si se expresa la perturbación $\varepsilon(z, t)$ mediante una expansión en serie de Fourier de la forma

$$\varepsilon(z, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}_j(t) e^{i(\ell_j z)},$$

donde $\ell_j = 2\pi j/L$ es el número de onda de la perturbación, se encuentra que el coeficiente $\hat{\varepsilon}_0(t)$ es

una constante la cual puede asumirse igual a cero sin pérdida de generalidad, y además se deduce

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\varepsilon}_j}{dt} = i [k_0 A_0^2 + 2 (A_0^2 - k_0) \ell_j - \ell_j^2] \hat{\varepsilon}_j + i A_0^2 (k_0 + \ell_j) \hat{\varepsilon}_j^* \\ \frac{d\hat{\varepsilon}_j^*}{dt} = -i A_0^2 (k_0 - \ell_j) \hat{\varepsilon}_j - i [k_0 A_0^2 + 2 (A_0^2 - k_0) \ell_j + \ell_j^2] \hat{\varepsilon}_j^* \end{cases}$$

Si se asume

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_j(t) &= \hat{\varepsilon}_j(0) e^{i\lambda_j t}, \\ \hat{\varepsilon}_j^*(t) &= \hat{\varepsilon}_j^*(0) e^{i\lambda_j t}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\lambda_j = i2 (A_0^2 - k_0) \ell_j \pm |\ell_j| \sqrt{(2k_0 - A_0^2) A_0^2 - \ell_j^2}. \quad (4.41)$$

Observando la Ec. (4.41) se pueden determinar las siguientes condiciones de estabilidad para un tren de ondas de amplitud constante:

$$\begin{cases} 2k_0 < A_0^2 \rightarrow \text{Marginalmente estable} \\ 2k_0 > A_0^2 \rightarrow \text{Inestable} \end{cases} \quad (4.42)$$

De esta manera quedan establecidas las condiciones analíticas de estabilidad modular de la DNLS para un tren de ondas de amplitud constante. Estas condiciones constituyen uno de los parámetros de evaluación del desempeño del código numérico implementado en este trabajo.

Teniendo en cuenta la Ec. (4.39), las condiciones dadas en (4.42) indican que los valores de amplitud para los cuales existirá inestabilidad dependen del número de onda n_0 . Para verificar este aspecto es necesario establecer un criterio que permita determinar si existe inestabilidad de la onda y en qué momento se produce. Con este propósito se define el parámetro E_{k_0} , el cual representa la relación entre la energía transportada por la onda inicial y la energía total del sistema en el espacio de Fourier:

$$E_{k_0} = \frac{|\bar{b}_{k_0}|}{\sum_{j=1}^N |\bar{b}_{k_j}|}, \quad (4.43)$$

donde \bar{b}_{k_0} es la componente de la transformada de Fourier discreta correspondiente a la onda inicial, N es el número total de modos utilizados en la simulación y j indica el número de onda.

Según la Ec. (4.43), $E_{k_0} = 1$ indica que toda la energía del sistema se encuentra concentrada en la onda identificada con k_0 , lo cual representa la situación inicial del sistema. Cuando se produce la inestabilidad la energía inicialmente concentrada en el modo k_0 se transfiere hacia otros modos y en consecuencia resulta $E_{k_0} < 1$. Para evaluar la estabilidad de la solución, se considera que cuando la onda inicial pierde el 0,01 % de su energía se produce la inestabilidad, es decir, cuando $E_{k_0} \leq 0,9999$. Con este criterio se realizan los gráficos presentados en la Figura 4.3 donde se especifica el tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial para distintos números de onda. El objetivo del análisis es verificar si se cumplen las condiciones de estabilidad modular dadas en (4.42). La subdivisión de la figura en números de onda pares e impares obedece únicamente a mejorar la claridad de los resultados.

Si bien el procedimiento anterior representa un método objetivo para evaluar la estabilidad del sistema, hay que destacar que si se modifica la fracción de energía que determina la inestabilidad, los resultados no varían sustancialmente y los gráficos prácticamente no cambian su forma, ya que una vez producida la inestabilidad, en todos los casos se genera un fuerte descenso de la energía de la onda inicial, situación que se comprueba con el estudio de la evolución de la energía relativa E_{k_0} en la sección siguiente.

Para las simulaciones se utilizó un paso de tiempo $\tau = 1 \times 10^{-3}$ con una discretización de $N = 256$ puntos, considerando ondas polarizadas a izquierda y $\beta \approx 0$ en la ecuación DNLS. La elección del paso de tiempo se llevó a cabo luego de numerosos ensayos que permitieron establecer cuál era el menor valor de τ que satisfacía la estabilidad que debe verificarse para ondas polarizadas a derecha independientemente de los parámetros iniciales A_0 y k_0 (Buti et al., 2000), utilizando números de onda y valores de amplitud dentro de los rangos considerados y un tiempo de integración máximo $t = 50000$. La utilización de $N = 256$ obedece a la misma razón, ya que esta cantidad de puntos en la discretización es la menor capaz de reproducir correctamente el aspecto anteriormente citado para los números de onda considerados (ver sección 4.3.3).

En cuanto al esquema de filtrado utilizado para evitar el error de aliasing, debe destacarse que ambos métodos (de Philips y de Orszag) fueron implementados, obteniéndose resultados idénticos en todo el rango de valores analizado.

En cuanto a los resultados obtenidos, observando la Figura 4.3, se deduce en primera instancia

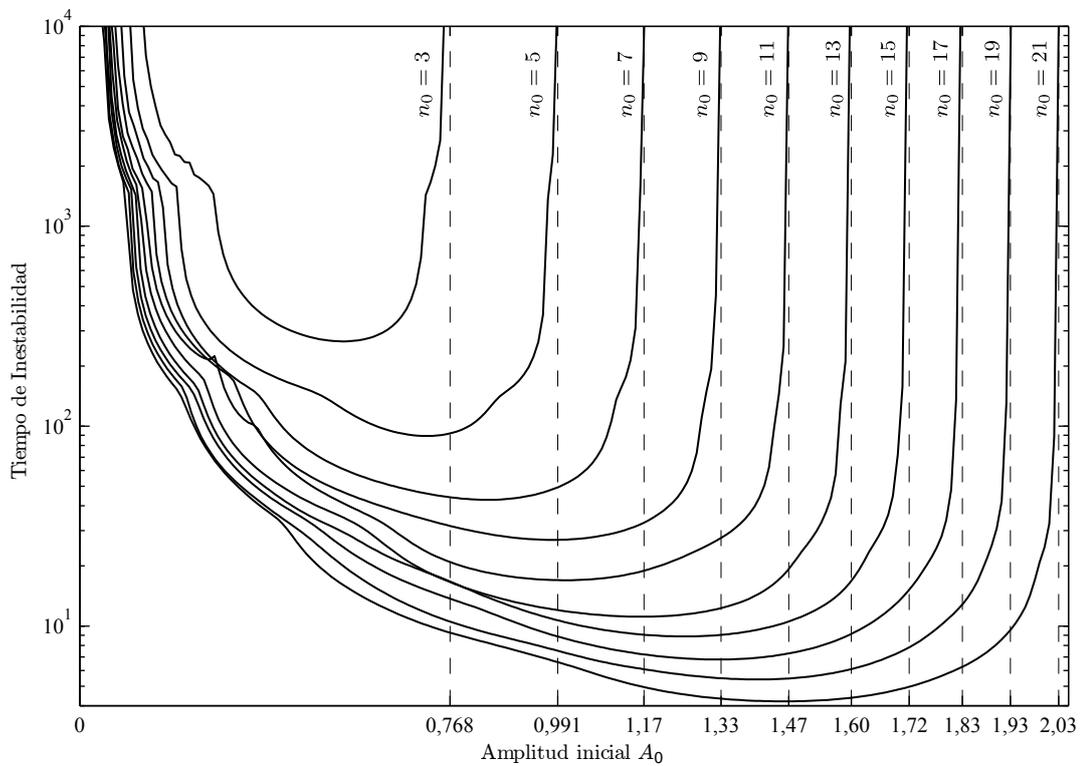
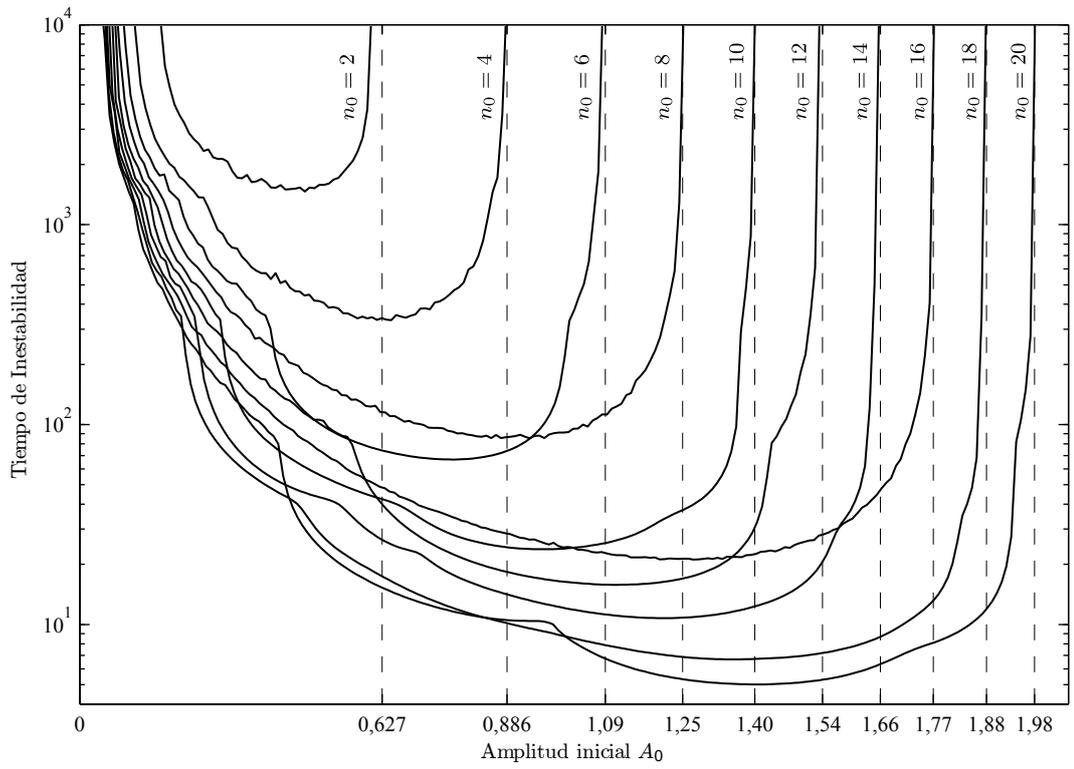


Figura 4.3: Tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial A_0 para diferentes números de onda inicial n_0

que el tiempo para que se produzca la inestabilidad depende fuertemente de la amplitud de la onda inicial y del número de onda considerado. Además se observa que la condición de inestabilidad $A_0 < \sqrt{2k_0}$ se verifica en todos los casos analizados. Para visualizar esta situación se han graficado en línea de trazos los límites correspondientes a cada caso, siendo la región estable la que se ubica desde esta línea hacia $A_0 \rightarrow \infty$. La estabilidad en esta región se comprobó para simulaciones de hasta $t = 50000$ con valores de amplitud inicial del doble de la amplitud límite. Por otro lado, para amplitudes $A_0 \rightarrow 0$ la inestabilidad se retrasa constantemente, así por ejemplo para el caso de $n_0 = 11$ y $k_0 \approx 1,08$ con $A_0 < 0,06$ no se produjo inestabilidad en simulaciones de hasta $t = 50000$.

Simulaciones para modos iniciales con $n_0 > 21$ también fueron realizadas, pero los resultados para estos casos comenzaron a presentar comportamientos no apropiados. Esto puede atribuirse a que, según las condiciones (4.42) y la Ec. (4.33), modos más altos tienen límites de estabilidad a amplitud mayores, y por lo tanto requieren pasos de tiempo más pequeños. Para ilustrar esta situación se presenta el siguiente ejemplo:

$$n_0 = 8 \rightarrow \begin{cases} A_{0\max} = 1,253 \\ \tau \ll 1,146 \end{cases} \quad n_0 = 25 \rightarrow \begin{cases} A_{0\max} = 2,454 \\ \tau \ll 0,117 \end{cases}$$

donde se ha utilizado $L = 64$ como en las simulaciones. En estos resultados se observa la diferencia de órdenes de magnitud entre ambos casos para establecer el paso de integración temporal adecuado. Esto indica que para reproducir correctamente el comportamiento de modos iniciales más altos se requieren pasos de integración cada vez más pequeños, lo cual repercute directamente en el tiempo de procesamiento computacional.

4.3.2.2. Evolución de las configuraciones inestables

En la sección anterior se verificó la estabilidad del código numérico a través del cumplimiento de las condiciones analíticas de estabilidad modular. El paso siguiente es estudiar la evolución de la solución en las configuraciones inestables, para lo cual se analizan los resultados del parámetro E_{k0} y se evalúa la distribución de la energía en el espacio de Fourier, considerando distintos números de onda n_0 y amplitudes iniciales A_0 .

En las Figuras 4.4 a 4.8 se muestra la evolución de E_{k0} y se compara la distribución de la energía para la condición inicial (curva $|\bar{b}_k|_0$) con la correspondiente a la del instante de tiempo en el cual la energía de la onda inicial es mínima (curva $|\bar{b}_k|_{\min}$). El objetivo del análisis es conocer

de qué manera se produce la transferencia de energía entre el modo inicial y los nuevos modos surgidos en la inestabilidad.

Analizando las figuras, se observa en todos los casos que el parámetro E_{k_0} presenta una evolución similar independientemente del número de onda inicial utilizado, encontrándose básicamente dos comportamientos que dependen del valor de la amplitud inicial A_0 . En un primer rango de amplitudes menores a cierto valor, el cual varía según el número de onda inicial, aparecen soluciones cuasi periódicas, donde la onda inicial recupera la energía cedida a los otros modos formando ciclos en los cuales la onda k_0 pasa de un valor de energía máximo a uno mínimo. El mínimo valor de energía relativa de la onda inicial está ligado a la amplitud inicial de la onda, haciéndose más pequeño para amplitudes mayores, con un período que también decrece con el aumento de A_0 . Lo destacable de este primer comportamiento es que la transferencia de energía se hace fundamentalmente entre la onda inicial (onda madre) y dos ondas (ondas hijas) cuyos números de onda k_1 y k_2 satisfacen la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Este resultado es importante a la hora de establecer el número de modos a utilizar en modelos de truncamiento.

El otro comportamiento que se observa, correspondiente a amplitudes iniciales mayores, presenta caos espacio-temporal, casi independientemente del número de onda considerado inicialmente. A diferencia de la situación anterior, en estos casos la onda inicial no recupera gran parte de su energía original, sino que una vez transferida, la energía se distribuye aleatoriamente entre todos los modos del espectro con una evolución irregular en el tiempo.

La transición entre cada uno de los comportamientos se produce dentro de un rango de valores de A_0 donde la evolución de la solución presenta una combinación de las situaciones detalladas anteriormente. En este rango de transición, la onda inicial recupera parcialmente su energía original completando ciclos similares a los del primer comportamiento pero con un decremento constante de los niveles máximos de energía, para luego dar lugar a la evolución irregular.

Los valores de amplitudes iniciales límite para los cuales se producen los distintos tipos de comportamiento dependen del número de onda inicial. En las figuras queda evidenciado que modos iniciales más altos tienen rangos de comportamiento periódico más pequeños con intervalos de transición más acotados. Por el contrario, modos iniciales bajos presentan un comportamiento periódico a amplitudes mayores y la transición hacia el comportamiento caótico es más suave.

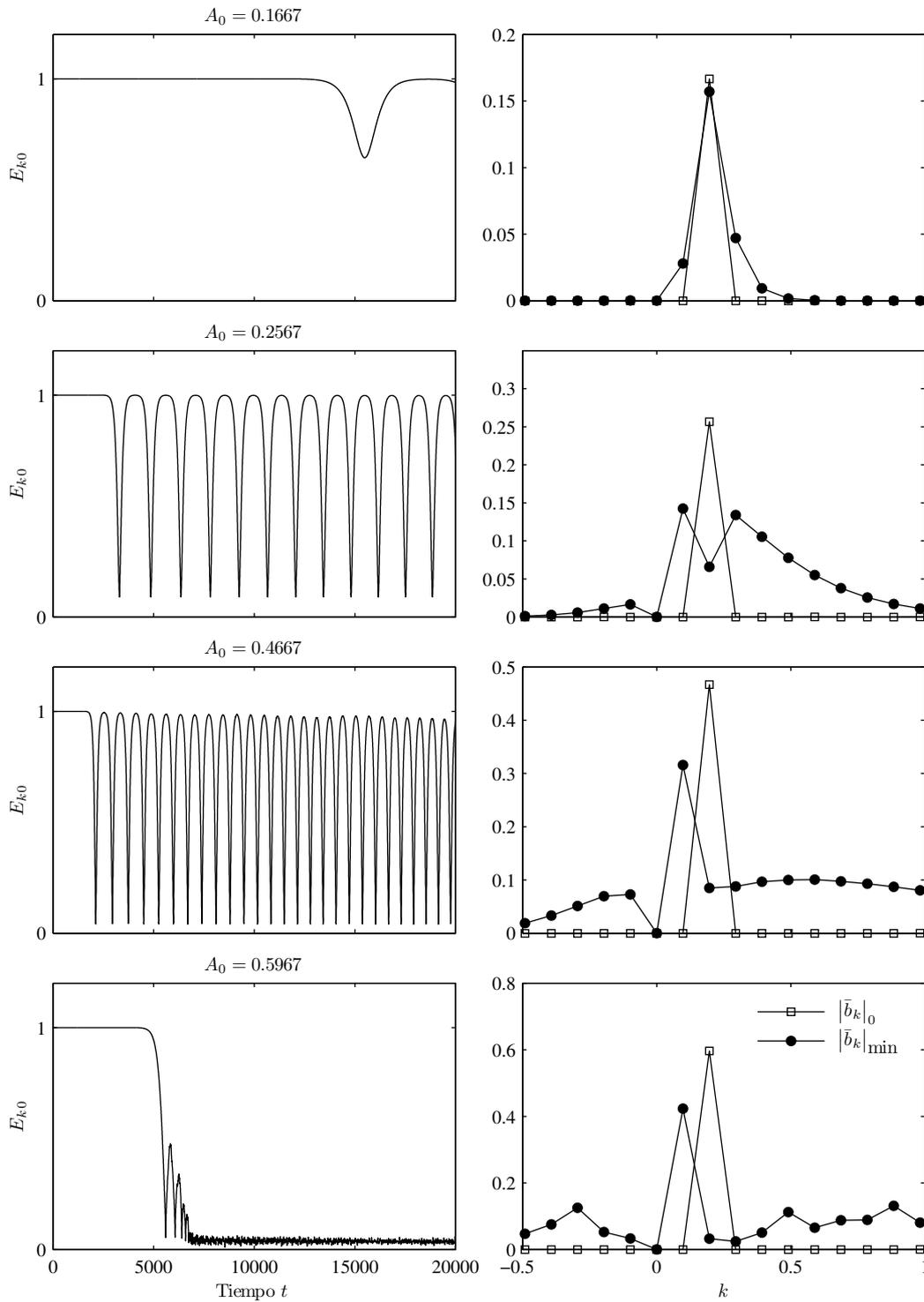


Figura 4.4: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 2$

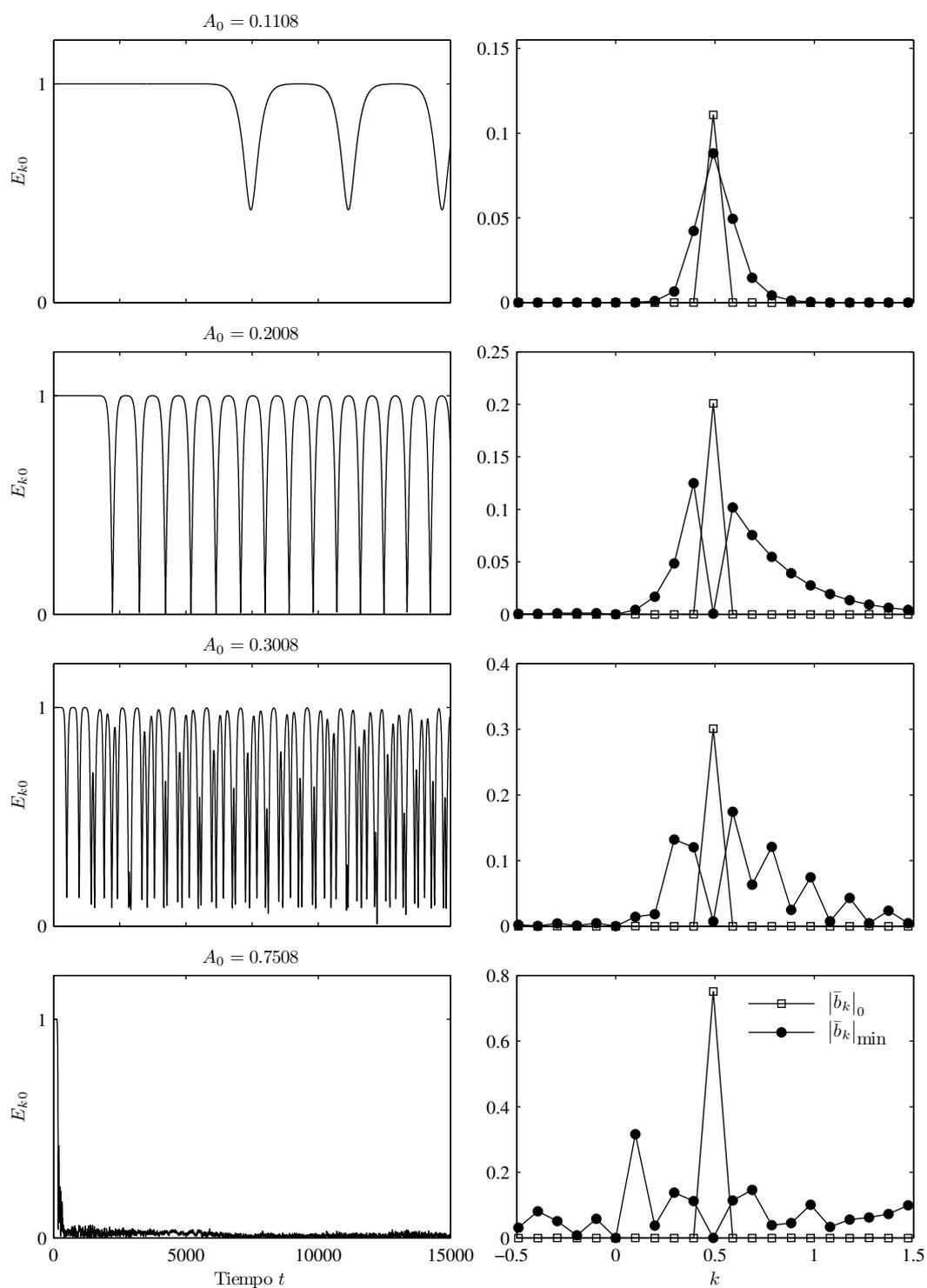


Figura 4.5: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 5$

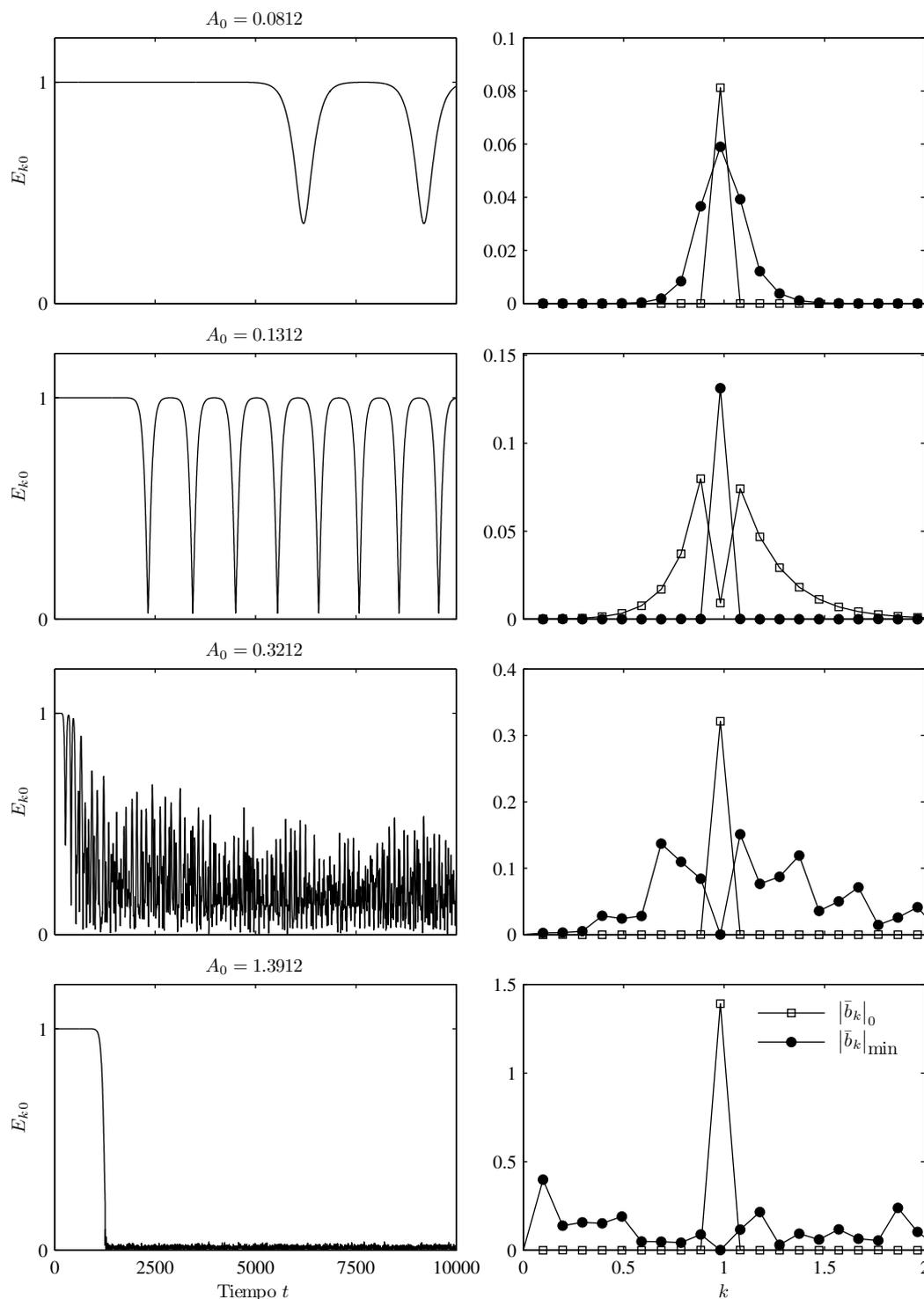


Figura 4.6: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 10$

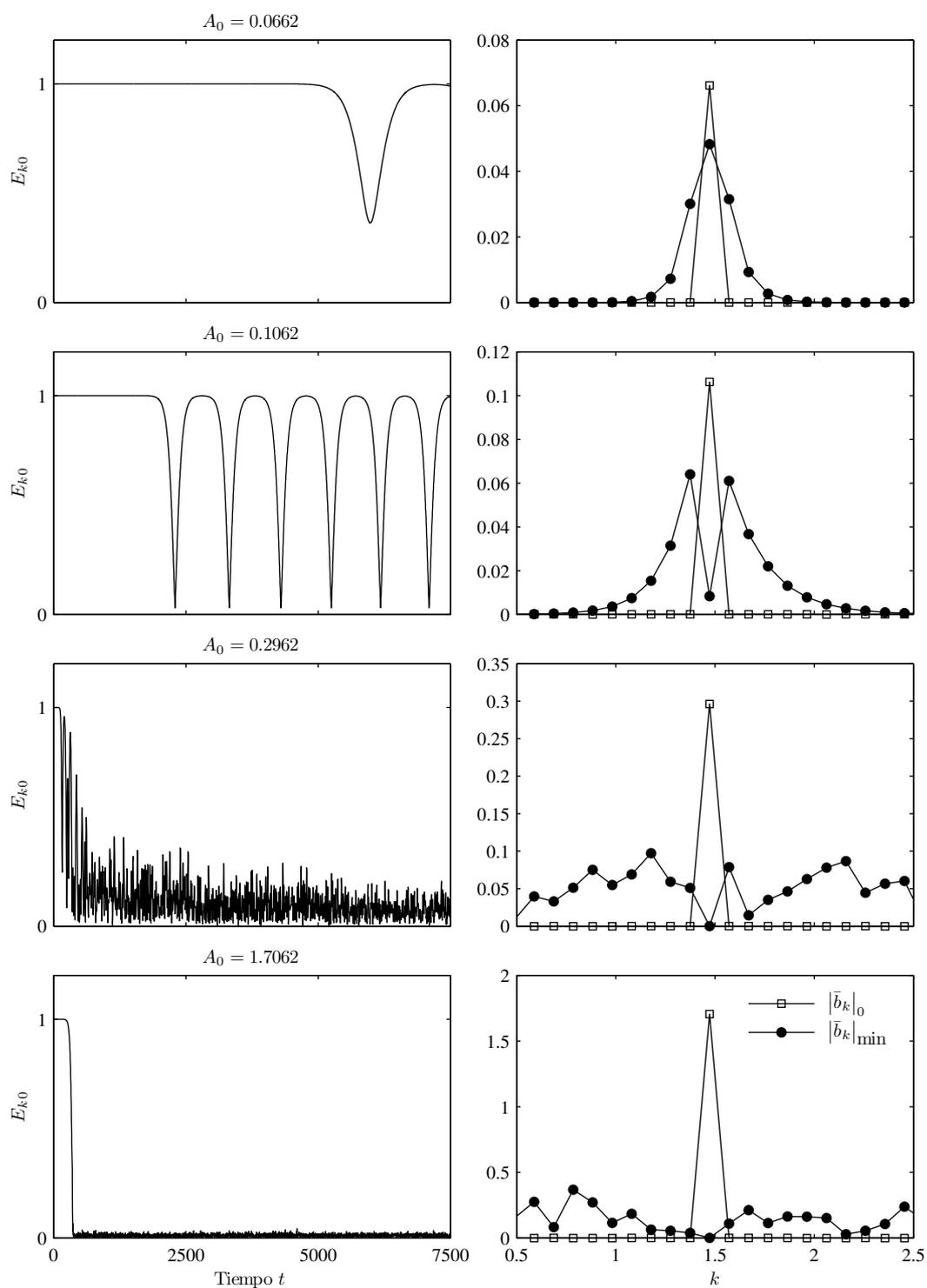


Figura 4.7: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 15$

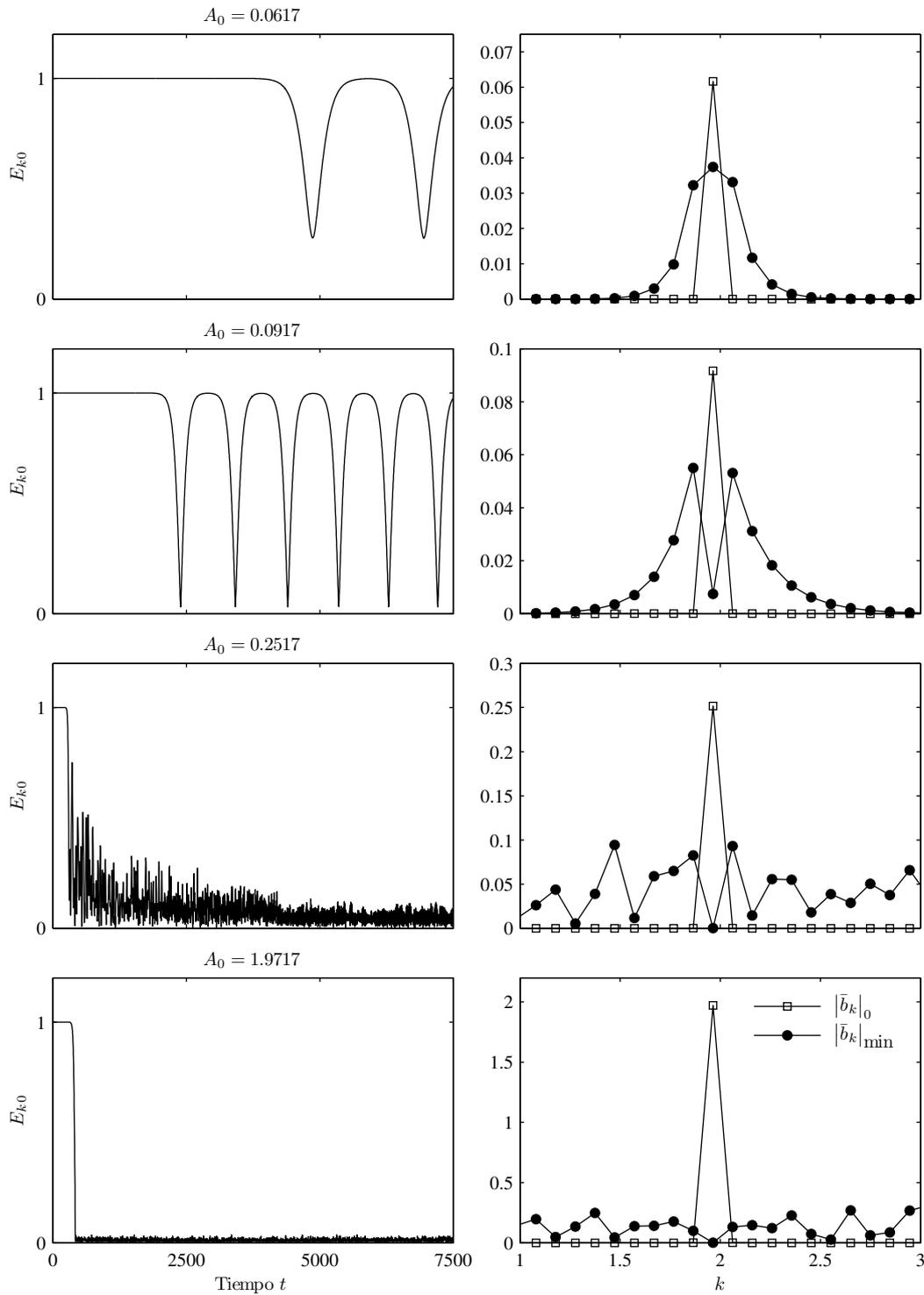


Figura 4.8: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 20$

4.3.3. Ecuación DNLS no difusiva con condición inicial de tres ondas

Los resultados obtenidos en la sección anterior para el caso de valores de amplitud relativamente pequeños, en los cuales se produce una evolución cuasi periódica, muestran que la energía se reparte fundamentalmente entre tres ondas: la onda inicial o madre identificada con el número de onda k_0 , y dos ondas hijas (k_1 y k_2) que cumplen la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Este comportamiento amerita realizar un análisis de la ecuación DNLS con condición inicial de tres ondas circularmente polarizadas que verifican dicha relación y tienen la siguiente forma:

$$b(z, 0) = b_0 = \sum_{j=0}^2 \sqrt{k_j N_j} e^{ik_j z}, \quad (4.44)$$

donde los números de onda k_j están dados por la Ec. (4.39), siendo

$$n_{1,2} = (1 \mp \delta) n_0. \quad (4.45)$$

El parámetro δ se toma de manera tal de maximizar el crecimiento de la inestabilidad modular para ondas madre polarizadas a izquierda, resultando (Sánchez-Arriaga, 2009)

$$\delta = \sqrt{N_0 - \frac{N_0^2}{2}}. \quad (4.46)$$

Los factores N_j en las amplitudes normalizadas $\sqrt{k_j N_j}$ de las ondas iniciales se parametrizan mediante un coeficiente q que describe cómo se reparte la energía y un factor m que cuantifica el nivel de energía que se ingresa al sistema:

$$N_0 = q m, \quad N_{1,2} = \frac{1 - q}{2} m. \quad (4.47)$$

Establecidas de esta forma, las tres ondas iniciales cumplen la condición de periodicidad $b(z, 0) = b(z + L, 0)$ necesaria para la aplicación de los métodos espectrales basados en expansiones de Fourier y además verifican la relación de resonancia entre la onda madre y las ondas hijas ($2k_0 = k_1 + k_2$).

Para evaluar los resultados de las simulaciones, de manera similar a lo realizado para el caso con condición inicial de una onda, se utiliza un parámetro que representa la relación entre la energía

contenida en los tres modos iniciales y la energía total del sistema:

$$E_k = \frac{|\bar{b}_{k0}| + |\bar{b}_{k1}| + |\bar{b}_{k2}|}{\sum_{j=1}^N |\bar{b}_{kj}|}. \quad (4.48)$$

Valores del parámetro E_k próximos a la unidad indican que la energía se encuentra distribuida fundamentalmente en las tres ondas iniciales, mientras que valores más bajos significan que la energía se encuentra distribuida en un número mayor de modos.

4.3.3.1. Resultados numéricos

El primer análisis consiste en evaluar la influencia del número total de modos N utilizado en la simulación, para lo cual se consideran plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y a derecha, utilizando distintos números de onda madre n_0 . El objetivo del estudio es comparar las soluciones obtenidas para valores de N crecientes y determinar cuál es la mínima cantidad de puntos en la discretización que reproduce de forma satisfactoria los resultados esperados. El punto de comparación en este caso es el requerimiento de estabilidad de las soluciones que existe para plasmas fríos con ondas polarizadas a derecha (Buti et al., 2000).

En las Figuras 4.9 a 4.11 se presenta la evolución del parámetro E_k dado en la Ec. (4.48) para números de onda madre $n_0 = 5, 10$ y 15 , con $m = 0,10$ y $q = 0,90$. Observando los gráficos se destaca que los resultados para $N = 64$ y $N = 128$ son sustancialmente diferentes de los obtenidos para $N = 256$ y $N = 512$ en los casos donde $n_0 \geq 10$, produciéndose además inestabilidad de las ondas polarizadas a derecha.

De acuerdo a las figuras, los resultados correspondientes a $N = 256$ no difieren mayormente de los obtenidos con $N = 512$, verificándose en ambos casos valores similares para los tiempos de inestabilidad, más allá de pequeñas diferencias en las evoluciones posteriores. Este aspecto permite establecer que una cantidad de $N = 256$ puntos en la discretización es adecuada para realizar las simulaciones, ya que los resultados obtenidos con ese valor son similares a los correspondientes a $N = 512$ que se suponen más aproximados asumiendo que la base de funciones de expansión de Fourier es completa. En adelante, a menos que se especifique lo contrario, todas las simulaciones llevadas a cabo en este trabajo se realizan tomando $N = 256$.

El siguiente análisis tiene como objetivo conocer de qué manera influyen los parámetros q y m

que definen la distribución y el nivel de energía del sistema, respectivamente. Considerando nuevamente plasmas con $\beta \approx 0$ y ondas polarizadas a izquierda (para que se produzca la inestabilidad), en las Figuras 4.12 a 4.14 se grafica la evolución del parámetro E_k en función del tiempo para números de onda madre $n_0 = 5, 10$ y 15 tomando distintas combinaciones de valores de q y m .

Observando las figuras se deduce en primera instancia que la influencia del nivel de energía ingresado al sistema y de su distribución es independiente del número de onda madre considerado. En todos los casos, el aumento del nivel de energía (incremento de m) significó un adelantamiento de la inestabilidad y un cambio en la evolución posterior de la solución, donde las ondas iniciales no pueden recuperar sus niveles de energía originales, produciéndose de este modo un comportamiento similar al observado en el caso de la DNLS con condición inicial de una onda donde amplitudes iniciales mayores producían una evolución caótica que impedía a la onda inicial recuperar su energía original. Por otro lado, para niveles bajos de energía relativa de la onda madre ($q \rightarrow 0$), es decir, cuando la energía está concentrada mayormente en las ondas hijas, se produce el retraso de la inestabilidad aunque el nivel de energía en el rango estable de las tres ondas iniciales decae en relación a la energía total del sistema, lo cual indica que existen otros modos que adquieren importancia.

Con este último análisis se da por finalizado el estudio de la ecuación DNLS sin efectos difusivos. Se concluye a partir de los resultados, especialmente los correspondientes al caso con condición inicial de una onda, que los métodos espectrales aquí presentados son adecuados para solucionar numéricamente la ecuación DNLS. En el capítulo siguiente se presentan las soluciones con efectos difusivos y excitación.

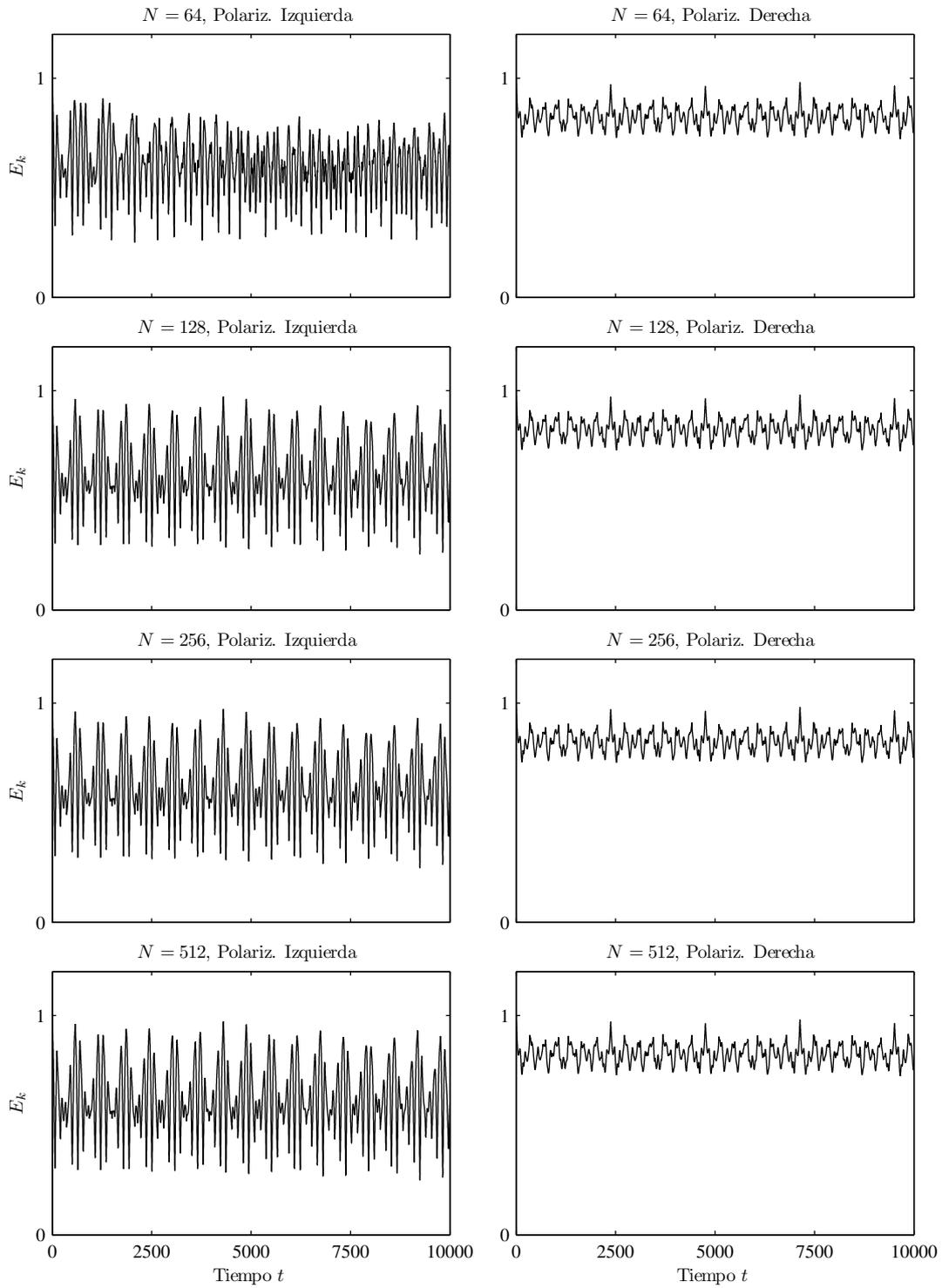


Figura 4.9: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas

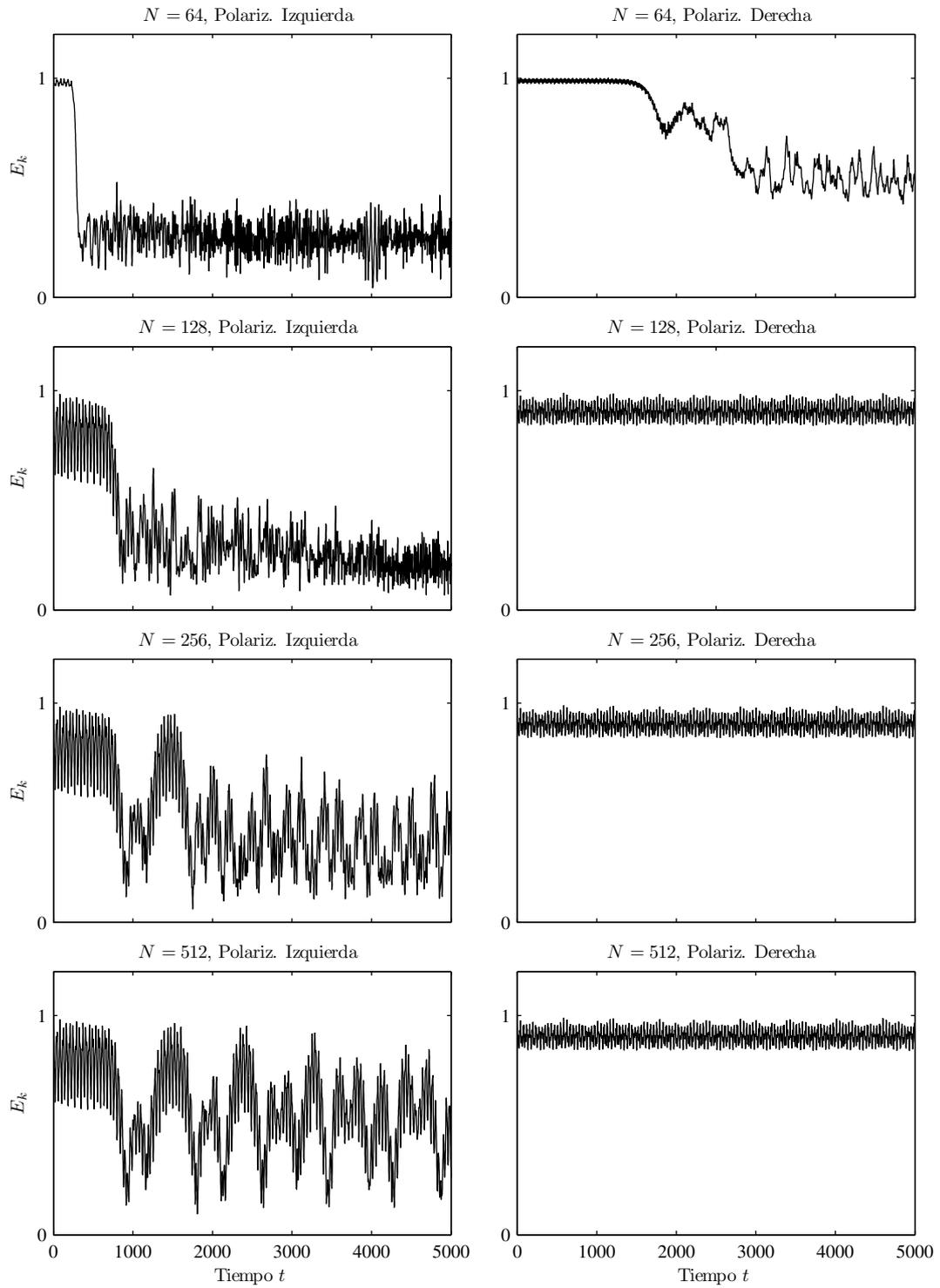


Figura 4.10: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas

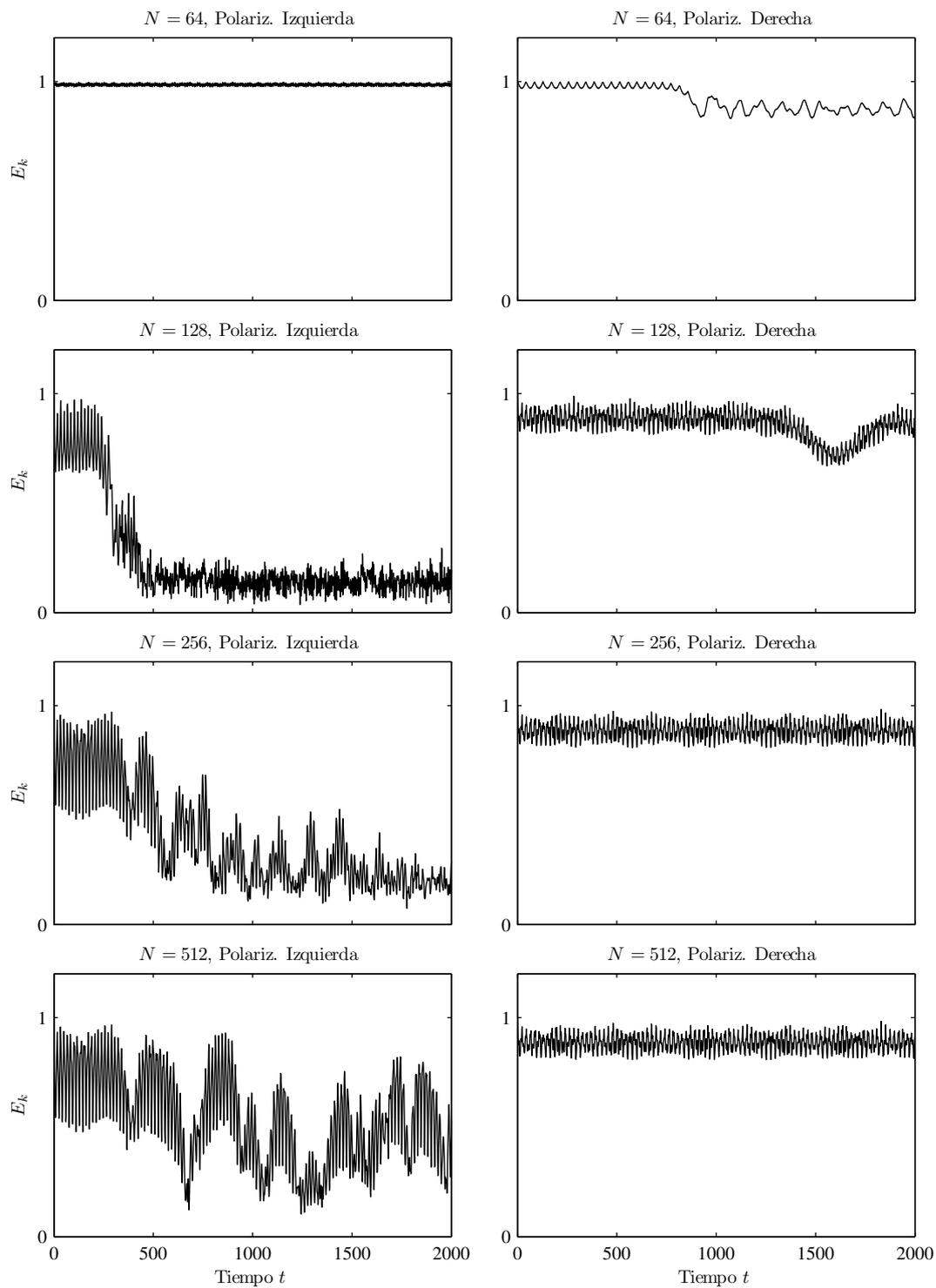


Figura 4.11: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas

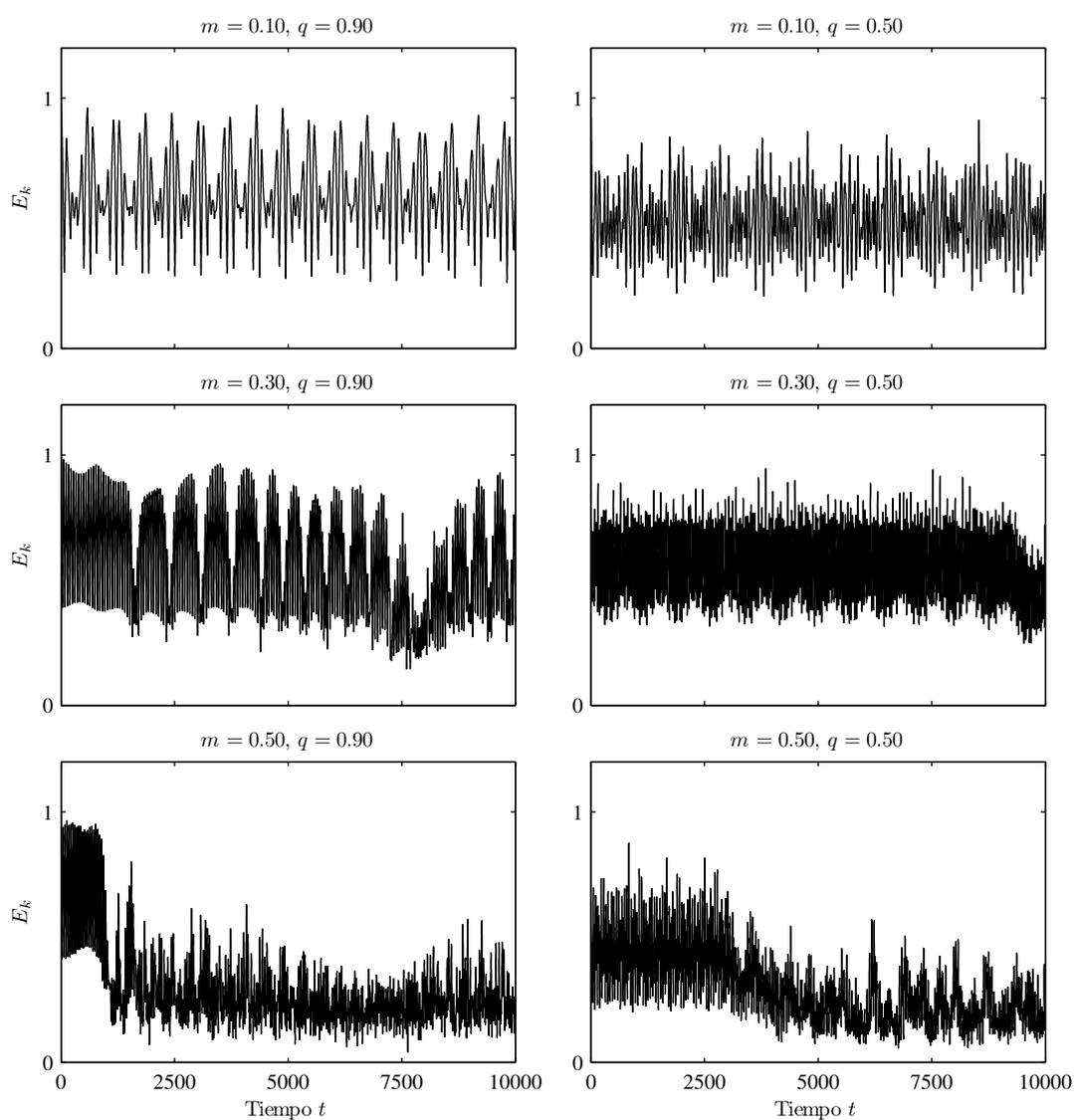


Figura 4.12: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas

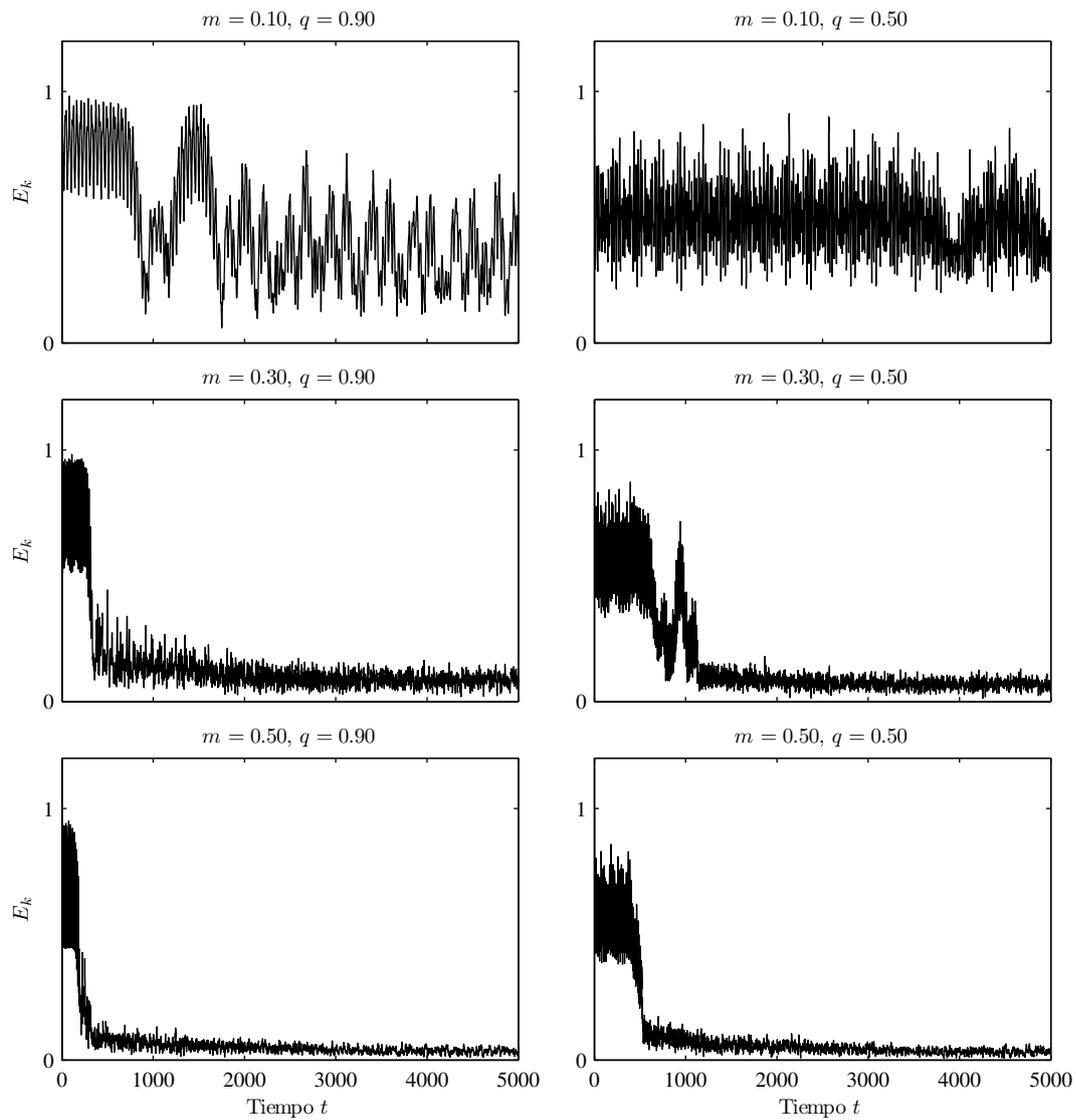


Figura 4.13: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas

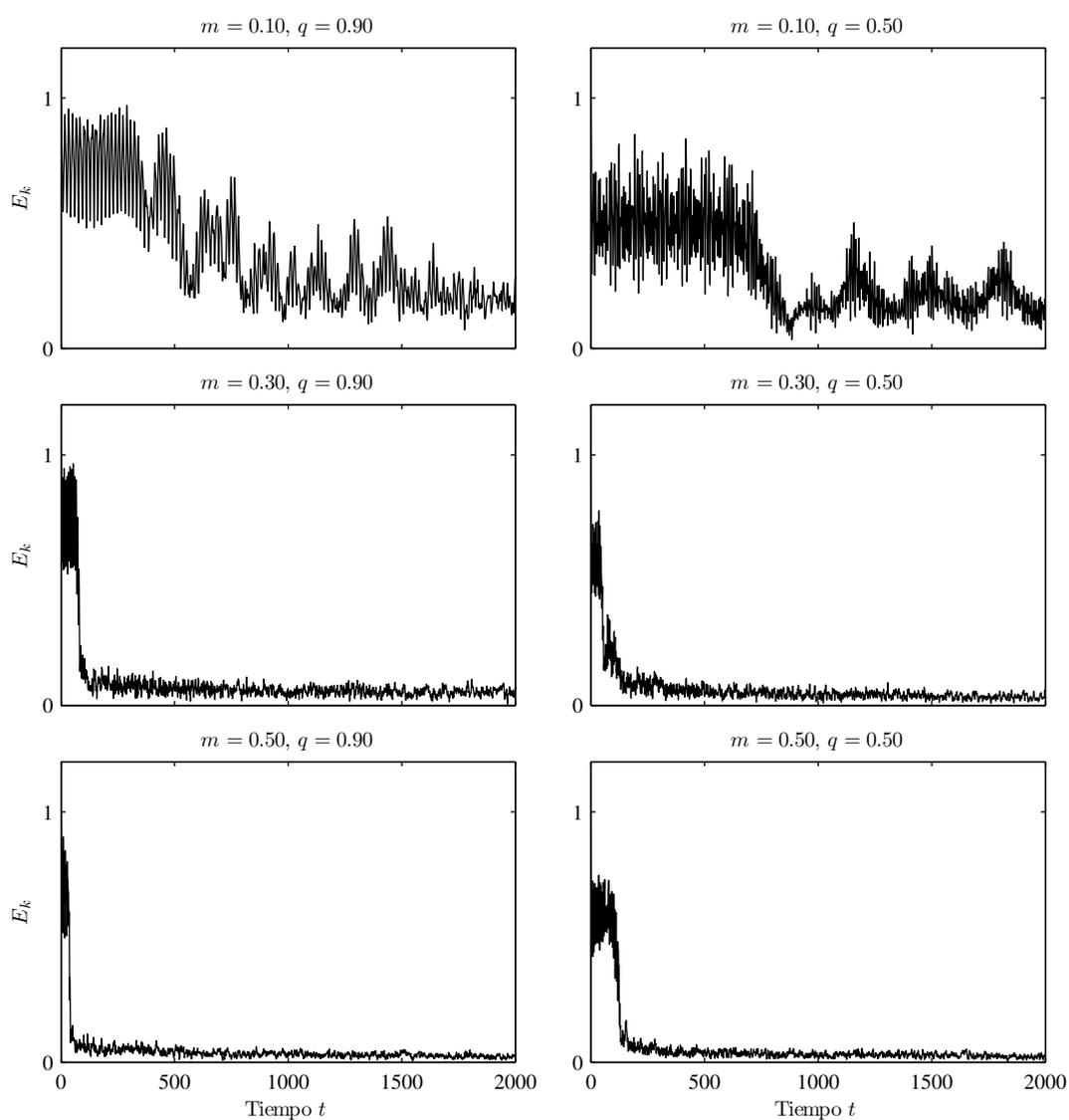


Figura 4.14: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas

Capítulo 5

Resultados Numéricos y Analíticos de la Ecuación DNLS con Efectos de Difusión y Excitación

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos para el caso de la ecuación DNLS considerando efectos difusivos y excitación. El objetivo del análisis es estudiar la transferencia de energía entre los diferentes modos para distintos valores de difusión, comparando los resultados de las simulaciones numéricas con aquellos hallados mediante técnicas de truncamiento.

El estudio se realiza sobre la ecuación DNLS difusiva con un modelo de amortiguamiento resistivo y ondas polarizadas a izquierda, considerando plasmas fríos con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia, con un modo excitado y los restantes amortiguados.

En primer término se analizan las soluciones estacionarias que se encuentran tanto con el esquema numérico como con el modelo de truncamiento, realizando la comparación entre ambos métodos y evaluando los límites de aplicabilidad del modelo analítico. Posteriormente se estudia una serie de soluciones dinámicas que son capturadas numéricamente, las cuales presentan estructuras complejas donde se observan ciclos límite, procesos de intermitencia y atractores caóticos.

5.1. Consideraciones iniciales

Para un campo magnético sin perturbar B_0 alineado según el eje z de un marco de referencia que se mueve con velocidad de Alfvén en esa dirección, asumiendo plasmas fríos ($\beta \approx 0$) con ondas

polarizadas a izquierda, la ecuación DNLS resulta (ver Capítulo 3):

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) + i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0, \quad (5.1)$$

donde, de acuerdo a la Ec. (3.30), se ha tomado $\alpha = 1$ y las variables b , z y t son adimensionales según las Ecs. (3.26) y (3.27). El parámetro $\hat{\gamma}$ es el operador de excitación/amortiguamiento.

Para una discretización de N puntos, la derivada temporal de la Ec. (5.1) se resuelve mediante las expresiones (4.26) obtenidas en el Capítulo 4. Si se utiliza un operador de amortiguamiento característico de efectos difusivos de la forma

$$\hat{\gamma} = -\eta \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.2)$$

donde η es el coeficiente de amortiguamiento, resolviendo la derivada mediante la expresión dada en la Ec. (4.17) puede obtenerse para el punto genérico z_j :

$$\hat{\gamma} b_j = \mathcal{F}^{-1} [\eta k_j^2 \mathcal{F}[b_j]]. \quad (5.3)$$

Con estas definiciones, y asumiendo que el modo identificado con el número de onda k_0 (onda madre) se encuentra excitado, la derivada temporal del campo magnético en la ecuación DNLS se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[-k_j (k_j - 1) \operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] + k_j \operatorname{Im} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1} \left[(\gamma_g \delta(k_j - k_0) - \eta k_j^2) \operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] \right], \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[k_j (k_j - 1) \operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] - k_j \operatorname{Re} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1} \left[(\gamma_g \delta(k_j - k_0) - \eta k_j^2) \operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde los números de onda k_j están dados por

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad (5.5)$$

y δ es la función delta de Dirac que se utiliza para representar la excitación lineal de intensidad γ_g

aplicada sobre la onda madre identificada con k_0

$$\hat{\gamma}_0 = \gamma_g \delta(k - k_0) - \eta k_0^2. \quad (5.6)$$

De este modo la función de amortiguamiento/excitación $\hat{\gamma}$ en el espacio de Fourier queda representada por la Figura 5.1:

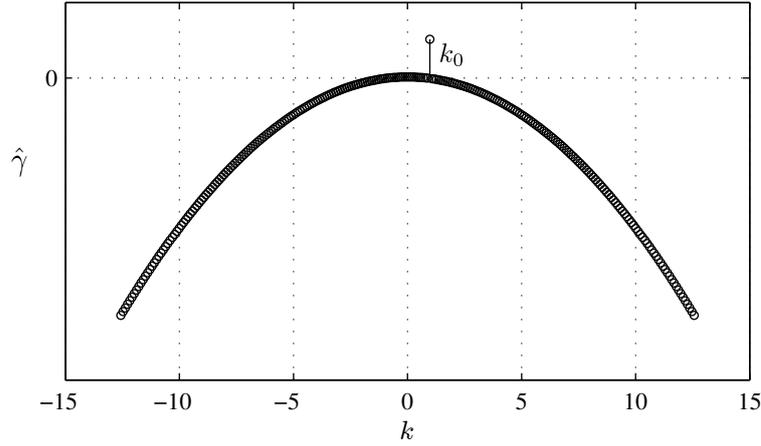


Figura 5.1: Función de amortiguamiento/excitación en el espacio de Fourier

La utilización de un operador de amortiguamiento como el indicado en la Ec. (5.2) es equivalente a asumir un modelo de amortiguamiento resistivo en el cual la disipación es proporcional a k_j^2 (Sanmartín et al., 2004):

$$\hat{\gamma}_j \approx \frac{V_A^2 k_j^2}{2\Omega_e \Omega_i \tau_c} = \eta k_j^2, \quad (5.7)$$

siendo V_A la velocidad de Alfvén, Ω_e y Ω_i las frecuencias de ciclotrón de los electrones y los iones, y τ_c el tiempo de colisión de Braginskii.

En las simulaciones se emplean condiciones iniciales de tres ondas cerca de resonancia ($2k_0 = k_1 + k_2$) como las utilizadas en la Sección 4.3.3,

$$b(z, 0) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{ik_j z}, \quad (5.8)$$

con números de onda $k_1 = (1 - \delta)k_0$ y $k_2 = (1 + \delta)k_0$. Planteadas de este modo las tres ondas iniciales cumplen la condición de periodicidad $b(z, 0) = b(z + L, 0)$ necesaria para la aplicación de métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier.

Durante la simulación la onda madre se encuentra excitada mientras que las restantes permanecen amortiguadas. La utilización de una configuración de este tipo, en la cual existe un modo inestable (excitado) y los modos restantes estables (amortiguados) obedece a que este modelo podría utilizarse para la descripción de la propagación de ondas magnetosónicas en amarras espaciales electrodinámicas que interactúan con la ionósfera terrestre y el campo magnético ambiente. El modo inestable se debe a la interacción paramétrica con las amarras mientras que los modos estables extraen energía del sistema a través de algún mecanismo disipativo (Sánchez-Arriaga, 2009).

Con el uso de técnicas de truncamiento se busca una solución aproximada de la ecuación DNLS consistente en tres ondas viajeras que satisfacen la condición de resonancia

$$b(z, t) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{i(k_j z - \omega_j t + \phi_j)}, \quad (5.9)$$

siendo $a_j(t)$ y $\phi_j(t)$ números reales, con frecuencias que satisfacen la relación de dispersión no lineal sin pérdidas para ondas de Alfvén circularmente polarizadas $\omega_j = \mp k_j^2$.

Asumiendo que los modos no resonantes se amortiguan para $t \rightarrow \infty$ es posible determinar las amplitudes a_j máximas (ver Apéndice B) para los casos donde se cumplen las condiciones de existencia y estabilidad de los puntos fijos relacionadas con los valores de excitación y amortiguamiento de las ondas k_0 , k_1 y k_2 . Son estos valores de amplitudes máximas halladas por truncamiento los que se introducen en la Ec. (5.8) para definir una condición inicial de la DNLS para luego realizar la simulación y verificar si el resultado converge hacia algún atractor.

5.2. Soluciones estacionarias de la ecuación DNLS

La evaluación de los resultados numéricos se realiza para una serie de atractores hallados para configuraciones iniciales con onda madre correspondiente a $n_0 = 9$ y excitación $\hat{\gamma}_0 = 0,02$. Los atractores se obtienen por medio de la simulación numérica dentro de determinados rangos de coeficientes de amortiguamiento η en función de los números de onda n_1 y n_2 de las ondas hijas consideradas.

A los fines de realizar comparaciones entre los resultados obtenidos por las simulaciones numéricas y los hallados mediante las técnicas de truncamiento, se define la energía del campo magnético

en todo el dominio:

$$E_m = \int_0^L |b|^2 dz, \tag{5.10}$$

donde para el caso de truncamiento se verifica

$$E_m = \int_0^L |b|^2 dz = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) L. \tag{5.11}$$

Con este valor es posible conocer si otros modos cobran importancia cuando se registran resultados similares entre las amplitudes de las ondas resonantes iniciales del cómputo numérico y del modelo de truncamiento.

Para poder realizar la comparación de los resultados numéricos con los del modelo de truncamiento a tres ondas, no sólo es necesario que se verifique la existencia de algún atractor, sino que además persistan únicamente los modos resonantes iniciales y no aparezcan nuevos modos con porciones de energía relativa relevantes, ya que la técnica de truncamiento supone la existencia de los tres modos iniciales solamente.

De acuerdo a este criterio, en la Tabla 5.1 se especifican los atractores hallados numéricamente en función del coeficiente de amortiguamiento para las distintas configuraciones consideradas.

Atractor	Rango de amortiguamiento	n_1	n_0	n_2
A_8	$\eta \geq 0,04$	1	9	17
A_7	$\eta \geq 0,08$	2	9	16
A_6	$\eta \geq 0,05$	3	9	15
A_5	$\eta \geq 0,04$	4	9	14
A_4	$0,05 \leq \eta \leq 0,15$	5	9	13
A_3	$0,03 \leq \eta \leq 0,13$	6	9	12

Tabla 5.1: Rango de existencia de soluciones estacionarias de la ecuación DNLS en función del coeficiente de amortiguamiento para $\hat{\gamma}_0 = 0,02$

Para la obtención de los atractores se tiene en cuenta la convergencia del valor de energía E_m dado en la Ec. (5.10) y de las amplitudes a_0 , a_1 y a_2 de los modos resonantes iniciales, durante un intervalo de tiempo no menor a 2000 unidades. Se escoge este criterio debido a que pudo comprobarse tras numerosas simulaciones que independientemente de los números de ondas hijas n_1 y n_2 considerados inicialmente, todas las configuraciones convergen hacia el atractor A_8 para $t \rightarrow \infty$, esto es, las ondas hijas ceden toda su energía a los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ y el sistema evoluciona hasta alcanzar los niveles de energía del atractor mencionado, mientras que los

modos restantes del espectro permanecen con cantidades de energía despreciables. Para visualizar este comportamiento se presenta la Figura 5.2, en la cual se grafica la evolución de la energía en el tiempo para distintas configuraciones iniciales.

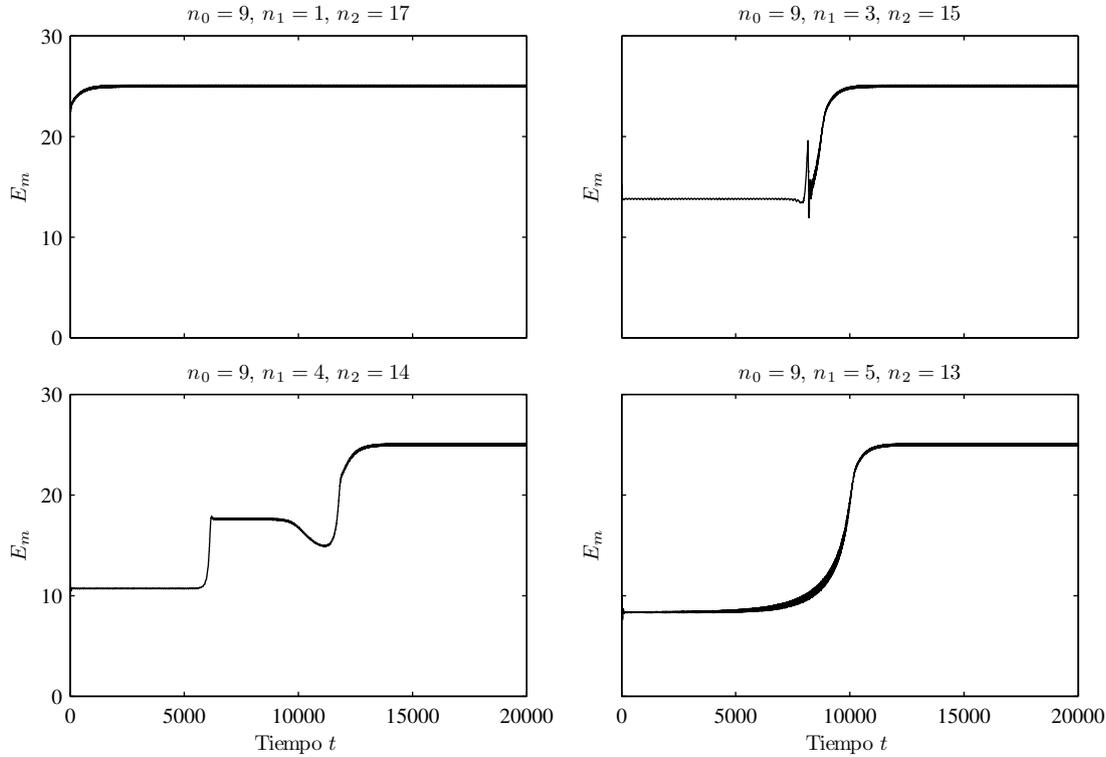


Figura 5.2: Evolución de la energía E_m para distintas configuraciones de ondas resonantes iniciales con $\eta = 0,12$ y $\hat{\gamma}_0 = 0,02$

Como se ve en la figura, puede decirse que existen períodos de estabilidad transitoria donde las soluciones permanecen aproximadamente invariantes durante un cierto intervalo de tiempo, hasta que se produce en las mismas un salto abrupto hacia otro atractor. Si bien en la figura se indica la evolución de la energía, los valores de amplitud de las ondas iniciales registran un comportamiento similar, pero en el caso de las ondas hijas, en el momento del salto hacia el nuevo atractor, la energía de estas ondas cae hasta prácticamente anularse, ya que la misma se transfiere a los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ correspondientes a las ondas hijas del atractor A_8 . La prevalencia de este atractor puede explicarse a partir del modelo de amortiguamiento utilizado, ya que el mismo implica que la difusión es proporcional al número de onda al cuadrado y de esta manera, para una configuración de modos que satisfacen la condición de resonancia, la máxima difusión sobre esos modos se produce para el caso del atractor A_8 .

El hecho de que estos intervalos de estabilidad transitoria sean en ocasiones relativamente

largos, justifica el estudio de esas soluciones como si se tratara de puntos fijos convencionales. En estas situaciones cabe la comparación con los resultados de las técnicas de truncamiento a tres ondas, ya que como se dijo anteriormente, en esos casos la energía se encuentra repartida fundamentalmente entre los tres modos resonantes iniciales.

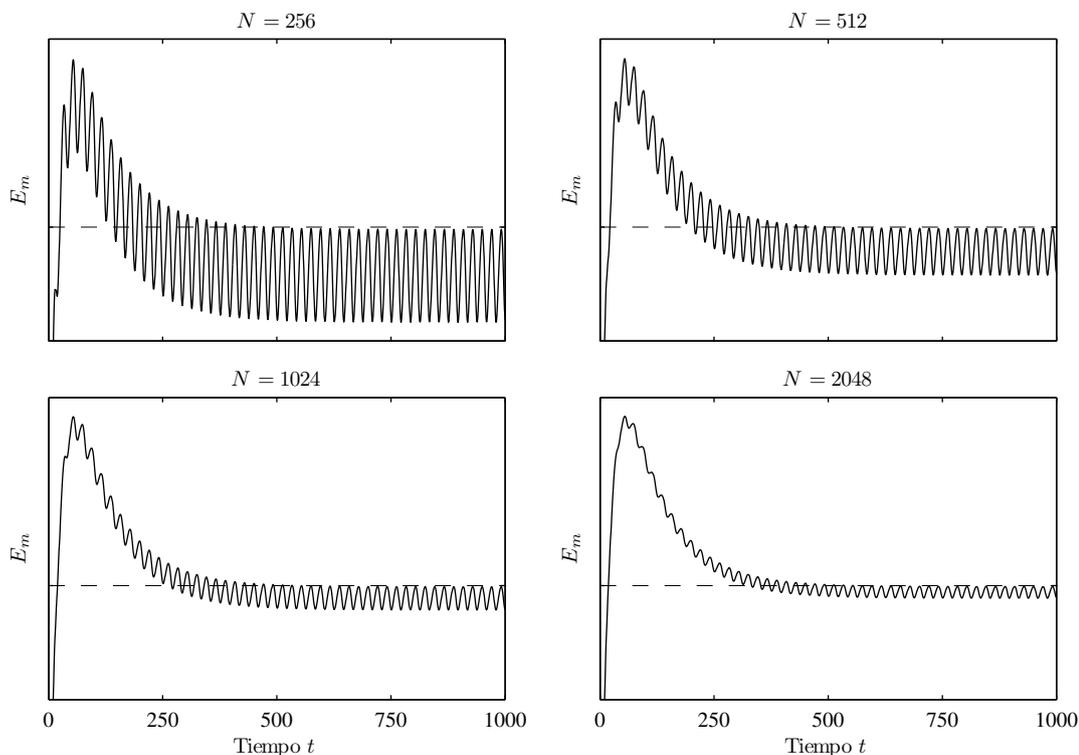


Figura 5.3: Influencia en la evolución de la energía del parámetro N para $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$ y $\eta = 0,30$

En cuanto a la evolución de la energía en las simulaciones numéricas, puede observarse en la Figura 5.2 que la convergencia de este valor hacia el atractor no se produce de manera estricta, sino que existen oscilaciones alrededor de un valor medio, como si se tratara de un ciclo límite. Sin embargo, numerosos ensayos numéricos demostraron que estas oscilaciones se deben a la discretización del dominio y no representan una característica propia de la solución de la ecuación DNLS. Para demostrar esta situación se presenta la Figura 5.3, donde se grafica la evolución del parámetro E_m para simulaciones realizadas con distintos valores de N . Se observa en la figura que al incrementar la cantidad de puntos de la grilla las oscilaciones disminuyen produciéndose una convergencia hacia los valores superiores de las mismas.

La evolución oscilatoria de la energía no se debe a oscilaciones en las amplitudes de los modos resonantes iniciales, ya que los mismos no presentan este tipo de comportamiento, sino que la

convergencia al atractor se produce sin registrar oscilaciones. De esta manera los resultados de la Figura 5.3 pueden adjudicarse a la influencia de los modos diferentes de los iniciales, cuya presencia es más importante cuando el número de puntos de la grilla disminuye. En otras palabras, el aumento de la cantidad de puntos en la discretización equivale a utilizar más modos en la serie de Fourier, lo cual favorece la precisión ya que el conjunto de funciones ortogonales es completo (Boyd, 2000; Canuto et al., 2006). Más allá de los comentarios anteriores, hay que destacar que estas oscilaciones son siempre pequeñas frente al valor de energía aun para el caso de $N = 256$ donde la amplitud máxima es de menos del 1% del valor medio de E_m . Por otro lado, el aspecto más importante del comportamiento radica en la posibilidad de determinar el valor de la energía sin necesidad de utilizar grillas excesivamente densas, ya que esto implicaría un aumento desproporcionado del costo computacional.

Teniendo en cuenta lo detallado en el párrafo anterior, en todas las simulaciones se utiliza una discretización de $N = 256$ puntos, longitud de integración $L = 64$ y paso de integración temporal $\tau = 0,001$, considerándose ondas polarizadas a izquierda y plasmas fríos. Los resultados presentados se obtuvieron con el esquema de filtrado por aliasing de Orszag, aunque hay que destacar que al igual que en el caso no difusivo, pudo comprobarse que las soluciones no se alteran si se utiliza el esquema de Philips.

5.2.1. Análisis de los Resultados

Para el análisis de los resultados se presenta una serie de figuras en las cuales se grafican los resultados correspondientes a la energía E_m y a las amplitudes a_0 , a_1 y a_2 de las ondas iniciales. En cada figura los símbolos circulares indican los resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas por métodos espectrales, mientras que en trazo continuo se representan los valores que predice la técnica de truncamiento a tres ondas.

Atractor A_8

En la Figura 5.4 se grafican los resultados correspondientes al atractor A_8 cuyos modos resonantes iniciales están dados por $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$. Según se aprecia en la figura, los resultados de ambos métodos presentan muy buena concordancia en casi todo el dominio de amortiguamiento considerado, a excepción de la región para $\eta \lesssim 0,15$, donde se visualizan discrepancias entre los valores de amplitudes de las ondas hijas a_1 y a_2 .

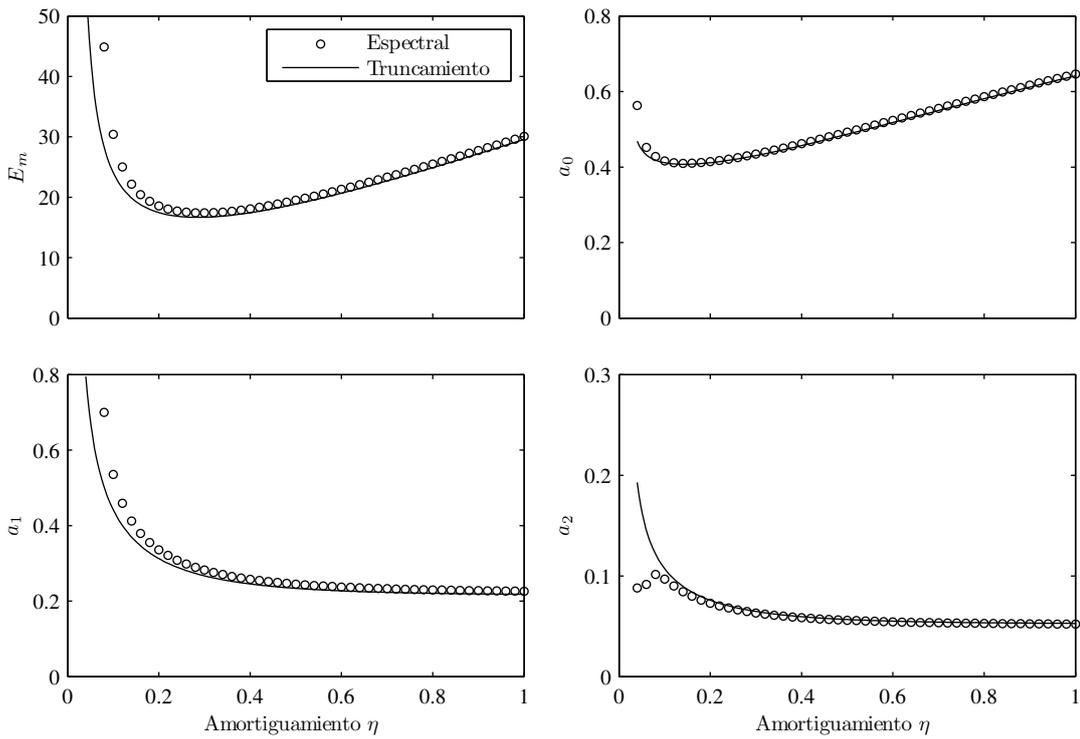


Figura 5.4: Atractor A_8 ($n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

Para entender este comportamiento es conveniente analizar el espectro de energía que existe cuando se producen estas diferencias. Con este propósito se realiza la Figura 5.5, en la cual se grafica la amplitud de cada onda en función del número de onda, destacando en línea de trazos los números de onda resonantes, para dos valores de η en los cuales se presentan comportamientos distintos.

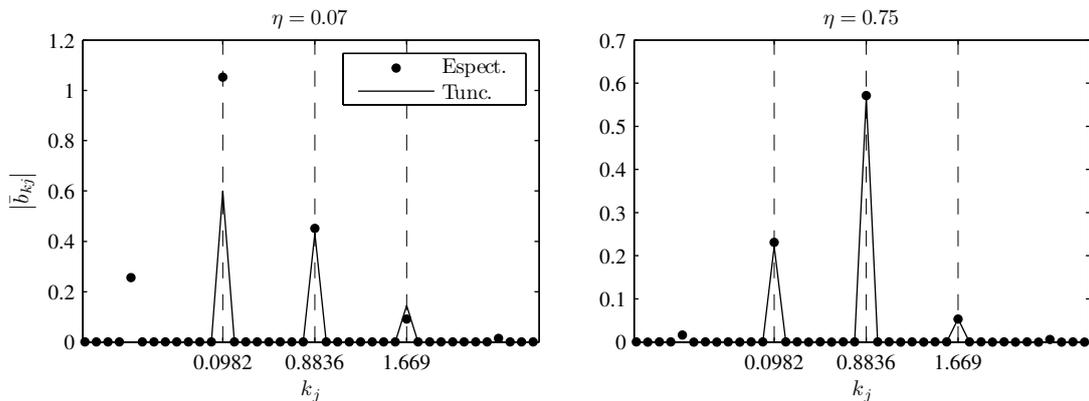


Figura 5.5: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_8

Puede observarse en la figura que la discrepancia en los resultados para valores bajos de amortiguamiento se debe a dos situaciones: en primer lugar una diferencia en el cálculo de las amplitudes

correspondientes a las ondas hijas k_1 y k_2 , la cual también puede apreciarse en la Figura 5.4; y en segundo lugar la aparición de nuevos modos con niveles de energía considerables además de los tres modos resonantes iniciales. En el caso opuesto, para valores del coeficiente η mayores sólo la energía de los tres modos resonantes es relevante y las amplitudes calculadas por ambos métodos presentan valores similares.

Lo destacable de la aparición de estos nuevos modos para valores $\eta \rightarrow 0$ es que los mismos verifican la relación de resonancia con la onda madre inicial. Identificando con k_3 y k_4 a los nuevos modos, siendo $k_3 < k_1 < k_0 < k_2 < k_4$, se cumple que $2k_0 = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ y además $k_4 - k_3 = 2(k_2 - k_1)$. Estas relaciones no sólo se producen en el caso particular de este atractor sino que, como se verá más adelante, las mismas están presentes en todos los casos analizados.

Atractor A_7

Los resultados del atractor A_7 dado por $n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ se presentan en la Figura 5.6. En la misma se observa que, a diferencia de lo ocurrido en el caso anterior, la concordancia entre los resultados de ambos métodos es muy buena en todo el rango de amortiguamiento analizado, verificándose esta situación tanto en los valores de energía como en los de amplitud de las ondas resonantes iniciales. Esta correlación indica que para este atractor la energía permanece concentrada en los tres modos iniciales aun cuando se consideran coeficientes de amortiguamiento pequeños, y no se transfiere hacia otros modos en cantidades relevantes, lo cual naturalmente repercute en la buena concordancia entre los resultados de las simulaciones numéricas y el modelo de truncamiento. Sin embargo, no hay que olvidar que si se consideran evoluciones para tiempos más prolongados, este atractor ya no se verifica y el sistema converge al atractor A_8 registrándose resultados como los indicados anteriormente.

Atractor A_6

El tercer atractor analizado es A_6 , el cual está definido por $n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$. En la Figura 5.7 se muestran los resultados obtenidos para esta configuración, donde se observa que de manera similar a lo ocurrido con el atractor A_8 , en este caso la concordancia entre los resultados de cada técnica es muy buena en casi todo el rango de amortiguamiento considerado, exceptuando la región donde $\eta \rightarrow 0$. De hecho, los resultados son muy similares para $\eta \gtrsim 0,20$, mientras que para valores menores comienzan a registrarse discrepancias entre las amplitudes a_0 y a_2 , y

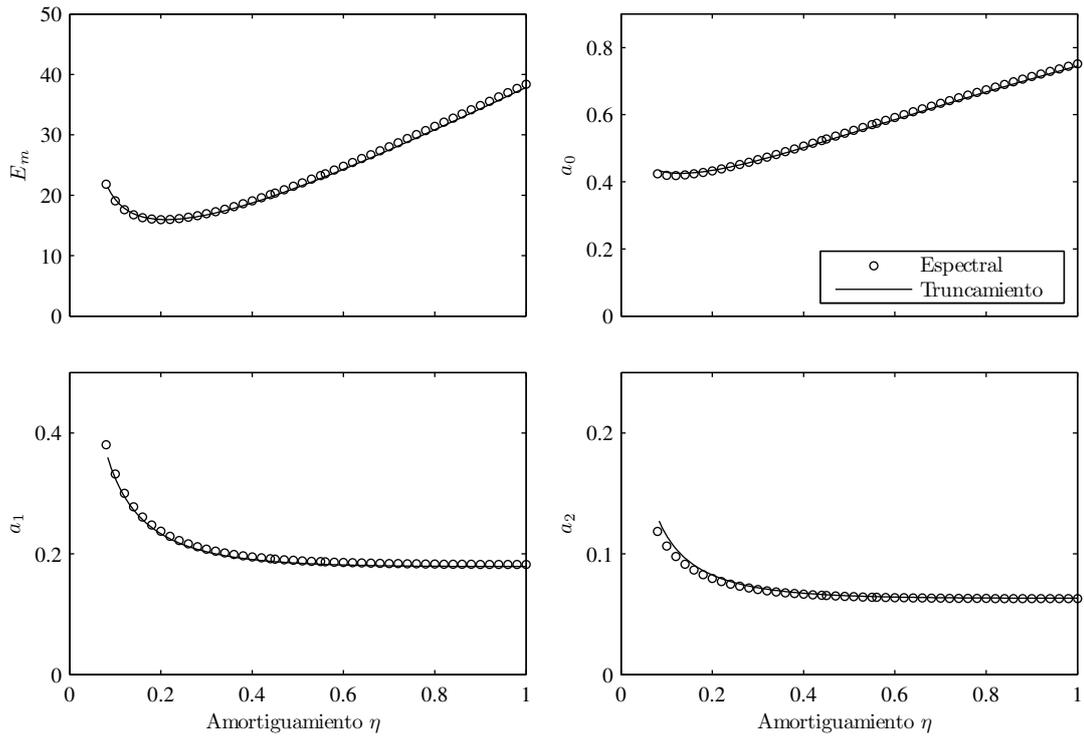


Figura 5.6: Atractor A_7 ($n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

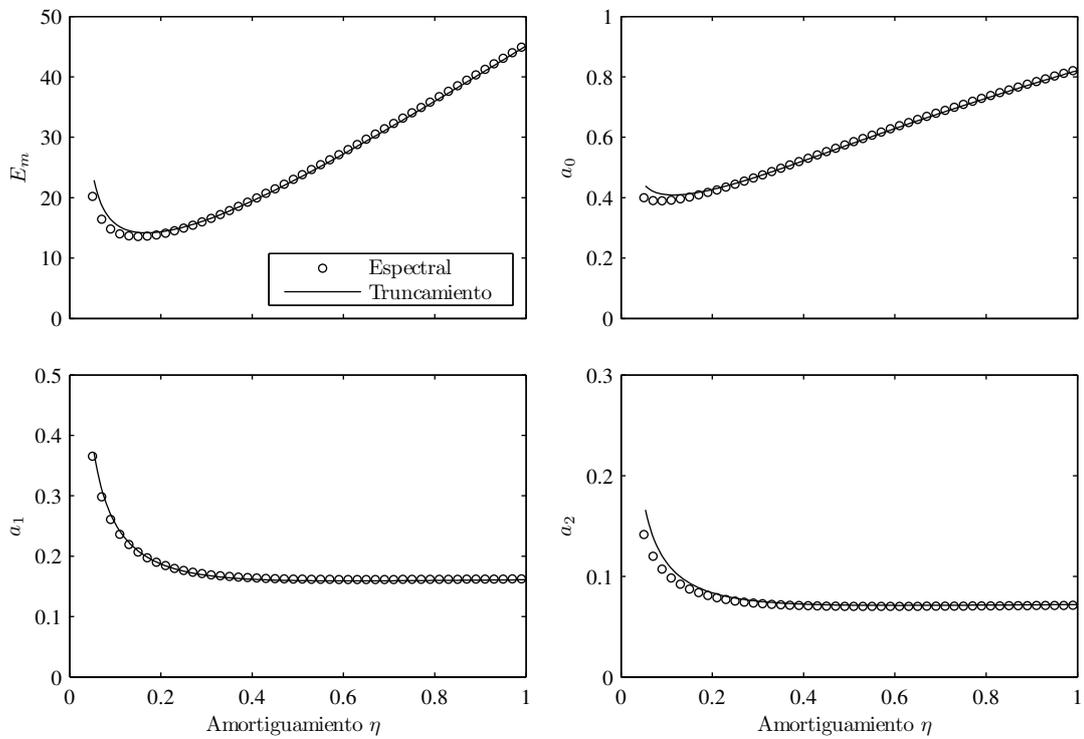


Figura 5.7: Atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

consecuentemente en la energía, cuando se disminuye el coeficiente de amortiguamiento.

De manera similar a lo realizado para el atractor A_8 , en la Figura 5.8 se grafica el espectro de energía para dos valores de η donde se registran comportamientos diferentes. En el caso de la región donde los resultados no concuerdan, se observa nuevamente la aparición de dos modos diferentes a los iniciales con niveles de energía no despreciables, los cuales verifican las mismas relaciones detalladas en el caso de A_8 . Por el contrario, para coeficientes de amortiguamiento mayores, la energía permanece en los modos resonantes iniciales, de igual manera a lo ocurrido anteriormente.

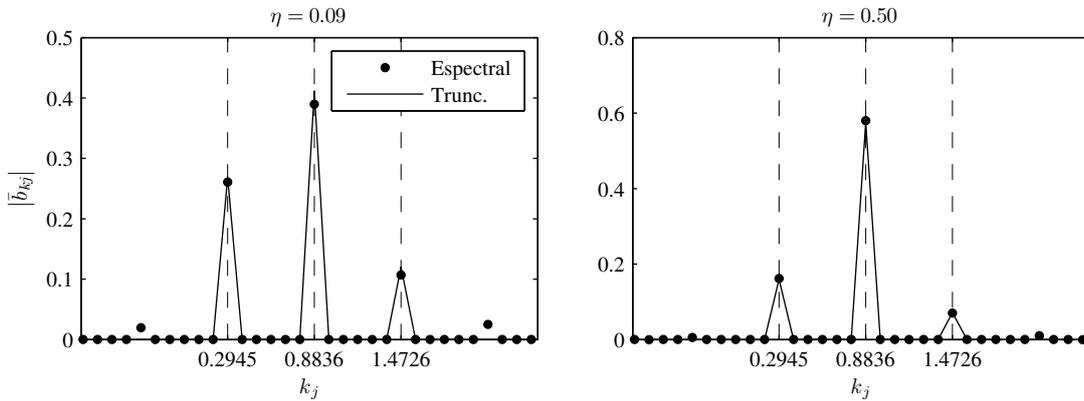


Figura 5.8: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_6

Atractor A_5

El atractor A_5 está dado por $n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$, en la Figura 5.9 se presentan los resultados correspondientes al mismo. Se observa en la figura que para este atractor se produce una situación similar a la de los atractores A_8 y A_6 , es decir, una región de coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes ($\eta \gtrsim 0,15$) donde la concordancia entre los resultados de ambos métodos es muy buena, y otra ($\eta \lesssim 0,15$) donde comienzan a aparecer discrepancias para $\eta \rightarrow 0$, aunque en este caso las diferencias son más acentuadas.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, es posible predecir que estas diferencias se producen por la aparición de dos nuevos modos distintos a los tres modos resonantes iniciales, los cuales presentan niveles considerables de energía, lo cual hace fallar al método de truncamiento que supone solamente la existencia de tres modos. Para verificar esta hipótesis en la Figura 5.10 se grafica el espectro de energía en el espacio de Fourier para las dos situaciones.

Tal como se había anticipado y como ocurre en los casos anteriores, la aparición de los nuevos modos con niveles de energía no despreciables genera la discrepancia entre los resultados de cada

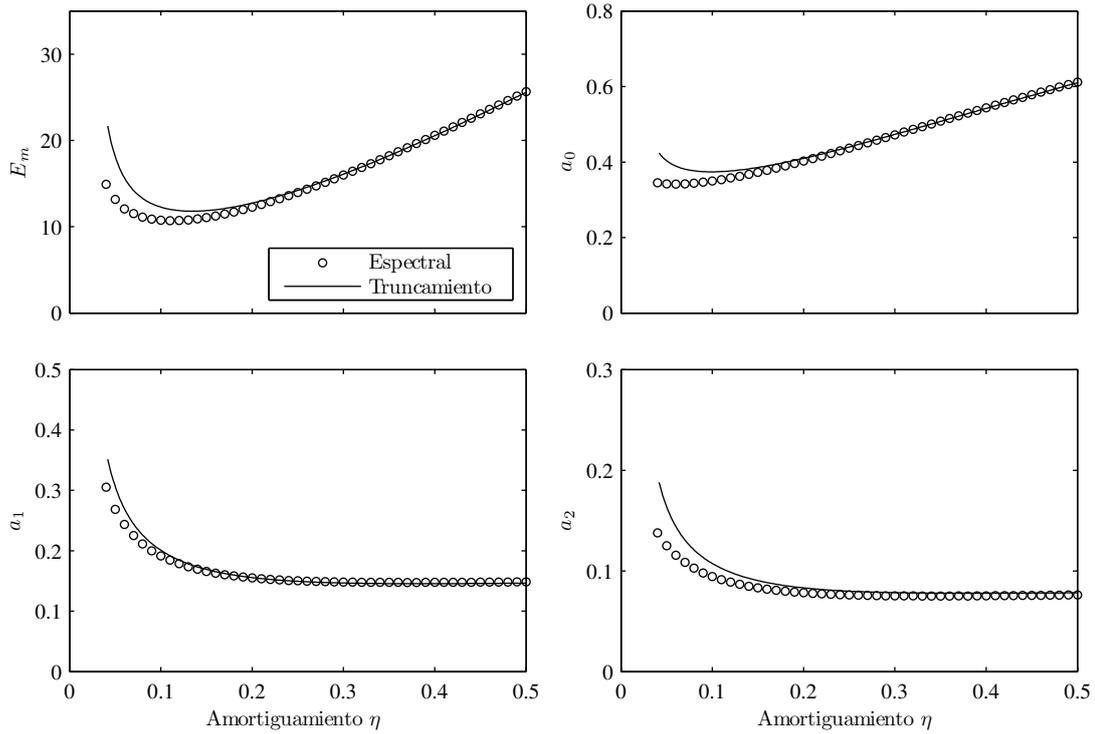


Figura 5.9: Atractor A_5 ($n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

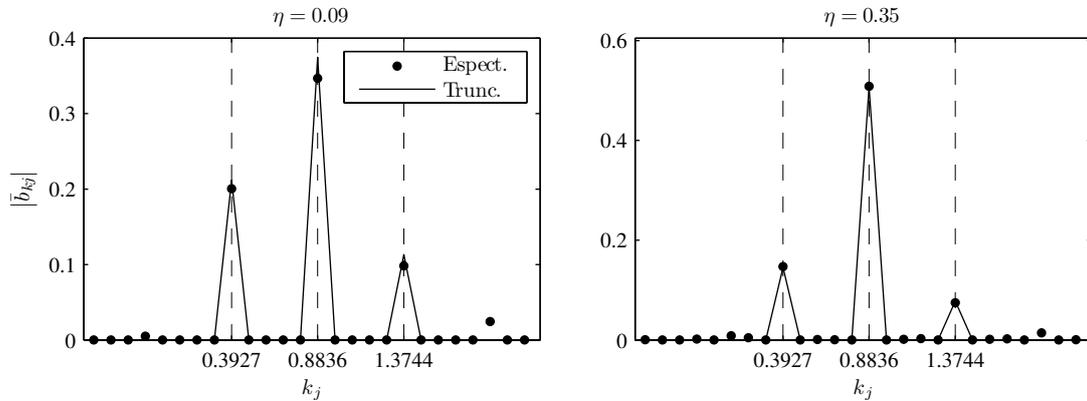


Figura 5.10: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_5

método. Nuevamente, estos modos cumplen con las ondas iniciales las mismas relaciones que se explicaron para el atractor A_8 .

Atractor A_4

Continuando con el análisis, se presenta el estudio del atractor A_4 correspondiente a $n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$. Para ello en la Figura 5.11 se han graficado los resultados de energía y amplitudes de los modos resonantes obtenidos por ambos métodos.

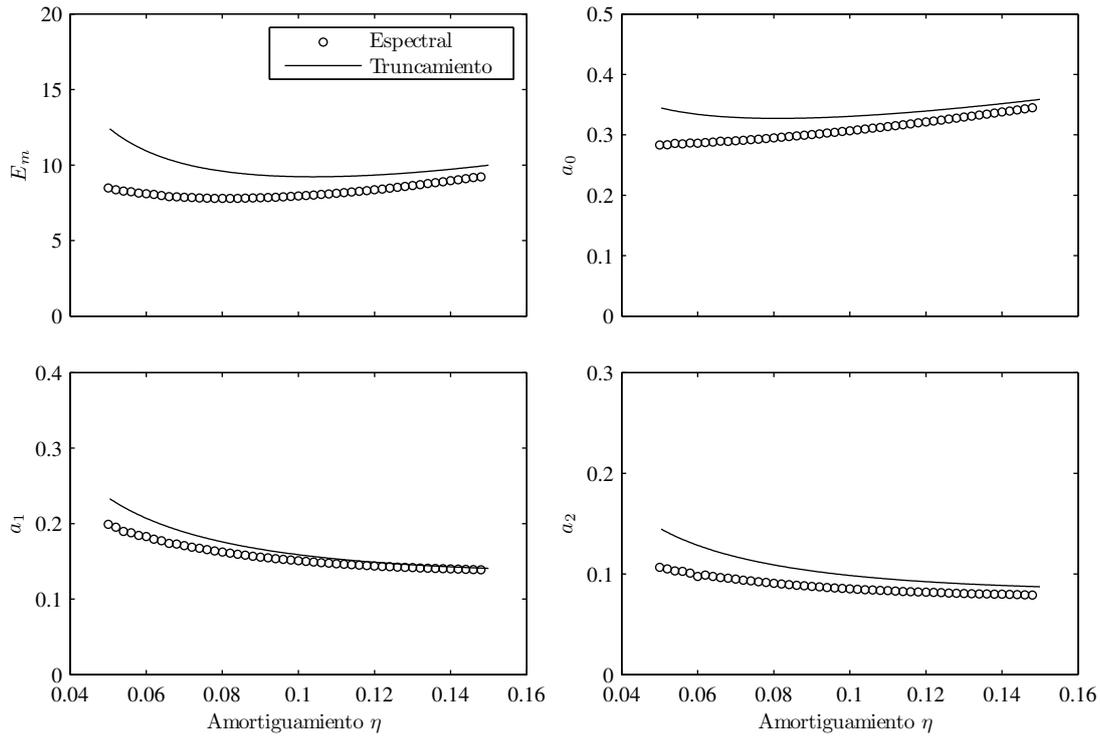


Figura 5.11: Atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

Analizando la figura se pueden diferenciar dos regiones en las cuales los resultados se comportan de manera diferente. En la primera de ellas, correspondiente a $\eta \gtrsim 0,10$, se observa una diferencia aproximadamente constante entre los valores obtenidos por las simulaciones numéricas y los de las técnicas de truncamiento. En la segunda región ($\eta \lesssim 0,10$) las discrepancias comienzan a incrementarse progresivamente con la disminución del coeficiente de amortiguamiento, tanto en los resultados de energía como en los de las amplitudes de los modos iniciales.

Para entender estas diferencias en la Figura 5.12 se muestra la distribución de energía entre los distintos modos para ambas regiones. Para $\eta \gtrsim 0,10$ se observa que además de las discrepancias en el cómputo de las amplitudes de las ondas iniciales, nuevamente existen otros dos modos con niveles de energía relevantes los cuales satisfacen las relaciones detalladas en los casos anteriores cuando se utilizan coeficientes de amortiguamiento pequeños. En el otro extremo ($\eta = 0,14$), los resultados numéricos indican que aquí también existen dos modos no despreciables aunque de menor energía que para amortiguamiento bajo. Además los valores obtenidos por el modelo de truncamiento para los modos iniciales se aproximan más a los de las simulaciones numéricas.

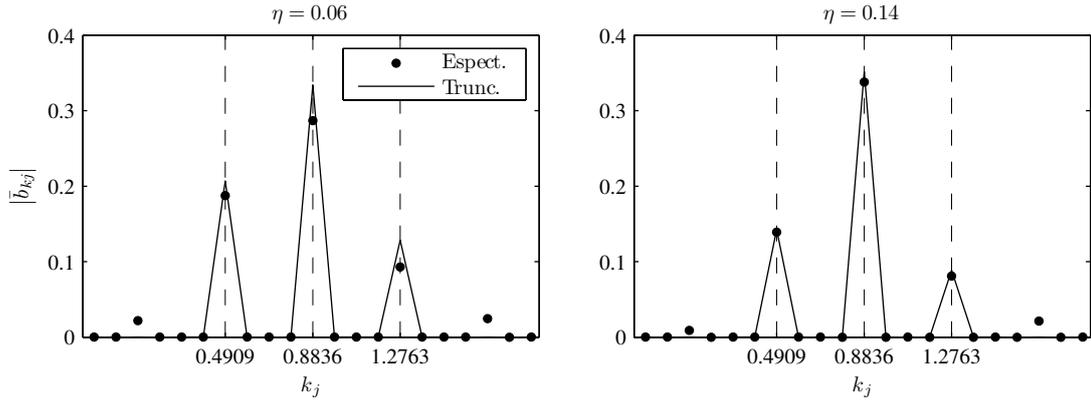


Figura 5.12: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_4

Atractor A_3

Finalizando el análisis se estudia el atractor A_3 cuyas ondas iniciales corresponden a $n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$. De igual manera que lo realizado hasta el momento, en la Figura 5.13 se disponen los resultados obtenidos por ambas técnicas.

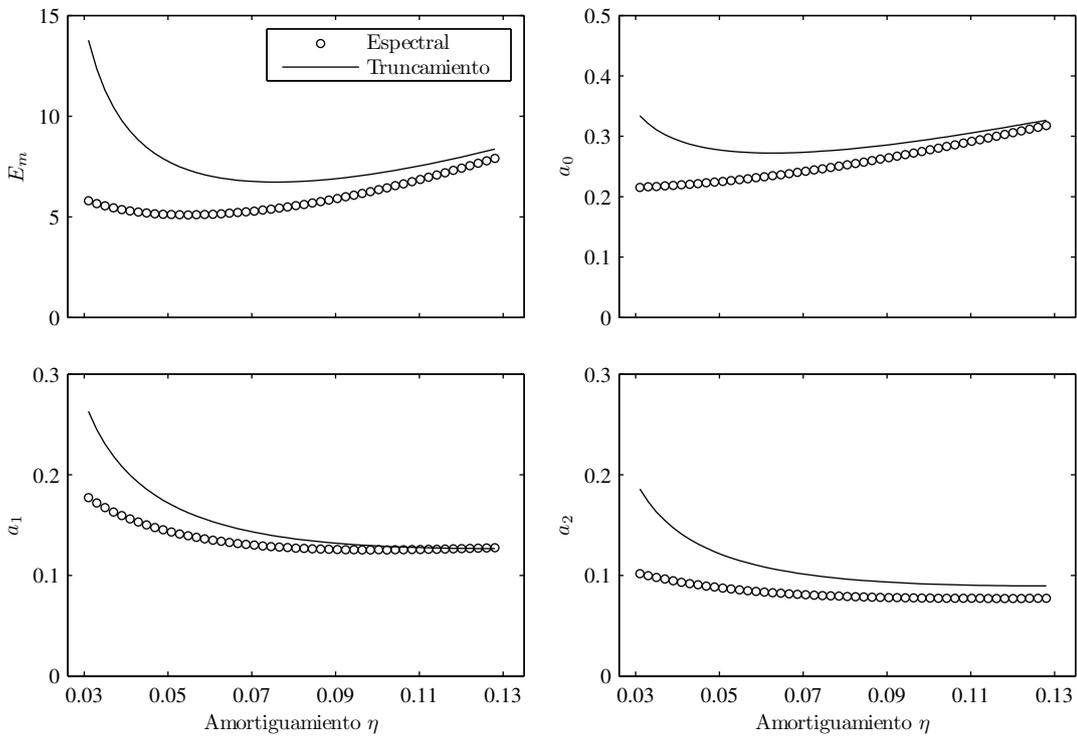


Figura 5.13: Atractor A_3 ($n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

Se observa en la figura una situación similar a la del atractor A_4 detallado anteriormente, es decir, la presencia de dos regiones en las cuales se manifiestan dos comportamientos diferentes.

Como en el caso anterior, en la primera región correspondiente a $\eta \gtrsim 0,08$ los resultados obtenidos por los dos métodos presentan una diferencia aproximadamente constante tanto en energía como en amplitudes de los modos resonantes. Por otro lado, en la región donde $\eta \lesssim 0,08$ los resultados presentan discrepancias que se incrementan con la disminución del coeficiente de amortiguamiento. En la Figura 5.14 se grafica la distribución de energía para valores de amortiguamiento pertenecientes a cada una de las regiones mencionadas.

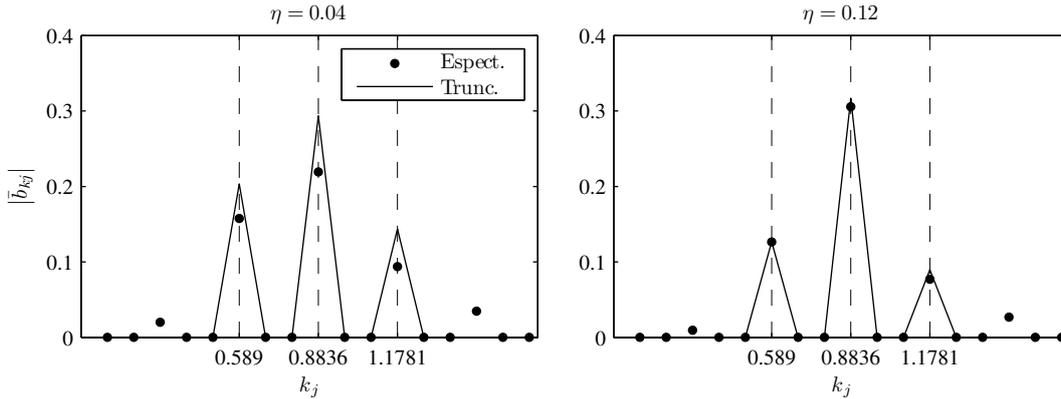


Figura 5.14: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_3

Como era de prever, para el caso donde se obtuvieron resultados más aceptables ($\eta > 0,08$), la figura muestra que la distribución de energía se realiza principalmente entre los tres modos resonantes iniciales, con buena concordancia entre los resultados de uno y otro método, aunque igualmente se visualiza que otros dos modos presentan niveles considerables de energía. Por el contrario, en la región donde se registraron las mayores diferencias, en el panel izquierdo de la Figura 5.14 se observa que de igual manera que lo sucedido para otros atractores con coeficientes de amortiguamiento pequeños, surgen dos modos extras con niveles de energía considerables, y además se registran diferencias más notorias entre los valores de amplitud de los modos iniciales calculados por cada método. En ambos casos, los nuevos modos satisfacen las relaciones de resonancia dadas en el caso del atractor A_8 .

5.3. Soluciones dinámicas de la ecuación DNLS

En la sección anterior se constató que existen soluciones estacionarias de la DNLS cuando se utilizan coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes. Para coeficientes pequeños ($\eta \lesssim 0,04$), algunas configuraciones de onda presentan soluciones dinámicas de estructuras complejas, con ciclos límite, atractores caóticos, fenómenos de intermitencia y crisis. Como se verá más adelante,

Atractor	Rango de amortiguamiento	n_1	n_0	n_2
A_6	$0,0256 \leq \eta \leq 0,0325$ y $0,0465 \leq \eta \leq 0,05$	3	9	15
A_4	$0,0162 \leq \eta \leq 0,0325$ y $0,0465 \leq \eta \leq 0,05$	5	9	13
A_2	$0,0163 \leq \eta \leq 0,0325$ y $0,0465 \leq \eta \leq 0,05$	7	9	11

Tabla 5.2: Rango de existencia de soluciones dinámicas en función del coeficiente de amortiguamiento para $\hat{\gamma}_0 = 0,02$

estas soluciones son capturadas por el esquema numérico solamente, mientras que las soluciones del modelo de truncamiento convergen a puntos fijos y soluciones periódicas.

En la Tabla 5.2 se muestra el rango de existencia de las soluciones periódicas obtenidas por los métodos espectrales en función del coeficiente de amortiguamiento, las cuales se ven interrumpidas por la presencia de atractores caóticos. Como se observa en la tabla, los rangos de existencia de los atractores son muy similares en todos los casos, independientemente de los números de onda utilizados. Por otro lado, las configuraciones de onda analizadas en la sección anterior que no están incluidas en la Tabla 5.2 (atractores A_8 , A_7 , A_5 y A_3) no presentan soluciones dinámicas, sino que para coeficientes de amortiguamiento menores que los indicados en la Tabla 5.1 las soluciones comienzan a diverger con valores de energía $E_m \rightarrow \infty$.

Las características de las soluciones se observan en la Figura 5.15, donde se muestra la evolución de la amplitud de la onda madre a_0 en función del tiempo para diferentes coeficientes de amortiguamiento que producen distintas formas de las soluciones, es decir, ciclos límites de uno y más períodos y atractores caóticos. El mismo tipo de solución se presenta para las amplitudes de las ondas hijas y la energía.

Con el objetivo de evaluar la influencia del coeficiente de amortiguamiento en las soluciones, se procede a construir diagramas de bifurcación considerando los valores máximos de las amplitudes de las ondas iniciales ($a_{0\max}$, $a_{1\max}$ y $a_{2\max}$) y de la energía E_m . De este modo se observa más claramente la influencia del coeficiente de amortiguamiento η . Hay que destacar que en todas las figuras que se muestran a continuación, las simulaciones numéricas registran resultados similares a los de la Figura 5.15 tanto para las amplitudes como para la energía. De este modo, la utilización de diagramas de bifurcación basados en los valores máximos no implica el riesgo de una posible confusión entre soluciones periódicas y puntos fijos.

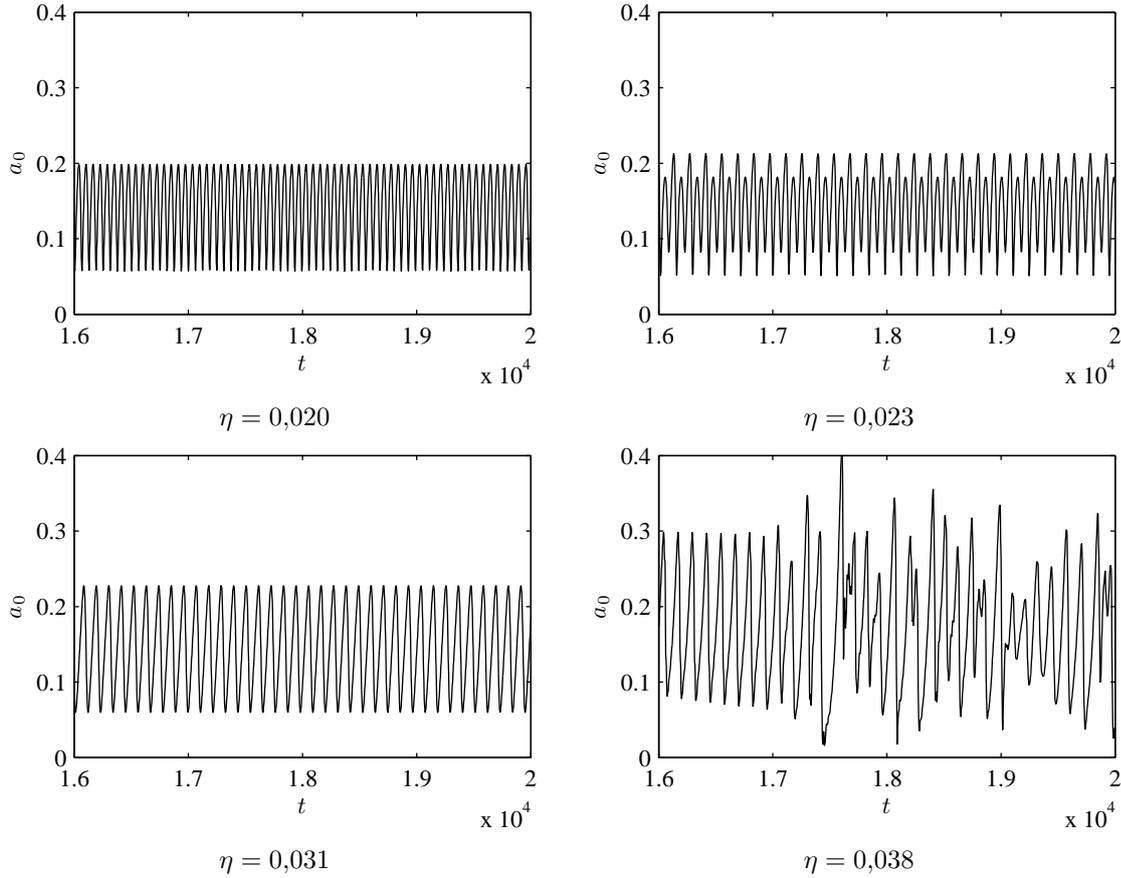


Figura 5.15: Evolución de la amplitud de la onda madre del atractor A_2 para diferentes coeficientes de amortiguamiento η .

Atractor A_2

En la Figura 5.16 se muestra el diagrama de bifurcación del atractor A_2 . De acuerdo a los resultados numéricos, este atractor comienza para $\eta \lesssim 0,05$. Para coeficientes de amortiguamiento mayores las soluciones serían cuasi-estacionarias convergiendo rápidamente al atractor A_8 , lo que indicaría la existencia de una bifurcación de Hopf, en la cual una rama de puntos fijos se bifurca en una rama de soluciones periódicamente moduladas en el tiempo (ciclo límite) y una rama de puntos fijos inestables (la cual no se grafica en la figura).

En $\eta \approx 0,0467$ existe un punto de bifurcación de doblamiento de período que luego deriva en una secuencia de Feigenbaum la cual desemboca en un atractor caótico. La solución periódica emerge nuevamente para $\eta \approx 0,0325$ en lo que parece ser un proceso de intermitencia, para luego continuar con una nueva secuencia de Feigenbaum que comienza en $\eta \approx 0,029$ y un nuevo atractor caótico. Mediante otra secuencia similar la solución periódica regresa para $\eta \rightarrow 0$ para luego culminar en un atractor caótico que pone fin a las soluciones periódicas para $\eta \lesssim 0,016$.

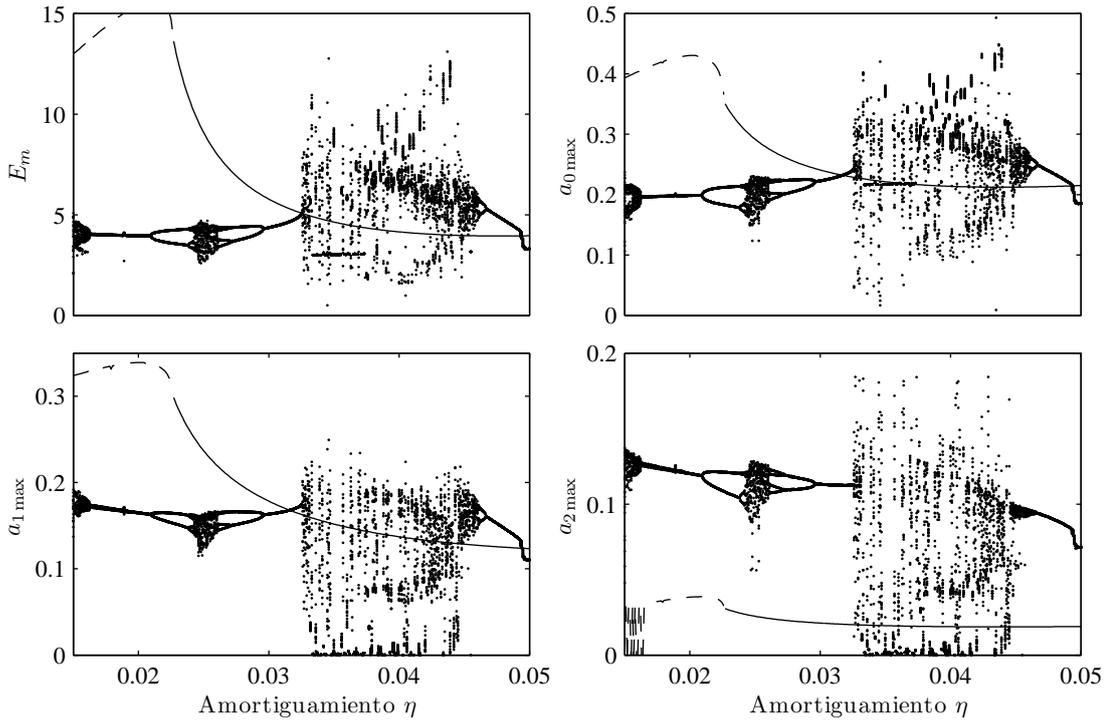


Figura 5.16: Diagrama de bifurcación para el atractor A_2 ($n_0 = 9$, $n_1 = 7$ y $n_2 = 11$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). Los puntos indican los resultados del esquema numérico. Las soluciones del modelo de truncamiento corresponden a la línea continua (rama de puntos fijos) y la línea de trazos (amplitud máxima de la solución periódica).

En cuanto a las soluciones del modelo de truncamiento, a diferencia de los resultados numéricos, no se observan atractores caóticos. En este caso, el método predice una rama de puntos fijos estables en casi todo el rango analizado. Para $\eta \approx 0,0227$ existe una bifurcación de Hopf, por lo tanto para $\eta \lesssim 0,0227$ las soluciones son periódicas (no se indica la rama de puntos fijos inestables).

La discrepancia entre los resultados numéricos y los del modelo de truncamiento probablemente tenga su explicación en los mecanismos de transferencia de energía que se producen en estos atractores. Para analizar esta posibilidad se define un parámetro E_r similar al utilizado en el estudio de la ecuación DNLS no difusiva del capítulo anterior. En este caso E_r es la relación entre la energía correspondiente a los tres modos resonantes iniciales y la energía total del sistema E_m dada en la Ec. (5.10), es decir:

$$E_r = \frac{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) L}{\int_0^L |b|^2 dz}. \quad (5.12)$$

De acuerdo a la definición, cuando la energía está mayormente concentrada en los modos iniciales $E_r \approx 1$, mientras que para un espectro de energía distribuido $E_r \rightarrow 0$.

En la Figura 5.17 se muestra la evolución del parámetro E_r para dos valores de amortiguamiento, uno dentro de la región donde se presentan soluciones regulares ($\eta = 0,031$) y otro correspondiente a la solución caótica ($\eta = 0,038$). Además se grafica el espectro de energía en el espacio de Fourier para la situación donde E_r es mínimo y se ha llegado al régimen (en el caso de la solución regular). Puede observarse en la figura que independientemente del tipo de solución, la energía se transfiere a otros modos distintos de los modos iniciales, los cuales adquieren importancia y por lo tanto no pueden despreciarse. Esto implica que, al igual que en el caso de las soluciones estacionarias con bajo amortiguamiento, un modelo de truncamiento a tres ondas resulta insuficiente.

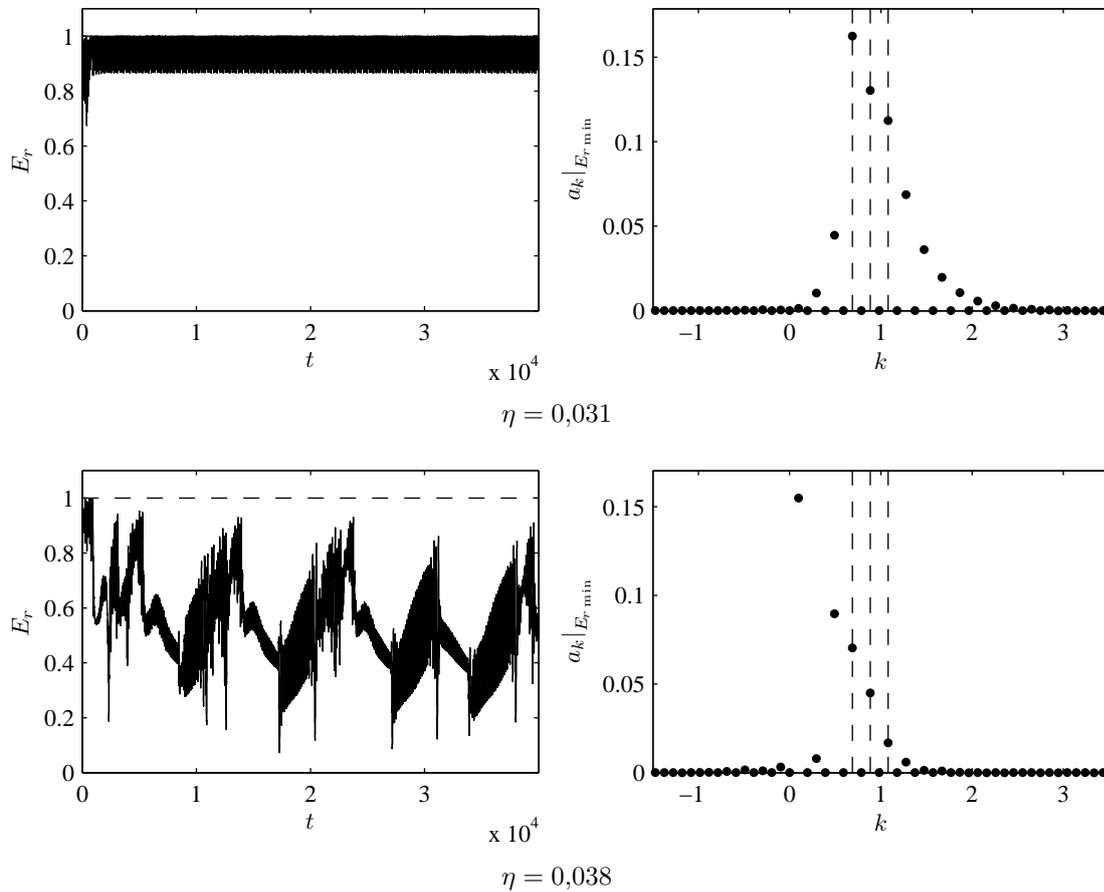


Figura 5.17: Evolución de la relación entre la energía de los modos iniciales y la energía total del sistema, Ec. (5.12), y distribución de la energía entre los distintos modos para el atractor A_2 .

Un aspecto a destacar de los resultados de la Figura 5.17 es la similitud de los mismos con respecto al análisis de la ecuación DNLS no difusiva. En ese caso existía un rango de soluciones pseudo regulares donde el sistema se comportaba de una manera aproximadamente periódica, con la energía siendo transferida hacia otros modos para luego ser recuperada por los modos iniciales.

En este caso el comportamiento es similar, ya que en el rango de soluciones periódicas estables ($\eta = 0,031$ en la figura) se puede observar que los modos resonantes iniciales recuperan casi totalmente la energía, aunque para los valores más bajos de E_r aparecen varios modos adicionales con niveles de energía considerables. Por otro lado, en el rango caótico si bien la distribución de energía se produce fundamentalmente entre los mismos modos que en el ciclo límite, en este caso los niveles de energía de los modos adicionales son mucho más importantes, superando la energía de las ondas resonantes iniciales. Estos mismos mecanismos de transferencia de energía se registran en los atractores que se analizan a continuación, para los cuales se obtienen resultados similares a los de la Figura 5.17.

Atractor A_4

El diagrama de bifurcación del atractor A_4 se muestra en la la Figura 5.18. En este caso los comentarios son similares a los del atractor A_2 . Nuevamente existe una bifurcación de Hopf en $\eta \approx 0,05$ y una sucesión similar de secuencias de Feigenbaum y atractores caóticos que evidencian la dinámica compleja de estos atractores. Por otra parte, las soluciones del modelo de truncamiento tampoco predicen en este caso la presencia de atractores caóticos y sólo muestran la existencia de una rama de puntos fijos estables en todo el rango de amortiguamiento analizado, a diferencia del atractor A_2 donde además se registra una bifurcación de Hopf.

Un aspecto a destacar de este atractor es la solución de la amplitud máxima de la onda k_2 , en la cual se observa la existencia de dos ramas de puntos fijos (hablando en términos de la amplitud máxima $a_{2\max}$) que presentan lo que se conoce como una crisis de fusión de atractores, de acuerdo a la clasificación de crisis realizada por Grebogi et al. (1987). Aquí, ambas soluciones derivan en atractores caóticos que se fusionan dando lugar a un atractor mucho más extenso en el rango $0,0325 \lesssim \eta \lesssim 0,0465$.

Atractor A_6

Continuando con el análisis, en la Figura 5.19 se presentan los resultados correspondientes al atractor A_6 . Si se consideran coeficientes de amortiguamiento dentro del rango de existencia del atractor ($\eta \gtrsim 0,0256$), las soluciones son similares a la de los casos anteriores, es decir, existe una bifurcación de Hopf en $\eta \approx 0,05$ donde finaliza la rama de puntos fijos estables para dar lugar a la aparición de solución periódicas que derivan en secuencias de Feigenbaum y atractores caóticos

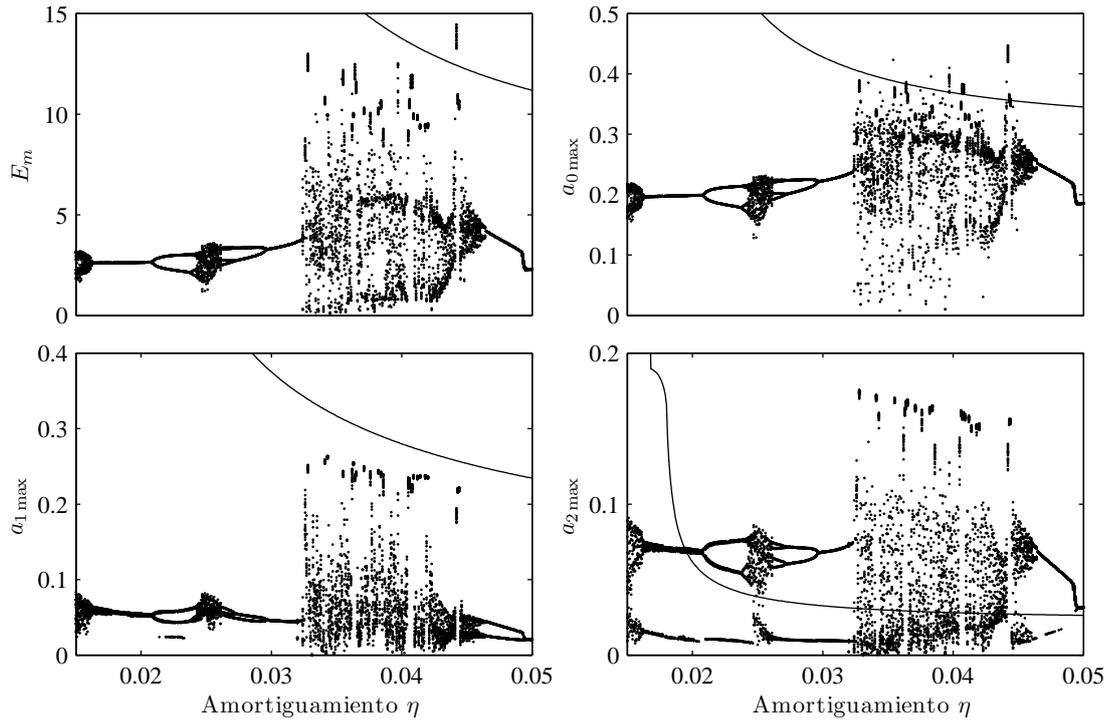


Figura 5.18: Igual que la Figura 5.16 pero para el atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). En este caso las soluciones del modelo de truncamiento superan ampliamente a los resultados numéricos quedando fuera de la escala del gráfico.

para coeficientes de amortiguamiento menores.

La diferencia en este caso radica en la abrupta destrucción del atractor que se produce en $\eta \approx 0,0256$. Esto muestra la existencia de un fenómeno de crisis de borde, en la cual un atractor caótico es repentinamente destruido cuando el parámetro de control atraviesa un valor crítico, lo que también se conoce como catástrofe de cielo azul o bifurcación peligrosa (Abraham, 1985).

Con respecto a las soluciones del modelo de truncamiento, para este atractor los resultados discrepan aún más con las soluciones numéricas que en los casos evaluados anteriormente.

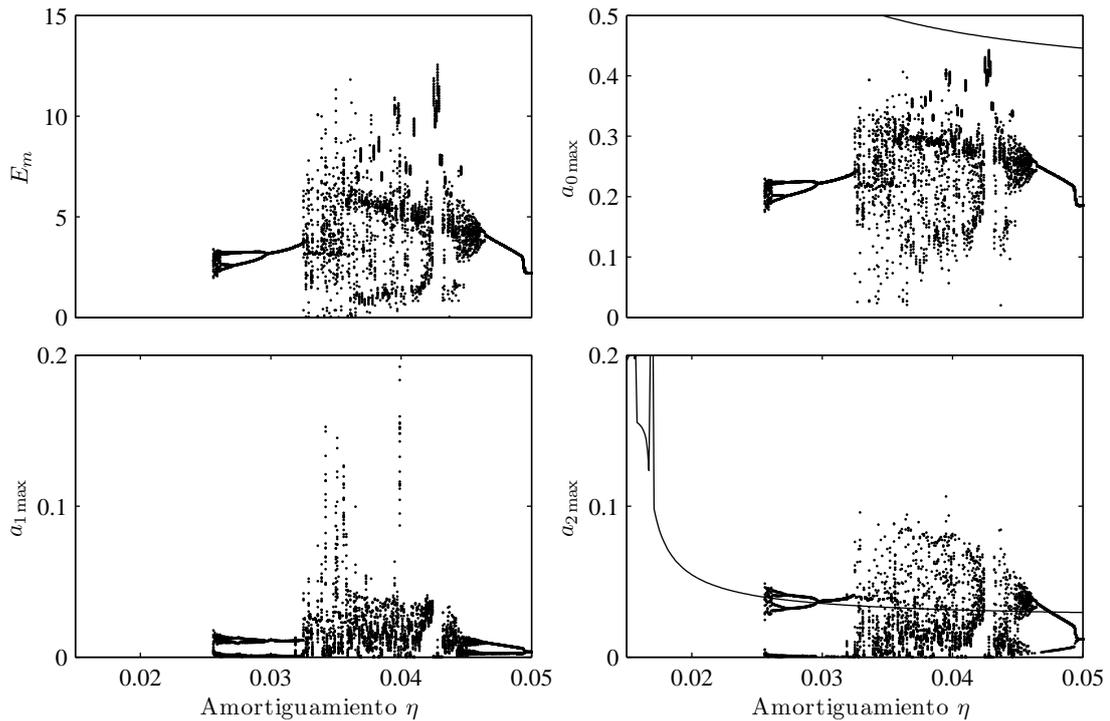


Figura 5.19: Igual que la Figura 5.16 pero para el atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$). En este caso las soluciones del modelo de truncamiento superan ampliamente a los resultados numéricos quedando fuera de la escala del gráfico.

Para finalizar el análisis hay que destacar que los resultados obtenidos en esta sección muestran una clara diferencia con respecto a las soluciones estacionarias del análisis anterior. En este caso no se observa la presencia de un atractor dominante hacia el cual converjan todas las configuraciones, tal como sucedía con el atractor A_8 que representaba la condición más difusiva. Más allá de esta diferencia, los resultados de esta sección resaltan aún más las serias dificultades que presenta el método de truncamiento a tres ondas cuando los coeficientes de amortiguamiento son pequeños.

Capítulo 6

Nueva Metodología para la Caracterización de Intermitencia

En este capítulo se presenta una nueva metodología para la caracterización de intermitencia tipo I cuando las propiedades estadísticas del fenómeno presentan particularidades que no permiten su análisis con los métodos tradicionales. Esta nueva metodología se basa en una técnica recientemente desarrollada la cual fue exitosamente aplicada en los tres tipos principales de intermitencia (I, II y III).

En la primera parte del capítulo se introducen los conceptos básicos referidos a la teoría de intermitencia, se analizan las herramientas disponibles para caracterizar el fenómeno y se muestran las limitaciones que las mismas presentan para el estudio de soluciones como las registradas en la ecuación DNLS. En la segunda parte se propone la adaptación de la teoría mencionada anteriormente para su aplicación en el caso de intermitencia tipo I con las particularidades del problema estudiado. Finalmente se analiza el efecto del ruido en intermitencia tipo I con un enfoque diferente al de trabajos anteriores.

Los resultados obtenidos en este capítulo no constituyen solamente una técnica válida para caracterizar la intermitencia de las soluciones de la ecuación DNLS, sino que los mismos permiten obtener nuevas conclusiones referidas al fenómeno general de intermitencia tipo I.

6.1. Introducción al fenómeno de intermitencia

La intermitencia es una de las rutas conocidas hacia caos determinístico. Este fenómeno se produce cuando el comportamiento regular de un sistema se interrumpe por un pequeño cambio

en un parámetro de control, dando lugar a una evolución en la cual se producen períodos de comportamiento aproximadamente regular de cierta duración denominados fases laminares que se interrumpen por la repentina aparición de explosiones caóticas cortas a intervalos irregulares.

Las explosiones caóticas que aparecen cuando el parámetro de control supera el umbral de intermitencia producen que el sistema evolucione hacia un atractor más grande en el cual el antiguo atractor periódico es un subconjunto del nuevo atractor caótico. Por lo tanto, como resultado de la bifurcación, una órbita periódica es reemplazada por caos en lugar de otra órbita cuasi estable, ya que durante las explosiones caóticas las trayectorias evolucionan “lejos” del entorno de la órbita periódica que existía previo al cambio del parámetro de control. Tres tipos de bifurcaciones genéricas cumplen estos requerimientos, bifurcación tangente (cyclic-fold), bifurcación de Hopf subcrítica y bifurcación de doblamiento de períodos subcrítica (period-doubling) (Nayfeh y Balachandran, 1995). Además de las condiciones de bifurcación mencionados, el otro requerimiento para que se produzca la intermitencia es la existencia de un mecanismo que repetidamente reinyecte las trayectorias en la zona de la órbita original, de lo contrario la trayectoria no regresaría a la región laminar.

El concepto de intermitencia fue propuesto inicialmente en el contexto del sistema de Lorenz, donde de acuerdo al tipo de bifurcación que se produce en el fenómeno, Manneville y Pomeau (Manneville y Pomeau, 1979; Pomeau y Manneville, 1980) clasificaron el mecanismo de intermitencia según los tipos clásicos I, II y III, respectivamente. En mapas, esta clasificación también puede deducirse considerando la forma del mapa de Poincaré local o, más precisamente, teniendo en cuenta los valores de los multiplicadores de Floquet o valores propios del mapa local. Estudios posteriores extendieron la clasificación a intermitencia tipo X, V, on-off, eyelet y de anillo (Kaplan, 1992; Price y Mullin, 1991; Platt et al., 1993; Pikovsky et al., 1997; Lee et al., 1998; Hramov et al., 2006).

Además del sistema de Lorenz, el fenómeno de intermitencia está asociado a numerosos procesos físicos como ser convección de Rayleigh-Bénard, osciladores no lineales periódicamente forzados, entre otros (Dubois et al., 1983; Malasoma et al., 2004; Stavrínides et al., 2008). En Mecánica de los Fluidos por ejemplo, la intermitencia se refiere al estado en el cual un flujo laminar se interrumpe por el desarrollo de turbulencia. En efecto, intermitencia espacio-temporal es un fenómeno bien conocido que puede observarse en capas límites, flujo de tuberías, flujo entre cilindros rotantes, y flujos turbulentos totalmente desarrollados (Nayfeh y Balachandran, 1995). Además la intermiten-

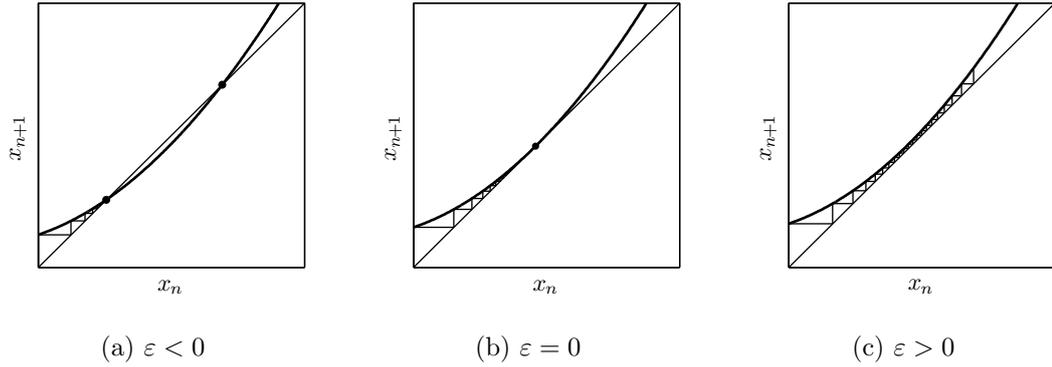


Figura 6.1: Ejemplos de mapas unidimensionales que ilustran la transición a intermitencia tipo I. (a) Coexistencia de un punto fijo estable y otro inestable. (b) Bifurcación tangente (umbral de intermitencia). (c) Desaparición de puntos fijos, iteraciones en la fase laminar.

cia ha sido identificada también en áreas tan disímiles como economía y ciencias médicas (Chian, 2007; Zebrowski y Baranowski, 2004).

En el caso particular de intermitencia tipo I, para el mapa de Poincaré local un valor propio real cruza el círculo unitario por el eje real positivo. La variedad (manifold) asociada a este valor propio contiene la información esencial relacionada a la intermitencia aceptando que hay disipación a lo largo de las otras direcciones. Por lo tanto, se puede considerar un mapa unidimensional:

$$x_{n+1} = P(x_n, \varepsilon),$$

asociado con esta variedad, donde ε es el parámetro de control que pasa por cero en el límite de la intermitencia. En la región de bifurcación, este mapa puede aproximarse como:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \varepsilon + \dots$$

En la Figura 6.1 se observa que para $\varepsilon < 0$ aparecen dos puntos fijos, uno estable y otro inestable, los cuales se acercan a medida que $\varepsilon \rightarrow 0^-$ y coalescen en un único punto fijo $x_0 = 0$ para $\varepsilon = 0$. En esa situación el mapa es tangente a la bisectriz en x_0 y la bifurcación asociada se denomina bifurcación tangente. Para $\varepsilon > 0$, el mapa no intersecta la bisectriz $x_{n+1} = x_n$ y no existen puntos fijos en el entorno de esta región del mapa, tal como se ve en la Figura 6.1-(c). En este caso aparece un canal estrecho entre el mapa y la bisectriz, por lo que las órbitas atravesarán esta región lentamente con las sucesivas iteraciones que se acumulan en la zona más angosta del canal. Este pasaje es el que produce las fases laminares en intermitencia tipo I, mientras que el

regreso de la órbita nuevamente a la región laminar debe producirse por algún mecanismo de reinyección global, el cual permite las sucesivas repeticiones de dichas fases laminares.

6.1.1. Caracterización de la intermitencia

Para la caracterización de la intermitencia, independientemente de su tipo, se busca determinar la probabilidad de que las fases laminares presenten una duración determinada. Por otro lado también es importante conocer la llamada relación característica, la cual vincula la duración media de las fases laminares $\langle l \rangle$ con el parámetro de control ε . Estas dos propiedades dependen directamente de la distribución de puntos de reinyección de las trayectorias en la región laminar, lo cual se denomina densidad de probabilidad de reinyección (RPD). Esta circunstancia requiere que se preste especial atención para lograr una correcta estimación de la RPD.

Una representación analítica $\phi(x)$ para la RPD es en general difícil o imposible de obtener, por otro lado la aproximación de dicha función a través de los datos experimentales o numéricos también presenta dificultades debido a la necesidad de contar con grandes cantidades de datos para cubrir cada intervalo Δx dentro de la distribución. Por estos motivos, el enfoque tradicional es imponer modelos de distribución de probabilidad simplificados, en el cual la distribución de probabilidad uniforme, independiente del punto de reinyección, es el más difundido (Hirsch et al., 1982a; Dubois et al., 1983; Pikovsky, 1983; Malasoma et al., 2004; Schuster y Just, 2005, entre otros). Otros modelos que también han sido utilizados consisten en funciones RPD monótonamente decrecientes cuyos comportamientos extremos son la distribución uniforme y la reinyección concentrada en el extremo izquierdo del intervalo laminar (Kim et al., 1994; Kwon et al., 1996). Naturalmente, la simplicidad de estos modelos hace que los mismos no resulten adecuados para problemas relativamente complejos, ya que aunque la representación de la RPD pueda ser un tanto más sofisticada, esto no modifica la forma de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares, por lo que todavía se emplean las definiciones clásicas de dicha función (Klimaszewska y Zebrowski, 2009).

Debido a las limitaciones mencionadas anteriormente, en la actualidad ha surgido una metodología alternativa para la representación de la RPD, la cual utiliza aproximaciones basadas en cantidades relacionadas a los datos numéricos o experimentales que minimizan los efectos de las fluctuaciones y permiten obtener una expresión analítica de la RPD (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2014). Estos métodos han mostrado reproducir correctamente

la densidad de probabilidades en los tres casos principales de intermitencia (I, II y III), y consecuentemente obtener buenas aproximaciones de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares. En esta investigación se extiende la mencionada metodología para poder ser aplicada a intermitencia tipo I con formas arbitrarias de la función RPD.

6.1.2. Descripción de la Metodología

Para el estudio se considera un mapa cuadrático ampliamente utilizado para el análisis de intermitencia tipo I (Hirsch et al., 1982a; Kim et al., 1994; del Rio et al., 2014):

$$x_{n+1} = f(x) = ax_n^2 + x_n + \varepsilon, \quad (6.1)$$

donde el parámetro ε es el parámetro de control que indica el ancho del canal en la región laminar, es decir, la distancia entre el mapa de Poincaré local y la bisectriz. De manera similar a lo que ocurre en la Figura 6.1, valores negativos de ε generan la aparición de dos puntos fijos, uno estable y otro inestable, que para $\varepsilon = 0$ coalescen en el punto fijo $x_0 = 0$. Cuando $\varepsilon > 0$ ya no existen puntos fijos y se produce intermitencia tipo I, siempre que haya un mecanismo que devuelva las trayectorias hacia la región $x \approx x_0$.

En la metodología propuesta inicialmente por del Rio y Elaskar (2010) para intermitencia tipo II y luego extendida a intermitencia tipo III (Elaskar et al., 2011), la función RPD, $\phi(x)$, se evalúa a través de una función auxiliar $M(x)$, la cual está definida sobre el intervalo laminar $[-c, c]$:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-c}^x \tau \phi(\tau) d\tau}{\int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau}, & \text{si } \int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau \neq 0, \\ 0, & \text{si } \int_{-c}^x \phi(\tau) d\tau = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

La función $M(x)$ es más confiable que utilizar directamente los datos numéricos o experimentales para obtener $\phi(x)$, ya que las integrales intervinientes reducen los efectos que provienen de las fluctuaciones estadísticas. Por otro lado, el cómputo numérico de $M(x)$ es muy sencillo, para ello simplemente se ordenan los puntos de reinyección tal que $x_j < x_{j+1}$, para luego estimar $M(x)$ mediante:

$$M(x_q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_j. \quad (6.3)$$

Cuando el menor punto de reinyección del mapa (LBR por sus siglas en inglés) se encuentra dentro del intervalo laminar ($\hat{x} > -c$), la función $M(x)$ ha mostrado ser aproximadamente lineal (del Rio et al., 2014), es decir:

$$M(x) = m(x - \hat{x}) + \hat{x}, \quad (6.4)$$

donde la pendiente de la recta es $0 < m < 1$. De acuerdo con estos resultados, la RPD resulta (Elaskar et al., 2011):

$$\phi(x) = d(x - \hat{x})^\alpha, \quad (6.5)$$

siendo d un parámetro de normalización y

$$\alpha = \frac{2m - 1}{1 - m}. \quad (6.6)$$

donde $\alpha > -1$ ya que $0 < m \leq 1$.

El límite LBR (\hat{x}) es un punto crítico de la RPD, en el cual $\phi(\hat{x}) \rightarrow \infty$ para $\alpha < 0$, y $\phi(\hat{x}) \rightarrow 0$ si $\alpha > 0$. El caso de $\alpha = 0$ ($m = 1/2$) corresponde a $\phi(x) = \text{cte}$ que es el caso particular de reinyección uniforme que ha sido ampliamente utilizado como una solución general.

6.1.3. Longitudes laminares

Para la determinación de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares $\phi_l(l)$ primero debe conocerse la longitud laminar, esto es, el número de iteraciones que necesita una trayectoria que se reinyecta en el punto x para abandonar el intervalo laminar. Con este propósito, se considera el mapa de Poincaré local, Ec. (6.1), y se asume que ε es positivo y pequeño, por lo tanto la diferencia $x_{n+1} - x_n$ puede aproximarse mediante la ecuación diferencial (Rasband, 1990; Nayfeh y Balachandran, 1995; Schuster y Just, 2005):

$$\frac{dx}{dl} = ax^2 + \varepsilon, \quad (6.7)$$

entonces, resolviendo la ecuación anterior para el intervalo $[-c, c]$, el número de iteraciones necesario para atravesar el canal es:

$$l(x, c) = \int_x^c \frac{1}{ax^2 + \varepsilon} dx = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} c \right) - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} x \right) \right]. \quad (6.8)$$

La probabilidad de encontrar una fase laminar de duración entre l y $l + dl$ es entonces:

$$\phi_l(l) = \phi[X(l, c)] \left| \frac{dX(l, c)}{dl} \right| = \phi[X(l, c)] \left| a [X(l, c)]^2 + \varepsilon \right|, \quad (6.9)$$

donde $X(l, c)$ es la inversa de la función $l(x, c)$ dada en la Ec. (6.8) con respecto al primer argumento, la cual puede escribirse en forma explícita para el caso del mapa cuadrático (6.1):

$$X(l, c) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \tan \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} c \right) - \sqrt{a\varepsilon} l \right]. \quad (6.10)$$

Como se observa en la Ec. (6.9), la probabilidad $\phi_l(l)$ depende directamente de la RPD. Teniendo en cuenta publicaciones previas donde la función RPD se asume uniforme o monótonamente decreciente, las formas posibles de la probabilidad $\phi_l(l)$ quedaban limitadas por esas definiciones simplificadas (Schuster y Just, 2005; Klimaszewska y Zebrowski, 2009). Sin embargo, con la aplicación de la nueva metodología se comprobó que la forma cualitativa de la función $\phi_l(l)$ depende de la combinación de valores del límite \hat{x} que define la mínima reinyección del mapa y del exponente α de la Ec. (6.5) que depende de la RPD. En la Figura 6.2 se observan las diferentes posibilidades en función de estos valores.

Puede verse en la figura que existen variantes muy diferentes de las posibles formas de la función $\phi_l(l)$, pudiendo por ejemplo existir un máximo local (caso (b)). Este hecho podría ser usado en estudios experimentales con el objetivo de identificar los parámetros desconocidos del sistema a partir de la forma de $\phi_l(l)$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el ruido siempre está presente y su influencia puede alterar las formas esperadas llevando a confusiones (ver Sección 6.3).

6.1.4. Limitaciones de la metodología

La metodología presentada anteriormente ha mostrado ser efectiva para la caracterización de la intermitencia en los tres tipos más importantes (I, II y III) (del Rio y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Rio et al., 2014), incluso en los casos donde se considera efecto del ruido (del Rio et al.,

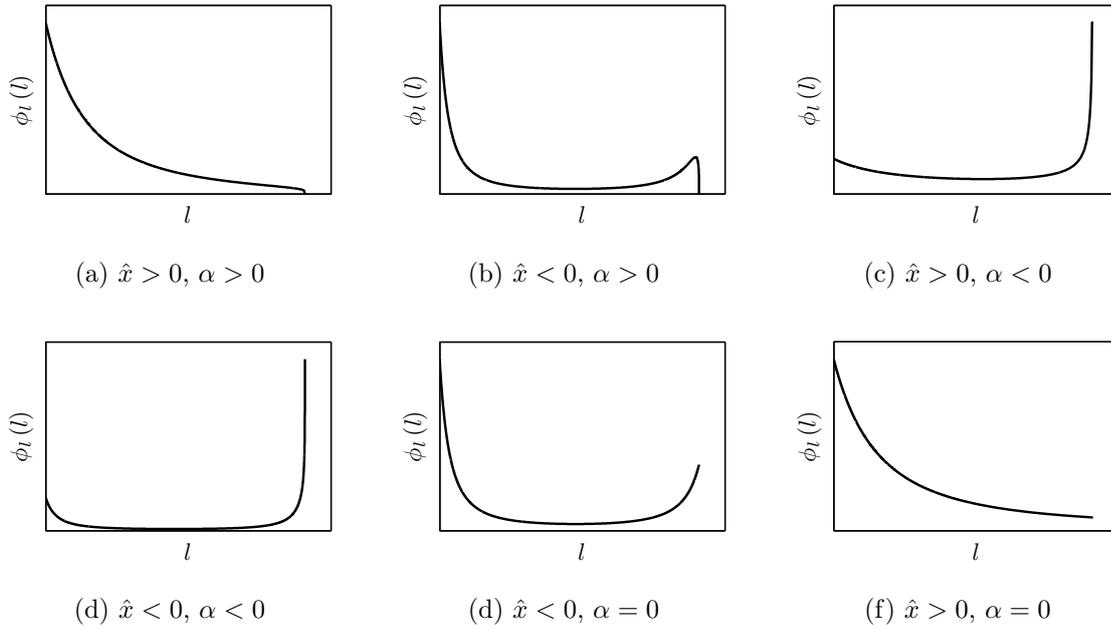


Figura 6.2: Distintas formas de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares $\phi_l(l)$ en función de los parámetros \hat{x} y α que definen la RPD.

2012). Sin embargo, en el caso particular de intermitencia tipo I, el análisis se realiza considerando un modelo que no permite cubrir la totalidad de los problemas.

Una de las características que diferencian la intermitencia tipo I de los tipos II y III es la naturaleza del mapa local. En este caso el valor positivo del parámetro de control hace que desaparezca el punto fijo que existía para $\varepsilon = 0$, generándose el canal entre la bisectriz y el mapa de Poincaré local. En este tipo de problema, la posición del menor punto de reinyección LBR tiene una importancia fundamental, ya que es este límite el que define en gran parte la forma de las soluciones posteriores, no sólo en la función $\phi_l(l)$ según se observa en la Figura 6.2, sino que puede ser determinante en la forma de la RPD y en la relación característica.

En los estudios de intermitencia tipo I que se han llevado a cabo hasta la actualidad, más allá de la metodología utilizada en cada caso para la representación de la RPD, siempre se han considerado mapas donde el límite LBR se encuentra dentro del intervalo laminar $[-c, c]$ (Hirsch et al., 1982a; Kim et al., 1994; del Rio et al., 2014). Estas condiciones hacen que tanto la RPD como la densidad de probabilidad de las longitudes laminares sean funciones continuas o a lo sumo deltas de Dirac (reinyección concentrada en un solo punto).

El hecho de considerar al LBR por debajo del límite inferior del intervalo laminar ($\hat{x} < -c$) conduce a funciones RPD y $\phi_l(l)$ discontinuas, con formas arbitrarias que no permiten utilizar funciones simples para su representación ni aplicar directamente la metodología basada en la

función $M(x)$ descrita en la sección anterior. La aparición de las discontinuidades se debe a que cuando el LBR está lejos del límite inferior del intervalo laminar, se produce una concentración de reinyecciones en la región cercana a ese límite, lo cual genera un salto en la RPD y consecuentemente en la distribución $\phi_l(l)$.

Además de los problemas asociados a la posición del LBR, otro aspecto que produce inconvenientes es cuando se considera el efecto del ruido en intermitencia tipo I. En ese sentido, la presencia del ruido puede también conducir a funciones discontinuas con formas arbitrarias aún en el caso simple de “ruido blanco” aplicado al mecanismo de reinyección.

Las situaciones detalladas anteriormente abren el camino a la segunda parte de la investigación desarrollada en este trabajo de tesis, en la cual se proponen adaptaciones de la metodología de aproximación analítica de la RPD para considerar problemas más generales como el de la intermitencia en la ecuación DNLS. Por otro lado, este desarrollo permitirá extender algunas conclusiones que actualmente existen respecto al fenómeno general de intermitencia tipo I.

6.2. Adaptación de la Metodología

Para el estudio se considera el mapa cuadrático (6.1),

$$x_{n+1} = f(x) = ax_n^2 + x_n + \varepsilon, \tag{6.11}$$

donde ε es el parámetro de control y el coeficiente a determina la posición del mínimo de la parábola (punto con derivada nula). En el análisis se considera que el punto con derivada nula coincide con el límite LBR, es decir:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{\hat{x}} = 0, \tag{6.12}$$

por lo tanto

$$\hat{x} = -\frac{1}{2a}. \tag{6.13}$$

Para que el fenómeno de intermitencia se produzca, el mecanismo de reinyección global se hace

mediante la disposición de la siguiente función general:

$$g(x) = \hat{x} + h [f(x_{\max}) - x]^\gamma, \quad \gamma > 0, \quad (6.14)$$

donde x_{\max} es el extremo derecho de la parábola, es decir el punto de intersección entre el mapa local, Ec. (6.11), y el mapa de reinyección, Ec. (6.14). El coeficiente h se obtiene de manera que $g(x_{\max}) = f(x_{\max})$, por lo tanto

$$h = \frac{f(x_{\max}) - \hat{x}}{[f(x_{\max}) - x_{\max}]^\gamma}. \quad (6.15)$$

La función de retorno $g(x)$ permite analizar diferentes procesos de reinyección mediante la utilización de distintos valores del exponente γ . De esta manera, el mapa completo $F(x)$ se define como:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = ax^2 + x + \varepsilon, & \text{si } x \leq x_{\max}, \\ g(x) = \hat{x} + h [f(x_{\max}) - x]^\gamma, & \text{si } x > x_{\max}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Este mapa tiene dos mecanismos de reinyección diferentes, uno de ellos se produce por las trayectorias que provienen directamente de la función $g(x)$, mientras que el otro, el cual se produce cuando el LBR está posicionado lejos del punto fijo x_0 fuera del intervalo laminar, se debe a las órbitas que pasan por puntos $x < -c$, donde c es la semilongitud del intervalo laminar $[-c, c]$.

A consecuencia de estos diferentes mecanismos de reinyección, la RPD será discontinua ya que mientras las trayectorias que se reinyectan desde $g(x)$ pueden hacerlo en todo el intervalo laminar, los puntos de reinyección x_j tales que $F^{-1}(x_j) < -c$ se reinyectan únicamente dentro del subintervalo $[-c, F(-c))$. De este modo, aparece una discontinuidad en la RPD en el punto $F(-c)$ debido a que la proporción de puntos de reinyección provenientes de $g(x)$ es en general menor que la de aquellos que pasan por regiones próximas a la del punto \hat{x} , cuya derivada nula favorece la concentración.

Este análisis ya fue parcialmente realizado por [Kim et al. \(1994\)](#), pero en ese caso no se estudió la estructura de la RPD en la región $x < -c$, sino que se consideró solamente la zona del intervalo laminar donde la RPD es continua. En este trabajo se muestra que si bien la consideración de esa región no influye en la forma de la relación característica, sí repercute en la densidad de probabilidad de las longitudes laminares. Este estudio permite obtener algunas conclusiones adicionales respecto

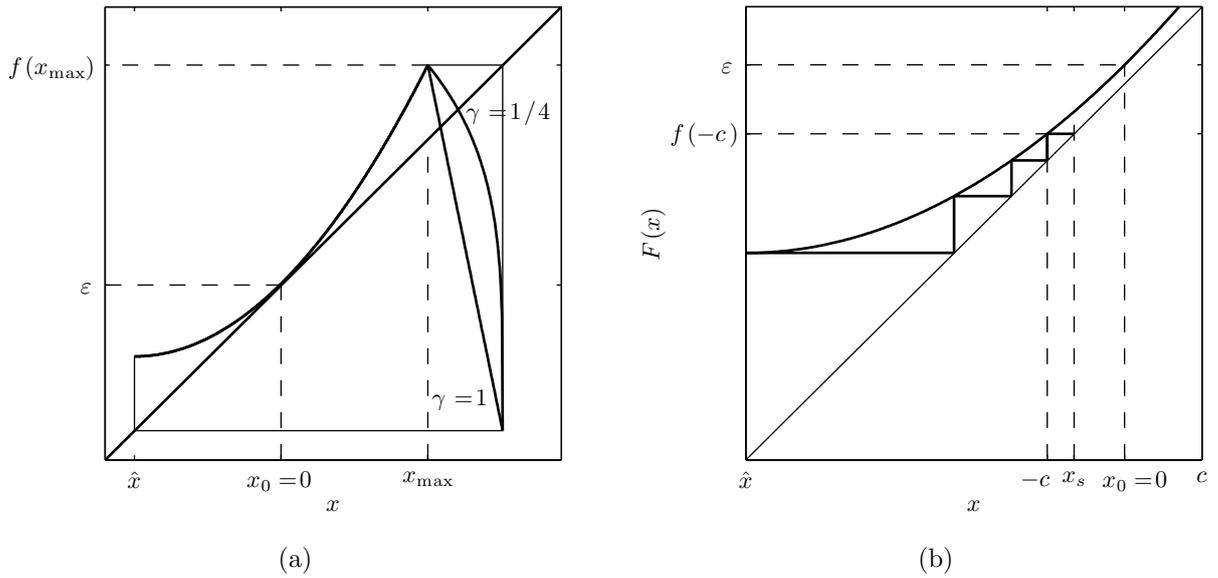


Figura 6.3: (a) Mapa $F(x)$ indicado en la ecuación (6.16) para distintos valores de γ . (b) Disposición de los puntos $-c = x_i$ y $x_s = F(x_i)$

a la duración media de las fases laminares.

Diferentes formas de la RPD pueden definirse a través del exponente γ . Para $\gamma = 1$, las reinyecciones provenientes de la derecha presentan una probabilidad uniforme ya que la función $g(x)$ es lineal. Caso contrario, para $0 < \gamma < 1$, resulta $dg(x)/dx|_{f(x_{\max})} = \infty$ y las órbitas permanecen mayor tiempo en la región superior del mapa, favoreciendo la reinyección en la zona derecha del intervalo laminar, lo cual produce una RPD creciente. Funciones RPD decrecientes se pueden lograr con $\gamma > 1$, pero este caso en principio no es de interés para esta investigación ya que ese tipo de funciones fue ampliamente estudiada (Hirsch et al., 1982a,b; Kim et al., 1994).

En la Figura 6.3 se muestra el mapa (6.16) para distintos valores de γ . Además se muestra la trayectoria que pasa por el punto con derivada nula (\hat{x}), la cual finaliza reinyectada en el subintervalo $[x_i, x_s)$, donde x_i es el punto de reinyección de dicha trayectoria, y x_s es el valor de la siguiente iteración de x_i ($x_s = F(x_i)$). Con el objetivo de no complicar las expresiones y sin pérdida de generalidad, se asume que el límite del intervalo laminar está dado por $-c = x_i$, por lo tanto $x_s = F(-c)$, que es el punto donde se produce la discontinuidad. Debe notarse que x_i es el punto de reinyección correspondiente al punto con derivada nula \hat{x} y también a la reinyección del extremo inferior de $g(x)$ cuya derivada depende del valor del exponente γ , por lo tanto x_i es un punto crítico donde $\phi(x_i) \rightarrow \infty$ o $\phi(x_i) \rightarrow 0$, dependiendo del valor de γ (del Rio y Elaskar, 2010). Debido a la condición $-c = x_i$ la singularidad se produce en el extremo izquierdo del intervalo laminar lo cual simplifica las expresiones.

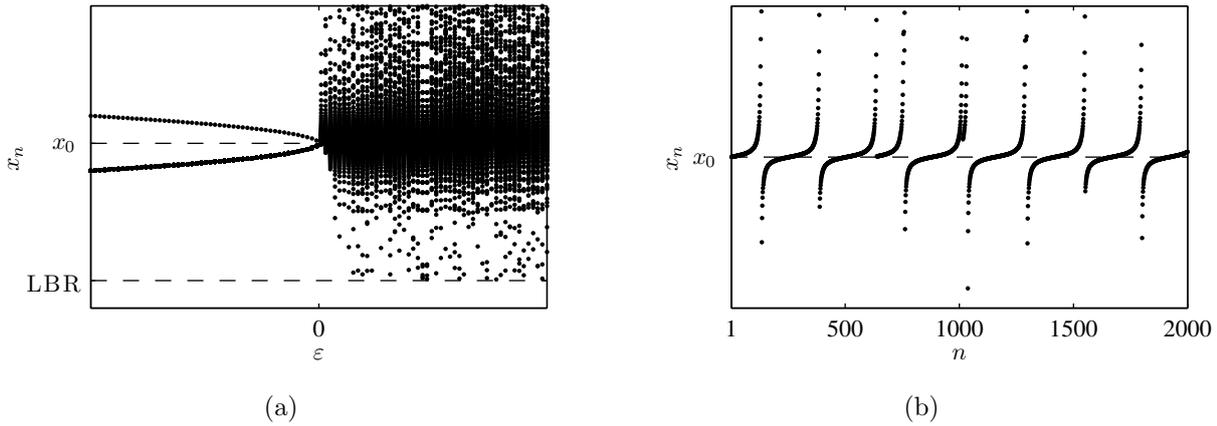


Figura 6.4: (a) Diagrama de bifurcación para el mapa (6.16). (b) Visualización de las fases laminares y las explosiones caóticas para $\varepsilon = 0,001$.

En la Figura 6.4 se presenta el diagrama de bifurcación y la visualización de las fases laminares para el mapa especificado. Puede observarse en esa figura que para $\varepsilon < 0$ existen dos ramas de puntos fijos, una estable (inferior) y otra inestable (superior), mientras que para $\varepsilon > 0$ hay caos. Por otro lado, la Figura 6.4-(b) muestra la evolución de las iteraciones evidenciando la característica alternancia entre las fases laminares y las explosiones caóticas presente en el fenómeno de intermitencia.

Resultados para $\gamma > 1$ no tienen relevancia para el objetivo de este trabajo, ya que en ese caso resulta $dg(x)/dx|_{f(x_{\max})} = 0$ y por lo tanto se produce una concentración de puntos en esa región, cuyas trayectorias van a retornar a zonas cercanas al LBR donde la derivada también es nula. Esto significa que la gran mayoría de las reinyecciones serán en el subintervalo $[-c, F(-c))$, y en ese caso como todos los puntos dentro de ese subintervalo tienen la misma longitud laminar, es irrelevante la forma de la RPD y puede asumirse directamente una reinyección fija en el extremo izquierdo del intervalo laminar.

En las expresiones que se obtienen más adelante se utiliza x_i en lugar de $-c$ ya que si se utilizara $-c$ las formulaciones no serían válidas para el caso $x_0 \neq 0$, donde los extremos del intervalo laminar no coinciden con la semilongitud del mismo. Por otro lado, el signo negativo en $-c$ podría introducir confusiones en el desarrollo de las expresiones.

6.2.1. Aproximación analítica de la RPD

Anteriormente se explicó que debido a la posición del punto LBR, por debajo del límite inferior del intervalo laminar, la función RPD será discontinua en el punto $x_s = F(x_i)$. Por lo tanto, para

la representación analítica de la misma se considera que la función puede componerse con dos funciones continuas $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$. La primera de ellas se define en el subintervalo (x_i, x_s) y la segunda se aplica en la región restante del intervalo laminar.

La razón por la cual la función $\phi_2(x)$ no se aplica en todo el intervalo laminar se debe a que la influencia de las reinyecciones provenientes de $g(x)$ en el subintervalo (x_i, x_s) es despreciable frente a las reinyecciones provenientes de $x_j < -c$, por lo tanto puede pensarse que cada región tiene un mecanismo de reinyección diferente. Esta suposición permite simplificar notablemente las expresiones posteriores obteniendo igualmente buenos resultados.

Para determinar las funciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ se utiliza la metodología presentada en la Sección 6.1.2, la cual puede aplicarse ya que en cada subintervalo la función $M(x)$ asociada es aproximadamente lineal, es decir:

$$M_i(x) = m_i (x - x_{\min}) + x_{\min}, \quad (6.17)$$

donde $x_{\min} = x_i$ para ϕ_1 y $x_{\min} = x_s$ para ϕ_2 , entonces

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = d (x - x_i)^{\alpha_1}, & \text{si } x < x_s, \\ \phi_2(x) = dk (x - x_i)^{\alpha_2}, & \text{si } x \geq x_s. \end{cases} \quad (6.18)$$

El factor k pondera los diferentes números de reinyecciones provenientes de la región $x < -c$ con respecto a aquellas que llegan desde la la función $g(x)$ ($x > c$). Los parámetros α_1 , α_2 y k se determinan considerando la definición de $M(x)$. El factor d se utiliza únicamente a los fines de normalizar la probabilidad tal que $\int \phi(x) dx = 1$ en el intervalo laminar. El punto x_i es el punto singular donde $\phi(x_i) \rightarrow \infty$ si $\alpha_1 < 0$, o $\phi(x_i) \rightarrow 0$ para $\alpha_1 > 0$.

De las ecuaciones (6.17) y (6.6) se obtienen los exponentes α_1 y α_2 :

$$\alpha_i = \frac{2m_i - 1}{1 - m_i} \quad (6.19)$$

donde m_1 se calcula con los puntos de reinyección $x_j < x_s$ y m_2 con los puntos restantes.

En la Figura 6.5 se muestran las funciones $M_i(x)$ para cada subintervalo donde las funciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ están definidas. Allí puede observarse que la forma aproximadamente lineal de cada función $M_i(x)$ se verifica en ambos casos. Comportamientos similares se registran independientemente de los valores de ε , a y γ .

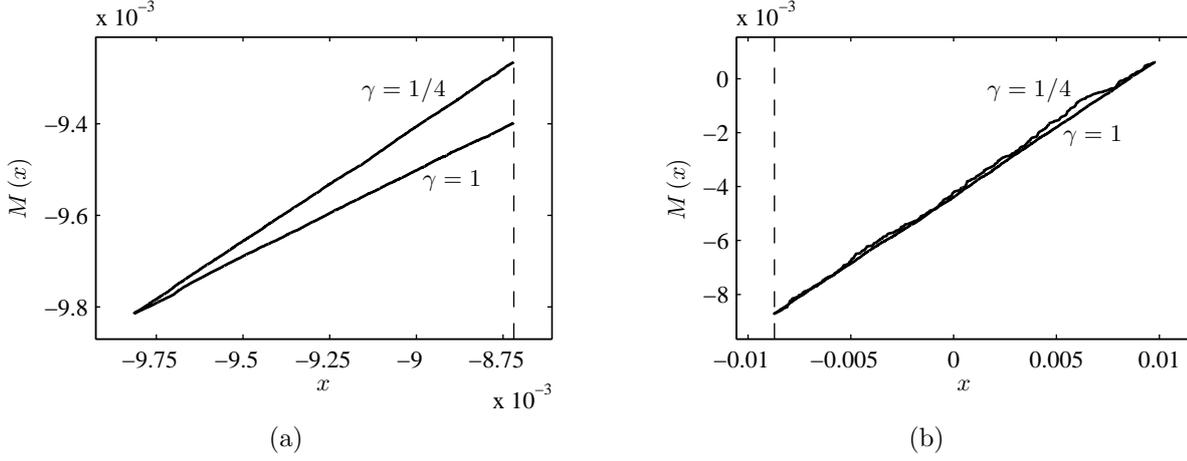


Figura 6.5: Función $M(x)$ para $\varepsilon = 10^{-3}$, $c = 10^{-2}$, $\gamma = 1$ y $\gamma = 1/4$. (a) Subintervalo $[x_i, x_s]$: $m_{\gamma=1} = 0,386$, $m_{\gamma=1/4} = 0,502$. (b) Subintervalo $[x_s, c]$: $m_{\gamma=1} = 0,504$, $m_{\gamma=1/4} = 0,519$. En ambos casos $M(x)$ es aproximadamente lineal.

En la Figura 6.5-(b) se observa que en el subintervalo $[x_s, c]$ se produce $m_{\gamma=1} \approx m_{\gamma=1/4} \approx 1/2$, siendo $m = 1/2$ la pendiente para el caso particular de reinyección uniforme. Esto se debe a que el intervalo laminar es pequeño, y por lo tanto la función $g(x)$ se comporta aproximadamente como una función lineal en esa región cuando las trayectorias se reinyectan. De este modo $m \approx 1/2$ aún en el caso de $\gamma \approx 1/4$. A pesar de esta similitud, la diferencia entre las pendientes de cada función permite obtener distintas RPD para cada valor de γ , tal como se verá más adelante.

Habiendo definido los exponentes α_1 y α_2 y teniendo en cuenta que la función $M(x)$ global no depende del parámetro de normalización d , sólo resta determinar el factor k , el cual se obtiene utilizando la definición de la función $M(x)$ global, es decir, cuando se consideran todos los puntos de reinyección. De la Ec. (6.2) resulta:

$$M(x) = \frac{\int_{x_i}^{x_s} \tau \phi_1(\tau) d\tau + \int_{x_s}^x \tau \phi_2(\tau) d\tau}{\int_{x_i}^{x_s} \phi_1(\tau) d\tau + \int_{x_s}^x \phi_2(\tau) d\tau}.$$

En este caso la función $M(x)$ presenta un quiebre en $x = x_s$, coincidente con la discontinuidad de $\phi(x)$, y su forma no es lineal para $x > x_s$. Resolviendo las integrales se obtiene para $x > x_s$:

$$M(x) = \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s(\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)} + k(x - x_i)^{\alpha_2+1} \frac{x(\alpha_2 + 1) + x_i}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)} - k(x_s - x_i)^{\alpha_2+1} \frac{x(\alpha_2 + 1) + x_i}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)}}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} + k \frac{(x - x_i)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2 + 1)} - k \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2 + 1)}}. \quad (6.20)$$

Ya que los valores de $M(x)$ son conocidos, el factor k puede despejarse de la expresión anterior en términos de los parámetros restantes:

$$k = \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s(\alpha_1+1) + x_i}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)} - \frac{M(x)}{(\alpha_1+1)} (x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\frac{M(x)}{(\alpha_2+1)} \left[(x - x_i)^{\alpha_2+1} - (x_s - x_i)^{\alpha_2+1} \right] + \frac{(x - x_i)^{\alpha_2+1} [x(\alpha_2+1) + x_i] - (x_s - x_i)^{\alpha_2+1} [x_s(\alpha_2+1) + x_i]}{(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)}}} \quad (6.21)$$

El factor k resulta ser aproximadamente constante independientemente del punto $x > x_s$ utilizado, sin embargo conviene no utilizar un punto muy cercano a la discontinuidad ya que allí pueden existir fluctuaciones que conducen a valores de k no apropiados. Una buena implementación es calcular k para una serie de puntos del intervalo y luego tomar el valor medio de los resultados de la serie.

Finalmente mediante la condición de normalización se obtiene el parámetro d :

$$d = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1+1} (x_s - x_i)^{\alpha_1+1} + \frac{k}{\alpha_2+1} \left[(2c)^{\alpha_2+1} - (x_s - x_i)^{\alpha_2+1} \right]}. \quad (6.22)$$

De esta manera quedan definidos todos los parámetros que intervienen en la función $\phi(x)$. En la Figura 6.6 se muestran resultados de la función $M(x)$ y de la RPD para distintos valores de ε y γ . En el caso de $M(x)$, los resultados de la aproximación analítica (6.20) prácticamente coincide con los datos numéricos. En cuanto a la RPD, la línea continua que representa la estimación teórica, Ec. (6.18), aproxima muy bien la distribución de puntos que se obtiene numéricamente.

Una vez obtenida la RPD pueden evaluarse otras propiedades estadísticas como la densidad de probabilidad de las longitudes laminares $\phi_l(l)$, cuya determinación se hace simplemente reemplazando la función $\phi(x)$ en la Ec. (6.9). En la Figura 6.7 se presentan los resultados obtenidos para $\phi_l(l)$. Nuevamente, la línea continua que indica la representación analítica aproxima muy bien los puntos correspondientes a los datos numéricos. Además se observa la discontinuidad en $\phi_l(l)$ producida por el doble mecanismo de reinyección.

6.2.2. Relaciones características

A continuación se realiza el análisis para determinar la llamada relación característica $\langle l \rangle \sim \varepsilon^\beta$, donde $\langle l \rangle$ es la longitud laminar media y β es el exponente crítico, constante para $\varepsilon \rightarrow 0$. La

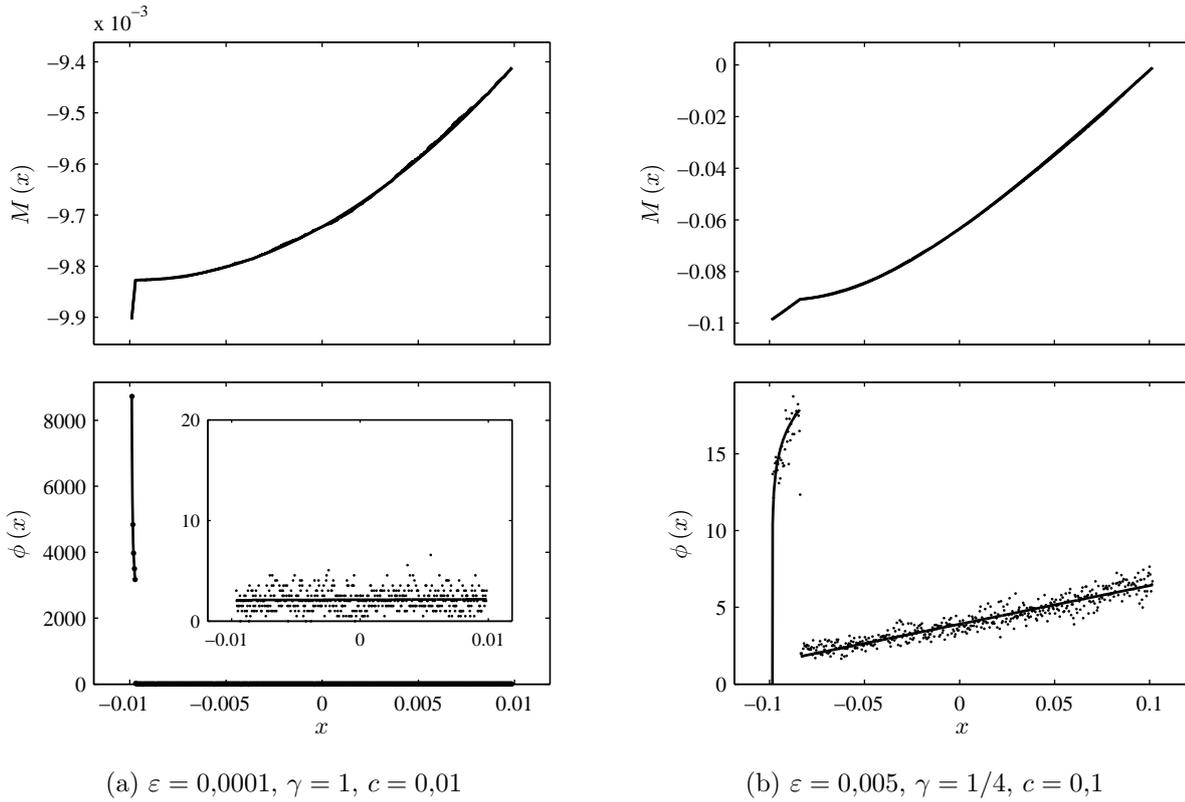


Figura 6.6: Resultados de la función $M(x)$ y la RPD para mapas con $a = 1$.

relación característica es una importante propiedad del fenómeno de intermitencia, ya que permite conocer de qué manera influye el parámetro de control en la duración media de las fases laminares.

La longitud laminar media $\langle l \rangle$ depende de la longitud laminar y de la probabilidad de reinyección

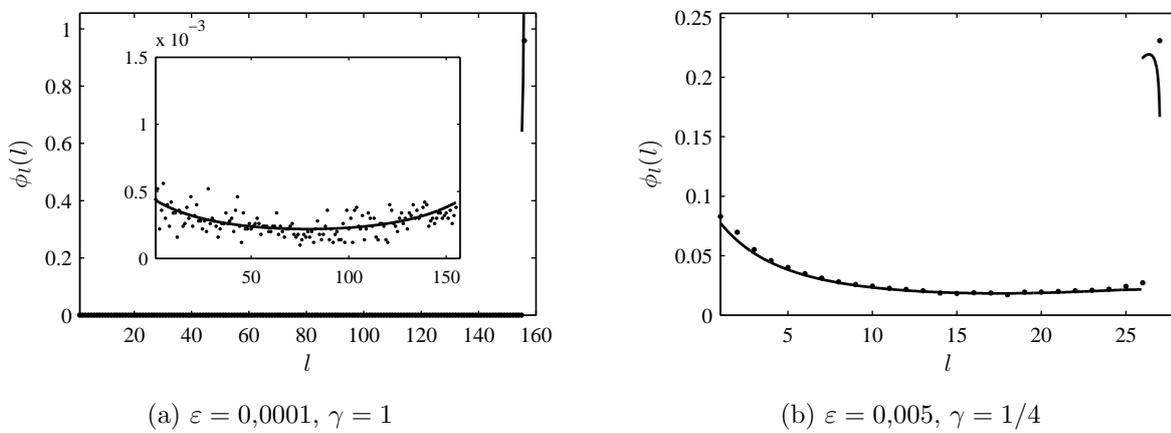


Figura 6.7: Densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.16) y distintos valores del parámetro de control ε

$\phi(x)$ (Rasband, 1990; Schuster y Just, 2005):

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^c \phi(x) l(x, c) dx. \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta la definición de $\phi(x)$ en la Ec. (6.18), la longitud laminar media se escribe como:

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^{x_s} \phi_1(x) l(x, c) dx + \int_{x_s}^c \phi_2(x) l(x, c) dx. \quad (6.24)$$

El primer sumando de la derecha se reduce a calcular la integral de $\phi_1(x)$, ya que $l(x, c) = l(-c, c)$ en el subintervalo $[x_i, x_s)$, puesto que todas las trayectorias que parten de ese subintervalo requieren de la misma cantidad de iteraciones para abandonar el intervalo laminar. De esta forma la expresión anterior resulta:

$$\langle l \rangle = l(-c, c) \frac{d(x_s - x_i)^{\alpha_1 + 1}}{\alpha_1 + 1} + \int_{x_s}^c \phi_2(x) l(x, c) dx. \quad (6.25)$$

Teniendo en cuenta que $\phi_2(x)$ y $l(x, c)$ son funciones continuas en el intervalo $[x_s, c]$, el teorema del valor medio indica que existe un valor x' en dicho intervalo tal que

$$\int_{x_s}^c \phi_2(x) l(x, c) dx = (c - x_s) \phi_2(x') l(x', c). \quad (6.26)$$

El valor $\phi_2(x')$ está dentro del intervalo $(\phi_{2\min}, \phi_{2\max})$, donde $\phi_{2\min}$ y $\phi_{2\max}$ son los valores mínimo y máximo de la función $\phi_2(x)$ con x en $[x_s, c]$. Esto indica que el límite de la expresión (6.26) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es proporcional al límite correspondiente a $l(x', c)$. Teniendo en cuenta las Ecs. (6.25), (6.26) y (6.8) resulta que se cumple $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$. Esto indica que el exponente crítico de la relación característica es $\beta = -1/2$ independientemente de la forma de la RPD.

Volviendo a la Ec. (6.25), se observa que la integral del segundo término no tiene solución analítica y por lo tanto debe calcularse numéricamente o, de lo contrario, se debe reformular la función $\phi_2(x)$ de manera que además de reproducir correctamente la RPD, permita obtener una integral con solución analítica. En ese sentido, en vista de los resultados de la Figura 6.6 y sabiendo que numerosas simulaciones muestran comportamientos similares, se propone para $\phi_2(x)$

una función lineal de la forma:

$$\phi_2(x) = b [p + k_2 (x - x_s)], \quad (6.27)$$

donde los factores p y k_2 se obtienen también utilizando la definición de la función $M(x)$ como en el caso anterior. Entonces puede escribirse:

$$M(x) = \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s (\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 1)(\alpha + 2)} + \frac{1}{2} (p - k_2 x_s) (x^2 - x_s^2) + \frac{k_2}{3} (x^3 - x_s^3)}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} + (p - k_2 x_s) (x - x_s) + \frac{k_2}{2} (x^2 - x_s^2)}, \quad (6.28)$$

por lo tanto, para cualquier punto $x > x_s$ resulta:

$$k_2 = \frac{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} \left[\frac{x_s (\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 2)} - M(x) \right] + p \left[\frac{1}{2} (x^2 - x_s^2) - M(x) (x - x_s) \right]}{\frac{1}{2} (x^2 - x_s^2) [M(x) + x_s] - \frac{1}{3} (x^3 - x_s^3) - (x - x_s) M(x) x_s}. \quad (6.29)$$

Reemplazando k_2 por la expresión anterior en la función $M(x)$, Ec. (6.28), puede obtenerse el parámetro p ya que los valores de $M(x)$ son conocidos:

$$p = \frac{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} \left[\frac{x_s (\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 2)} - M(x_k) \right] + \frac{A}{3C} (c^3 - x_s^3) + \frac{A}{2C} (x^2 - x_s^2) [M(x) + x_s] + \frac{A}{C} M(x) x_s (x - x_s)}{(x - x_s) \left[M(x) - \frac{B}{C} x_s \right] + \frac{B}{2C} (x^2 - x_s^2) \left[M(x) + x_s - \frac{C}{B} \right] - \frac{B}{3C} (x^3 - x_s^3)} \quad (6.30)$$

donde las constantes A , B y C son tales que

$$k_2 = \frac{A + pB}{C}, \quad (6.31)$$

de acuerdo a la ecuación (4.38).

Finalmente, el parámetro de normalización resulta en este caso:

$$d = \frac{1}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha + 1} + (p - k_2 x_s) (c - x_s) + \frac{k_2}{2} (c^2 - x_s^2)}. \quad (6.32)$$

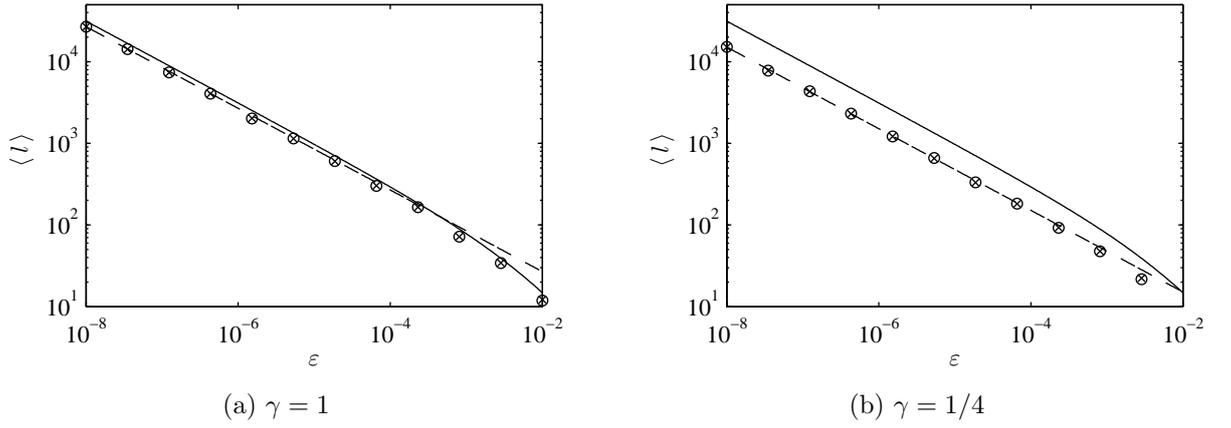


Figura 6.8: Longitud laminar media en función del parámetro de control para $c = 0,10$. Las cruces correspondientes a los resultados analíticos prácticamente coinciden con los círculos que representan los datos numéricos. La línea continua indica la longitud laminar máxima $l(-c, c)$ y la línea de trazos la tendencia $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$.

Por último, con las Ecs. (6.8) y (6.27), la integral del segundo término de la Ec. (6.25) resulta:

$$\int_{x_s}^c d[p + k_2(x - x_s)] l(x, c) dx = d(p - k_2 x_s) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{ac^2 + \varepsilon}{ax_s^2 + \varepsilon} \right) - x_s l(x_s, c) \right] + d \frac{k_2}{2} \left[\frac{1}{a} (c - x_s) - \left(x_s^2 + \frac{\varepsilon}{a} \right) l(x_s, c) \right] \quad (6.33)$$

y así se obtiene una expresión analítica para la longitud laminar media.

Más allá de la posibilidad de resolver analíticamente la integral, el punto a destacar de la metodología propuesta es la versatilidad de su implementación en un fenómeno complejo, la cual permite obtener expresiones analíticas relativamente simples para aproximar la función RPD, donde la dificultad principal está en la determinación de los parámetros que intervienen en las soluciones (k, d , etc.).

En la Figura 6.8 se muestran resultados para $\langle l \rangle$ en función del parámetro de control ε . Los resultados de la aproximación teórica (símbolos \times) prácticamente se superponen a los datos obtenidos numéricamente (símbolos circulares), evidenciando el muy buen desempeño de la metodología. Además en la figura se muestra en línea continua la variación de la longitud laminar máxima $l(-c, c)$, y en línea de trazos la relación $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$ para visualizar la tendencia de $\langle l \rangle$. Puede observarse que la relación característica con $\beta = -1/2$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ se cumple en ambos casos independientemente de la forma de la RPD.

Los resultados de la Figura 6.8 son de significativa importancia en lo referente a las características propias del fenómeno de intermitencia tipo I. En este caso queda evidenciado que la forma

de la RPD no influye en la forma de la relación característica siempre que la posición del punto LBR esté fuera del intervalo laminar. Esta conclusión fue parcialmente verificada en el trabajo de [Kim et al. \(1994\)](#), pero en esa ocasión se exigía que la RPD tenga una forma monótonamente decreciente.

6.3. Efecto del ruido en Intermitencia tipo I

Ya que el ruido es un elemento siempre presente en la naturaleza, es de fundamental importancia conocer sus efectos en el fenómeno de intermitencia. Si bien el análisis de la influencia del ruido en el caso particular de intermitencia tipo I ya fue realizado en numerosos trabajos ([Hirsch et al., 1982a,b](#); [Pikovsky, 1983](#); [Kye et al., 2003](#); [Koronovskii y Hramov, 2008](#)), en esos casos se considera la presencia del ruido en la región laminar asumiendo un mecanismo de reinyección con distribución uniforme.

A continuación se realiza el análisis del efecto del ruido en intermitencia tipo I considerando diferentes mecanismos de reinyección. Para el estudio se adapta la metodología utilizada en la sección anterior para obtener la densidad de probabilidad de reinyección con efecto del ruido (NRPD). Para contrastar los resultados se utilizan las mismas definiciones empleadas en el trabajo de [del Rio et al. \(2014\)](#), en el cual el mapa global está constituido por el mismo mapa cuadrático local de la Ec. (6.11) y una función de retorno que produce similares resultados a los del análisis anterior, dada por $g(x) = \hat{x} + h(x - 1)^\gamma$, donde por simplicidad se hace $f(x_{\max}) = 1$ y el coeficiente h se obtiene de las condiciones $g(x_{\max}) = \hat{x}$ y $g(1) = 1$. El mapa global $F(x)$ es entonces:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = a x^2 + x + \varepsilon + \sigma_l \xi_n, & \text{si } x < x_{\max}, \\ g(x) = \hat{x} + \frac{1 - \hat{x}}{(1 - x_{\max})^\gamma} (x - x_{\max})^\gamma + \sigma_r \xi_n & \text{si } x > x_{\max} \end{cases} \quad (6.34)$$

Los términos que involucran a la variable ξ_n en la Ec. (6.34) modelan el efecto del ruido en el sistema. En la región laminar se considera una intensidad de ruido σ_l mientras que para el mecanismo de reinyección la intensidad es σ_r . La variable ξ_n es una variable aleatoria para la cual se asume una distribución de probabilidad uniforme (“ruido blanco”).

Con esta configuración es posible modelar un ruido de alta intensidad en el mecanismo de reinyección, donde σ_r puede ser mucho mayor que el parámetro de control ε , mientras que para la región laminar se preserva la condición $\sigma_l < \varepsilon$. Esto se hace con el objetivo de enfocar el análisis

sobre el efecto del ruido en el mecanismo de reinyección global, ya que la condición $\sigma_l < \varepsilon$ asegura que la dinámica del sistema en la región laminar estará gobernada por la dinámica del mapa, excluyendo de este modo las distorsiones que generan las órbitas que reingresan al intervalo laminar por acción del ruido apenas después de haberlo abandonado, o la existencia de trayectorias que evolucionan en dirección opuesta. Por otro lado, para niveles de ruido altos en la región laminar ya no serían válidas las expresiones obtenidas para la longitud laminar y la densidad de probabilidad $\phi_l(l)$, Ecs. (6.8) a (6.10), puesto que la aproximación diferencial ya no es posible.

Al final de esta sección se libera esta restricción para mostrar la influencia del ruido de alto nivel en la región laminar, lo cual repercute fuertemente en la densidad de probabilidad de las longitudes laminares y en las relaciones características donde se produce el fenómeno de saturación, mientras que la RPD prácticamente no se modifica ya que su determinación no depende de lo que sucede en el mapa local.

En el trabajo mencionado (del Rio et al., 2014), la posición del punto LBR se asume dentro del intervalo laminar ($-c \leq \hat{x} < c$), garantizando de esta forma que la RPD sea continua con su respectiva función $M(x)$ aproximadamente lineal. Sin embargo, como se verá más adelante, la presencia de ruido de alta intensidad en el mecanismo de reinyección puede cambiar estas propiedades, dando lugar a funciones más complejas.

La utilización del exponente $\gamma > 0$ en la función $g(x)$ tiene el mismo sentido que en el caso sin ruido, es decir, modelar distintas formas de funciones RPD. En la Figura 6.9 se muestra el mapa (6.34) para distintos valores de γ y se indica el efecto del ruido sobre la posición del LBR.

6.3.1. Caracterización de la Intermittencia tipo I con efecto del ruido

A continuación se presenta la extensión de la metodología introducida en la Sección 6.1.2 para analizar el efecto del ruido en intermitencia tipo I, considerando el mapa (6.34) para $\varepsilon > \sigma_l \rightarrow 0$. Esta condición no afecta los resultados relacionados a la función $M(x)$ y a la RPD ya que estas propiedades sólo dependen del mecanismo de reinyección global.

La presencia del ruido no sólo produce la modificación de la función RPD debida a la redistribución de los puntos de reinyección, sino que además genera el corrimiento del punto LBR a la posición $\hat{x} - \sigma_r$. Este corrimiento hace que la función $\phi_l(l)$ asociada se modifique respecto al modelo sin ruido, de acuerdo con las condiciones de la Figura 6.2 con el valor $\hat{x} - \sigma_r$ en lugar de \hat{x} . Por otro lado, si este corrimiento es tal que $\hat{x} - \sigma_r < -c$, aparece una discontinuidad en la RPD

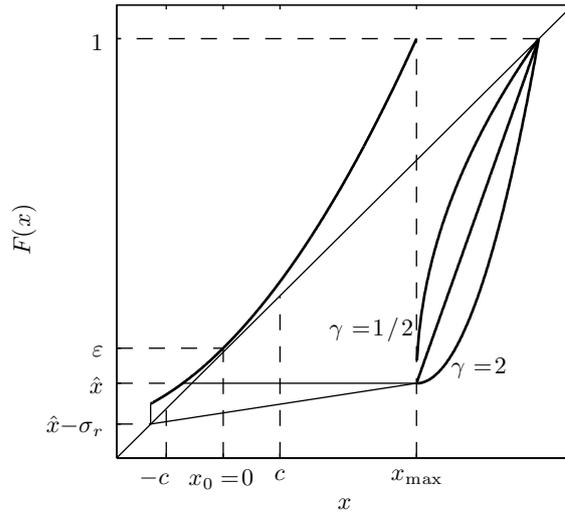


Figura 6.9: Mapa $F(x)$ indicado en la ecuación (6.34) para distintos valores de γ , donde se indica el desplazamiento del punto LBR por efecto del ruido.

por los mismos motivos que se detallaron en el análisis de la Sección 6.2. Más allá de la nueva posición del LBR, el efecto del ruido hace que la función $M(x)$ asociada a $\phi(x)$ ya no sea lineal aun cuando $\hat{x} \in [-c, c]$, por lo tanto es necesario realizar consideraciones especiales.

Para obtener una expresión analítica de la RPD con efecto del ruido (NRPD), se estudia la influencia del ruido sobre las trayectorias de reinyección, tal como se muestra en la Figura 6.9, donde una trayectoria sin ruido es perturbada pudiendo terminar dentro de del intervalo $[x - \sigma_r, x + \sigma_r]$, siendo x el punto de mapeo para el caso sin ruido. Esto significa que la RPD sin ruido, $\phi(x)$, debe ser transformada a la nueva NRPD, $\Phi(x)$, de acuerdo a la convolución (del Río et al., 2012):

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) G(x - z, \sigma_r) dz, \quad (6.35)$$

donde $G(x - z, \sigma_r)$ es la distribución de probabilidad del término de ruido $\sigma_r \xi_n$ en el mapa (6.34).

Como fuente de ruido se utiliza una variable aleatoria de distribución uniforme ξ en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que la densidad de probabilidad G en la ecuación (6.35) resulta:

$$G(x, \sigma_r) = \frac{\Theta(x + \sigma_r) - \Theta(x - \sigma_r)}{2\sigma_r}, \quad (6.36)$$

donde Θ es la llamada función escalón Heaviside, que es igual a 1 para un argumento mayor que cero y se anula en caso contrario.

Asumiendo inicialmente que $\hat{x} - \sigma_r > -c$, y teniendo en cuenta las Ecs. (6.35), (6.36) y (6.5)

se obtiene:

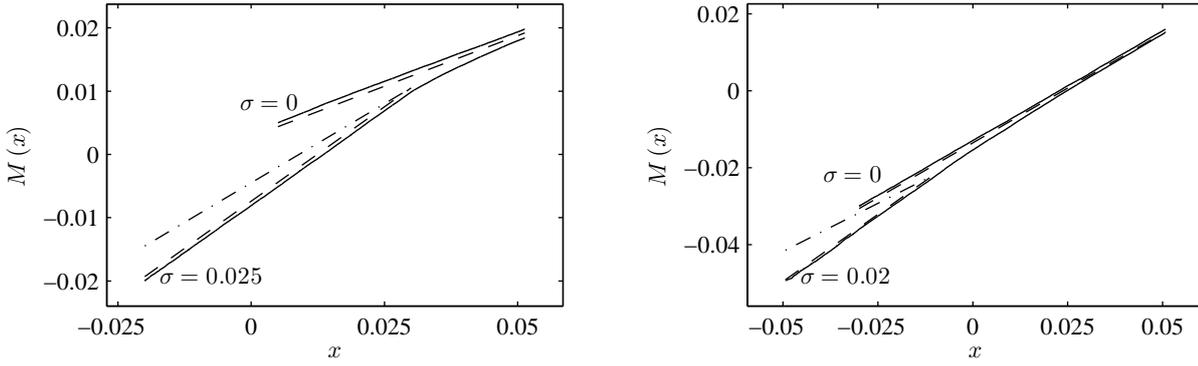
$$\Phi(x) = \frac{d}{2\sigma_r(\alpha + 1)} \left\{ [x - (\hat{x} - \sigma_r)]^{\alpha+1} - \Theta [x - (\hat{x} + \sigma_r)] [x - (\hat{x} + \sigma_r)]^{\alpha+1} \right\}. \quad (6.37)$$

El exponente α puede obtenerse directamente de los resultados correspondientes a la función $M(x)$ sin ruido, es decir, considerando los puntos de reinyección del mapa (6.34) con $\sigma_r = 0$. En ese caso $M(x)$ es lineal ya que $\hat{x} > -c$ y α se calcula con la Ec. (6.6). Sin embargo, los datos sin efecto del ruido no siempre están disponible y por lo tanto debe considerarse una alternativa para determinar el valor del exponente α .

Teniendo en cuenta la expresión de $\Phi(x)$, Ec. (6.37), se observa que la función Heaviside es no nula en la región $x > \hat{x} + \sigma_r$, es decir que para los puntos restantes $\Phi(x)$ tiene la forma de la RPD sin efecto ruido donde el punto LBR se ha trasladado a la posición $\hat{x} - \sigma_r$ y el exponente α se ha incrementado en una unidad. De acuerdo a la definición de $M(x)$, este resultado indica que esta función debería ser aproximadamente lineal en la región $x < \hat{x} + \sigma_r$ donde $\Theta = 0$, con una pendiente m' tal que produce un exponente $\alpha' = (2m' - 1) / (1 - m') = \alpha + 1$.

Para verificar este comportamiento, en la Figura 6.10 se presentan resultados de funciones $M(x)$ con diferentes parámetros de mapa e intensidades de ruido para comparar con sus respectivas versiones sin ruido. Puede observarse en las figuras que las funciones $M(x)$ con efecto ruido presentan dos regiones aproximadamente lineales limitadas por el punto $\hat{x} + \sigma_r$ donde la función Heaviside cambia su valor. En la región izquierda ($x < \hat{x} + \sigma_r$) la pendiente de $M(x)$ con efecto ruido es tal que se cumple la relación $\alpha' \approx \alpha + 1$, donde α' es el exponente calculado con la Ec. (6.6) y con la pendiente m' correspondiente. Por otro lado, también se observa en la figura que, de igual manera que lo sucedido en intermitencia tipo II y III (del Rio et al., 2012), la pendiente de $M(x)$ en la región $x > \hat{x} + \sigma_r$ es similar a la de $M(x)$ sin ruido. De esta manera, es posible determinar el valor del exponente α sin efecto ruido a partir de los valores de $M(x)$ con ruido.

La ecuación (6.37) modela el efecto del ruido debido a la redistribución de los puntos de reinyección para $\hat{x} - \sigma_r > -c$. En caso de que el corrimiento del límite LBR vaya más allá del extremo izquierdo del intervalo laminar, sucede una situación similar a la detallada en la Sección 6.2, apareciendo una discontinuidad en la NRPD por la concentración de puntos de reinyección en el subintervalo $[\hat{x}_2, x_s)$ respecto al resto del intervalo laminar. El punto \hat{x}_2 es en este caso el menor punto de reinyección de las trayectorias provenientes de $x < -c$, es decir, si $F(\hat{x} - \sigma_r) < -c$,



(a) $\hat{x} = 0,005, \gamma = 2.$

(b) $\hat{x} = -0,03, \gamma = 0,75$

Figura 6.10: Comparación de los resultados de $M(x)$ con diferentes niveles de ruido para $\varepsilon = 10^{-4}$, $c = 0,05$ y los valores indicados. Las líneas de trazos indican las pendientes aproximadas de cada función $M(x)$. Las pendientes son $m = 0,320$ ($\alpha = -0,529$) y $m' = 0,595$ ($\alpha' = 0,472$) para el caso (a), y $m = 0,570$ ($\alpha = -0,325$) y $m' = 0,697$ ($\alpha' = 1,296$) para (b). En ambos casos se verifica $\alpha' \approx \alpha + 1$. Además debe notarse que para valores mayores de x las pendientes de ambas funciones son similares. La pendiente de la línea de trazo y punto es $1/2$ indicando la pendiente de la reinyección uniforme.

$\hat{x}_2 \equiv -c$, por el contrario para $F(\hat{x} - \sigma_r) > -c$, $\hat{x}_2 \equiv F(\hat{x} - \sigma_r)$.

De igual manera que en el análisis de la Sección 6.2, si se consideran solamente los puntos $\hat{x}_2 \leq x < x_s$, se observa en todos los casos que la función $M(x)$ correspondiente también presenta una forma aproximadamente lineal, en consecuencia es posible asumir una solución de la forma:

$$\phi_r(x) = d k_r (x - \hat{x}_2)^{\alpha_r}, \quad (6.38)$$

donde el coeficiente α_r se calcula según la ecuación (2.18) considerando los puntos $\hat{x}_2 \leq x < x_s$ y d es el parámetro de normalización. Por otro lado, el factor k_r cumple la misma función que en el análisis sin ruido, es decir pondera la diferencia de proporción entre las reinyecciones que provienen desde $x < -c$ y las que se producen desde $g(x)$.

La función adicional $\phi_r(x)$ está definida en el subintervalo $[\hat{x}_2, x_s)$. La misma se suma a la solución de la Ec. (6.37) para $\hat{x}_2 \leq x < x_s$ incorporando de este modo ambos efectos en la solución general. En caso de que $\hat{x} - \sigma_r > -c$ no existe concentración de puntos, $k_r = 0$ y por lo tanto $\phi_r(x) = 0$.

sistema sin ruido, o bien considerando $M(x)$ en la región del extremo derecho del intervalo laminar donde las pendientes de esta función con y sin ruido son similares.

Las expresiones obtenidas anteriormente para las funciones $M(x)$ y la RPD son válidas independientemente del nivel de ruido en la región laminar, ya que estas funciones sólo dependen del mecanismo de reinyección global del sistema y no se ven influenciadas por lo que sucede en el mapa local, siempre que se excluyan los puntos que reingresan producto de iteraciones en sentido inverso a la evolución del mapa.

6.3.2. Evaluación de resultados con efecto del ruido

Para analizar la densidad de probabilidad de las longitudes laminares con efecto ruido $\Phi_l(l)$, se utiliza la Ec. (6.9), donde $\phi[X(l, c)]$ se reemplaza por su versión con ruido $\Phi[X(l, c)]$ y, teniendo en cuenta que el efecto del ruido se manifiesta en la función RPD, la determinación de $X(l, c)$ se hace sin considerar dicho efecto utilizando directamente la Ec. (6.10). Esta aproximación para $\Phi_l(l)$ es estrictamente válida sólo para el caso donde el ruido en la región laminar es nulo, sin embargo, las simulaciones muestran que se obtienen buenos resultados inclusive para niveles de ruido del orden del parámetro de control cuando éste es pequeño ($\sigma_l \leq \varepsilon \rightarrow 0$). Intensidades de ruido mayores en la región laminar producen la situación que se describe más adelante.

En las Figuras 6.11 y 6.12 se muestran resultados para distintos valores de ε , \hat{x} , γ y σ_r , con $a = 1$ y $c = 0,05$. En estas figuras se realiza la comparación entre los resultados de la RPD obtenida numéricamente (puntos) y la aproximación analítica (línea continua). En el caso de la función $M(x)$, la aproximación analítica prácticamente se superpone a la obtenida numéricamente. Además se muestra también el resultado del modelo sin ruido ($\sigma_r = 0$) para observar más claramente los efectos del ruido.

En las Figuras 6.11 y 6.12 puede observarse una muy buena concordancia entre los resultados numéricos y analíticos, tanto para la función NRPD como para la probabilidad de las longitudes laminares $\Phi_l(l)$, destacándose a primera vista la fuerte influencia del ruido en la forma de $\Phi(x)$ y $\Phi_l(l)$, en tanto que $M(x)$ evidencia la pérdida de linealidad con respecto al resultado sin ruido. En el caso de la Figura 6.11, la característica $\phi(\hat{x}) \rightarrow \infty$ desaparece por efecto del ruido y se verifica $\phi(\hat{x} - \sigma_r) \rightarrow 0$, lo cual repercute en la probabilidad Φ_l que se comporta como si fuera $\alpha > 0$ con $\hat{x} < 0$ (ver Figura 6.2-(b)). El otro punto a destacar es la discontinuidad que aparece en la Figura 6.12 en las funciones $\Phi(x)$ y $\Phi_l(l)$, la cual se corresponde con un quiebre en la función $M(x)$,

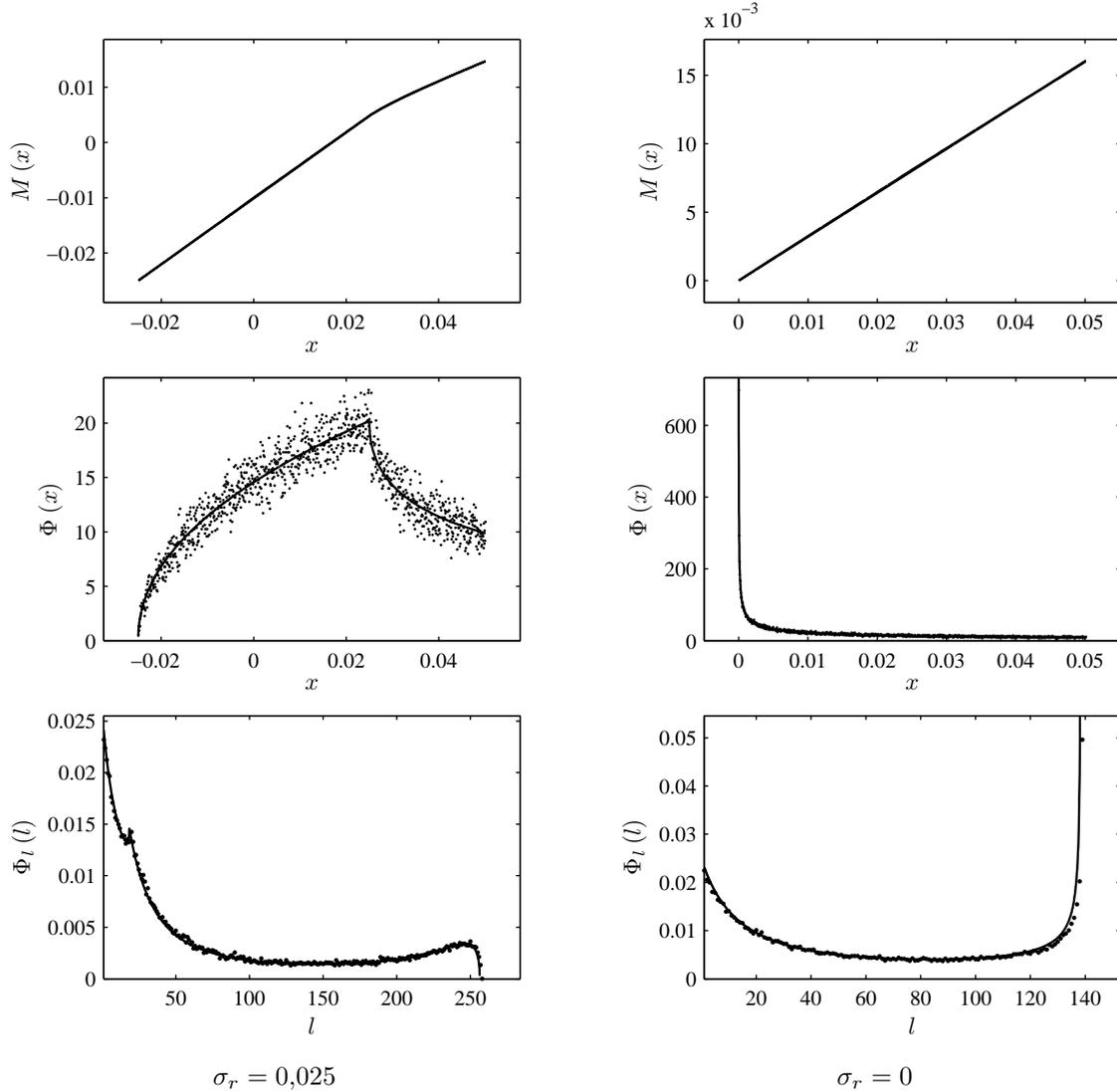


Figura 6.11: Resultados de las funciones $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $\hat{x} = 0$, $\gamma = 2$ y $c = 0,05$. Las pendientes son $m = 0,320$ ($\alpha = -0,529$) para el caso sin ruido y $m' = 0,596$ ($\alpha' = 0,479$) para la región izquierda de la función $M(x)$ con efecto del ruido.

tal como sucede en el caso sin ruido cuando el punto LBR se encuentra fuera del intervalo laminar, lo cual se produce por el efecto del ruido sobre la posición del LBR ($\hat{x} - \sigma_r < -c$), generándose de esta manera la concentración de puntos en el subintervalo $[-c, x_s]$.

Por otro lado, en la Figura 6.11 se verifica nuevamente la relación entre la pendiente de la región izquierda de $M(x)$ con la pendiente de la versión sin ruido de dicha función ($\alpha' \approx \alpha + 1$). Este comportamiento, el cual fue verificado en numerosas simulaciones con distintas condiciones, demuestra que la pendiente de la región “con ruido” de $M(x)$ no depende de la intensidad del ruido, sino que está definida únicamente por la forma de la función de retorno (exponente γ).

Los resultados descritos anteriormente tienen significativas consecuencias, ya que, además del

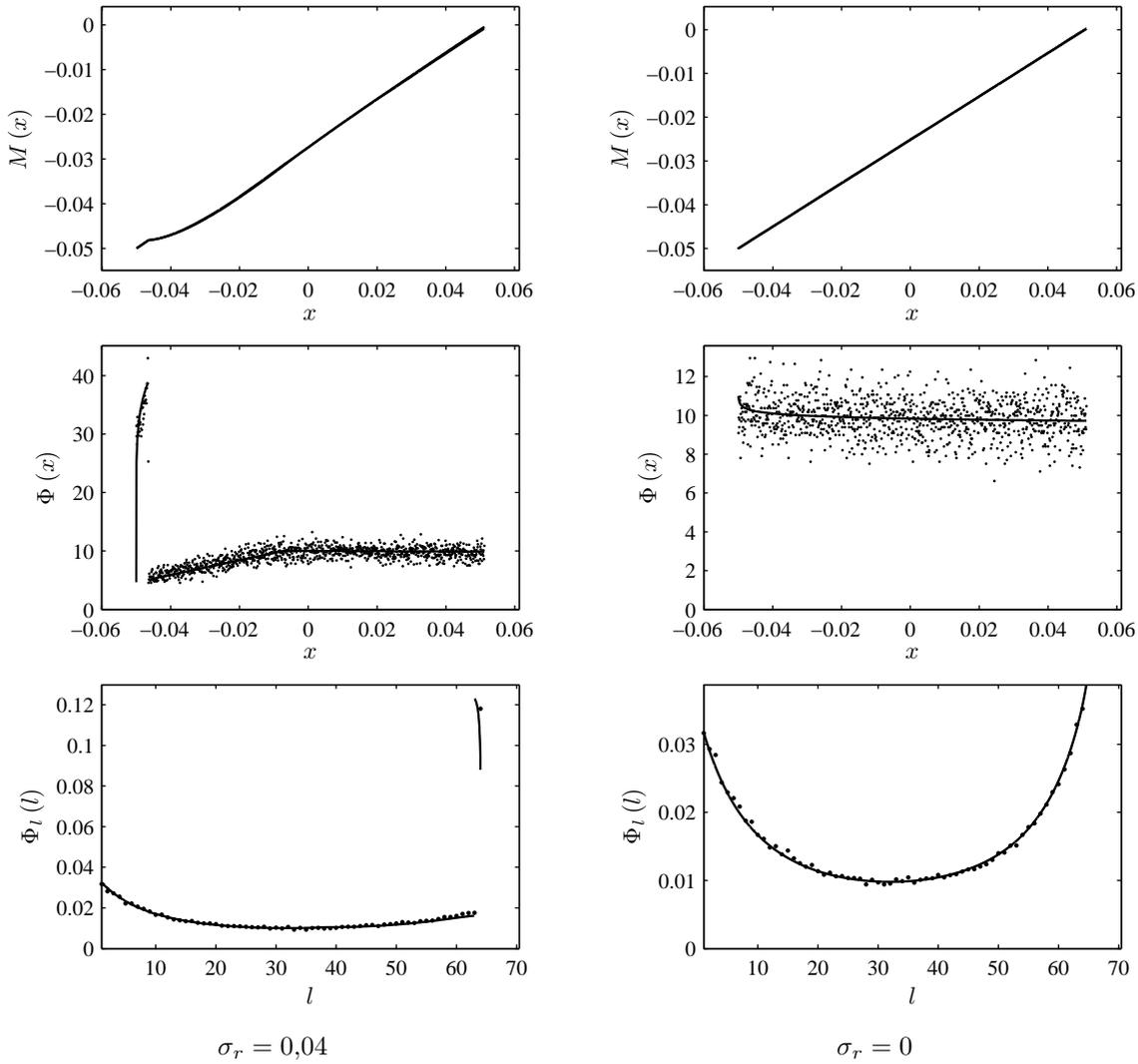


Figura 6.12: Igual que la Figura 6.11 con $\varepsilon = 10^{-3}$, $a = 1$, $\hat{x} = -0,05$, $\gamma = 1$ y $c = 0,05$, resultando $\alpha = -0,011$ (reinyección aproximadamente uniforme). En este caso no se pueden establecer las relaciones entre α y α' ya que $M(x)$ pierde la linealidad debido a la discontinuidad en la RPD. Las pendientes de $M(x)$ en el extremo derecho del intervalo laminar son muy similares: $m = 0,496$ para $\sigma_r = 0$ y $m = 0,491$ para $\sigma_r = 0,04$. El coeficiente de concentración es $k_r = 7,885$.

cambio en la posición del límite LBR, el efecto del ruido produce un incremento del exponente α que puede generar situaciones en las cuales un sistema con ruido presente una función $M(x)$ lineal con una RPD continua por lo que el efecto del ruido podría pasar desapercibido, tal como se muestra en la Figura 6.13.

Otro hecho posible, aunque menos probable, sucede cuando la combinación del incremento en uno del exponente α junto con el corrimiento del punto LBR producida por la presencia del ruido, genera resultados muy similares a los de un sistema sin ruido con parámetros del mapa muy diferentes. Esto puede visualizarse en la Figura 6.14.

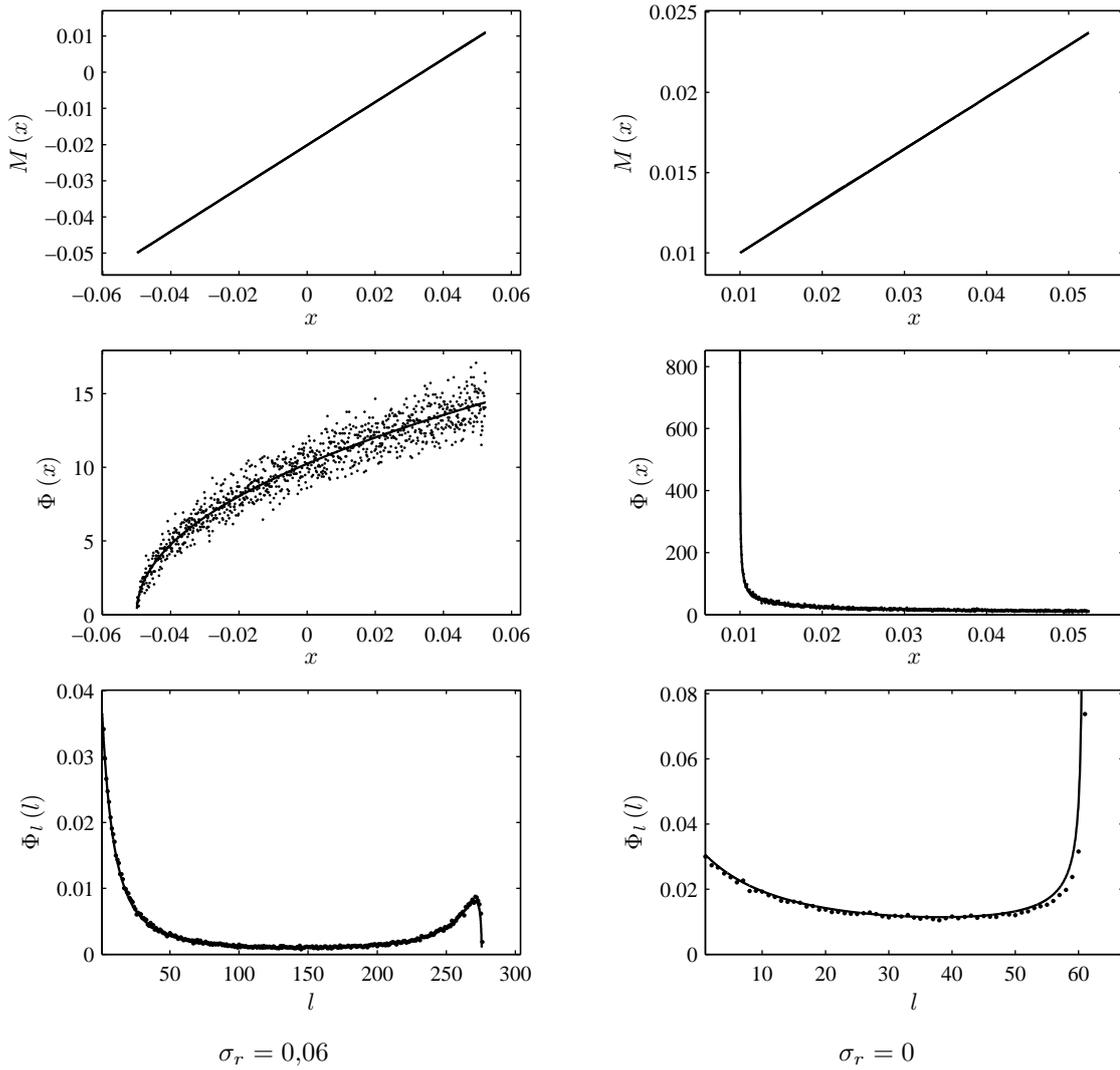


Figura 6.13: Funciones $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 1$, $\hat{x} = 0,01$, $\gamma = 2$ y $c = 0,05$. El caso con efecto ruido parece ser un caso sin ruido con su correspondiente función $M(x)$ lineal y una RPD continua. Las pendientes son $m' = 0,594$ ($\alpha' = 0,464$) para $\sigma_r = 0,06$ y $m = 0,323$ ($\alpha = -0,523$), verificándose la relación $\alpha' \approx \alpha + 1$.

6.3.3. Influencia del ruido en la relación característica

Este análisis es similar al realizado para la relación característica en la Sección 6.2.2 utilizando obviamente la NRPD. Al igual que en ese caso, la longitud laminar media puede dividirse en dos términos, aunque aquí una de las integrales se calcula sobre todo el intervalo laminar:

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^c \Phi'(x) l(x, c) dx + l(-c, c) \int_{-c}^{x_s} \phi_r(x) dx, \quad (6.43)$$

donde $\Phi'(x)$ es la NRPD de la ecuación (6.37). Si $\hat{x} - \sigma_r > -c$, $\phi_r(x) = 0$ y el límite inferior de la integral del primer término en la Ec. (6.43) es $\hat{x} - \sigma_r$ ya que $\Phi'(x) = 0$ para $x < \hat{x} - \sigma_r$. En caso

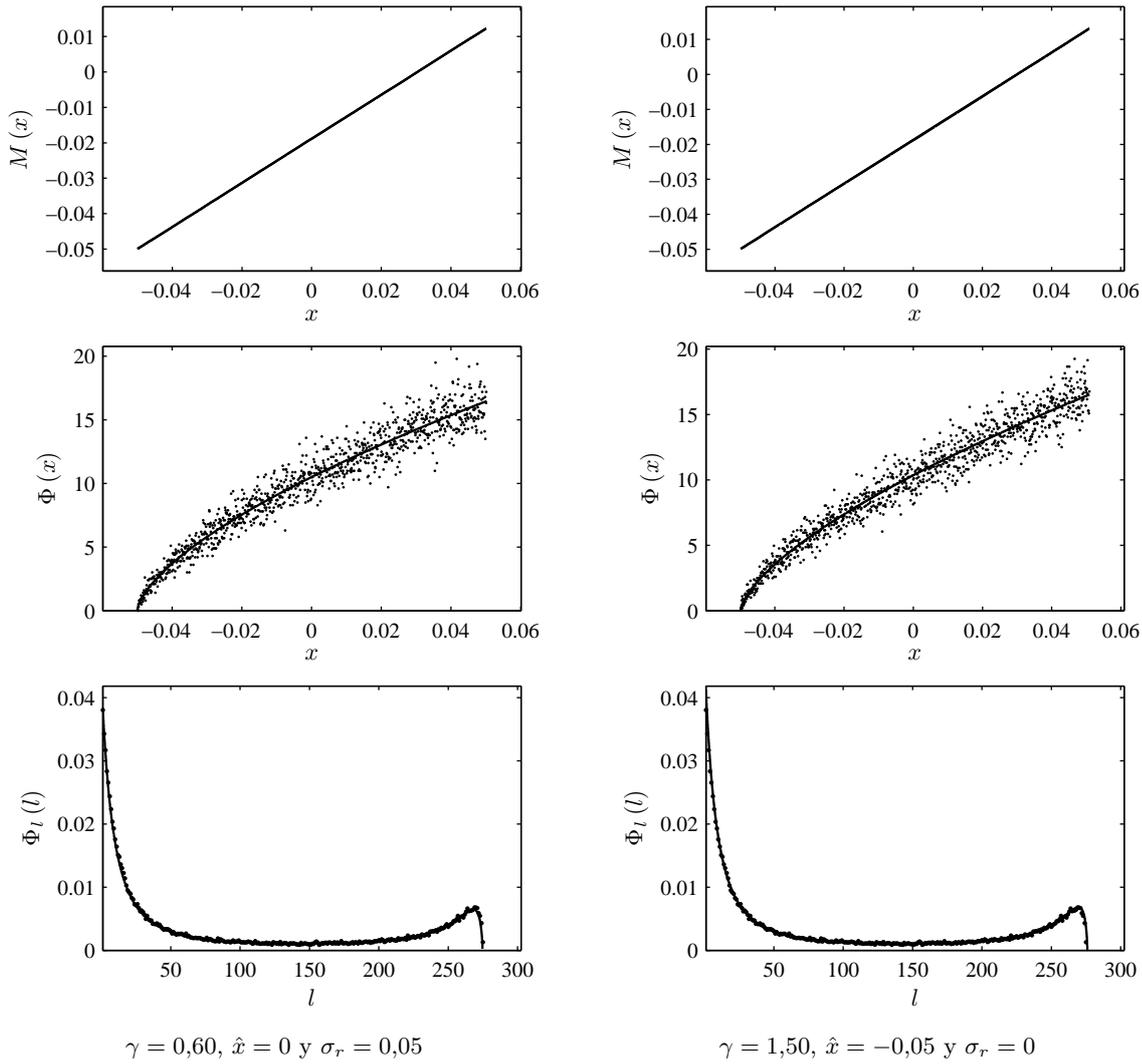


Figura 6.14: Función $M(x)$, NRPD y densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $\varepsilon = 10^{-4}$, $c = 0,05$ y los valores indicados. Los resultados son muy similares en ambos casos: la pendiente de $M(x)$ con efecto ruido es $m' = 0,623$ ($\alpha' = 643$) y $m = 0,624$ ($\alpha = 665$) para el caso sin ruido.

contrario la ecuación anterior resulta:

$$\langle l \rangle = \frac{d}{2\sigma_r(\alpha + 1)} \int_{-c}^c \left[(x - \hat{x} + \sigma_r)^{\alpha+1} - \Theta(x - \hat{x} - \sigma_r)(x - \hat{x} - \sigma_r)^{\alpha+1} \right] l(x, c) dx + l(-c, c) \frac{dk}{\alpha_r + 1} (x_s - \hat{x}_2)^{\alpha_r+1}. \quad (6.44)$$

donde la integral del primer término no tiene solución analítica, por lo tanto debe resolverse numéricamente.

En la Figura 6.15 se muestra en escala logarítmica la variación de $\langle l \rangle$ en función del parámetro

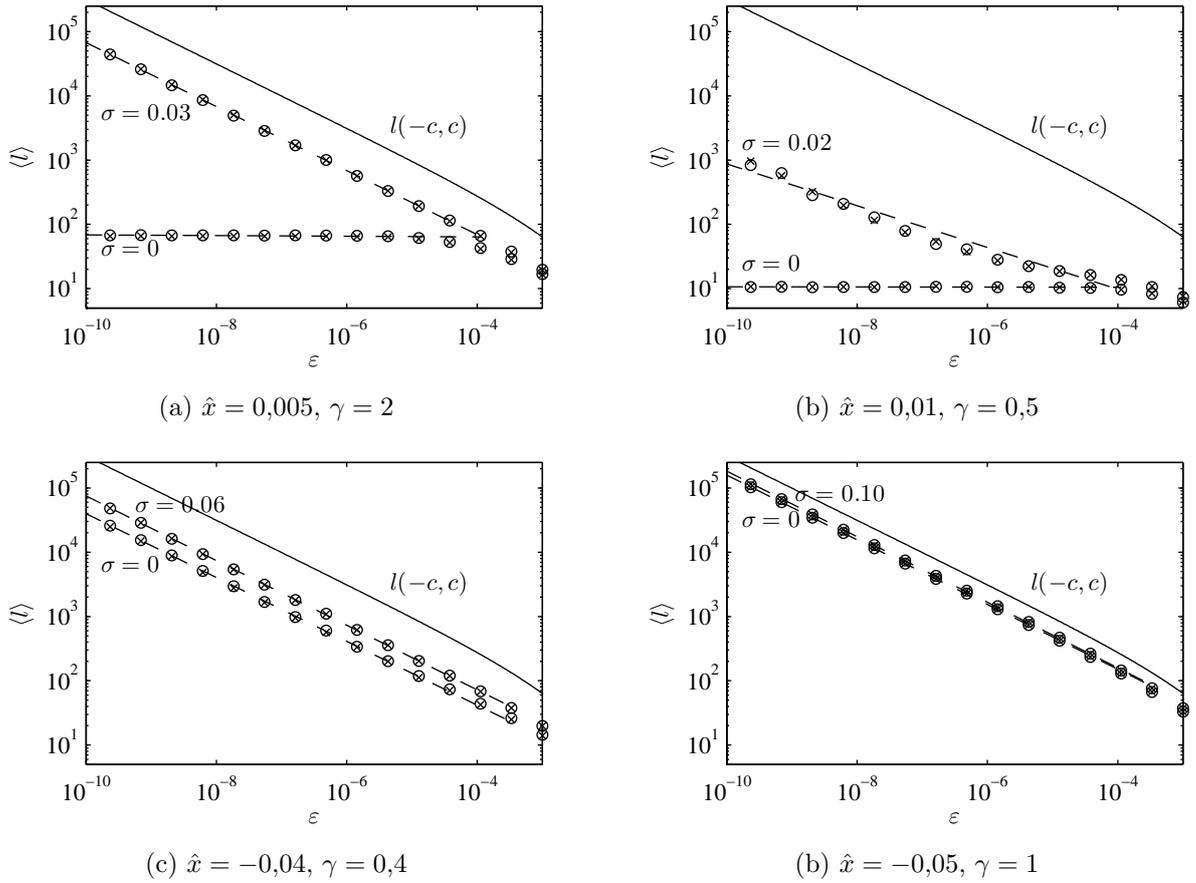


Figura 6.15: Longitud laminar media en función del parámetro de control para el mapa (6.34) con $a = 1, c = 0,05$ y los valores indicados. El exponente crítico del caso (b) es $\beta \approx -0,32$, indicando la transición que se produce para $\hat{x} - \sigma_r \approx 0$.

de control ε para distintas intensidades de ruido σ_r y combinaciones de valores \hat{x} y γ . De igual manera que en la Figura 6.8, los símbolos circulares representan los datos obtenidos numéricamente y las cruces corresponden a los resultados analíticos de la Ec. (6.44). La línea continua indica la variación de la longitud laminar máxima y la línea de trazos muestra la tendencia de $\langle l \rangle$ para $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir, es la recta cuya pendiente es el exponente crítico β .

En primer término en la figura se observa una buena concordancia entre los datos numéricos y los resultados analíticos para $\sigma_r > 0$. Obviamente en los casos sin ruido la correlación es muy buena ya que estos resultados corresponden al análisis convencional donde el LBR se encuentra dentro del intervalo laminar.

En cuanto al comportamiento del exponente crítico β , como se dijo anteriormente éste depende de la posición del LBR (Kim et al., 1994). Para $\hat{x} < 0, \beta \rightarrow -1/2$, mientras que para $\hat{x} > 0$ es $\beta \rightarrow 0$, registrándose una transición entre estos valores extremos de β para posiciones intermedias del LBR ($\hat{x} \approx 0$). En las Figuras 6.15-(a) a (d) se observa que el efecto del ruido sobre la relación

característica se debe principalmente al corrimiento del punto LBR. Cuando $\hat{x} > 0$ se producen los mayores cambios, ya que el desplazamiento modifica el valor de β de acuerdo a la nueva posición $\hat{x} - \sigma_r$, tal como se observa en las figuras (a) y (b). Por otro lado, para $\hat{x} < 0$ la curva de $\langle l \rangle$ se mueve paralelamente en la dirección de la longitud laminar máxima $l(-c, c)$ manteniendo $\beta \approx -1/2$, tal como ocurre en el caso sin ruido cuando el LBR está fuera del intervalo laminar. El aspecto más importante de estos resultados es que estos comportamientos son independientes de la forma de la función NRPD.

6.3.4. Influencia del ruido en la región laminar

Los resultados presentados anteriormente son válidos para la condición $\sigma_l < \varepsilon \rightarrow 0$. Si no se considera esta restricción los resultados de la función $M(x)$ y de la RPD no cambian, pero la influencia sobre las propiedades relacionadas a la longitud laminar es mandatoria.

Cuando $\sigma_l > \varepsilon$ en la región laminar, la dinámica del sistema en esa zona está gobernada por el ruido debido a que el movimiento de las órbitas ya no está conducido por la evolución propia del mapa. Esto puede producir que órbitas que recién ingresan al intervalo laminar rápidamente lo abandonen sin importar cuál sea el punto de reinyección. Por otro lado, ciertas secuencias de desviaciones causadas por el ruido de alta intensidad podrían producir que una órbita permanezca indefinidamente dentro del intervalo laminar. En consecuencia, en este caso la densidad $\Phi_l(l)$ ya no depende de los parámetros del mapa ni de la RPD, sino que siempre presenta la misma forma exponencialmente decreciente generada por la alta probabilidad de que una fase laminar abandone

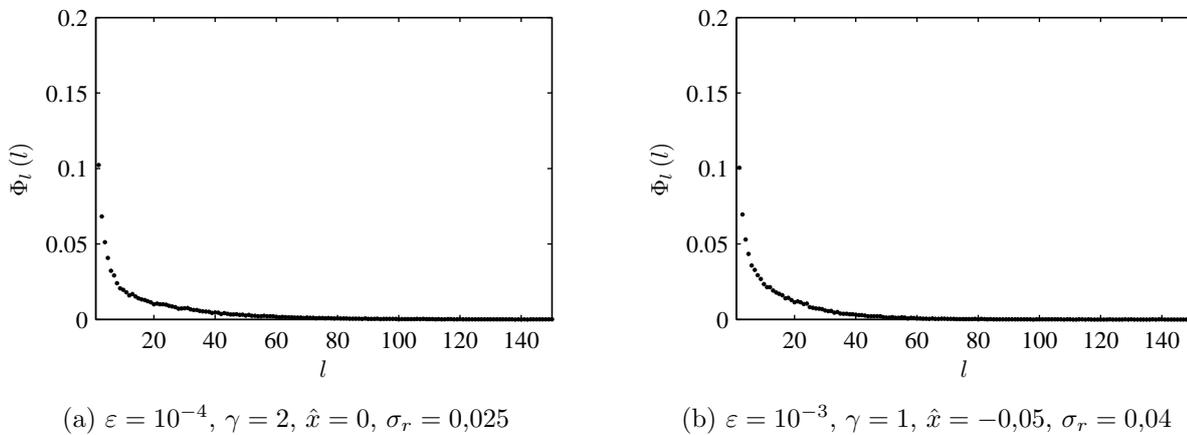


Figura 6.16: Densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el mapa (6.34) con $a = 1, c = 0,05$ y los valores indicados. El ruido de intensidad σ se aplica en todo el mapa ($\sigma_r = \sigma_l = \sigma$).

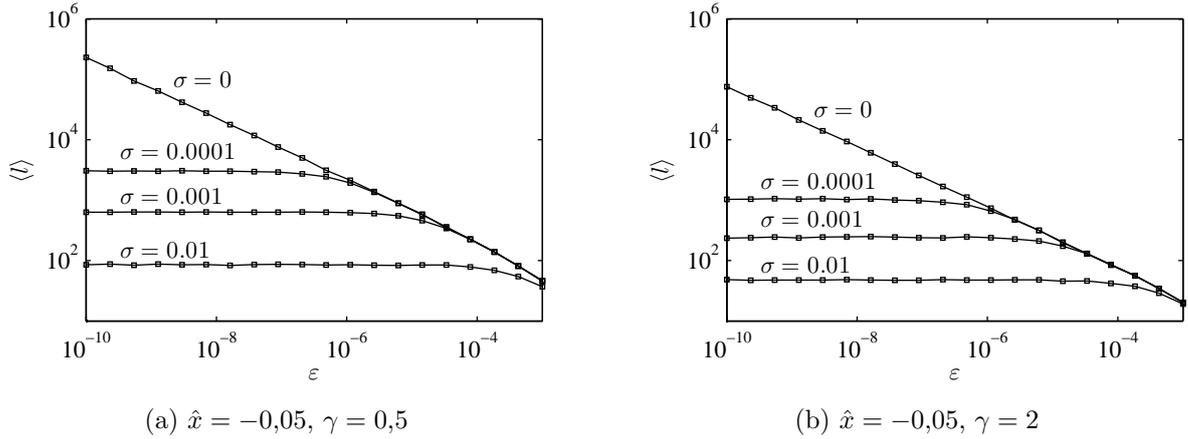


Figura 6.17: Relación característica $\langle l \rangle \propto \varepsilon^\beta$ para el mapa (6.34) con $a = 1$, $c = 0,05$ y los valores indicados. El ruido se aplica en todo el mapa. Los cuadrados indican los resultados numéricos y la línea continua los datos, alcanzándose la correspondiente saturación para pequeños valores de ε .

rápida­mente la región laminar debido al fuerte ruido, y la casi nula pero existente posibilidad de que una órbita permanezca infinitamente dentro de la misma. En la Figura 6.16 se muestran los resultados de $\Phi_l(l)$ cuando el ruido de alta intensidad se aplica a todo el mapa para los parámetros utilizados en las Figuras 6.11 y 6.12. Allí se observa que la densidad $\Phi_l(l)$ es muy similar en ambos casos, a pesar de la diferencia entre los parámetros del sistema y las correspondientes RPD.

Con respecto a la relación característica, cuando el ruido se aplica en todo el mapa se obtienen resultados similares a aquellos obtenidos en el análisis del efecto del ruido en intermitencia tipo II y III (del Rio et al., 2012). En ese caso la presencia del ruido genera una saturación en la longitud laminar media para $\varepsilon \rightarrow 0$, la cual se produce porque el tiempo de escape debido a la dinámica del mapa es mayor que el tiempo de escape aleatorio debido al ruido cuando $\sigma_l > \varepsilon$. Como consecuencia de esta saturación, la longitud laminar media alcanza un valor máximo constante para $\varepsilon \rightarrow 0$, el cual depende únicamente de la intensidad del ruido. Por otro lado, la forma cualitativa de la relación es la misma independientemente de la posición del punto LBR que es quien define esta forma para el caso sin ruido. Estos resultados se muestran en la Figura 6.17.

En vista de los resultados del efecto del ruido sobre la región laminar se puede decir que, de manera similar al análisis anterior, la presencia del ruido modifica fuertemente las funciones esperadas, tanto para el caso de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares como para la relación característica, ya que en este caso $\Phi_l(l)$ y $\langle l \rangle$ se comportan como si fueran el resultado de un sistema sin ruido el cual tiene parámetros $\hat{x} > 0$ y $\alpha \leq 0$ de acuerdo a la Figuras 6.2-(a) y (f), y las conclusiones del trabajo de Kim et al. (1994).

Capítulo 7

Análisis y Caracterización de la Intermitencia en la Ecuación DNLS

Las soluciones numéricas de la ecuación DNLS presentadas en el Capítulo 5 mostraron que existen condiciones bajo las cuales se producen atractores caóticos complejos donde se observan fenómenos de intermitencia. El objetivo del presente capítulo es realizar el análisis de dicho fenómeno utilizando la metodología presentada en el capítulo anterior para obtener una aproximación analítica de la densidad de probabilidad de reinyección (RPD) correspondiente.

En la segunda parte de este capítulo se procede con un estudio similar, considerando en este caso las soluciones del modelo de truncamiento a tres ondas de la DNLS cuando se utiliza amortiguamiento de Landau. En ese caso, a diferencia de las soluciones de truncamiento para amortiguamiento resistivo del Capítulo 5, existen atractores caóticos con intermitencia tipo I.

7.1. Intermitencia en la solución numérica de la ecuación DNLS

Las soluciones numéricas de la ecuación DNLS bajo condición inicial de tres ondas resonantes con una de ellas excitada y las restantes amortiguadas indicaron que para un modelo de amortiguamiento resistivo existen soluciones estacionarias cuando se utilizan coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes, mientras que para bajo amortiguamiento y ciertas configuraciones de ondas aparecen atractores caóticos complejos.

En la Figura 7.1 se muestra el diagrama de bifurcación de la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$ para el atractor A_2 (ver Tabla 5.2 del Capítulo 5), donde el coeficiente de amortiguamiento η es el parámetro de control. En la figura puede observarse la existencia de atractores caóticos.

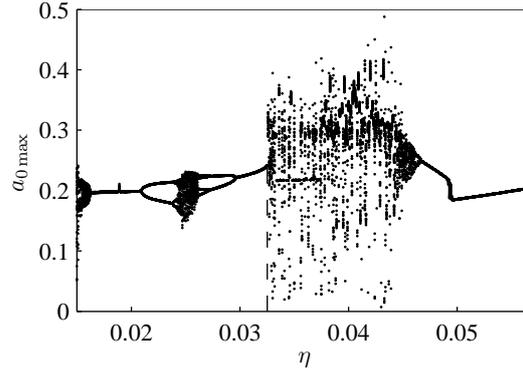


Figura 7.1: Diagrama de bifurcación de la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$ en función del coeficiente de amortiguamiento η para el atractor A_2 con un modelo de amortiguamiento resistivo.

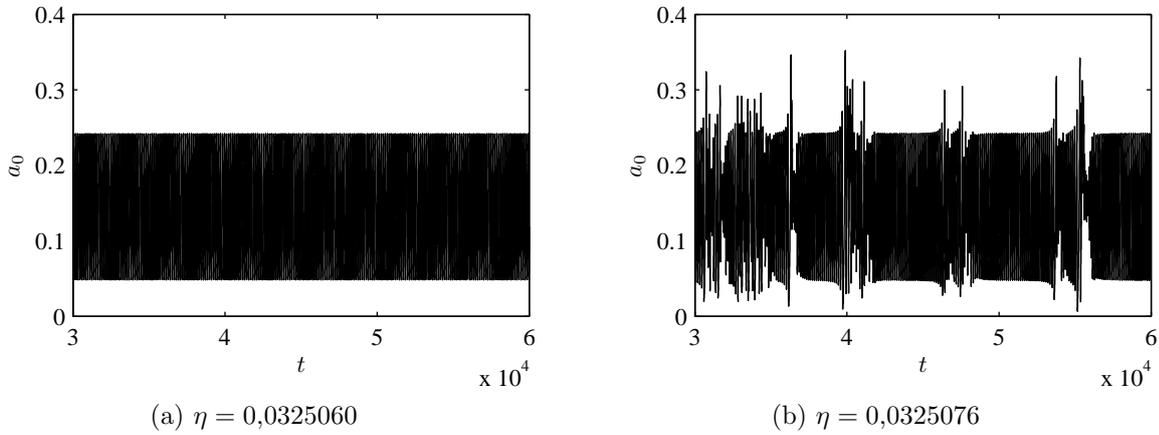


Figura 7.2: Evolución de la amplitud de la onda madre del atractor A_2 . (a) Solución periódica. (b) Caos.

Como se dijo en la Sección 5.3, el coeficiente de amortiguamiento $\eta_c \approx 0,032507$ aparenta ser un umbral de intermitencia, para $\eta < \eta_c$ se registran soluciones periódicas estables (ciclos límites), mientras que para $\eta > \eta_c$ hay caos. Para evidenciar el fenómeno de intermitencia se presenta la Figura 7.2, donde se observa la evolución en el tiempo de la amplitud de la onda madre. Para valores de amortiguamiento $\eta < \eta_c$ la evolución de la amplitud a_0 tiene la forma de un ciclo límite, pero para coeficientes de amortiguamiento apenas mayores que el valor crítico η_c , aparecen repetidas interrupciones de la evolución regular de la solución dadas por la presencia de las explosiones caóticas típicas del fenómeno de intermitencia.

Para identificar el tipo de intermitencia se procede a construir el mapa de Poincaré de la amplitud máxima, para lo cual simplemente se grafican en abscisas los valores de $a_{0\max}$ y en ordenadas los mismos valores desfasados en un paso respecto de los anteriores. De esta manera el sistema puede pensarse como un mapa discreto donde la evolución se da según los picos superiores

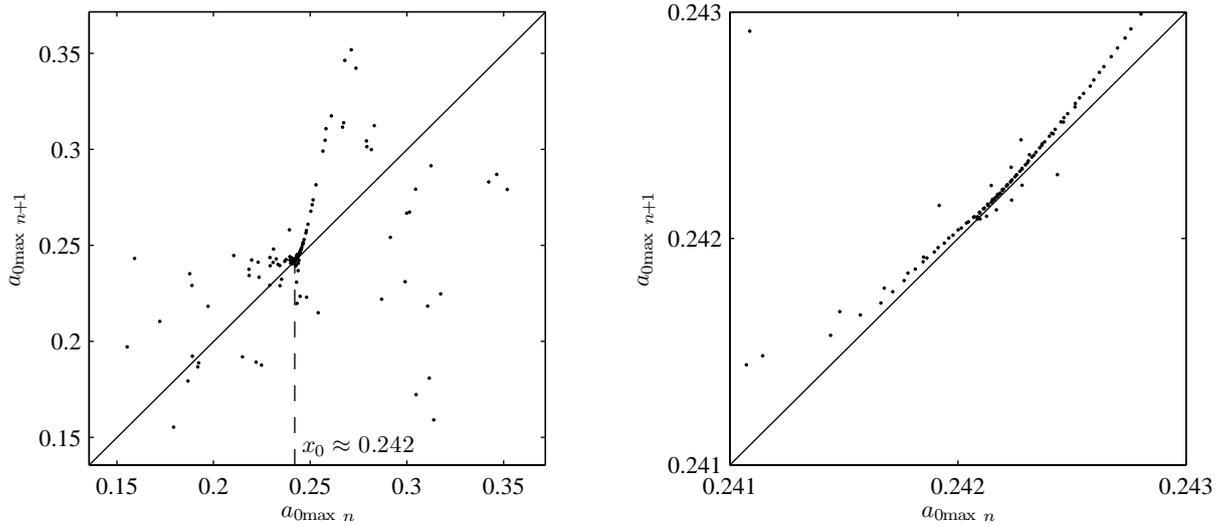


Figura 7.3: Mapa de Poincaré de la amplitud máxima de la onda madre para $\eta = 0,0325076$

de la Figura 7.2-(b). Realizando este procedimiento se obtiene el gráfico de la Figura 7.3.

A los fines de determinar el tipo de intermitencia, sólo interesa conocer la forma del mapa de Poincaré local, sin importar el mecanismo global de reinyección del mapa. En ese sentido, la figura muestra que la intermitencia es de tipo I, ya que se observa claramente el canal estrecho que existe entre el mapa local y la bisectriz producido por la bifurcación tangente en $\eta = \eta_c$, el cual permite el desarrollo de las fases laminares en las proximidades de $a_{0\max} = 0,242$.

Si bien no es necesario conocer el mecanismo de reinyección global del mapa para su clasificación, esta propiedad sí es necesaria para el estudio estadístico del fenómeno de intermitencia. Este mecanismo puede caracterizarse mediante la densidad de probabilidad de reinyección (RPD).

7.1.1. Aproximación analítica de la RPD en las soluciones numéricas de la ecuación DNLS

En el Capítulo 6 fue presentada una metodología alternativa para la aproximación analítica de la RPD aplicable a los casos donde esta función tiene formas arbitrarias. La técnica consiste en utilizar una función auxiliar $M(x)$ fácil de obtener, a partir de la cual puede anticiparse el comportamiento de la RPD. Cuando M es aproximadamente lineal la RPD es continua, mientras que la presencia de quiebres o cambios de pendiente en la función indican la existencia de discontinuidades en la RPD.

Los datos de $M(x)$ también son útiles para identificar el tipo de discontinuidad. Con ese propósito se utilizan los valores de la derivada de la función a cada lado del punto donde se produce

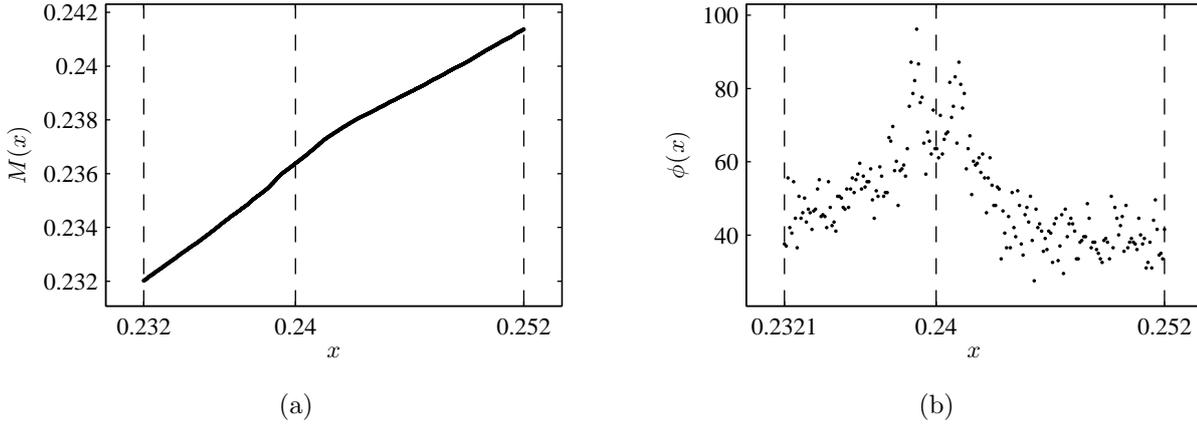


Figura 7.4: (a) Función $M(x)$ para la solución numérica del atractor A_2 con $\eta = 0,0325076$.
 (b) Forma de la función RPD. La abscisa x representa la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$.

el quiebre. Esto se deduce mediante la definición de $M(x)$ dada en la Ec. (6.2), de la cual se puede escribir:

$$M(x) \int_{x_i}^x \phi(\tau) d\tau = \int_{x_i}^x \tau \phi(\tau) d\tau,$$

entonces, derivando respecto a x

$$\frac{dM}{dx} = \frac{x - M(x)}{\int_{x_i}^x \phi(\tau) d\tau} \phi(x),$$

por lo tanto, teniendo en cuenta que por definición para $x > x_i$ $M(x)$ es finita y $0 < \int_{x_i}^x \phi(\tau) d\tau \leq 1$, se deduce que si $dM/dx \rightarrow \infty$ entonces $\phi(x) \rightarrow \infty$. Por otro lado, para pendientes de M distintas a cada lado del punto x , si $dM/dx^- > dM/dx^+$, indica que hay un salto en la RPD con $\phi(x^-) > \phi(x^+)$, tal como se observó en la Figura 6.6 del capítulo anterior. De esta forma es posible anticipar el comportamiento de la RPD a través de la forma de la función $M(x)$.

En la Figura 7.4-(a) se muestra la función $M(x)$ correspondiente a los puntos de reinyección de la solución numérica de la amplitud máxima de la onda madre para el atractor A_2 con un amortiguamiento $\eta = 0,0325076$, donde x representa a la variable $a_{0\max}$. El punto fijo $x_0 = 0,24201$ se produce para $\eta = 0,032507$, siendo el intervalo laminar $[x_0 - c, x_0 + c]$ con $c = 0,01$. También se muestra en la figura la RPD numérica, donde puede observarse que existe una discontinuidad en el punto $x_s \approx 0,24$ la cual coincide con el quiebre en la función $M(x)$, donde además se cumple

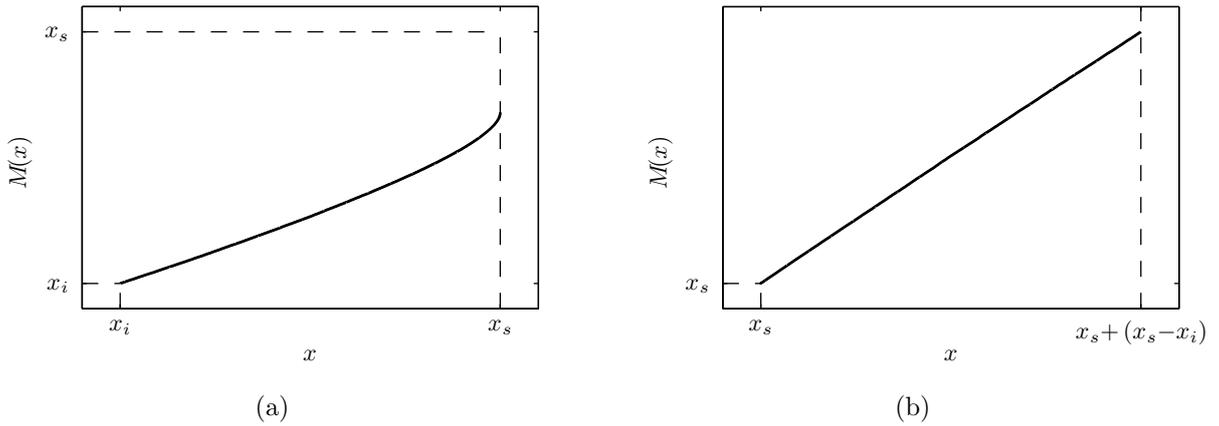


Figura 7.5: (a) Función $M(x)$ obtenida de la manera convencional. (b) Función $M(x)$ calculada con puntos de reinyección auxiliares $x'_j = x_s + (x_s - x_j)$ para recuperar la linealidad.

$|dM/dx| \rightarrow \infty$ a cada lado de este punto, lo cual verifica los comentarios del párrafo anterior referidos a la relación entre la derivada de M y la forma de la RPD.

El hecho de que la función $M(x)$ presente dos regiones con pendientes diferentes se resuelve de manera similar a lo realizado en el capítulo anterior, es decir, considerando cada región por separado para obtener en cada una de ellas funciones aproximadamente lineales. Sin embargo, la forma creciente de la RPD a la izquierda del punto x_s con $\phi(x_s^-) \rightarrow \infty$ hace que $M(x)$ no sea lineal, ya que su pendiente tiende a infinito en el final del intervalo. Este comportamiento se debe a la definición de $M(x)$, donde de acuerdo a su determinación numérica, Ec. (6.3), puede verse que la acumulación de puntos al final del intervalo produce un crecimiento casi vertical de M que tiende al valor del punto x_s . Por el contrario, cuando la acumulación es en el extremo izquierdo no se produce este crecimiento ya que el valor inicial de M es el promedio de los puntos de reinyección, para luego continuar con una evolución aproximadamente lineal de donde se obtienen los parámetros que definen la RPD.

La situación detallada anteriormente permite superar el inconveniente de la pérdida de linealidad de $M(x)$ simplemente considerando los puntos de reinyección de forma inversa. De esta forma la RPD resulta monótonamente decreciente y se obtiene una función $M(x)$ aproximadamente lineal. El procedimiento consiste en considerar puntos auxiliares dados por $x'_j = x_s + (x_s - x_j)$, lo que equivale a tomar una función $\phi'(x)$ simétrica a $\phi(x)$ respecto a la vertical que pasa por x_s . En la Figura 7.5 se observa cómo la redefinición de los puntos de reinyección resulta en una función $M'(x)$ aproximadamente lineal.

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados de la Figura 7.4 y los comentarios anteriores, se

propone la siguiente función para la aproximación analítica de la RPD:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = d(x_s - x)^{\alpha_1}, & \text{si } x < x_s, \\ \phi_2(x) = dk(x - x_s)^{\alpha_2}, & \text{si } x \geq x_s, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde los factores se obtienen utilizando la función $M(x)$ como se hizo en el capítulo anterior y el coeficiente d es el parámetro de normalización. La función $\phi_1(x)$ se aplica sobre la región creciente de la RPD y por ello se utiliza $(x_s - x)$. De este modo, para $\alpha_1 < 0$ se cumple $\phi_1(x_s) \rightarrow \infty$.

La determinación de los exponentes α_1 y α_2 se hace con los datos numéricos de la función $M(x)$. Para α_1 , se emplean los puntos $x < x_s$ utilizando puntos auxiliares $x'_j = x_s + (x_s - x_j)$ para obtener una $M(x)$ aproximadamente lineal. En el caso de α_2 el cálculo se hace con los puntos $x_j \geq x_s$ en la forma habitual.

El coeficiente k en $\phi_2(x)$ se utiliza para ponderar la diferencia entre las reinyecciones a cada lado del punto x_s , ya que de este modo es posible considerar un salto en la función $\phi(x)$ global, tal como se hizo en el capítulo anterior para modelar la RPD cuando el LBR se encontraba fuera del intervalo laminar. Un factor $k < 1$ indica que hay preponderancia de reinyecciones en el primer intervalo, mientras que $k > 1$ indica lo contrario.

Para obtener el coeficiente k se utiliza la definición de la función $M(x)$, Ec. (6.2). Considerando los puntos $x > x_s$, siendo $x_i = x_0 - c$ el extremo izquierdo del intervalo laminar, resulta:

$$M(x) = \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_i(\alpha_1 + 1) + x_s}{(\alpha_1 + 2)} + k(x - x_s)^{\alpha_2+1} \frac{x_s(\alpha_2 + 1) + x}{(\alpha_2 + 2)}}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} + k \frac{(x - x_s)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2 + 1)}}, \quad (7.2)$$

De esta última expresión puede despejarse explícitamente el factor k :

$$k = \frac{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{(\alpha_1 + 1)} \left[\frac{x_i(\alpha_1 + 1) + x_s}{(\alpha_1 + 2)} - M(x) \right]}{\frac{(x - x_s)^{\alpha_2+1}}{(\alpha_2 + 1)} \left[M(x) - \frac{x_s(\alpha_2 + 1) + x}{(\alpha_2 + 2)} \right]}. \quad (7.3)$$

Como en el desarrollo del capítulo anterior, el factor k es aproximadamente constante independientemente del punto $x > x_s$ utilizado, sin embargo conviene utilizar puntos no muy cercanos a x_s donde la función $M(x)$ es más lineal.

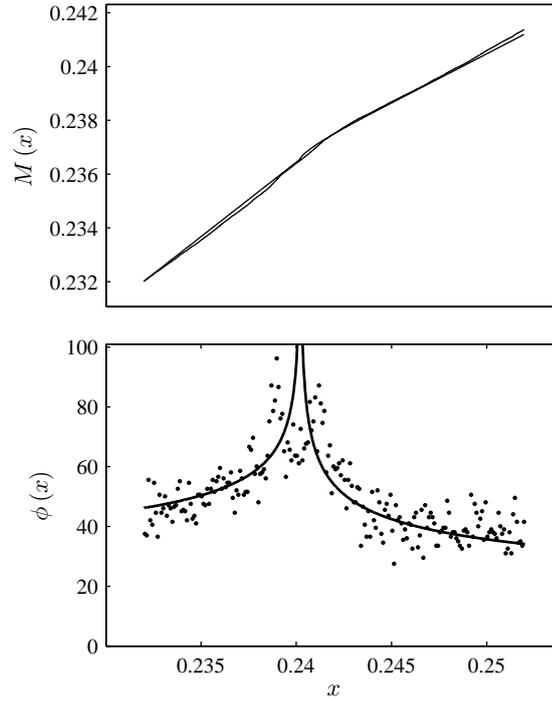


Figura 7.6: Aproximación analítica de la función $M(x)$ y la RPD para la solución numérica de la amplitud máxima de la onda madre para el atractor A_2 con $\eta = 0,0325076$. La abscisa x representa la amplitud $a_{0\max}$.

Finalmente se obtiene el parámetro de normalización:

$$d = \left[\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1 + 1}}{(\alpha_1 + 1)} + \frac{k(x_0 + c - x_s)^{\alpha_2 + 1}}{(\alpha_2 + 1)} \right]^{-1}. \quad (7.4)$$

En la Figura 7.6 se muestra la aproximación analítica propuesta en las ecuaciones anteriores y los datos obtenidos numéricamente, tanto para la RPD como para la función $M(x)$. En la figura se observa que en este caso, a diferencia de los resultados del capítulo anterior, la aproximación de $M(x)$ presenta pequeñas diferencias con respecto a los valores numéricos. Esto se debe a la suposición de considerar a $M(x)$ constituida por dos funciones lineales. No obstante esta simplificación, los resultados de la RPD son más que aceptables, sobre todo si se tiene en cuenta la simplicidad del modelo utilizado.

El análisis de la densidad de probabilidad de longitudes laminares no se realiza para este caso, ya que las soluciones numéricas de la ecuación DNLS presentan un nivel importante de ruido y fluctuaciones debido a la interacción entre los diferentes modos del espectro. Esto produce que el tiempo de escape de la dinámica de la intermitencia en general es superior al tiempo de escape

debido a las fluctuaciones lo cual, si bien no repercute de manera definitiva sobre el mecanismo de reinyección global del sistema caracterizado en la RPD, sí genera distorsiones en la probabilidad de las longitudes laminares producidas por la salida prematura de las órbitas que ingresan al intervalo laminar, tal como se explicó en la Sección 6.3.4 del capítulo anterior.

7.2. Intermitencia en el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS

Para superar los problemas referidos a las perturbaciones que produce la interacción entre modos diferentes a las tres ondas iniciales, un método analítico simplificado como lo es el modelo de truncamiento a tres ondas, podría ser de utilidad. En ese caso no se producen dichas perturbaciones y además las simulaciones numéricas basadas en este método son mucho más rápidas que las de los métodos espectrales, ya que las derivadas temporales se calculan explícitamente mediante fórmulas relativamente sencillas (ver Apéndice B).

Desafortunadamente, las soluciones del Capítulo 5 evidenciaron que el método de truncamiento no es aplicable cuando se consideran coeficientes de amortiguamiento pequeños, que es la condición para que se produzcan atractores caóticos e intermitencia. Más aún, este método simplificado no fue capaz de capturar las soluciones dinámicas de la ecuación DNLS. Sin embargo, existe una situación en la cual el modelo de truncamiento sí presenta atractores caóticos donde además se producen fenómenos de intermitencia, tal como se describe a continuación.

7.2.1. Modelo de amortiguamiento de Landau lineal

En el modelo de amortiguamiento de Landau lineal la relación entre el amortiguamiento y el vector de onda es lineal, es decir:

$$\hat{\gamma} = \eta k_j.$$

Por lo tanto la relación de amortiguamiento entre las ondas hijas es

$$\zeta = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2} = \frac{k_1}{k_2} = \kappa,$$

de acuerdo a las definiciones realizadas en el Apéndice B.

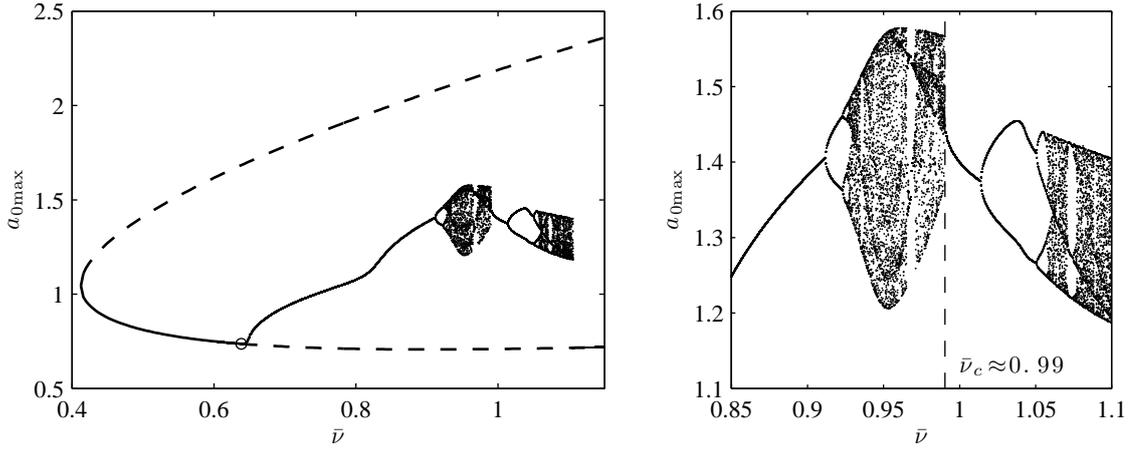


Figura 7.7: Diagrama de bifurcación del modelo de truncamiento de la DNLS para $\Gamma = 0,1$ y $\kappa = 0,95$

La forma de la solución de las ecuaciones de truncamiento dependerá de la relación entre el grado de excitación de la onda madre y el amortiguamiento de las ondas hijas (a través del parámetro Γ), y del número de onda de las ondas hijas (parámetro κ). Para un valor Γ dado, cuando $\kappa \rightarrow 1$ aparecen soluciones caóticas en función de un parámetro de control $\bar{\nu}$, que es un desajuste en la frecuencia e indica el carácter dispersivo de las ondas (Sánchez-Arriaga et al., 2007; Sánchez-Arriaga, 2009). En la Figura 7.7 se muestra el diagrama de bifurcación del sistema para los valores de Γ y κ indicados.

En la figura se observa primeramente una órbita periódica que nace en una bifurcación de Hopf para $\bar{\nu} \approx 0,64$. Con el crecimiento del parámetro de control se produce una bifurcación y nace una órbita de doble período en $\bar{\nu} \approx 0,91$ y $a_{0\max} \approx 1,45$. Posteriormente la órbita estable continúa el doblamiento de períodos que sigue en una cascada de Feigenbaum para culminar en un atractor caótico, el cual se extiende hasta $\bar{\nu}_c \approx 0,99$. A la derecha de este punto existe una órbita periódica que para valores menores de $\bar{\nu}$ pierde estabilidad abruptamente, lo cual evidencia la presencia de un proceso de intermitencia. Para valores mayores de $\bar{\nu}$, la órbita periódica comienza una nueva secuencia de doblamiento de periodo terminando en un segundo atractor caótico que finalmente colapsa en una crisis de borde, también llamada catástrofe de cielo azul (Abraham, 1985).

La parte que aquí interesa es la correspondiente a $\bar{\nu} \approx 0,99$ donde se produce la intermitencia. Para visualizar el fenómeno, en la Figura 7.8 se grafica la evolución de la amplitud máxima de la onda madre $a_{0\max}$ utilizando los mismos valores de κ y Γ con dos valores del parámetro de control, uno correspondiente al límite $\bar{\nu}_c = 0,990415$ y el otro apenas por debajo de ese valor. En la figura se observa un punto fijo donde $a_{0\max} \approx 1,4509$ para $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$, mientras que para $\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}_c^-$ se observan

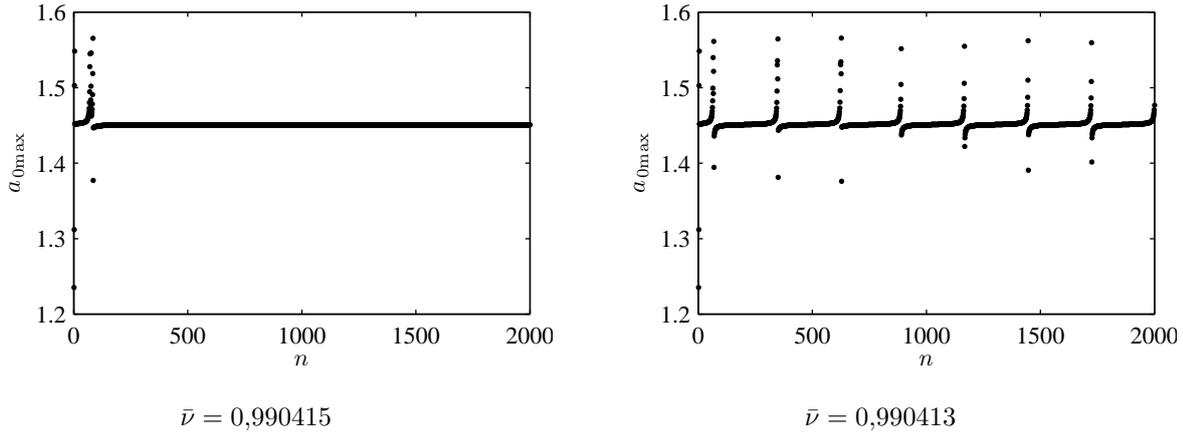


Figura 7.8: Evolución de la amplitud máxima de la onda madre para $\Gamma = 0,1$ y $\kappa = 0,95$ para un modelo de amortiguamiento de Landau lineal y los valores indicados de $\bar{\nu}$.

las fases laminares y las explosiones caóticas típicas del fenómeno de intermitencia.

De acuerdo a las características del diagrama de bifurcación en el punto $\bar{\nu}_c$, donde se observa una bifurcación tangente (la rama de órbitas inestables no fue graficada), se puede identificar el fenómeno como intermitencia tipo I. Esto se visualiza en la Figura 7.9, en la cual se grafica el mapa de la evolución de la amplitud máxima de la onda madre, $a_{0\max n+1}$ en función de $a_{0\max n}$, utilizando tres valores de $\bar{\nu}$: uno correspondiente al coeficiente crítico $\bar{\nu}_c$ y los otros dos a cada lado de ese valor. En la figura se observa claramente el proceso de generación de intermitencia tipo I. Para $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$ el mapa es tangente a la bisectriz en $a_{0\max n} \approx 1,45$, para valores menores

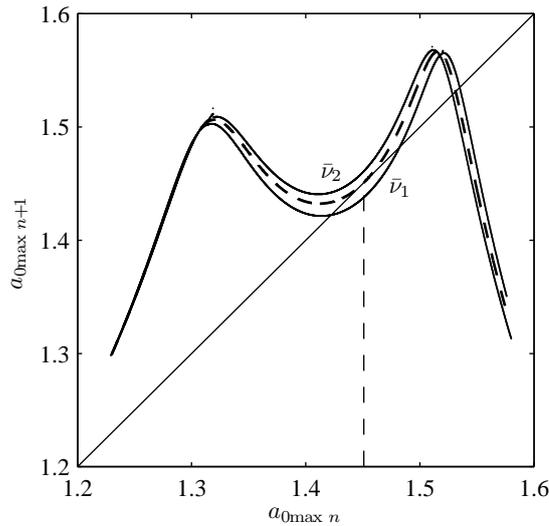


Figura 7.9: Mapas de Poincaré de la evolución de la amplitud máxima $a_{0\max}$ para $\Gamma = 0,1$, $\kappa = 0,95$ y un modelo de amortiguamiento de Landau lineal. Los valores de los coeficientes son $\bar{\nu}_1 = 0,993$ y $\bar{\nu}_2 = 0,988$. La línea de trazos representa el mapa con $\bar{\nu}_c = 0,990415$ donde se produce la bifurcación.

del parámetro de control el punto fijo desaparece y se genera el canal estrecho entre el mapa y la bisectriz, mientras que para $\bar{\nu} > \bar{\nu}_c$ se generan dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable.

El hecho de poder construir un mapa preciso de la evolución de la amplitud máxima como si se tratara de una variable discreta donde el mecanismo de reinyección queda perfectamente representado, permite utilizar el mismo para el análisis de la intermitencia, en lugar de obtener los datos directamente del sistema continuo que representan las ecuaciones de truncamiento. De esta manera se reducen significativamente los tiempos computacionales a la vez que las características del mapa permiten predecir el comportamiento de la RPD.

7.2.2. Análisis de la intermitencia

Teniendo en cuenta lo anterior, el análisis se realiza utilizando el mapa construido a partir de los datos numéricos $a_{0\max n}$, $a_{0\max n+1}$ para $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$, donde el ancho del canal en la región laminar se define artificialmente mediante un parámetro de control ε tal que $a_{0\max n+1} \rightarrow a_{0\max n+1}|_{\bar{\nu}=\bar{\nu}_c} + \varepsilon$, es decir, que el mapa tangente a la bisectriz (correspondiente a $\bar{\nu}_c$) simplemente se desplaza hacia arriba un valor ε para generar el canal. De este modo es más simple realizar el análisis ya que ε se toma como parámetro de control de manera que no es necesario obtener numéricamente nuevos mapas para evaluar el fenómeno.

En la Figura 7.10 se muestra el mapa para $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$ donde se explicita la posición del menor punto de retorno (LBR), el cual se posiciona lejos del punto tangente. Por otro lado, se observa además

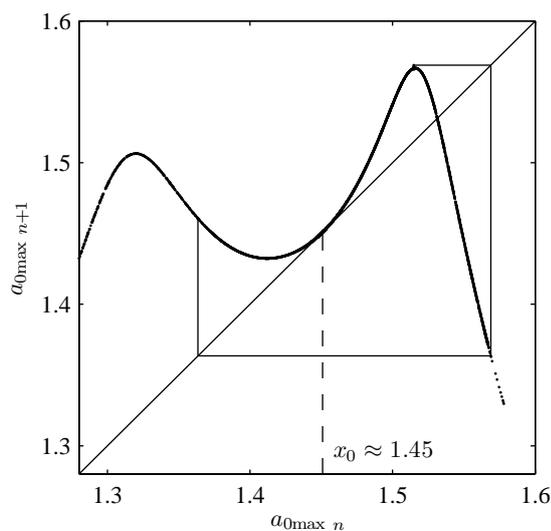


Figura 7.10: Visualización del menor punto de retorno (LBR) y del mecanismo de reinyección del mapa del modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$ y amortiguamiento de Landau.

que existen dos derivadas nulas que intervienen en el proceso de reinyección, correspondientes al mínimo local a la izquierda del punto fijo y al máximo local situado a la derecha. Según el análisis del Capítulo 6, estas características hacen que la respectiva función RPD sea discontinua (por la posición del LBR) con dos puntos singulares donde $\phi(x) \rightarrow \infty$ (por la presencia de las derivadas nulas). En adelante se utiliza x para representar la amplitud máxima $a_{0\max}$ y x_0 es el punto fijo para $\bar{\nu} = \bar{\nu}_c$.

Siguiendo el estudio de la Sección 6.2 del capítulo anterior, el límite inferior del intervalo laminar se fija con la reinyección de la trayectoria que parte del punto con derivada nula (mínimo local) a la izquierda del punto tangente. Por otro lado, en este caso debe definirse también el punto x_k donde se produce la reinyección de la órbita que parte del otro punto con derivada nula (máximo de la función), lo cual genera una nueva discontinuidad con $\phi(x) \rightarrow \infty$. Por último, la imagen del extremo izquierdo del intervalo laminar define el punto x_s donde se registra la discontinuidad de la RPD debida a la concentración de puntos de reinyección en el subintervalo $[x_0 - c, x_s]$ por la posición alejada del punto LBR.

Para la representación analítica de la RPD se utilizan funciones potenciales como las empleadas hasta el momento, las cuales se proponen teniendo en cuenta el desarrollo realizado al comienzo de la Sección 7.1.1 de acuerdo a las características de la función $M(x)$. En la Figura 7.11 se muestra un resultado típico de esta función para el mapa de la Figura 7.10. Allí se observan los dos quiebres en $M(x)$ correspondientes a los dos puntos críticos x_s y x_k . En el primer quiebre (punto x_s) las derivadas de $M(x)$ a cada lado del punto son finitas, por lo que puede inferirse que allí se produce un salto en la RPD debido a la concentración de puntos de reinyección provenientes de $x < x_0 - c$, similarmente a lo ocurrido en el análisis del capítulo anterior. Por otro lado, en el segundo quiebre

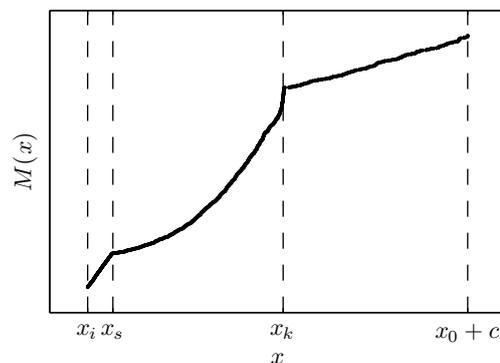


Figura 7.11: Forma típica de la función $M(x)$ para el mapa de la Figura 7.9.

(punto x_k) existe una derivada de M que tiende a infinito a la izquierda del punto, lo cual indica que la RPD es creciente en ese tramo con $\phi(x_k^-) \rightarrow \infty$, tal como sucedía en las soluciones numéricas de la DNLS.

Teniendo en cuenta las características detalladas anteriormente, se propone entonces la siguiente función $\phi(x)$ para la representación analítica de la RPD:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = d(x - x_i)^{\alpha_1}, & \text{si } x < x_s, \\ \phi_2(x) = dk_2(x_k - x)^{\alpha_2}, & \text{si } x_s \leq x < x_k, \\ \phi_3(x) = dk_3(x - x_i)^{\alpha_3}, & \text{si } x \geq x_k, \end{cases} \quad (7.5)$$

Como se dijo anteriormente, el caso de $\phi_2(x)$ es similar al del primer tramo de la RPD en las soluciones numéricas de la DNLS, por lo tanto se utiliza $(x_k - x)$, de modo que para $\alpha_2 < 0$ es $\phi_2(x_k) \rightarrow \infty$, situación que se produce por la presencia del máximo local en el mapa de la Figura 7.10.

Los exponentes α_1 , α_2 y α_3 se calculan con los datos numéricos de la función $M(x)$ correspondiente a cada tramo. Para α_1 se utilizan los puntos de reinyección $x_j < x_s$. En el caso de α_2 se emplean los puntos $x_s \leq x < x_k$ pero con la transformación $x'_j = x_k + (x_k - x_j)$ ya utilizada. Por último α_3 se calcula con los puntos $x_j \geq x_k$. De esta forma se obtienen funciones $M(x)$ lineales en cada tramo y los coeficientes α_i se calculan con la Ec. (6.6). Para la determinación de los factores restantes se emplean las definiciones utilizadas hasta el momento.

Teniendo en cuenta la definición de $M(x)$ y la función RPD de la ecuación (7.5) resulta:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{x(1 + \alpha_1) + x_i}{\alpha_1 + 2}, & \text{si } x < x_s, \\ M_2(x) &= \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s(\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)} - k_2 \frac{(x_k - x)^{\alpha_2+1} [x(\alpha_2 + 1) + x_k] - (x_k - x_s)^{\alpha_2+1} [x_s(\alpha_2 + 1) + x_k]}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)}}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha_1 + 1} - k_2 \frac{(x_k - x)^{\alpha_2+1} - (x_k - x_s)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1}}, & \text{si } x_s \leq x < x_k, \\ M_3(x) &= \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s(\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)} + k_2 (x_k - x_s)^{\alpha_2+1} \frac{x_s(\alpha_2 + 1) + x_k}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)} + k_3 \frac{(x - x_i)^{\alpha_3+1} [x(\alpha_3 + 1) + x_i] - (x_k - x_i)^{\alpha_3+1} [x_k(\alpha_3 + 1) + x_i]}{(\alpha_3 + 1)(\alpha_3 + 2)}}{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha_1 + 1} + k_2 \frac{(x_k - x_s)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} + k_3 \frac{(x - x_i)^{\alpha_3+1} - (x_k - x_i)^{\alpha_3+1}}{\alpha_3 + 1}}, & \text{si } x > x_k. \end{aligned} \quad (7.6)$$

El factor k_2 se calcula con el valor de M_2 conocido para $x_s \leq x < x_k$:

$$k_2 = \frac{\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha_1 + 1} \left[\frac{x_s (\alpha_1 + 1) + x_i}{\alpha_1 + 2} - M_2(x) \right]}{\frac{(x_k - x)^{\alpha_2+1} [x (\alpha_2 + 1) + x_k] - (x_k - x_s)^{\alpha_2+1} [x_s (\alpha_2 + 1) + x_k]}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)} + \frac{M_2(x)}{\alpha_2 + 1} [(x_k - x)^{\alpha_2+1} - (x_k - x_s)^{\alpha_2+1}]}, \quad (7.7)$$

y con este factor y el valor de M_3 para $x > x_k$ se obtiene k_3

$$k_3 = \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1} \frac{x_s (\alpha_1 + 1) + x_i}{(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 2)} + k_2 (x_k - x_s)^{\alpha_2+1} \frac{x_s (\alpha_2 + 1) + x_k}{(\alpha_2 + 1)(\alpha_2 + 2)} + M_3(x) \left[\frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha_1 + 1} + k_2 \frac{(x_k - x_s)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} \right]}{\frac{M_3(x)}{\alpha_3 + 1} [(x - x_i)^{\alpha_3+1} - (x_k - x_i)^{\alpha_3+1}] + \frac{(x - x_i)^{\alpha_3+1} [x (\alpha_3 + 1) + x_i] - (x_k - x_i)^{\alpha_3+1} [x_k (\alpha_3 + 1) + x_i]}{(\alpha_3 + 1)(\alpha_3 + 2)}} \quad (7.8)$$

Por último se determina el factor de normalización d

$$d = \left\{ \frac{(x_s - x_i)^{\alpha_1+1}}{\alpha_1 + 1} + k_2 \frac{(x_k - x_s)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2 + 1} + \frac{k_3}{\alpha_3 + 1} [(2c)^{\alpha_3+1} + (x_k - x_i)^{\alpha_3+1}] \right\}^{-1}, \quad (7.9)$$

siendo c la semilongitud del intervalo laminar.

En la Figura 7.12 se muestran resultados de la RPD y de la función $M(x)$ para comparar la solución analítica con los datos numéricos. Se observa que la concordancia entre ambos resultados es bastante buena en todo el intervalo laminar, a pesar de las pequeñas diferencias en el cómputo de $M(x)$, especialmente en el caso (b).

Con estos ejemplos se muestra la versatilidad de la metodología basada en la función $M(x)$ para la aproximación analítica de la RPD, ya que esta técnica permite obtener de manera precisa esta función aun cuando la misma presenta formas complejas como en este caso. La mayor dificultad del método radica en el cálculo de los factores auxiliares que pueden resultar en expresiones intrincadas aunque explícitas.

7.2.3. Densidad de probabilidad de las longitudes laminares

Como se vio en el capítulo anterior, la longitud laminar no depende del mecanismo de reinyección del sistema, sino que está definida únicamente por el mapa de Poincaré local siempre que

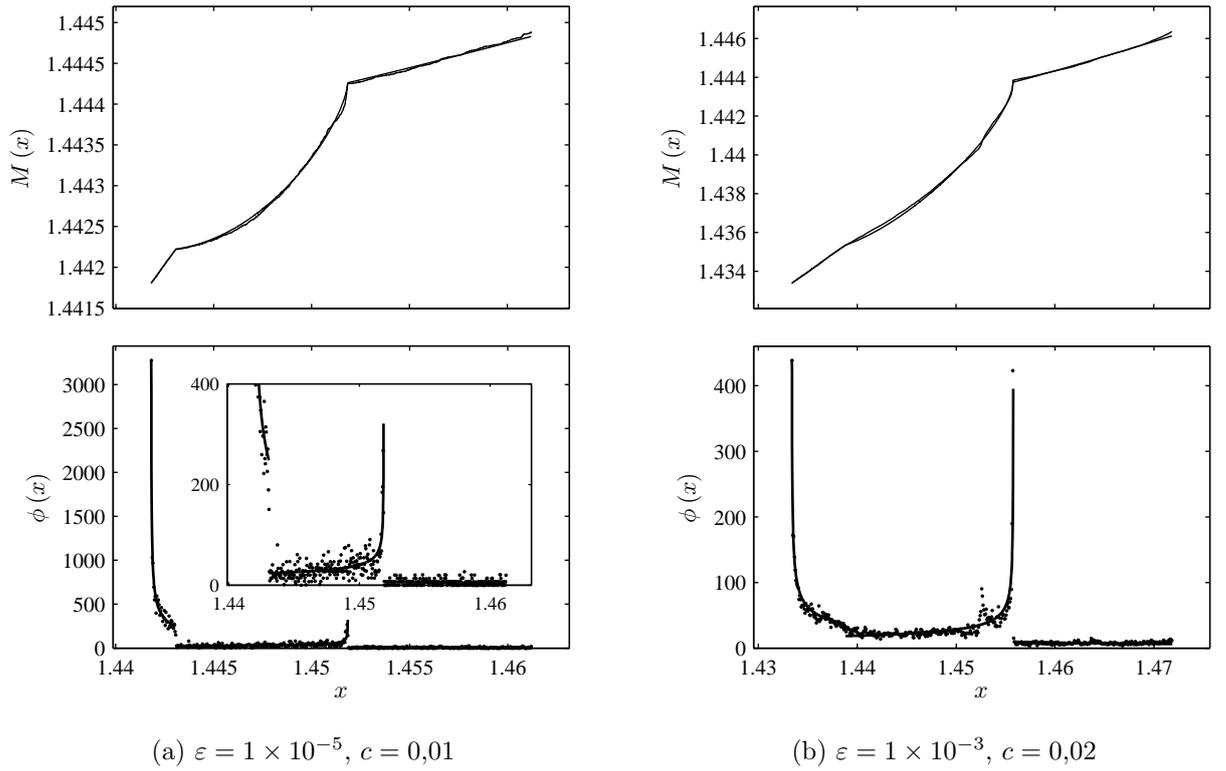


Figura 7.12: Comparación entre los datos numéricos y la aproximación analítica de la RPD para el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con amortiguamiento de Landau.

no se considere efecto del ruido. De este modo, para obtener una aproximación analítica de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares del modelo de truncamiento de la ecuación DNLS, además de la función RPD determinada en la sección anterior es necesario contar con una expresión analítica de la región laminar del del mapa de la Figura 7.10 que representa el sistema.

Teniendo en cuenta que la longitud laminar está definida por una integral (ver Ec. (6.8)), se adopta para la aproximación del mapa local un polinomio de segundo grado de manera de poder integrar analíticamente la ecuación diferencial resultante:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + \varepsilon, \quad (7.10)$$

donde el parámetro de control ε es conocido y los coeficientes del polinomio se calculan utilizando los datos del mapa para aproximar la región laminar del mismo.

Procediendo de la manera habitual para obtener la longitud laminar $l(x, c)$, se asume que el parámetro de control es pequeño y que $f(x_0) = x_0$ para $\varepsilon = 0$, por lo tanto la ecuación en diferencias finitas $x_{n+1} - x_n$ puede escribirse en forma diferencial (Rasband, 1990; Schuster y Just,

2005):

$$\frac{dx}{dl} = a_2 x^2 + (a_1 - 1)x + a_0 + \varepsilon, \quad (7.11)$$

por lo que la longitud laminar resulta

$$\begin{aligned} l(x, c) &= \int_x^c \frac{1}{a_2 x^2 + (a_1 - 1)x + a_0 + \varepsilon} dx = \\ &= \frac{2}{R} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{a_2 (x_i + 2c) + a_1 - 1}{R} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{a_2 x + a_1 - 1}{R} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde x_i es el límite inferior del intervalo laminar, $2c$ la longitud del mismo y

$$R = \left[4a_2 (a_0 + \varepsilon) - (a_1 - 1)^2 \right]^{-1/2}. \quad (7.13)$$

Se observa en la Ec. (7.12) que para $a_2 = a$, $a_1 = 1$ y $a_0 = 0$ se recupera la expresión de $l(x, c)$ para el mapa cuadrático del capítulo anterior, Ec. (6.8), lo cual pone en evidencia el hecho de que la longitud laminar sólo depende del mapa de Poincaré local.

Con los resultados anteriores se puede finalmente obtener una expresión analítica para la densidad de probabilidad de las longitudes laminares:

$$\phi_l(l) = \phi[X(l, c)] \left| \frac{dX(l, c)}{dl} \right| = \phi[X(l, c)] \left| a_2 [X(l, c)]^2 + (a_1 - 1)X(l, c) + a_0 + \varepsilon \right| \quad (7.14)$$

donde X se obtiene de la expresión de $l(x, c)$, Ec. (7.12).

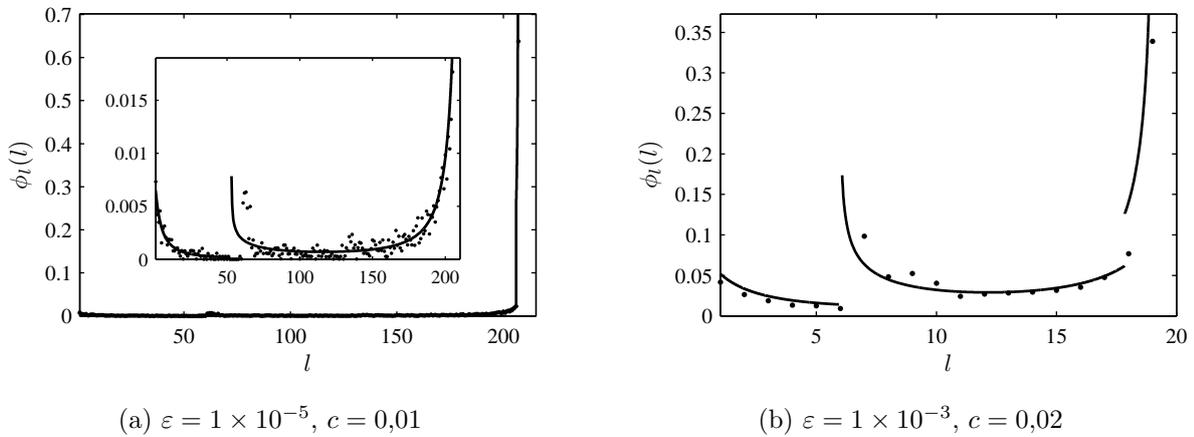


Figura 7.13: Aproximación analítica de la densidad de probabilidad de las longitudes laminares para el modelo de truncamiento de la ecuación DNLS con amortiguamiento de Landau.

En la Figura 7.13 se muestran los resultados de la aproximación analítica propuesta para la densidad de probabilidad de las longitudes laminares, considerando los dos casos analizados en la Figura 7.12. Se observa en ambos casos que la concordancia entre los datos numéricos y la aproximación analítica es aceptable, aunque existen algunas discrepancias lógicas debidas principalmente a la aproximación cuadrática del mapa local.

Para finalizar el análisis hay que destacar que los resultados obtenidos en el estudio de la intermitencia en la ecuación DNLS muestran la versatilidad de la metodología utilizada en esta investigación, demostrando la validez de su aplicación en problemas reales tanto en sistemas continuos como en mapas.

Capítulo 8

Discusión y Conclusiones

En la primera parte de este trabajo se ha solucionado numéricamente la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) utilizando un esquema de métodos espectrales basados en expansiones en serie de Fourier para la resolución de las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden para la integración en el tiempo. El análisis se realizó con el objetivo de comparar los resultados numéricos con aquellos hallados mediante una técnica de truncamiento a tres ondas.

En base a los resultados obtenidos, donde se observaron atractores caóticos que incluyen procesos de intermitencia, la segunda parte del trabajo se dirigió a determinar las propiedades estadísticas de dicho fenómeno. Sin embargo, se encontraron dificultades para realizar la caracterización, ya que los métodos disponibles no permiten su aplicación en problemas que presentan particularidades como el estudiado. En consecuencia, fue necesario adaptar y extender técnicas existentes para su implementación.

A continuación se presentan las principales conclusiones del estudio realizado en este trabajo de tesis.

8.1. Validación del esquema numérico para la resolución de la DNLS

Para la resolución numérica de la ecuación DNLS se propuso un esquema numérico basado en métodos espectrales cuyos detalles se presentaron en el Capítulo 4. La validación del código se realizó a través de la verificación numérica de las condiciones analíticas de estabilidad modular,

las cuales indican que para una condición inicial de una onda sin efectos difusivos, el sistema es estable para $A_0 > \sqrt{2k_0}$ siendo A_0 la amplitud de la onda inicial y k_0 su número de onda.

El código numérico pudo verificar estas condiciones en todos los casos analizados con discretizaciones de $N = 256$ puntos, longitud de integración $L = 64$ y un paso de tiempo $\tau = 0,001$. Para una onda inicial dentro de las condiciones de estabilidad, la solución numérica no presentó inestabilidades espurias considerando un tiempo de integración máximo $t = 50000$, con lo cual se asumió una buena implementación del esquema. Por otro lado, las soluciones numéricas permitieron conocer el tiempo para el cual se produce la inestabilidad de las configuraciones inestables ($A_0 < \sqrt{2k_0}$), situación no predicha por el desarrollo analítico.

Otro aspecto estudiado fue la evolución de las configuraciones inestables considerando distintos números de onda iniciales y diferentes valores de amplitud inicial A_0 . En todos los casos las soluciones mostraron comportamientos similares definidos por el valor de la amplitud inicial, donde se destaca la presencia de soluciones cuasi periódicas cuando las amplitudes iniciales son relativamente pequeñas independientemente del modo inicial considerado. En estos casos, cuando se produce la inestabilidad la energía se transfiere del modo inicial (onda madre) principalmente hacia dos modos k_1 y k_2 (ondas hijas) que cumplen una relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Posteriormente la onda madre recupera casi totalmente la energía y la transfiere nuevamente hacia las ondas hijas formando ciclos. La relación de resonancia indicada es un argumento importante a la hora de definir la cantidad de modos relevantes a considerar en modelos de truncamiento.

8.2. Solución numérica de la DNLS y limitaciones del método de truncamiento

En el Capítulo 5 se presentó la solución numérica de la ecuación DNLS considerando plasmas fríos con polarización izquierda y amortiguamiento resistivo, para una configuración de tres ondas iniciales cerca de resonancia, con la onda madre excitada y las restantes amortiguadas. El objetivo del estudio consistía en conocer cómo se produce la transferencia de energía entre los distintos modos y evaluar una serie de atractores obtenidos por las simulaciones numéricas, comparando los resultados con los de un modelo de truncamiento a tres ondas.

Los resultados mostraron que en función del coeficientes de amortiguamiento se pueden presentar soluciones estacionarias (puntos fijos) o soluciones dinámicas con atractores caóticos. Los

detalles de estos atractores se muestran en las Tablas 5.1 y 5.2.

8.2.1. Soluciones estacionarias de la DNLS

En el caso de las soluciones estacionarias, las simulaciones numéricas mostraron que todas las configuraciones de ondas iniciales convergen hacia un mismo punto fijo, produciéndose una transferencia de energía desde las ondas hijas hacia los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, correspondientes al atractor A_8 . Sin embargo, existen períodos de estabilidad transitoria donde la energía y las amplitudes de los modos iniciales permanecen aproximadamente invariantes hasta que la convergencia al atractor A_8 se produce abruptamente. Estos períodos se estudiaron como si se tratara de soluciones estacionarias, ya que las mismos se registran durante intervalos de tiempo que pueden considerarse relativamente largos.

Considerando los atractores A_8 , A_7 , A_6 y A_5 , la concordancia entre los resultados numéricos y el modelo de truncamiento fue muy buena en casi todo el rango de amortiguamiento de existencia del punto fijo, especialmente en los casos de los atractores A_8 , A_7 y A_6 . Las discrepancias se presentan para valores de coeficiente de amortiguamiento relativamente bajos, donde el modelo de truncamiento sobrestima las amplitudes de los modos resonantes. Esto se debe a las limitaciones de la aproximación analítica que sólo considera tres ondas del espectro, ya que en los casos de amortiguamiento relativamente bajo, la simulación numérica evidenció la aparición de nuevos modos que extraen energía de las ondas iniciales.

Teniendo en cuenta lo anterior, para $\eta \lesssim 0,15$ aparecen dos nuevos modos con niveles de energía no despreciables, los cuales se identifican con k_3 y k_4 siendo $k_3 < k_1 < k_0 < k_2 < k_4$. Estos nuevos modos verifican la relación de resonancia con la onda madre, es decir que se cumple $2k_0 = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, y además están relacionados con las ondas hijas por $k_4 - k_3 = 2(k_2 - k_1)$.

En el caso de los atractores A_4 y A_3 , las discrepancias entre ambos métodos están presentes en todo el intervalo de amortiguamiento. Esto se debe a que estos atractores existen solamente para coeficientes de amortiguamiento relativamente bajos ($\eta < 0,15$), que es la región donde se observan las mayores diferencias en los atractores anteriores. De igual manera, surgen nuevos modos con energía relevante que producen la falla del modelo de truncamiento. Estos nuevos modos verifican las mismas relaciones detalladas anteriormente.

8.2.2. Soluciones dinámicas y presencia de caos

Para algunas configuraciones iniciales de onda y coeficientes de amortiguamiento relativamente bajos, las simulaciones numéricas mostraron la existencia de soluciones dinámicas, las cuales comprenden soluciones periódicas de uno y más periodos y atractores caóticos. Los diagramas de bifurcación de estas soluciones mostraron que las mismas presentan una dinámica compleja, pudiéndose destacar varias secuencias de Feigenbaum que desembocan en atractores caóticos y procesos similares inversos que devuelven las soluciones periódicas. Además de esto, también se observan bifurcaciones de Hopf, fenómenos de intermitencia y distintos tipos de crisis.

Por otro lado, los resultados del modelo de truncamiento no pudieron en ningún caso capturar las soluciones dinámicas anteriormente detalladas. En su lugar, dicho modelo predijo dos tipos de soluciones, una rama de puntos fijos estables que en algunos casos culmina en una bifurcación de Hopf para dar lugar a soluciones periódicas de un periodo, sin registrarse en ningún momento atractores caóticos ni secuencias de doblamiento de periodos. Estos resultados evidencian la dificultad del modelo de truncamiento a tres ondas de reproducir correctamente la dinámica del sistema cuando se consideran coeficientes de amortiguamiento bajos, ya que la aparición de nuevos modos no permite su aplicación.

8.3. Conclusiones generales de la solución de la DNLS

De acuerdo a los resultados obtenidos, puede concluirse que el esquema numérico implementado constituye una herramienta adecuada para la solución de la ecuación DNLS. En el caso no difusivo se verificaron la condiciones analíticas de estabilidad, lo cual respalda en cierto modo los resultados obtenidos para sistemas con amortiguamiento y excitación.

Considerando las soluciones numéricas de la ecuación DNLS con efectos difusivos y excitación, se puede concluir que el modelo de truncamiento a tres ondas parece ser una buena descripción siempre que se consideren coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes, los cuales producen soluciones de puntos fijos estables que sí son captados por este modelo. En ese caso la energía permanece mayormente en los tres modos resonantes iniciales y no se transfiere a otros modos, de manera que el truncamiento a tres modos resulta válido. Sin embargo, esta situación cambia para amortiguamiento pequeño ya que aparecen nuevos modos no despreciables y en consecuencia el modelo de truncamiento a sólo tres ondas falla.

Por otro lado, en los casos donde se registraron soluciones dinámicas y atractores caóticos el modelo de truncamiento fue totalmente incapaz de reproducir esas soluciones inclusive desde un punto de vista cualitativo. Esto se debe a que este tipo de soluciones se presenta sólo para coeficientes de amortiguamiento pequeños donde la aparición de nuevos modos con niveles de energía considerables es aún más evidente que en el caso de las soluciones estacionarias.

De acuerdo a lo anterior, puede decirse que la aplicación de un modelo de truncamiento a tres ondas es válida únicamente en aquellos casos donde el amortiguamiento es importante en relación con el nivel de excitación del sistema, de lo contrario, la utilización de sólo tres modos resulta insuficiente para representar la solución. Sin embargo, el hecho de considerar por ejemplo cinco modos en acuerdo con las relaciones que se verifican en las soluciones numéricas estacionarias, implicaría además de la complejidad propia de obtener las ecuaciones del sistema dinámico, duplicar la cantidad de parámetros de control, lo cual pone en duda la característica de simplicidad de este tipo de soluciones. Por otro lado, cuando existen atractores caóticos se observó que la energía se distribuye en una cantidad mayor de modos, por lo cual inclusive el truncamiento a cinco modos resultaría insuficiente. Estos aspectos ponen muchas dudas respecto a la verdadera utilidad de construir modelos más complejos.

8.4. Caracterización de la intermitencia

Como se dijo anteriormente, en las soluciones dinámicas de la ecuación DNLS se registraron atractores caóticos con procesos de intermitencia tipo I. La utilización de metodologías clásicas para la caracterización estadística de estos fenómenos no fue posible, ya que las mismas son válidas solamente para situaciones simplificadas. Por este motivo, en la segunda parte de este trabajo se propuso una metodología alternativa que contempla la posibilidad de modelar densidades de probabilidad de reinyección (RPD) con formas arbitrarias que presentan discontinuidades, y permite además analizar el efecto del ruido de alta intensidad.

8.4.1. Nueva metodología para la caracterización de intermitencia tipo I

El análisis inicial se hizo en mapas cuadráticos que, debido a la forma del mecanismo de reinyección, presentan funciones RPD con formas arbitrarias. El primer objetivo fue verificar la validez de la aproximación analítica para luego evaluar la influencia de la RPD en la relación característica $\langle l \rangle \propto \varepsilon^\beta$.

Los resultados obtenidos para el caso sin ruido fueron en general muy satisfactorios, con una buena concordancia entre los datos numéricos y las estimaciones analíticas, pudiendo constatarse la aplicabilidad de la metodología para la aproximación analítica de la RPD aun en casos complejos. En cuanto a la relación característica, pudo constatarse que si el menor punto de reinyección (LBR) se encuentra por debajo del punto tangente, el exponente crítico de la relación característica es $\beta = -1/2$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ independientemente de la forma de la RPD, a diferencia de lo establecido en trabajos anteriores donde se indica que la misma debe ser monótonamente decreciente. Este resultado puede entenderse como si la longitud laminar media fuera en realidad una fracción de la longitud laminar máxima, la cual responde a su vez a una relación del tipo $l(x, c) \propto \varepsilon^{-1/2}$ según la Ec. (6.8) para $x = -c$. De esta manera cuando hay una mayor concentración de puntos a la izquierda del intervalo laminar (LBR más alejados), la longitud laminar media se aproxima más a la máxima, alejándose para el caso opuesto, pero siempre con la misma tendencia.

Cuando se considera la presencia de ruido, se generan cambios significativos en la RPD respecto a su versión sin ruido. En este caso pueden aparecer discontinuidades y formas complejas aun cuando la RPD original tenga una forma trivial. No obstante cuál sea la forma de la función RPD por efecto del ruido, la adaptación de la metodología aquí desarrollada ha mostrado ser válida para la aproximación analítica de dicha función. En cuanto al efecto del ruido sobre la relación característica, se ha constatado que independientemente de la forma de la función RPD con efecto ruido, el cambio en la relación característica se debe al corrimiento del punto LBR, el cual se desplaza a la posición $\text{LBR} - \sigma_r$, siendo σ_r la intensidad del ruido. Esta nueva posición es la que define el valor del exponente crítico β , en concordancia con lo desarrollado por [Kim et al. \(1994\)](#).

Las conclusiones más importantes en función de los resultados del efecto del ruido muestran que las modificaciones producidas en la RPD pueden generar confusiones con respecto a las formas esperadas de las funciones estadísticas, lo cual tiene significativas consecuencias sobre todo en el terreno experimental ya que, teniendo en cuenta que el ruido está siempre presente, estas modificaciones no permiten en principio identificar los parámetros del sistema mediante la simple utilización de los datos estadísticos.

8.4.2. Caracterización de la intermitencia en la DNLS

Tanto en los resultados del esquema numérico con amortiguamiento resistivo como en los del modelo de truncamiento con amortiguamiento de Landau, la intermitencia presenta funciones RPD

con formas muy complejas como para poder aproximarlas a través de expresiones simples. En estos casos existen varios puntos singulares en las respectivas funciones RPD los cuales repercuten a su vez en las demás propiedades estadísticas.

Más allá de las complejidades, la aproximación analítica de la RPD obtenida por la metodología aquí establecida mostró una buena concordancia con respecto a los datos numéricos. Este comportamiento fue verificado utilizando no sólo mapas como en el caso del estudio del mapa cuadrático, sino también empleando directamente los resultados de la evolución temporal de la ecuación DNLS integrada numéricamente.

En vista de los resultados, se puede decir que la metodología aquí desarrollada muestra ser muy útil para representar la RPD independientemente de su forma. Por otro lado, estos resultados permitieron obtener nuevas conclusiones respecto al entendimiento del fenómeno general de intermitencia tipo I.

8.5. Aportes originales de esta investigación

En esta sección se hace un resumen de los aportes originales que fueron realizados durante esta investigación.

El primer desarrollo a destacar es el análisis de estabilidad llevado a cabo en el Capítulo 4, donde se evalúa la aplicabilidad del esquema numérico basado en métodos espectrales. Si bien este tipo de esquemas ya fue utilizado en trabajos anteriores ([Spangler, 1986](#); [Fla, 1992](#); [Sánchez-Arriaga et al., 2009](#)), en ninguno de ellos se analiza rigurosamente la estabilidad del método ni la influencia de los parámetros que intervienen en la simulación.

Por otro lado, en los resultados presentados en el Capítulo 5 se demuestra en primer término la existencia de atractores dominantes en las soluciones estacionarias de la ecuación DNLS con efectos de difusión y excitación. Estos resultados muestran que todas las configuraciones de ondas iniciales convergen a la configuración más difusiva para tiempos suficientemente largos, conclusión que no fue totalmente alcanzada en otros trabajos donde se realiza un estudio similar ([Ghosh y Papadopoulos, 1987](#); [Sánchez-Arriaga, 2009](#)). Además, con esta investigación pudieron establecerse las limitaciones para la utilización de modelos de truncamiento.

Los contenidos de los Capítulos 6 y 7 probablemente representen los aportes más importantes de este trabajo. En el primero de ellos se realizó la adaptación y extensión de una metodología recientemente propuesta ([del Rio y Elaskar, 2010](#); [Elaskar et al., 2011](#)) para obtener las propiedades

estadísticas en intermitencia tipo I cuando este fenómeno presenta características particulares que no fueron estudiadas en trabajos anteriores (Hirsch et al., 1982a; Kim et al., 1994; del Rio et al., 2014). Este análisis permitió extender algunas de las conclusiones que se conocían para intermitencia tipo I y también posibilitó el análisis del efecto del ruido de alta intensidad. Por otra parte, en el Capítulo 7 se demostró la validez de la metodología propuesta mediante el análisis de la intermitencia presente en las soluciones de la ecuación DNLS. En este caso, a pesar de la complejidad del problema se obtuvieron muy buenos resultados, lo cual constituye un importante avance hacia una formulación general para el estudio del fenómeno de intermitencia.

8.6. Trabajos futuros

Los desarrollos futuros para esta investigación corresponden al análisis más detallado de la ecuación DNLS con efectos difusivos para entender cuáles son los mecanismos de transferencia de energía que determinan la convergencia hacia modos dominantes. Por otro lado, si bien la implementación de un modelo de truncamiento a cinco ondas parece ser extremadamente difícil, probablemente este tipo de solución permita reproducir las soluciones para relaciones excitación/difusión más importantes.

En cuanto a las metodologías de caracterización de la intermitencia, el desafío más auspicioso consiste en avanzar hacia una formulación general para la evaluación de este fenómeno, vinculando el comportamiento de la función auxiliar $M(x)$ con las características de la RPD de manera de obtener expresiones que permitan una solución sistemática del problema.

Por otro lado, otro aspecto a desarrollar es el análisis del efecto del ruido en problemas más complejos que los estudiados en el Capítulo 6 considerando distribuciones de ruido diferentes al “ruido blanco”. Esto podría permitir el análisis del sistema dinámico correspondiente a las soluciones numéricas de la ecuación DNLS como si se tratara de un sistema afectado por fuertes fuentes de ruido.

Apéndice A

Parámetros de Descripción del Plasma

Nomenclatura

κ	Constante de Boltzmann
ε_0	Permitividad en el vacío
μ_0	Permeabilidad magnética en el vacío
c	Velocidad de la luz
e	Carga eléctrica del electrón
T	Temperatura del plasma
m_e	Masa del electrón
m_i	Masa del ion
n	Densidad de partículas
B	Módulo del campo magnético
η	Coefficiente de difusión magnética (Resistividad)
ρ	Densidad de masa
p	Presión cinética
γ	Coefficiente politrópico
L	Longitud de referencia
V_0	Velocidad de referencia

Longitud de Debye

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa T}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

Frecuencia (electrónica) del plasma

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Velocidad térmica de los electrones

$$v_{te} = \left(\frac{2 \kappa T}{m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

Frecuencia de ciclotrón del electrón

$$\Omega_e = \frac{e B}{m_e} \quad (\text{A.4})$$

Frecuencia iónica del plasma

$$\omega_{pi} = \left(\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

Velocidad térmica de los iones

$$v_{ti} = \left(\frac{2 \kappa T}{m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Frecuencia de ciclotrón iónica

$$\Omega_i = \frac{e B}{m_i} \quad (\text{A.7})$$

Longitud inercial de los iones

$$l_i = \frac{c}{\omega_{pi}} \quad (\text{A.8})$$

Número de Reynolds magnético

$$R_M = \frac{\mu_0 L V_0}{\eta} \quad (\text{A.9})$$

Velocidad de Alfvén

$$V_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}} \quad (\text{A.10})$$

Velocidad del Sonido

$$c_s = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

Parámetro β del plasma

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2} = \frac{c_s^2}{V_A^2} \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Modelo de Truncamiento de la Ecuación DNLS

En el presente apéndice se describe brevemente el modelo de truncamiento a tres ondas de la ecuación DNLS, el cual puede consultarse en mayor profundidad en el trabajo de [Sánchez-Arriaga \(2009\)](#).

Tomando el campo magnético sin perturbar B_0 en la dirección z de un marco de referencia moviéndose con velocidad de Alfvén y asumiendo un plasma frío ($\beta \approx 0$), la ecuación DNLS resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde el signo superior (inferior) en la Ec. (B.1) corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha), $\hat{\gamma}$ es un operador lineal de amortiguamiento o excitación y las variables b , z y t son adimensionalizadas de la siguiente manera:

$$b = \frac{B_x \pm iB_y}{2B_0}, \quad 2\Omega_i t \rightarrow t, \quad \frac{2\Omega_i}{V_A} z \rightarrow z, \quad (\text{B.2})$$

Se consideran tres ondas viajeras de la forma:

$$b(z, t) = \sum_{j=0}^2 b_j e^{i(k_j z - \omega_j t + \phi_j)}, \quad (\text{B.3})$$

siendo $b_j(t)$ y $\phi_j(t)$ números reales, con números de onda $k_1 = (1 - \delta)k_0$ y $k_2 = (1 + \delta)k_0$ que cumplen la condición de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$, y frecuencias que satisfacen la relación de

dispersión sin pérdidas $\omega_j = \mp k_j^2$. El modelo de truncamiento disipativo se obtiene sustituyendo la Ec. (B.3) en la expresión (B.1) y despreciando los términos de los modos no resonantes, ya que se acepta que los mismos se amortiguan para $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, para obtener formulaciones más compactas se realizan los siguientes definiciones:

$$r = \frac{b_2}{b_1}, \tag{B.4}$$

$$\theta = \nu t + \phi_1 + \phi_2 - 2\phi_0, \tag{B.5}$$

$$\nu = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 = \pm 2\delta^2 \tag{B.6}$$

El parámetro ν es un desajuste en la frecuencia, una consecuencia del carácter dispersivo de las ondas, y su signo está relacionado directamente con el sentido de polarización (positivo: izquierda, negativo: derecha).

Los coeficientes de excitación/amortiguamiento se denotan como γ_0 , γ_1 y γ_2 correspondientes a las ondas identificadas con k_0 , k_1 y k_2 respectivamente. Valores de $\gamma_i > 0$ indican disipación, mientras que $\gamma_i < 0$ significa excitación, de acuerdo a los signos que se utilizan en las ecuaciones.

Haciendo uso de las siguientes normalizaciones en el tiempo y las amplitudes

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (\gamma_1 + \gamma_2) t, \\ b_0^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\sqrt{k_1 k_2}} b_0^2, \\ b_1^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} b_1^2, \\ b_2^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} b_2^2, \end{aligned} \tag{B.7}$$

el modelo de truncamiento resulta

$$\begin{aligned} \dot{b}_0 &= \Gamma b_0 + r b_0 b_1^2 \sin \theta, \\ \dot{b}_1 &= -\frac{\zeta}{1 + \zeta} b_1 - r b_0^2 b_1 \sin \theta, \\ \dot{r} &= -\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} r - (1 - r^2) b_0^2 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \bar{\nu} - 2b_0^2 \left(\frac{1 + \kappa}{2\sqrt{\kappa}} + \frac{1 + r^2}{2r} \cos \theta \right) + 2r b_1^2 \cos \theta + \frac{b_1^2 \sqrt{\kappa}}{1 + \kappa} \left(\kappa + \frac{r^2}{\kappa} \right), \end{aligned} \tag{B.8}$$

donde \dot{b}_2 fue reemplazado por $r = b_2/b_1$ y se utilizaron los siguientes parámetros:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} < 1, \quad (\text{B.9})$$

$$\zeta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < 1, \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma = -\frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \gamma_2} < 1, \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (\text{B.12})$$

El número de parámetros se reduce cuando se utiliza un modelo de amortiguamiento determinado, tal como el modelo de Landau ($\gamma \propto k$) o el modelo resistivo ($\gamma \propto k^2$). En el caso de amortiguamiento resistivo (Sanmartín et al., 2004):

$$\gamma \approx \frac{V_A^2 k^2}{2\Omega_e \Omega_i \tau_c} \rightarrow \zeta = \kappa^2, \quad (\text{B.13})$$

siendo V_A la velocidad de Alfvén, Ω_e y Ω_i las frecuencias de ciclotrón, y τ_c el tiempo de colisión de Braginskii.

Los puntos fijos del sistema (B.8) representan ondas de Alfvén viajeras para las cuales efectos no lineales y dispersivos son balanceados entre sí manteniendo las amplitudes y las fases relativas constantes. Estos puntos fijos se obtienen anulando las ecuaciones (B.8):

$$r = \sqrt{\zeta}, \quad (\text{B.14})$$

$$b_0^2 = -\frac{\sqrt{\zeta}}{(1 + \zeta) \sin \theta}, \quad (\text{B.15})$$

$$b_1^2 = -\frac{\Gamma}{\sqrt{\zeta} \sin \theta}, \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{\nu} \sin \theta = F - (1 - 2\Gamma) \cos \theta, \quad (\text{B.17})$$

siendo

$$F = \frac{\zeta + \kappa^2}{(1 + \kappa) \sqrt{\kappa \zeta}} \Gamma - \frac{1 + \kappa}{1 + \zeta} \sqrt{\frac{\zeta}{\kappa}}. \quad (\text{B.18})$$

La Ec. (B.17) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\cos \theta = \frac{F(1 - 2\Gamma) \pm \bar{\nu} \sqrt{\bar{\nu}^2 + (1 - 2\Gamma)^2 - F^2}}{\bar{\nu}^2 + (1 - 2\Gamma)^2}, \quad (\text{B.19})$$

La expresión anterior indica que existen combinaciones de dos puntos fijos, P y P^* correspondientes al signo superior e inferior, respectivamente. Las condiciones de existencia de los puntos fijos están dadas en primer término por el signo del discriminante en la Ec. (B.19) ($F^2 < \bar{v}^2 + (1 - 2\Gamma)^2$). En segundo lugar, las Ecs. (B.15) y (B.16) requieren que $\sin \theta < 0$ ya que, según las definiciones (B.10) y (B.11), $\zeta > 0$ y $\Gamma > 0$. Por último, puede demostrarse que la condición $|\cos \theta| \leq 1$ se cumple si se satisface la primera condición, que resulta ser la más restrictiva. En cuanto a la estabilidad de los puntos fijos, se demuestra que el punto P^* es siempre inestable en el modelo de amortiguamiento resistivo ($\zeta = \kappa^2$) para cualquier sentido de polarización.

Apéndice C

Publicaciones y Presentaciones

En el marco de la presente investigación, se llevaron a cabo publicaciones y presentaciones en congresos de algunos de los contenidos de esta tesis. A continuación se detallan los trabajos más relevantes.

- Con parte de los resultados obtenidos en los Capítulos 4 y 5 se realizaron los siguientes trabajos:

G. Krause, S. Elaskar y A. Costa (2014). Chaos and Intermittency in the DNLS Equation Describing the Parallel Alfvén Wave Propagation. *Journal of Astrophysics, Hindawi Publishing Corporation* (en revisión).

G. Krause y S. Elaskar (2012). Numerical Study of Attractors for the Diffusive DNLS Equation using Spectral Methods. In C. Carstea editor, *Latest Trends in Applied Informatics and Computing*. Proceedings of the 3rd Conference on Applied Informatics and Computing, Barcelona. ISBN 978-1-61804-130-2, pages 129–134.

- Los desarrollos del Capítulo 6 y algunos resultados del Capítulo 7 fueron enviados para su publicación en los siguientes trabajos:

G. Krause, S. Elaskar y E. del Río (2014). Noise Effect on Statistical Properties of Type-I Intermittency. *Physica A, Elsevier*, en prensa (<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2014.02.008>).

G. Krause, S. Elaskar y E. del Río (2014). Type-I Intermittency with Discontinuous Reinjection Probability Density in a Truncation Model of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Nonlinear Dynamics, Springer*, aceptado.

- Además de las publicaciones detalladas anteriormente, con los resultados que fueron obteniéndose a lo largo de la investigación se realizaron las siguientes presentaciones en congresos nacionales y regionales:

G. Krause, S. Elaskar y E. del Río (2013). **Efecto del Ruido en la Densidad de Probabilidad de Reinyección en Intermittencia Tipo I**. *XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2013)*, 19 al 22 de noviembre, Mendoza, Argentina. Publicado en *Mecánica Computacional* vol. XXXII, C. García Garino, A. Mirasso, M. Storti y M. Tornello editores, ISSN 1666-6070, págs. 3691–3704.

G. Krause, S. Elaskar y E. del Río (2013). **Consideraciones sobre Intermittencia Tipo I**. *IV Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2013)*, 15 al 17 de mayo, Buenos Aires, Argentina. Publicado en los Anales del Congreso, G. La Mura, D. Rubio, E. Serrano editores, págs. 529–532.

S. Elaskar, E. del Río y **G. Krause** (2013). **New Probability Density of the Laminar Length Functions for Type I Intermittency**. *IV Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2013)*, 15 al 17 de mayo, Buenos Aires, Argentina. Publicado en los Anales del Congreso, G. La Mura, D. Rubio, E. Serrano editores, págs. 549–552.

G. Krause y S. Elaskar (2012). **Descripción por Métodos Espectrales de la Propagación Paralela de Ondas de Alfvén en el Modelo MHD-Hall**. *IV Congreso Latinoamericano de Matemáticos (CLAM 2012)*, 6 al 10 de agosto, Córdoba, Argentina.

G. Krause y S. Elaskar (2011). **Integración por Métodos Espectrales de la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger**. *XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2011)*, 1 al 4 de noviembre, Rosario, Argentina. Publicado en *Mecánica Computacional* vol. XXX, O. Möller, J. Signorelli, M. Storti editores, ISSN 1666-6070, págs. 1465–1483.

G. Krause y S. Elaskar (2011). **Solución Numérica de la Ecuación DNLS No Difusiva con Una Onda como Condición Inicial**. *III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2011)*, 9 al 11 de mayo, Bahía Blanca, Argentina. Publicado en los Anales del Congreso, L. Castro, M. Maciel y S. Castro editores, págs. 547–550.

Referencias

- Abraham, R. (1985). Catastrophes, Intermittency, and Noise. En Fischer, P. y Smith, W., editores, *Chaos, Fractals and Dynamics*, páginas 3–22, New York. Marcel Drekker.
- Ahedo, E. y Sanmartín, J. (2002). Analysis of Bare-Tether Systems for Deorbiting Low-Earth-Orbit Satellites. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 39(2):198–205.
- Alfvén, H. (1942). Existence of Electromagnetic-hydrodynamic Waves. *Nature*, 150:405.
- Baccelli, G., Cohen, G., Olsder, G., y J., Q. (1992). *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Even Systems*. Wiley and Sons.
- Belashov, V. y Vladimirov, S. (2005). *Solitary Waves in Dispersive Complex Media*. Springer, Berlin.
- Borotto, F., Chian, A., Hada, T., y Rempel, E. (2004). Chaos in Driven Alfvén Systems: Boundary and Interior Crises. *Physica D*, 194:275–282.
- Boyd, J. (2000). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications.
- Boyd, T. y Sanderson, J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Brodin, G. y Stenflo, L. (1990). Coupling Coefficients for Ion-Cyclotron Alfvén Waves. *Contributions to Plasma Physics*, 30:413–419.
- Buti, B., Velli, M., Liewer, P., Goldstein, B., y Hada, T. (2000). Hybrid Simulations of Collapse of Alfvénic Wave Packets. *Physics of Plasmas*, 7(10):3998–4003.
- Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M., y Zang, T. (2006). *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*. Springer.
- Chian, A. (2007). Complex system approach to economic dynamics. En *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, páginas 39–50. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Chian, A., Borotto, F., y González, W. (1998). Alfvén Intermittent Turbulence Driven by Temporal Chaos. *The Astrophysical Journal*, 505:993–998.
- Chian, A., Borotto, F., y Rempel, E. (2002). Alfvén Boundary Crises. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(7):1653–1658.
- Cho, J., Ko, M., Park, Y., y Kim, C. (2002). Experimental observation of the characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise. 65:036222.
- Cramer, N. (2001). *The Physics of Alfvén Waves*. Wiley-VCH, Berlin, 1 edition.
- Dawson, S. y Fontan, C. (1988). Soliton Decay of Nonlinear Alfvén Waves Numerical Studies. *Physics of Fluids*, 31(1):83–89.

- de Oliveira, G., de Oliveira, L., y Rizzato, F. (1997). Nonintegrable Three Mode Interaction in the Zakharov Equations. *Physica D*, 104:119–126.
- del Rio, E. y Elaskar, S. (2010). New Characteristic Relation in Type-II Intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191.
- del Rio, E., Elaskar, S., y Donoso, J. (2014). Laminar length and characteristic relation in type-I intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19(4):967–976.
- del Rio, E., Sanjuan, M., y Elaskar, S. (2012). Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596.
- Dobrowolny, M. y Melchioni, E. (1993). Electrodynamic Aspects of the First Tethered Satellite Mission. *Journal of Geophysics Research*, 98(A8):13761–13778.
- Drazin, G. y Johnson, R. (1989). *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, New York.
- Dubois, M., Rubio, M., y Berge, P. (1983). Experimental Evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51(16):1446–1449.
- Elaskar, S., del Rio, E., y Donoso, J. (2011). Reinjection Probability Density in Type-III Intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768.
- Elaskar, S., Sánchez-Arriaga, G., y Sanmartín, J. (2005). Fully three Wave Model to Study the Hard Transition to Chaotic Dynamics in Alfvén Wave Fronts. *Mecánica Computacional*, XXIV:2271–2287.
- Elaskar, S., Sánchez-Arriaga, G., y Sanmartín, J. (2006). Chaos in Nonlinear Alfvén Waves Using the DNLS Equation. *International Symposium on Electrohydrodynamics – 2006 ISEHD Buenos Aires, 4-6 de diciembre, Publicado en los Proceedings del Congreso*, ISBN 950-29-0964-X:131–134.
- Fla, T. (1992). A Numerical Conserving Method for the DNLS Equation. *Journal of Computational Physics*, 101:71–79.
- Galperin, I., Leonovich, A., Mazur, V., y Tashchilin, A. (1986). Motion of a Packet of Small-scale Alfvén Waves in the Mid-latitude Plasmasphere. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 24(4).
- Ghosh, S. y Papadopoulos, K. (1987). The onset of Alfvénic Turbulence. *Physics of Fluids*, 30:1371–1387.
- Goedbloed, J. y Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, New York, 1 edition.
- Grebogi, C., Ott, E., y Yorke, J. (1987). Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science*, 13(2):632–638.
- Hada, T. (1993). Evolution of large amplitude Alfvén waves in the solar wind with $\beta \sim 1$. *Geophysical Research Letters*, 20(22):2415–2418.
- Hada, T., Kennel, C., y Buti, B. (1989). Stationary Nonlinear Alfvén Waves and Solitons. *Journal of Geophysics Research*, 94(A1):65–77.
- Hada, T., Kennel, C., Buti, B., y Mjølhus, E. (1990). Chaos in Driven Alfvén Systems. *Physics of Fluids*, B2(11):2581–2590.

-
- Herlofsen, N. (1950). Magnetohydrodynamic Waves in a Compressible Fluid Conductor. *Nature*, 165:1020.
- Hirsch, E., Huberman, B., y Scalapino, D. (1982a). Theory of Intermittency. *Phys. Rev. A*, 25(1):519–532.
- Hirsch, E., Nauenberg, M., y Scalapino, D. (1982b). Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation. *Phys. Lett. A*, 87(8):391–393.
- Hollweg, J. (1971). Density Fluctuations Driven by Alfvén Waves. *Journal of Geophysics Research*, 76:5155–5161.
- Hramov, A., Koronovskii, A., Kurovskaya, M., y Boccaletti, S. (2006). Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 97:114101.
- Jardin, S. (2010). *Computational Methods in Plasma Physics*. Chapman & Hall, CRC Press.
- Jetenco-Pereira, V. (1995). Alfvén Waves in Astrophysical Plasmas. *Physics Scripta*, 60:113.
- Kakutani, T., Ono, H., Taniuti, T., y Wei, C. (1968). Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II. Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, 24:1159–1166.
- Kaplan, H. (1992). Return to Type-I Intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 68:553–557.
- Kaup, D. y Newell, A. (1978). An Exact Solution for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 19:798–802.
- Kawata, T. y Inoue, H. (1978). Exact Solution of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation under Nonvanishing Conditions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 44:1968–1976.
- Kawata, T., Sakai, J., y Kobayashi, N. (1980). Inverse Method for the Mixed Nonlinear Schrödinger Equation and Solitons Solutions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 48:1371–1379.
- Kennel, C., Buti, B., Hada, T., y Pellat, R. (1988). Nonlinear, Dispersive, Elliptically Polarized Alfvén Waves. *Physics of Fluids*, 31:1949–1962.
- Kever, H. y Morikawa, G. (1969). Korteweg-de Vries Equation for Nonlinear Hydromagnetic Waves in a Warm Collision-free Plasma. *Physics of Fluids*, 12(10):2090–2093.
- Kim, C., Kwon, O., Lee, E., y Lee, H. (1994). New Characteristic Relation in Type-I Intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 73(4):525–528.
- Klimaszewska, K. y Zebrowski, J. (2009). Detection of the type of intermittency using characteristic patterns in recurrence plots. 80:026214.
- Koronovskii, A. y Hramov, A. (2008). Type-II intermittency characteristics in the presence of noise. 62:447–452.
- Krall, N. y Trivelpiece, A. (1973). *Principles of Plasma Physics*. Mc-Graw Hill.
- Kwon, O., Kim, C., Lee, E., y Lee, H. (1996). Effects of reinjection on the scaling property of intermittency. 53:1253–1256.
- Kye, W., Rim, S., Kim, C., Lee, J., Ryu, J., Yeom, B., y Park, Y. (2003). Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit. 68(3):036203.
-

- Lee, K., Kwak, Y., y Lim, T. (1998). Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 81:321–324.
- López-Rebollal, O., Sanmartín, J., y del Río, E. (1998). Sudden Transition to Chaos in Plasma Wave Interactions. *Physics of Plasmas*, 5(8):2861–2867.
- Lundquist, S. (1949). Experimental Investigation of Magneto-hydrodynamics Waves. *The Physical Review*, 76:1805–1809.
- Machida, S., Spangler, S., y Goertz, C. (1987). Simulation of Amplitude-modulated Circularly Polarized Alfvén Waves for Beta less than one. *Journal of Geophysics Research*, 92(A7):7413–7422.
- Malasoma, J., Werny, P., y Boiron, M. (2004). Multichannel type-I intermittency in two models of Raileigh-Bénard convection. *Chaos Solitons Fract.*, 51(15):487–500.
- Manneville, P. y Pomeau, Y. (1979). Intermittency and Lorenz model. *Phys. Lett. A*, 75:1–2.
- Medvedev, M. (1999). Collisionless Dissipative Nonlinear Alfvén Waves: Nonlinear Steepening Compressible Turbulence, and Particle Trapping. *Physics of Plasmas*, 6(5):2191–2197.
- Mio, K., Ogino, T., Minami, K., y Takeda, S. (1976). Modified Nonlinear Schrödinger Equation for Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in a Cold Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, 41:265–271.
- Mjølhus, E. (1976). On the Modulation Instability of Hydromagnetic Waves Parallel to the Magnetic Field. *Journal of Plasma Physics*, 16:321–334.
- Mjølhus, E. (1989). Nonlinear Alfvén Waves and the DNLS Equation: Oblique Aspects. *Physics Scripta*, 40:227–237.
- Mjølhus, E. y Hada, T. (1997). Nonlinear Phenomena Involving Dispersive Alfvén Waves. En Hada, T. y Matsumoto, H., editores, *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*, páginas 121–169, Tokio. Terra Scientific Publishing Company.
- Mjølhus, E. y Wyller, J. (1986). Alfvén Solitons. *Physics Scripta*, 33:442–451.
- Mjølhus, E. y Wyller, J. (1988). Nonlinear Alfvén Waves in a Finite-beta Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 40(2):299–318.
- Morton, K. (1964). Finite Amplitude Compression Waves in a Collision-Free Plasma. *Physics of Fluids*, 7(11):1800–1815.
- Nariyuki, Y. y Hada, T. (2005). Self-generation of Phase Coherence in Parallel Alfvén Turbulence. *Earth Planets Space*, 57:e9–e12.
- Nayfeh, A. y Balachandran, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Orszag, S. (1971). Numerical Simulations of Incompressible Flows within Simple Boundaries. Galerkin Spectral Representation. *Studies in Applied Mathematics*, 50:293–327.
- Ovenden, C., Shah, H., y Schwartz, S. (1983). Alfvén Soliton in the Solar Wind. *Journal of Geophysics Research*, 88:6095–6101.
- Pécsele, H. (2012). *Waves and Oscillations in Plasmas*. Taylor and Francis Group, Boca Raton, Florida.

-
- Pettini, M., Nocera, L., y Vulpiani, A. (1985). Compressible MHD Turbulence; An Efficient Mechanism to Heat Stellar Coronae. *Chaos in Astrophysics*, Eds. J. Bucler et al., Dorochet Reidel.
- Philips, N. (1959). An Example of Non-linear Computational Instability. *The Atmosphere and the Sea in Motion, Rosby Memorial*, E:501–504.
- Pikovsky, A. (1983). A new type of intermittent transition to chaos. *J. Phys A: Math. Gen.*, 16:L109–L112.
- Pikovsky, A., Osipov, G., Rosenblum, M., Zaks, M., y Kurths, J. (1997). Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 79:47–50.
- Platt, N., Spiegel, E., y Tresser, C. (1993). On-Off Intermittency: A Mechanismo for Bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 70:279–282.
- Pomeau, Y. y Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system. *Commun. Math. Phys.*, 74:189–197.
- Price, T. y Mullin, P. (1991). An experimental observation of a new type of intermittency. *Physica D*, 48:29–52.
- Prikarpatskii, A. (1981). Almost Periodic Solutions of a Modified Nonlinear Schrödinger Equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 47(3):487–493.
- Rasband, S. (1990). *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. Wiley-Interscience, New York.
- Robinson, P. y Drysdale, P. (1996). Phase Transition Coherent and Incoherent Three-Wave Interactions. *Physical Review Letters*, 77(13):2698–2701.
- Rogister, A. (1971). Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- β Plasma. *Physics of Fluids*, 14(12):2733–2739.
- Ruderman, M. (2002). DNLS Equation for Large-amplitude Solitons Propagating in an Arbitrary Direction in a High- β Hall Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 67(4):271–276.
- Russell, D. y Ott, E. (1981). Chaotic (strange) and Periodic Behaviour in Instability Saturation by the Oscillating Two Stream Instability. *Physics of Fluids*, 24:1976–1988.
- Sagdeev, R. y Galeev, A. (1969). *Nonlinear Plasma Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York.
- Sakai, J. y Sonnerup, B. (1983). Modulational Instability of Finite amplitude dispersive Alfvén Waves. *Journal of Geophysics Research*, 88:9069–9079.
- Sánchez-Arriaga, G. (2009). *Nonlinear Low-frequency Wavefront Generated by Electrodinamic Tethers*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos.
- Sánchez-Arriaga, G., Hada, T., y Nariyuki, Y. (2009). The Truncation Model of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Physics of Plasmas*, 16:042302.
- Sánchez-Arriaga, G., Sanmartín, J., y Elaskar, S. (2007). Damping Models in the Truncated DNLS Equation. *Physics of Plasmas*, 14:082108.
- Sanmartín, J., Charro, M., Peláez, J., Tinao, I., Elaskar, S., Hilgers, A., y Martínez-Sánchez, A. (2006). Electrically Floating Bare-Tether as Upper Atmosphere Probe. *Journal of Geophysics Research*, 111:A11310.
-

-
- Sanmartín, J. y Estes, R. (1997). Alfvén Wave Far Field form Steady-Current Tethers. *Journal of Geophysics Research*, 102-A7(14):625.
- Sanmartín, J., López-Rebollal, O., del Río, E., y Elaskar, S. (2004). Hard Transition to Chaos Dynamics in Alfvén Wave-Fronts. *Physics of Plasmas*, 11(5):2026–2035.
- Schuster, H. y Just, W. (2005). *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, Mörlenbach, 4th. edition.
- Schwartz, S., Owen, C., y Burgess, D. (2004). *Astrophysical Plasma*. Astronomy Unit, Queen Mary, University of London.
- Shukla, P. y Stenflo, L. (1999). Nonlinear Phenomena Involving Dispersive Alfvén Waves. En Passot, T. y Sulem, P., editores, *Nonlinear MHD Waves and Turbulence*, páginas 1–30. Springer.
- Smith, E., Balogh, A., Neugebauer, M., y McComas, D. (1995). Ulysses Observations of Alfvén Waves in the Southern and Northern Hemispheres. *Geophysical Research Letters*, 22:3381.
- Spangler, S. (1985). Nonlinear Astrophysical Alfvén Waves: onset and outcome of the Modulational Instability. *The Astrophysical Journal*, 299:122–137.
- Spangler, S. (1986). The Evolution of Nonlinear Alfvén Waves Subject to Growth and Damping. *Physics of Fluids*, 29:2535–2547.
- Spangler, S. y Sheerin, J. (1982). Properties of Alfvén Solitons in a Finite-beta Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 27(2):193–198.
- Spangler, S., Sheerin, J., y Payne, G. (1985). A Numeric Study of Nonlinear Alfvén Waves and Solitons. *Physics of Fluids*, 28:104–109.
- Stavrínides, S., Miliou, A., Laopoulos, T., y Anagnostopoulos, A. (2008). The Intermittency Route to Chaos of an Electronic Digital Oscillator. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 18(5):1561–1566.
- Stringer, T. (1963). Low-frequency Waves in an Unbounded Plasma. *Plasma Physics (Journal in Nuclear Energy Part C)*, 5:89–107.
- Taniuti, T. y Washimi, H. (1968). Self-trapping and Instability of Hydromagnetics Waves along the Magnetic Field in a Cold Plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 21(4):209–212.
- Tsurutani, B., Richardson, I., Thorne, R., Butler, M., Smith, E., Cowley, S., Gary, S., Akasofu, S., y Zwickl, R. (1985). Observation of the Right-hand Resonant Ion Beam Instability in the Distant Plasma Sheet Boundary Layer. *Journal of Geophysics Research*, 90:12159–12172.
- Zebrowski, J. y Baranowski, R. (2004). Type I intermittency in nonstationary systems: Models and human heart-rate variability. *Physica A*, 336:74–83–.