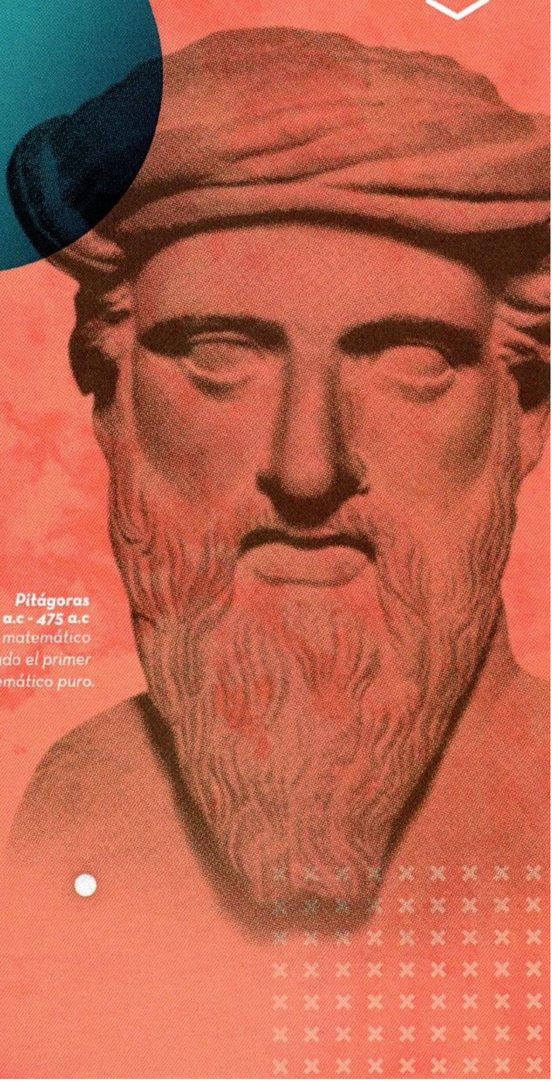
Universidad Nacional de Córdoba

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Profesorado en Matemática



Pitágoras
569 a.c - 475 a.c
Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro.

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Una propuesta para el estudio de polígonos y cuadriláteros con foco en la escritura de argumentos

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

Gabriela Ayelén Greco

Supervisión de práctica profesional e informe final: Mg. María Mina

Equipo responsable de MyPE: Prof. Marianela Asinari, Prof. Araceli Coirini Carreras, Mg. María Mina, Lic. Silvina Smith

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 21-11-2019

Clasificación:

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras claves: prácticas de enseñanza, polígonos, cuadriláteros, clasificación, escritura, argumentar.

Resumen

El presente informe describe las prácticas profesionales docentes realizadas por una alumna del Profesorado de Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba.

Dichas prácticas fueron realizadas en un curso de segundo año de un colegio público de gestión estatal de la Ciudad de Córdoba. El tema de práctica coloca el foco en el estudio de polígonos y, específicamente, en el estudio de cuadriláteros. Una caracterización de la tarea de clasificar estuvo presente a lo largo de la propuesta de enseñanza.

En el informe se encuentra una breve descripción de la institución y algunos de los actores que la integran, la planificación propuesta y lo efectivamente trabajado en el aula. También se analiza una problemática relacionada con la escritura de argumentos, motivada por experiencias vividas durante las prácticas, y algunas reflexiones finales.

Abstract

This report describes the pre-service teaching experience carried out by a prospective teacher of a teacher education program of the Faculty of Mathematics, Astronomy, Physics and Computing at the National University of Córdoba. This experience was carried out in one class of second year course of a Secondary School, in a public school in the City of Córdoba. The subject of the experience focuses on the study of polygons and, specifically, on the study of quadrilaterals. A characterization of the task of classifying was present throughout the teaching proposal.

In the report, there is a brief description of the institution and some of the actors that integrate it, the proposed planning and what was effectively worked in the classroom. It also analyzes a problem related to the writing of arguments, motivated by experiences lived during the practices, and some final reflections.

"Educar para comprender las matemáticas o cualquier disciplina es una cosa, educar para la comprensión humana es otra; ahí se encuentra justamente la misión espiritual de la educación: enseñar la comprensión entre las personas como condición y garantía de la solidaridad intelectual y moral de la humanidad."

Edgar Morin[1].

[1] Edgar Morin, filósofo y sociólogo francés de origen sefardí.

Índice

1. Introducción

A lo largo de este primer capítulo, daré cuenta de algunos aspectos relevantes sobre la institución donde se realizaron las prácticas docentes y de sus distintos actores, con el fin de colocar al lector en el contexto, puesto que los datos aquí descritos tuvieron influencia en la planificación y ejecución de las clases. Se presenta una breve descripción de la institución y particularmente del aula de segundo año, donde se llevaron a cabo dichas prácticas. También se reflejará un análisis del estilo de la clase de Matemática impartido por la docente titular del curso y una comparación con la clase de inglés, observada en una ocasión durante la observación de jornada completa.

1.1 Acerca de la institución

La institución donde se realizó la práctica profesional docente se ubica en la zona sur de la Ciudad de Córdoba. Es una escuela pública de gestión estatal, con orientación en Economía y Gestión y de Especialidad Gestión Administrativa para su Ciclo Orientado (ver Figura 1).

Figura 1: Imagen del frente de la institución escolar.

La institución escolar cuenta con Ciclo Básico y Ciclo Orientado, distribuidos en tres turnos:

- Turno mañana: dos divisiones de primer año, dos de segundo año y dos de tercer año.
- Turno tarde: dos divisiones de primer año, dos de segundo año y un único tercer año.
- Turno noche: dos divisiones de cuarto año, dos de quinto año y un único sexto año.

El hecho de que la escuela permanece habitada por alumnos casi constantemente a lo largo del día repercute en la responsabilidad de todos los actores en mantener en condiciones el orden y la limpieza de la institución.

En esta institución se aplica, desde este año lectivo, el "Programa Nuevo Régimen Académico para la Escuela Secundaria"[2], lo que la convierte en escuela piloto. La principal modificación con respecto a esto se encuentra en la concepción y formas de evaluación, proponiendo un minucioso seguimiento de cada alumno con el fin de realizar una evaluación de tipo formativa para cada uno de ellos. Además, cada asignatura está dividida en distintos ejes donde el alumno debe aprobar cada uno de ellos con una nota mayor o igual a 7; si la nota del estudiante supera el 3 pero no alcanza el 7, dispone de dos recuperatorios y, en el caso de no aprobar en ninguna de estas instancias, sólo deberá rendir en el eje desaprobado y no el programa en su totalidad. Este nuevo régimen académico y sus finalidades repercuten además en la enseñanza, puesto que surge la necesidad de proponer actividades que den cuenta de las trayectorias personales de los estudiantes, en el sentido que, dentro de una planificación general, se respeten tiempos de aprendizaje para que éste sea realmente significativo.

En cuanto a la infraestructura, la escuela cuenta con un hall de ingreso (Figura 2), que permanece abierto durante todo el período escolar. A continuación de dicho hall, se encuentra el patio (Figura 3), de dimensiones medias y sin espacio verde, utilizado por los alumnos, casi exclusivamente en la hora de educación física, puesto que hay poca concurrencia de ellos durante los recreos en este espacio.

[2] El Programa Nuevo Régimen Académico para la Escuela Secundaria se enmarca en las Resoluciones Nº188/18 y 434/19 del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/Capacitacion/IntegracionSaberes/NuevoRegimenAcademico.php

Figura 2: Hall de ingreso de la institución.

Figura 3: Patio de la institución escolar.

Hacia la derecha del hall, están ubicadas la dirección, sala de profesores, cantina y SUM o salón de usos múltiples (Figuras 4 y 5). Esta distribución parece corresponder a la necesidad de limitar el acceso de personas adultas (no docentes, padres y otros), al sector donde se encuentran los alumnos. En el SUM se realiza la formación de ingreso a cada turno, actos y actividades especiales extracurriculares, como así también es el lugar frecuentado por los alumnos durante los recreos. Por su parte, la cantina cuenta con mesas y banquetas a disposición de los estudiantes.

Figura 4: Cantina y dirección de la escuela

Figura 5: Salón de usos múltiples.

Finalmente, hacia la izquierda del hall de entrada se encuentra el pasillo donde se distribuyen las 6 aulas que conforman la escuela, los baños de alumnos, preceptoría, una sala de usos múltiples, biblioteca y laboratorio de computación (Figura 6).

Figura 6: Aulas distribuidas a lo largo de un corredor.

La biblioteca permanece cerrada durante la mayor parte del día, pues la institución no cuenta con un bibliotecario que atienda dicho espacio; por esta razón, el espacio se abre si es solicitado por algún docente o un grupo de alumnos en horarios específicos acordados con la preceptora del curso. Por otra parte, el laboratorio de computación también se encuentra cerrado, pues las fallas técnicas en la mayoría de las computadoras y la falta de recursos económicos destinados a la institución forzaron la toma de esta decisión. Sin embargo, y en reemplazo de este laboratorio, la escuela dispone de 15 netbooks para que los alumnos utilicen con fines didácticos, bajo previa petición de las mismas por parte de algún docente.

Otros recursos tecnológicos digitales que posee el establecimiento consisten en dos cañones para proyectar sobre las pizarras blancas que se encuentran en cada curso, y un Smart TV móvil. No obstante, durante las prácticas sólo se utilizó una netbook y el cañón para proyectar sobre la pizarra en distintas ocasiones.

1.2 Características generales del curso

Las prácticas docentes se llevaron a cabo en el curso de segundo año, división A del turno tarde. Es un curso mixto conformado por 33 estudiantes, de los cuales 14 son varones y 19 mujeres; entre ellas, dos alumnas integradas.

El aula es amplia y dispone de bancos móviles individuales organizados tal como se muestra en la Figura 7, lo cual permitió organizarse para trabajar en grupos sin mayores desplazamientos. La organización de los bancos en el aula no varía, aunque sí la ubicación de los estudiantes por decisión propia.

Figura 7: Aula de segundo año donde se realizaron las prácticas antes del inicio de la jornada escolar.

Además, pudo observarse una buena iluminación y ventilación dentro del aula; ésta cuenta con ventanales en dos de sus paredes, uno con vista hacia el exterior de la institución y otro con vistas al pasillo central. El bullicio proveniente del exterior no interfirió de manera significativa durante las clases; sin embargo, los ruidos provenientes desde el interior del colegio, en ciertas ocasiones, se tornaban un tanto molestos, afectando de esta manera la atención de los estudiantes.

Tal como se estipula en el Diseño Curricular para el Ciclo Básico del Secundario vigente en la Provincia de Córdoba, segundo año cuenta con cinco horas cátedra semanales, de 40 minutos cada una, destinadas al espacio curricular Matemática. Éstas se encuentran distribuidas en dos días tal como muestra la Tabla 1.

Horario/Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
13:00-13:40		Matemática		Matemática	
13:40-14:20		Matemática		Matemática	
14:20-15:00				Matemática	
Recreo (10 minutos)					
15:10-15:50					
15:50-16:40					
Recreo (10 minutos)					
16:50-17:30					

Tabla 1: Distribución de horas cátedra semanales de Matemática para segundo año.

Cabe destacar que ninguna de las clases es interrumpida por recreos, incluso las clases de los días jueves, donde los alumnos cursan la materia durante 120 minutos corridos; sin embargo, el hecho de que se ubique ambos días durante la primera hora de la jornada, representa una duración de al menos 10 minutos menos por clase, los cuales se utilizan para la formación inicial.

1.3 Clima de trabajo en la clase de Matemática

En este apartado, se busca describir el clima de trabajo durante las clases de matemática observadas en una instancia previa a la práctica docente. El interés de los estudiantes y su participación al realizar las actividades propuestas era intermitente y no sostenida durante todo el período de clase; sin embargo, se destaca su predisposición y colaboración en el trabajo grupal. El comportamiento de los estudiantes fue bueno, con algunos llamados de atención por parte de la profesora del curso, generalmente referidos a la dispersión en la atención y el tono de voz, interrupciones que se mantuvieron durante la práctica.

En estas ocasiones, donde la clase se desordenaba en su trabajo, la profesora recordaba a los estudiantes el nuevo régimen de evaluación en el que están inmersos, donde no sólo se evalúa con la información de las pruebas escritas u orales, sino que también se considera el compromiso de los alumnos con cada espacio curricular y su predisposición para realizar las actividades propuestas por cada docente. Este mismo recordatorio lo realiza la directora -o vicedirectora en ausencia de la primera- al inicio de jornada de cada turno, durante la formación.

Por otra parte, la relación entre los estudiantes fue buena. Se mostraron predispuestos a ayudarse entre ellos, cuando sus docentes lo solicitaban, y en ningún momento se presenciaron actitudes de maltrato, o irrespetuosas, entre los estudiantes o con las profesoras.

La relación entre la docente titular de matemática y los estudiantes era cordial y amable, se observaron gestos de confianza de parte de los estudiantes hacia ella, a través de ciertas actitudes como llamarse por el nombre de pila desde ambas partes, o bien mantener conversaciones sobre la vida privada de los estudiantes con naturalidad. Además, los estudiantes se mostraron muy predispuestos a ayudarla durante la clase, en acciones tales como copiar los ejercicios en la pizarra, borrar la misma, dictar conceptos, etc.

La preceptora acude al aula durante la primera hora cátedra de cada jornada para tomar lista, tarea que también debe realizar cada docente a diario, por lo dispuesto en el nuevo régimen de calificación, donde la asistencia a cada espacio curricular tiene su valor para la evaluación de acreditación. Para realizar esta tarea, la preceptora intenta no interrumpir la clase, ingresando en silencio y observando la cantidad de estudiantes presentes e identificando los ausentes; luego se retira del aula.

Se mostraron otro tipo de interrupciones a la clase, sólo durante la instancia de observaciones. Estas provenían de parte de alumnos de otros cursos que ingresaban al aula libremente para hablar con la docente o para hacerle algún tipo de consulta referida a la materia. Los estudiantes eran atendidos por la docente siempre que los alumnos del curso estuvieran realizando las actividades indicadas de manera independiente.

1.4 Estilo de trabajo en la clase de Matemática

Con respecto a la estructura de cada clase se observó, un total de 10 horas cátedra, distribuidas en cuatro días, de los cuales tres fueron utilizados para tomar una evaluación oral sobre las tablas de multiplicar; durante esas clases la docente escribía en la pizarra algunos ejercicios de aplicación (ejercicios combinados), o bien algún estudiante se ofrecía a escribirlos por ella. Estos ejercicios eran extraídos del libro Entre Números II, editorial Santillana (Figura 8), proporcionado por la institución a los docentes, el cual era tomado como referencia de trabajo la mayoría de las clases.

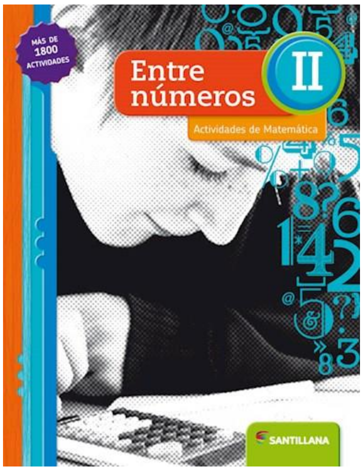


Figura 8: Portada del texto escolar utilizado por la docente tutora.

Los alumnos realizaban las actividades en forma independiente o con el compañero de banco, y al finalizar se dirigían al escritorio de la docente para que ella les corrigiera la actividad de manera personalizada; además, era costumbre realizar una puesta en común antes de finalizar la clase, donde la docente o algún estudiante de forma voluntaria resolvían los ejercicios en la pizarra.

Durante la última clase observada se realizó la introducción a los conceptos de potenciación con base y exponente entero. Para ello la docente realizó una breve introducción oral a modo de repaso de lo estudiado el año anterior (potenciación con base y exponente natural), luego realizó algunos ejemplos en la pizarra y dictó la explicación teórica, tal como figura en la bibliografía; a continuación, escribió en la pizarra algunos ejercicios de aplicación, los cuales se resolvieron minutos antes de finalizar la clase a modo de puesta en común.

De acuerdo con lo observado durante las clases, y a través de una conversación con la docente, la clase de matemática puede caracterizarse dentro del "*paradigma del ejercicio*" (Skovsmose, 2000) sin que éstos presenten mayores dificultades para los estudiantes; no es habitual que se propongan actividades exploratorias, salvo en casos excepcionales para los contenidos de Geometría. Por otra parte, este grupo de alumnos no acostumbraba a usar las tecnologías digitales para la resolución de actividades en matemática; los recursos más frecuentes utilizados por la docente son el libro y la pizarra, y por parte de los estudiantes, su carpeta y útiles escolares.

A partir de esta información, se tomaron algunas de decisiones para planificar las actividades propuestas; se comenzaría con actividades que respetara el estilo de trabajo que los alumnos acostumbraban. Sin embargo, durante las explicaciones teóricas se le daría lugar a una mayor participación de manera tal que, poco a poco, se acostumbren a desarrollar la capacidad de argumentar sus respuestas en base a definiciones dadas o construidas.

De esta manera, se avanzó a lo largo de las prácticas intercalando algunas clases teóricas, pero con intervenciones de los alumnos, y clases prácticas frecuentes. Con respecto a las primeras actividades, seguían teniendo las características de un ejercicio de aplicación, pero se fomentaba la escritura de una justificación de las decisiones tomadas.

1.5 Observación de jornada completa

El último día de observación dentro de la institución fue durante la jornada completa de los estudiantes. Esta se realizó un jueves donde pudo observarse la clase de Matemática en las primeras tres horas cátedra, luego el recreo de 10 minutos donde la mayoría de los estudiantes permanecieron dentro del aula, con la presencia de la preceptora como adulto a cargo, sin causar disturbios los estudiantes.

Durante las siguientes horas cátedra se impartió la clase de inglés, donde los alumnos mostraron un comportamiento que se reflejaba en la atención que mostraban durante la explicación teórica de la docente, y predisposición para la realización de las actividades propuestas por la misma. La gestión impartida por la docente de esta asignatura, se caracterizaba por el ritmo de trabajo que fomentaba, reflejado en los tiempos que proporcionaba explícitamente para trabajar en cada actividad. Al igual que en las clases de Matemática, los estudiantes solían trabajar en grupos reducidos, de 2 a 4 integrantes, con notoria concentración.

Para las prácticas, se intentó adoptar algunas de las acciones docentes observadas, como la resolución de actividades bien definidas y pactando un tiempo de trabajo con los estudiantes, aunque, en la mayoría de los casos, este lapso de tiempo solía extenderse según el avance general de los alumnos y su dedicación.

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

En esta sección se presenta de manera detallada lo planeado y lo efectivamente implementado durante las prácticas profesionales docentes, incluyendo algunas de las decisiones tomadas ante cada situación emergente en el aula que motivaron modificaciones en lo programado inicialmente. Se utiliza las variables de la planificación de la enseñanza descritas por Gvirtz y Palamidessi (2008), como estructura general para dar cuenta de sus principales aspectos. Según estos autores:

> Estas variables son las cosas o aspectos de la realidad en las que debemos pensar si queremos planificar y desarrollar una actividad sistemática de enseñanza. Cualquier diseño de la enseñanza debe tomar en cuenta una serie de cuestiones o variables. A continuación, enumeramos y describimos ocho cuestiones o variables básicas: [...] las metas, objetivos o expectativas de logro; la selección del/de los contenido/s; la organización y secuenciación del/de los contenido/s; las tareas y actividades; la selección de materiales y recursos; la participación de los alumnos; la organización del escenario; la evaluación de los aprendizajes (p. 188).

La estructura de este capítulo contendrá lo declarado en la planificación anual de la docente tutora del curso con respecto a los temas impartidos durante las prácticas, lo planificado previamente a las clases por la docente practicante, y lo efectivamente ejecutado durante las mismas.

2.1 Planificación anual del espacio curricular: Matemática para segundo año

La planificación anual de Matemática para segundo año de la institución donde se realizaron las prácticas docentes estaba dividida en cuatro ejes temáticos:

- Eje temático N° 1: Números Enteros.
- Eje temático N° 2: Números Racionales I.
- Eje temático N° 3: Polígonos, análisis de figuras y cuerpos geométricos.
- Eje temático N° 4: Números Racionales II.

Los contenidos abordados durante las prácticas, que se describen a continuación, se sitúan en el Eje temático N° 3:

Polígonos, análisis de figuras y cuerpos geométricos: Definición. Polígono convexo cóncavo. Elementos. Clasificación. Polígono regular. Polígonos de cuatro lados:

cuadriláteros. Clasificación y propiedades. Cálculo de lados y ángulos teniendo en cuenta las operaciones con racionales.

En la planificación anual de la docente tutora se explicitan una serie de objetivos generales para toda la asignatura. Estos fueron:

- *Priorizar el desarrollo de las capacidades fundamentales (escritura-oralidad-comprensión lectora).*
- *Incentivar el pensamiento crítico y creativo.*
- *Identificar y resolver situaciones problemáticas aplicando los conocimientos adquiridos en el espacio curricular.*
- *Valoración del trabajo colectivo.*
- *Manifestar una actitud de respeto y colaboración con sus semejantes.*
- *Adquirir creciente compromiso y responsabilidad en el cumplimiento de tareas diarias.*
- *Reflexionar sobre la necesidad de acudir a diferentes tipos de cálculos, mental o exacto, con o sin calculadora, de acuerdo a las diferentes situaciones problemáticas.*
- *Aplicar los procedimientos y conceptos ya adquiridos (previos) para avanzar en los contenidos nuevos.*
- *Reconocer los diferentes conjuntos de números estudiados y sus posibles aplicaciones.*
- *Usar herramientas informáticas como facilitadoras del aprendizaje.*

Estos objetivos sirvieron como guía para la planificación de las actividades propuestas durante las prácticas docentes, de forma tal que éstas fomentaron el cumplimiento de algunos de ellos.

2.2 Comentarios sobre la planificación general previa a las prácticas

Teniendo en cuenta los contenidos que la docente titular pidió que se trataran durante las prácticas docentes y sus objetivos generales, se decidió, en principio, fijar algunos contenidos específicos y expectativas de logro. Cabe destacar que estas intenciones previas no se cumplieron en su totalidad por distintos motivos; algunas de ellas por cuestiones de tiempo los temas no llegaron a tratarse durante la práctica y otras por el hecho de que se necesitó adaptar la propuesta a las necesidades y capacidades particulares de los estudiantes.

En principio, los contenidos estuvieron organizados en tres grandes bloques: clasificación de polígonos, clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades, y área y perímetro de los cuadriláteros. Esta organización fue ideada con el fin de que los alumnos pudieran distinguir las distintas expectativas de logro para cada uno de ellos, puesto que el foco y abordaje de los contenidos se diferenciaban a lo largo de esta estructura.

- *Bloque I: Clasificación de polígonos*

Contenidos: Definición de polígono. Elementos de un polígono. Polígono cóncavo y convexo. Polígono regular. Clasificación de polígonos según la cantidad de lados.

Foco de enseñanza: Comprender y aplicar el proceso de clasificación.

- *Bloque II: Clasificación de cuadriláteros y sus propiedades*

Contenidos: Propiedades de los cuadriláteros. Clasificación de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados y congruencia de lados y ángulos.

Foco de enseñanza: Explorar los distintos cuadriláteros a fin de establecer algunas de sus propiedades.

- *Bloque III: Área y perímetro de los cuadriláteros*

Contenidos: Definición de área y perímetro. Unidades de medida. Formulación y cálculo del área y perímetro de los cuadriláteros. Ecuaciones lineales aplicadas al cálculo de área y perímetro de cuadriláteros.

Foco de enseñanza: Realizar conjeturas en base a exploraciones.

De este último bloque sólo se abordaron el área y perímetro de cuadriláteros por cuestiones de tiempo y necesidad de ajustar el desarrollo de los bloques anteriores.

Además, e integrando los tres bloques, se plantearon las siguientes expectativas de logro para la práctica docente, las cuales se intentaron que concuerden con los objetivos propuestos en la planificación anual de la docente tutora del curso, particularizando a los contenidos específicos con los que se trabajaría:

- Desarrollar el pensamiento crítico, en particular en la capacidad de definir criterios de clasificación.
- Identificar polígonos, distinguir sus elementos y clasificarlos según los distintos criterios propuestos.

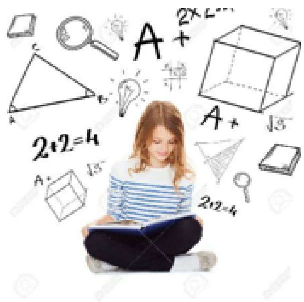
- Identificar propiedades, características y relaciones de los cuadriláteros para crear criterios de clasificación.
- Recurrir al uso del lenguaje algebraico para generalizar propiedades de los cuadriláteros.
- Desarrollar la capacidad de conjeturar, utilizando un lenguaje simbólico pertinente, por medio de procesos exploratorios. En particular, para la construcción de fórmulas de área y perímetro de los cuadriláteros, empleando sus propiedades.
- Desarrollar el trabajo colaborativo, donde los alumnos puedan expresar sus ideas y escuchar las del resto del grupo, en un ambiente de respeto y compañerismo.

En las siguientes secciones, se presenta la planificación y puesta en aula de los contenidos desarrollados, divididos de acuerdo a los bloques mencionados. Dentro de cada sección se describe cada uno de estos bloques, y reúne varias de las variables de Gvirtz y Palamidessi (2008), tales como las metas, objetivos o expectativas de logro de las actividades propuestas; la selección de materiales y recursos; la participación de los alumnos y la organización del escenario[3].

2.3 Planificación y puesta en aula de los contenidos del Bloque I: Clasificación de Polígonos

Previo al comienzo del desarrollo del Bloque I se realizó una presentación de la docente practicante, comentando a los estudiantes el marco de las prácticas docentes, como así también, de manera muy general, los temas que serían trabajados durante las mismas. Se recordó, además, el *Nuevo Régimen Académico*[4] en el que su institución está inmersa, y se aclaró que, a lo largo de las prácticas, se respetarán las pautas generales de este sistema de calificación. También, se explicitaron algunas pautas de trabajo, las cuales fueron entregadas a los estudiantes en una fotocopia y pegadas en sus carpetas (ver Figura 9). Estas pautas fueron leídas conjuntamente con los estudiantes.

[3] La variable referida a la evaluación de los aprendizajes será descrita en una sección aparte.
[4] Este nuevo régimen consiste en modificar los sentidos y orientaciones de las regulaciones sobre evaluación, acreditación y promoción de estudiantes.



PAUTAS DE TRABAJO

- Al inicio de cada clase se ingresará al aula y se saludará a las docentes presentes con un "Buen día", con energía y buena onda cambia el humor y clima de la clase.
- Traer los materiales necesarios para cada clase (carpeta, lápiz, goma, etc.) Si se requiere de un material especial, por ejemplo, el celular con algún software particular, la docente se lo comunicará la clase anterior.
- Todas las actividades (excepto pruebas) podrán, y algunas deberán, realizarse en grupos. Todos los integrantes del grupo todos deben aportar sus ideas, recuerden que se evalúa el proceso personal de cada alumno, (que un solo estudiante realice la tarea y los demás no participen de ella, no tiene demasiado valor).
- No olviden hacer todas las preguntas que necesiten hasta comprender el tema (salvo en instancia de pruebas donde la docente "olvidará mágicamente" todo el contenido).
- No usar el celular en clase salvo que la docente lo solicite para alguna actividad.
- Mantener el orden y la limpieza dentro y fuera del aula.

Figura 9: Pautas de trabajo de trabajo entregadas a los estudiantes al comienzo de la práctica.

2.3.1 La clasificación como proceso

Para comenzar el tema de clasificación como proceso propio de la matemática, se retomó el comentario de la directora durante la formación inicial de esa jornada, donde ella señalaba la falta de cumplimiento del uniforme por parte de algunos alumnos. Esto dio motivo a trabajar una primera noción de clasificación a partir de este contexto. Se pidió a los estudiantes que levanten la mano aquellos que ese día hayan concurrido con el uniforme correspondiente, luego se escribió en la pizarra la cantidad de jóvenes con uniforme y sin él (ver Tabla 2).

Con uniforme	Sin uniforme
23	9

Tabla 2: Cantidad de alumnos con o sin uniforme según una encuesta breve encuesta que emerge del diálogo con los estudiantes.

A partir de esta información se preguntó a los estudiantes que identificaran el proceso que acababan de hacer, esperando que entre sus respuestas surgieran las primeras nociones de clasificación bajo algunos “sinónimos”, como agrupar, separar, etc. Luego, se preguntó sobre qué criterio se agrupó y a quiénes, para hacer notar datos esenciales de un proceso de clasificación.

De la misma forma, se propusieron distintas clasificaciones en el grupo de estudiantes bajo distintos criterios. Por ejemplo, por estatura, por edad, por curso (haciendo referencia a la separación por cursos en la formación de ingreso).

Posteriormente, cambiando el contexto donde procesos de clasificación emergen naturalmente, se analizó *la página web de MercadoLibre*[5], la cual se accedió y proyectó en el aula, buscando distintos criterios de clasificación de productos para su venta (clasificación por categoría, precio, marca, año de fabricación, etc.). De esta manera, los estudiantes lograron distinguir que, en un proceso de clasificación, se parte desde un conjunto principal, se construye un criterio de clasificación de acuerdo a las características de los elementos de ese conjunto y, a partir de este criterio, surgen distintos subconjuntos del conjunto principal. También, se ayudó a los alumnos a refinar criterios de clasificación a partir de los filtros de búsqueda que ofrece este sitio web (como la ubicación del vendedor, condición del producto, color, fecha de publicación, etc.), hasta llegar, por ejemplo, al caso en que el conjunto sólo tenga un elemento. Así, los estudiantes reconocieron que un conjunto debe tener más de un elemento para poder ser clasificado.

A partir del análisis realizado en las clasificaciones de *MercadoLibre* y las clasificaciones realizadas en el conjunto de estudiantes, se caracterizó al proceso de clasificación, con ayuda de ejemplos y contraejemplos. Se proporcionó a los estudiantes, una caracterización del proceso de clasificación, según un criterio dado, de la siguiente manera:

[5] Disponible en: https://www.mercadolibre.com.ar/

Proceso de clasificación

Para clasificar un conjunto, siempre que éste tenga más de un elemento, debe analizarse en profundidad, de modo que a partir de sus características puedan elaborarse criterios de clasificación.

Estos criterios de clasificación deben estar bien definidos, y para que esto suceda debe cumplir ciertas características:

- El criterio debe crear subconjuntos no vacíos del conjunto a clasificar.
- Todos los elementos del conjunto deben pertenecer a alguno de los subconjuntos.
- Cada elemento del conjunto debe pertenecer a uno y sólo uno de los subconjuntos.

Una vez descrito el proceso de clasificación, se analizaron los tipos de criterios utilizados en distintos ejemplos de clasificaciones, con el apoyo del sitio web *MarcadoLibre,* y los que la docente practicante utilizó al clasificar. De esta manera, los estudiantes pudieron evaluar si estos criterios estaban bien definidos y modificarlos en caso contrario.

Posteriormente, como introducción a la clasificación de polígonos (tema del Bloque I), se relató brevemente la importancia que tiene la clasificación dentro de las distintas ciencias. Por ejemplo, se apeló a la clasificación de seres vivos dentro de la biología, de los elementos químicos en la química, y, dentro de la geometría, se recordó sobre la clasificación de triángulos, que los alumnos habían trabajado el año anterior. Se hizo hincapié, en que la clasificación de cualquier conjunto de elementos nos permite conocer algunas de sus características compartidas como miembro del conjunto particular. En el caso de los seres vivos, al reconocer que un animal es herbívoro sabremos cómo alimentarlo; al conocer las características de algunos elementos químicos sabremos acerca de su reacción al combinarlos. En el caso de la geometría, al reconocer una figura como elemento del conjunto de los triángulos, sabremos que la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°, sin necesidad de medirlos.

2.3.2. La clasificación de figuras geométricas: Polígonos

A partir de esta introducción, junto con los estudiantes nos avocamos a la clasificación de polígonos. Para ello se preparó una serie de figuras construidas en goma eva (ver Figura 10), que se adherían a un cartón, pero con la posibilidad de extraerlas y moverlas dentro del mismo y/o adherirlas a la pizarra del aula. La intención de esta característica del recurso creado, fue posibilitar que una misma figura pudiera ser clasificada bajo distintos criterios generando distintos conjuntos de figuras: polígonos y no polígonos; dentro de los polígonos, los cóncavos y convexos; y, dentro de los convexos, la clasificación según la cantidad de lados que poseen (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.).

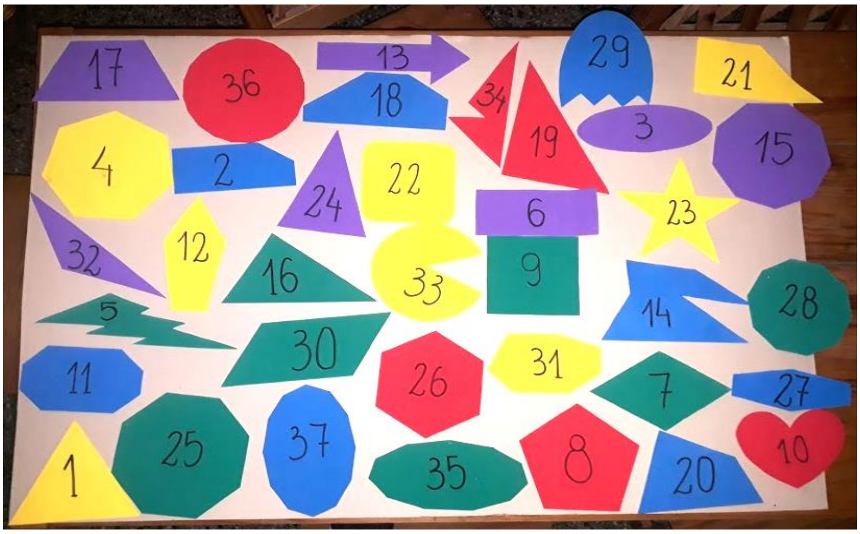


Figura 10: Conjunto de figuras planas y cerradas propuestas antes de comenzar a clasificar.

Cabe destacar, que la cantidad y tipo de figuras presentadas en este conjunto no es al azar, si bien estuvo inspirado en una de las actividades desarrolladas en un trabajo final anterior (Díaz y Palomeque, 2016), se modificaron y agregaron algunas de ellas, puesto que se tuvo en cuenta las distintas clasificaciones que se harían posteriormente sobre este conjunto.

En efecto, dentro de esta colección que aparece en la Figura 10, pueden observarse 37 figuras geométricas, entre ellas, 5 no polígonos y 32 polígonos, de los cuales 5 son cóncavos y 27 son convexos. Dentro de los convexos, se disponen de: 5 triángulos (escaleno, isósceles, equilátero, rectángulo, obtusángulo), 7 cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo, trapecio isósceles, trapecio rectángulo, trapezoide), 3 pentágonos (uno regular), 3 hexágonos (uno regular), 2 heptágonos (uno regular), 2 octógonos (uno regular), 1 eneágono regular, 1 decágono regular, 1 undecágono irregular, 1 dodecágono irregular y 1 icoságono regular[6].

[6] Se realizó una aclaración a los estudiantes con respecto a la figura número 36 de la Figura 10 (icoságono regular), debido a que en la fotocopia con las figuras entregada a los alumnos aparentaba ser un círculo, por las dimensiones de la figura y la gran cantidad de lados.

Según lo discutido anteriormente con los estudiantes, se recordó que, al comenzar con un proceso de clasificación se debía analizar los elementos del conjunto a clasificar, que en nuestro caso son figuras geométricas. Se solicitó a los alumnos que reconocieran sobre qué conjunto trabajaríamos, teniendo en cuenta las características compartidas por las figuras que integran el conjunto. Rápidamente, surgió la noción de figuras geométricas, aunque ellas comparten más cualidades que el simple hecho de ser figuras. Por este motivo se mostró a los estudiantes dos elementos que no forman parte del conjunto de figuras: una caja de cartón y un trozo de alambre doblado de manera tal que represente una poligonal (ver Figura 11).

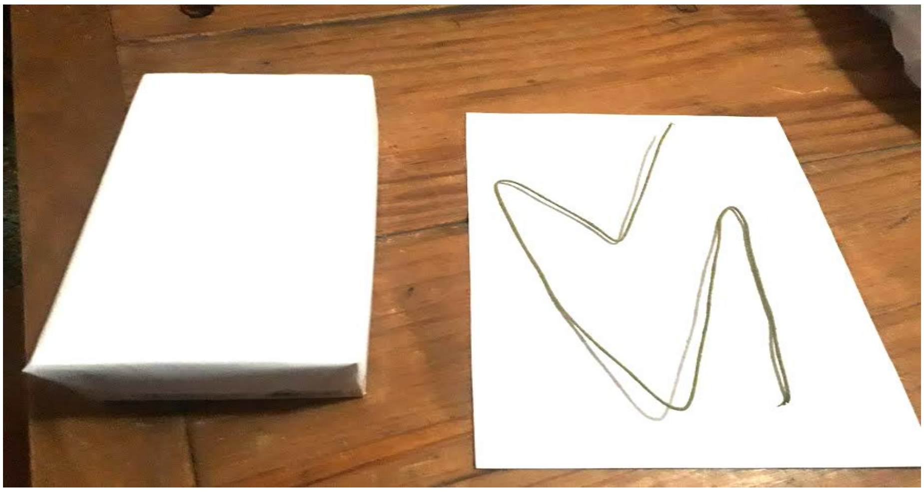


Figura 11: Caja de cartón que representa un poliedro y alambre representando una poligonal. Ambos elementos fueron usados a modo de contraejemplos para construir la definición de polígono.

En general, cuando los estudiantes enunciaban alguna afirmación incorrecta o incompleta, en cuanto a definiciones o propiedades no válidas u obviadas de un objeto geométrico o un conjunto de ellos, se les mostraba algún contraejemplo que refutara dicha aserción. De esta manera, y a modo de ejemplo, al nombrar nuestro conjunto sólo como figuras geométricas, se les mostró la caja de cartón de la Figura 11 acompañada con la pregunta "*¿Figuras geométricas como ésta?*", lo que los invitó a agregar otra característica común del conjunto de figuras: ahora nuestro conjunto era de <u>figuras geométricas planas</u>. Análogamente, se mostró el alambre, como ejemplo de figura geométrica plana (pues éste representaba una poligonal), y se preguntó a los estudiantes si existe alguna diferencia entre la figura plana representada por él y las figuras planas del conjunto que analizaron. De esta manera, se reconoció otra característica común al conjunto de figuras que aparecen en la Figura 10, es decir, el hecho de ser <u>figuras cerradas</u>.

Una vez acordadas las características que comparten las figuras del conjunto de la Figura 10 como "Figuras planas y cerradas", se propuso a los estudiantes que mencionen algunos criterios bajo los cuales puedan ser estas clasificadas, formando así nuevos conjuntos. Entre las respuestas correctas de los estudiantes, surgieron algunas no previstas en la planificación como el hecho de clasificarlas según el número escrito para identificarlas en cada una de las figuras. Cuando se presentaba alguna dificultad para identificar criterios apropiados, se volvía a leer las características de un criterio de clasificación y se pedía un nuevo enunciado. Por ejemplo, al enunciar el criterio según sean planas.

Posteriormente, se tomó uno de los criterios enunciados por los estudiantes: por ejemplo, las figuras podrían clasificarse de acuerdo a su color. Se decidió clasificarlas según sean de color rojo o no, aunque el criterio no era sustancial al contenido específico de aprendizaje, puesto que el foco estaba en el proceso de clasificación.

En ese momento, se acordó con los estudiantes una forma de registro de las distintas clasificaciones que se realizarían a lo largo de las próximas clases. Para registrar el criterio bajo el cual clasificamos las figuras y los subconjuntos conformados a partir de dicho criterio, realizamos tablas con un formato definido (ver Tabla 3). En la parte superior de la tabla se escribía el criterio de clasificación, cada columna de la tabla debía poseer un encabezado con el criterio particular que identificaba al subconjunto de figuras, y para nombrar a las figuras que pertenecían a cada subconjunto escribíamos solamente el número que la representaba separados con comas.

Criterio: "Figuras geométricas planas y cerradas de color rojo"

Figuras geométricas planas y cerradas de color rojo	Figuras geométricas planas y cerradas de un color distinto al rojo
8, 10, 19, 26, 34, 36	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37

Tabla 3: Tabla de registro de un proceso de clasificación de las figuras planas y cerradas según sean de color rojo o no, identificadas por su número (ver Figura 10).

Luego de que los estudiantes realizaron el proceso de clasificación según un color particular de las figuras, se propuso una actividad distinta. Se realizó una clasificación dentro del conjunto de figuras (realizada por mí y sin proporcionar ninguna información) (ver Figura 12), y la tarea de los estudiantes consistió en elaborar un criterio en base a los subconjuntos dados a partir de dicha clasificación: es decir la partición en conjunto estaba realizada y se debía discernir el criterio que la había provocado. Dentro del conjunto de figuras planas y cerradas ya trabajadas se crearon dos nuevos subconjuntos: los polígonos (los estudiantes todavía no empleaban este término) pertenecían a uno de estos subconjuntos y aquellas figuras que no los eran, conformaban el otro subconjunto.

Figura 12: Clasificación de las figuras planas y cerradas según sean polígonos o no.

Esta actividad se trabajó durante un lapso de tiempo mayor al planificado; los estudiantes colocaban la atención en la forma de sus lados (lados rectos) sin atender a la cuantificación “todos los lados rectos”.

Finalmente, se utilizaron los aportes de los estudiantes acerca del criterio de clasificación que pensó la docente para clasificar las figuras que aparece en la Figura 12, para institucionalizar la siguiente definición de *Polígono*:

Definición: Un polígono es una figura plana y cerrada que tiene todos sus lados rectos.

La actividad se completó con la tabla de clasificación correspondiente a la Figura 12, según el formato acordado con los estudiantes (ver Tabla 4).

Criterio: “Figura plana y cerrada que tiene todos sus lados rectos”

Polígonos	No polígonos
1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37	3, 10, 22, 29, 33

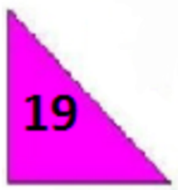
Tabla 4: Tabla de registro de un proceso de clasificación de las figuras planas y cerradas según sean polígonos o no, identificadas por su número.

2.3.3 La definición de Polígono es puesta en juego para ejemplificar figuras que son polígonos

En el proceso de elaboración de la Tabla 4, se desafió a los estudiantes a que explicaran por qué una figura plana y cerrada particular cualquiera debía ir en una u otra columna (polígono y no polígono). Aquí, las figuras movibles de goma EVA jugaron un rol muy importante, pues permitían el análisis de sus características particulares previo a la decisión de mover una figura de un lado a otro de la tabla de clasificación. En estos casos, donde se recalcó que tal figura pertenece a un subconjunto, de manera algo exagerada se hacía notar que, al sacar una figura y colocarla en el conjunto que pertenece, se analiza las características de la figura y que ésta debe pertenecer a sólo uno de los subconjuntos. De este modo se revisaban las características vistas del proceso y criterios de clasificación.

Para realizar este análisis se presentaron diálogos, previstos en el guion conjetural, similares al siguiente:

- *¿Éste es un polígono?* - pregunto a los alumnos mostrando el polígono 19 (un triángulo rectángulo).



- *Sí*

- *¿Por qué?*

- *Porque tiene todos sus lados rectos.*

- *¿Cómo también la caja y el alambre?* - pregunto a los alumnos mientras muestro estos objetos que se observan en la Figura 11.

- *No, la caja no es plana y el alambre no es cerrado.*

- *Entonces, ¿por qué esta figura es un polígono?* (insisto señalando el polígono 19)

- *Porque es una figura plana, cerrada y tiene todos sus lados rectos.*

- *Perfecto, ¿en qué subconjunto la ubico entonces?*

- *En el de polígonos* (se refieren al conjunto de figuras que cumplen con esta condición)

En el caso de los contraejemplos, figuras que no eran polígonos, se construían diálogos semejantes al anterior destacando que no era necesario apelar a todas las características particulares de la figura; sólo a las que lo constituían un “no polígono”.

Para completar el proceso de institucionalización de la definición de polígono, se señalaron sus elementos (ver Figura 13).

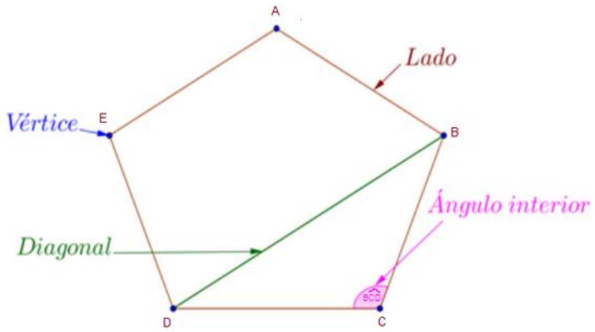


Figura 13: Elementos de un polígono.

Para caracterizar cada uno de estos elementos se centró la atención en dos aspectos básicos: el objeto geométrico utilizado para representarlos y su relación con el resto del polígono como elemento particular. Por ejemplo, para el caso de las diagonales, se preguntó a los estudiantes: *“¿Qué elemento del polígono estoy delimitando al unir dos vértices no consecutivos?”*, mientras se trazaba el segmento para ejemplificar, y, una vez reconocido como diagonal del polígono, se preguntaba a los alumnos: *“Geométricamente, ¿qué es una diagonal?”*, la cual reconocieron como segmento. De esta manera, definimos los elementos y acordamos la notación de la siguiente manera, con referencia a la Figura 13:

- Vértices: son los puntos que unen dos lados consecutivos.

Notación: A, B, C, D, E

- Lados: son cada uno de los segmentos que conforman el polígono.

Notación: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$.

- Diagonales: son segmentos que unen dos vértices, no consecutivos, del polígono.

Notación: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$.

- Ángulos interiores: es la apertura que existe entre dos lados consecutivos.

Notación: $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDE$, $\measuredangle DEA$, $\measuredangle EAB$, $\measuredangle ABC$

2.3.4 Los procesos de clasificar y ejemplificar puesto en acción: polígonos cóncavos y Convexos

Para abordar el proceso de construcción de la definición de polígonos convexos, se procedió según la actividad anterior: la docente le presenta a los estudiantes el conjunto de polígonos ya separados en subconjuntos y los estudiantes tenían que determinar el criterio que generaba tal clasificación (ver Figura 14).

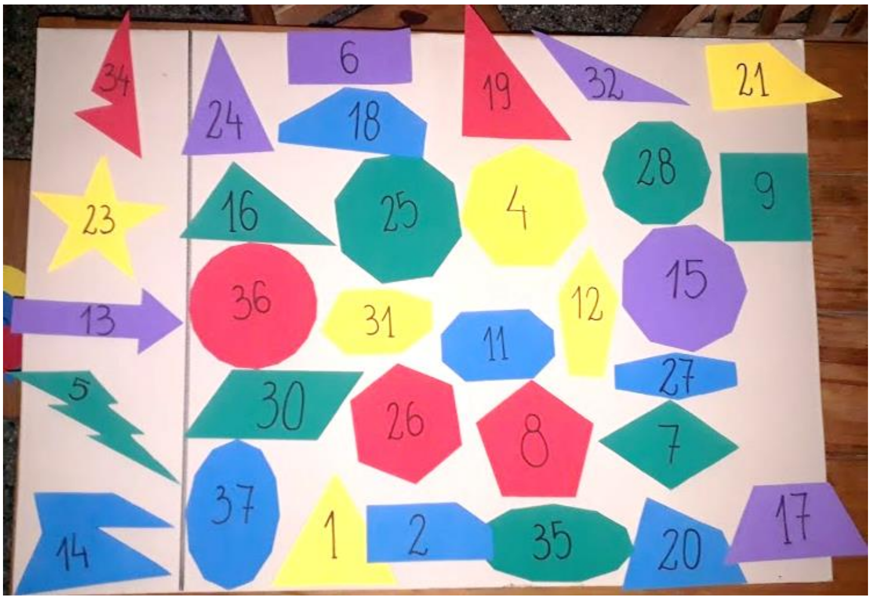


Figura 14: Clasificación en polígonos cóncavos y convexos presentada por la docente.

Para ayudar a los estudiantes a caracterizar los polígonos cóncavos y convexos, utilicé la estrategia visual de apoyar uno de los lados de una de las figuras (ver Figura 15) sobre una recta dibujada en el pizarrón[7], y luego se repitió esta acción con los otros lados de la misma figura.

[7] Definimos, de manera oral y un tanto informal, qué es un plano, una recta y un semiplano, como representantes de estos objetos geométricos, utilizamos la pizarra como plano y sobre ella trazamos una recta que la divide en dos semiplanos.

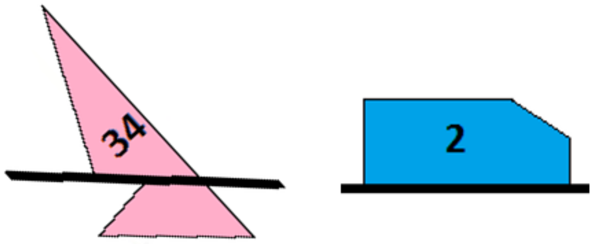


Figura 15: Estrategia visual para el análisis de polígonos convexos y cóncavos, según queden total o parcialmente contenidos en un mismo semiplano definidos por una recta.

De esta manera, los estudiantes pudieron notar la diferencia entre los polígonos de cada subconjunto: en el caso de los polígonos convexos al apoyar cualquiera de los lados de uno de ellos sobre la recta en el pizarrón, el polígono quedaba totalmente contenido en un mismo semiplano, no así en los polígonos cóncavos.

De esta forma, definimos ambos tipos de polígonos y los alumnos realizaron la tabla de clasificación correspondiente (ver Tabla 5). Por supuesto, se solicitó a los estudiantes una justificación visual similar a la mostrada en la Figura 15 para decidir a qué subconjunto pertenecía cada polígono.

Criterio: "Polígonos que al apoyar cualquiera de sus lados sobre una recta, quedan contenidos en un mismo semiplano respecto de esa recta"

CÓNCAVOS	CONVEXOS
5, 13, 14, 23, 34	1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 35, 36, 37

Tabla 5: Tabla de registro de un proceso de clasificación de los polígonos según sean cóncavos o convexos, identificados por su número.

La definición de polígono convexo fue institucionalizada mediante el siguiente enunciado:

Definición: Llamaremos polígono convexo al polígono que, si apoyamos cualquiera de sus lados sobre una recta, todo el polígono queda contenido en un mismo semiplano; en caso contrario se los llamará polígono cóncavo.

2.3.5 Aplicación de contenidos y procesos vistos

Se propuso a los estudiantes la resolución de un trabajo práctico (ver Anexo A), integrando los temas desarrollados en el Bloque I. Algunas de las actividades requerían la redacción de argumentos basados en los criterios de clasificación trabajados sobre el conjunto de figuras planas y cerradas, cuya resolución será analizada en el Capítulo 3, otras actividades referían a los elementos de un polígono, cuyo objetivo era la identificación y notación simbólica de los mismos, y finalmente, se propuso una actividad exploratoria sobre la cantidad de diagonales por vértice de un polígono y la cantidad de triángulos conformados tras el trazado de dichas diagonales (ver Figura 16).

6) Completa la siguiente tabla:

Tipo de polígono	Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices	Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales
Triángulo			
Cuadrilátero			
Pentágono			
	6		
	7		
Octógono			
	9		
	10		

a) ¿Existe alguna relación entre los lados de un polígono y la cantidad de diagonales desde uno de sus vértices? Explica por escrito.

b) Continúa completando la siguiente tabla:

Cantidad de lados de un polígono	Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices	Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales
14 lados		
	20	
30 lados		
	54	
78 lados		
	600	
n lados		

c) DESAFÍO: ¿Cómo podrías calcular la cantidad total de diagonales de un polígono cualquiera? ¿Bastaría con multiplicar la expresión anterior por la cantidad total de vértices? Dibuja un polígono como ejemplo y justifica por escrito tu respuesta.

Figura 16: Actividad exploratoria propuesta sobre la cantidad de diagonales por vértice de un polígono y la cantidad de triángulos conformado tras el trazado de las mismas.

Para la resolución de este trabajo práctico, los estudiantes se dispusieron en grupos reducidos (2 a 4 alumnos), siguiendo su estilo habitual de trabajo; esto generó fructíferos debates entre ellos, salvo durante la última actividad exploratoria que requirió mayor apoyo de la docente y, por lo tanto, se resolvió de manera conjunta.

Para la exploración inicial de la Actividad 6, se construyeron los distintos polígonos en el software GeoGebra[8] (ver Figura 17) y se proyectaron en la pizarra para mostrar a los estudiantes. El único motivo por el que se presentaron sólo polígonos regulares fue para facilitar su construcción delante de los estudiantes, con la herramienta del software "polígono regular".

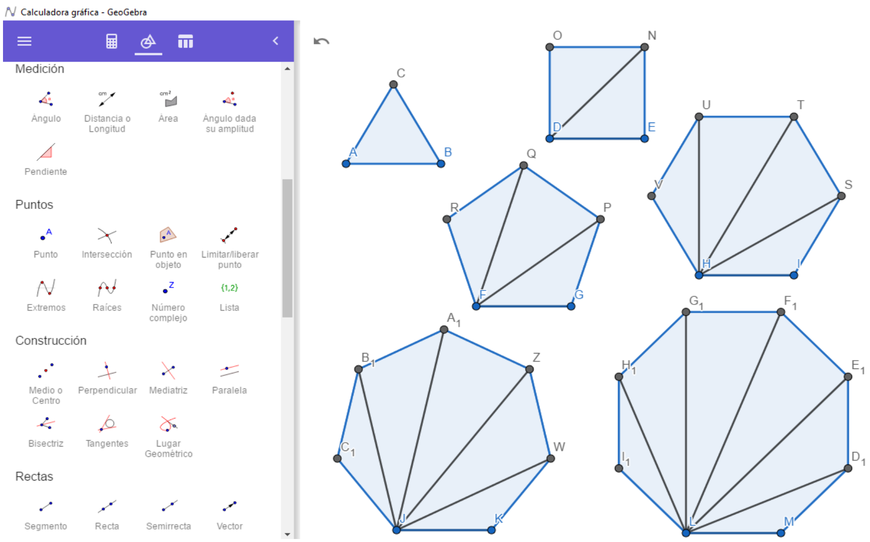


Figura 17: Polígonos utilizados en la exploración de la Actividad 6 del TP generados con GeoGebra.

Al trazar las diagonales de cada polígono, se hizo hincapié en la definición de diagonal dada anteriormente, como así también en nombrar correctamente cada segmento trazado. Así, por ejemplo, en el caso del pentágono, se preguntaba a los estudiantes: *"desde el vértice F, ¿qué diagonales puedo trazar? Nombra las diagonales"*. En general, la respuesta de los estudiantes era correcta, aunque al comienzo sin nombrar el segmento, sino diciendo que había que unir el punto *F* "con el de arriba". Por ello, se pedía a los estudiantes que observaran que cada vértice tiene su nombre, y por lo tanto cada segmento también debía nombrarse haciendo referencia a sus extremos, puesto que, si se gira el polígono, la expresión "el de arriba" ya no estaría indicando el mismo punto.

[8] GeoGebra es un software de geometría dinámica, interactivo y libre, para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para educación en todos sus niveles. Disponible en: https://www.geogebra.org/?lang=es

Los estudiantes, adoptaron rápidamente esta forma de comunicarse. Sin embargo, se buscaba hacer foco en la definición de diagonal constantemente; entonces también se preguntaba a los estudiantes por aquellos segmentos que unen vértices consecutivos, bajo interrogantes como: *"¿Por qué no podría trazar la diagonal ?"* (ver Figura 17), proponiendo así a los alumnos que argumentaran oralmente su respuesta en base a la definición de diagonales.

Luego de completar la primera tabla de la actividad (ver Tabla 6) (para cada polígono los estudiantes identifican cantidad de diagonales, cantidad de diagonales definidas por un vértice, y la cantidad de triángulos que quedan determinados) los estudiantes debían generalizar lo reflexionado hasta el momento, como respuesta al siguiente ítem: "*¿Existe alguna relación entre la cantidad de lados de un polígono y la cantidad de diagonales desde uno de sus vértices? Explica por escrito"* (ver Figura 16). Se esperaba que los estudiantes no presentaran dificultades al dar respuesta a esta consigna, pues al completar la tabla comprendieron y supieron justificar, en casos particulares, cada valor en la celda correspondiente; sin embargo, hubo que ayudarlos a encontrar una regularidad en los datos.

Tipo de polígono	Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices	Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales
Triángulo	3	0	1
Cuadrilátero	4	1	2
Pentágono	5	2	3
Hexágono	6	3	4
Heptágono	7	4	5
Octógono	8	5	6
Eneágono	9	6	7
Decágono	10	7	8

Tabla 6: Tabla que muestra el tipo de polígono, la cantidad de lados, las diagonales por vértice de cada uno y los triángulos que quedan determinados por estas.

Una vez hallada y justificada la relación entre la cantidad de diagonales por un vértice y la de triángulos que quedan determinados por estas, para cierta cantidad de lados de un polígono, completar la tabla siguiente (ver Tabla 7) no presentó mayores inconvenientes:

Cantidad de lados de un polígono	**Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices**	**Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales**
14 lados	11	12
23 lados	20	21
30 lados	27	28
57 lados	54	55
78 lados	75	76
603 lados	600	601
n lados	**n-3**	**n-2**

Tabla 7: Generalización de la relación que existe entre la cantidad de diagonales por vértice, y los triángulos que quedan determinados, y la cantidad de lados de un polígono[9].

La estrategia adoptada durante el llenado de la tabla, fue ir repitiendo de manera sistemática: *"El polígono tiene 14 lados entonces tiene 14-3 diagonales, o sea 11, y se forman 14-2 triángulos, es decir 12 triángulos"*, y de igual forma en cada una de las filas de la tabla, luego de que los estudiantes mencionaran el valor correspondiente, el fin de este énfasis era que los alumnos no presentaran demasiados inconvenientes en la generalización (*n* lados).

En ese momento, se explicó que *n,* en este caso, representaba un número natural cualquiera. Como la generalización resultó difícil para los estudiantes, se optó como estrategia, pedir que supongan que *n* es un número cualquiera, por ejemplo, el 12, y preguntar a los alumnos: *"si n es 12, tengo un polígono de 12 lados, ¿cuántas diagonales tiene desde uno de sus vértices?"* rápidamente los estudiantes respondieron 12-3 diagonales, entonces se les dijo que como *n* es 12, se reemplaza el 12 por la *n*. De esta manera, los estudiantes lograron más fácilmente generalizar la regularidad encontrada, a través de casos particulares.

[9] Esto es, si n representa la cantidad de lados de un polígono, las diagonales que pueden trazarse por un vértice es n-3, y la de triángulos que están determinan es n-2.

2.4 Planificación y puesta en aula de los contenidos del Bloque II: Clasificación de Cuadriláteros

El foco de este bloque se colocó en las definiciones, para poder realizar justificaciones remitiendo a ellas.

El recurso didáctico que se utilizó para trabajar en este bloque fue el juego de Tangram[10], para construir con sus piezas distintos cuadriláteros y luego explorar sus propiedades.

El juego del Tangram fue construido por los estudiantes bajo una serie de indicaciones. Esta decisión se basó en que las interacciones (alumnos-docente) durante el proceso de construcción recuperarían algunos contenidos trabajados durante el primer bloque, como así también generaría un ambiente propicio para el estudio de los nuevos contenidos, como por ejemplo la idea de congruencia por superposición.

A continuación, se describe el proceso de construcción del Tangram con el fin de dar cuenta de las principales interacciones mencionadas anteriormente.

Inicialmente se entregó a cada estudiante un rectángulo de cartulina blanca (ver Figura 18) de 21cm de largo por 14cm de alto. Las medidas indicadas no fueron elegidas al azar: la altura del rectángulo debía representar $\frac{2}{3}$ del largo del mismo, para así lograr la congruencia entre los lados de algunas figuras. Además, se optó por construir el Tangram en una cartulina blanca para que los estudiantes pudieran colorear algunos elementos de cada figura, en una actividad que se propuso posteriormente.

[10] El Tangram es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las piezas, llamadas 'Tans', son: 5 triángulos de distintos tamaños, un cuadrado y un paralelogramo.

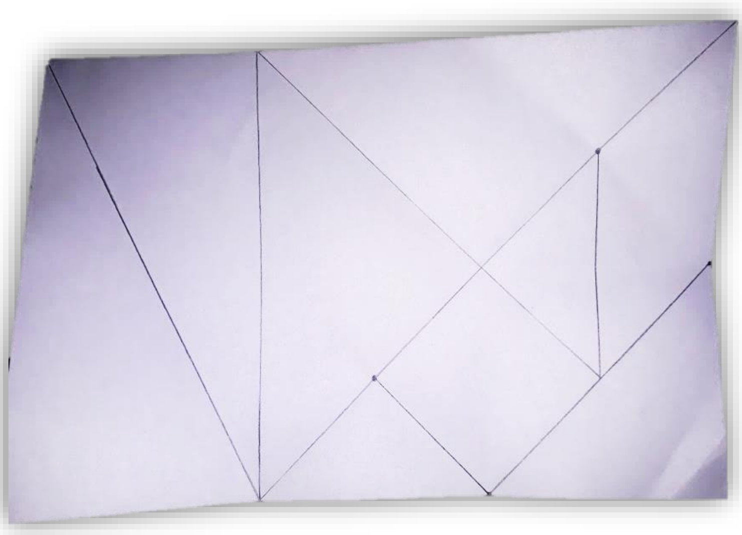


Figura 18: Hoja de cartulina entregada a los estudiantes que muestra las piezas que resultan del proceso de construcción del mismo.

El primer paso de la construcción fue generar un doblez en la figura de forma tal que se superpongan un par de lados consecutivos del rectángulo (ver Figura 19), y luego trazar sobre el rectángulo el segmento correspondiente al lado superpuesto[11].

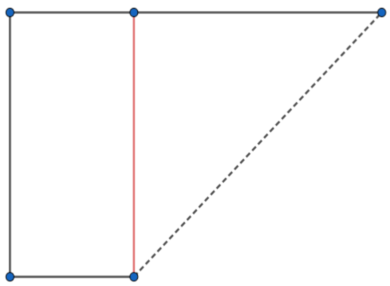


Figura 19: Primer paso de la construcción del Tangram y trazado de uno de sus dobleces.

En cada paso de la construcción, ante cada nueva figura determinada en la hoja de papel se pedía a los estudiantes que la observen y nombren alguna característica de la misma, junto con una justificación informal que asegure la pertinencia de tal característica. Así, por ejemplo, en el caso del cuadrado, todos sus lados son congruentes.

El paso siguiente de la construcción, era trazar el segmento que quedó marcado tras el doblez de la cartulina (ver Figura 20). En el Tangram que se colocó en la pizarra, se indicaban los vértices que se generaban con los distintos dobleces (Figura 20) para que los estudiantes puedan referirse a un elemento particular al comunicar sus resultados e ideas.

[11] Los segmentos trazados por los estudiantes se muestran en la figura de color rojo.

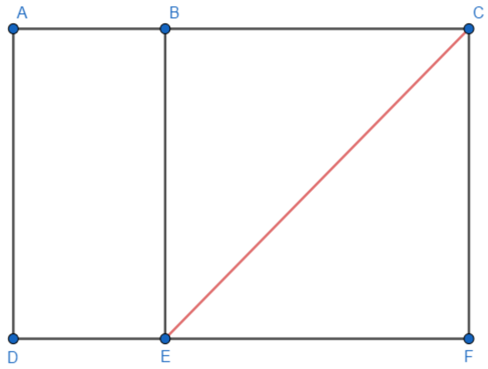


Figura 20: Segundo paso de la construcción del Tangram, y el trazado de nuevas figuras.

A lo largo de distintos procesos de doblado se hizo evidente para los estudiantes la idea de congruencia implícita en la superposición de segmentos. En particular, esta noción se hizo evidente en el proceso de encontrar puntos medios, por ejemplo, el punto G para el $\overline{EF}$ (ver Figura 21).

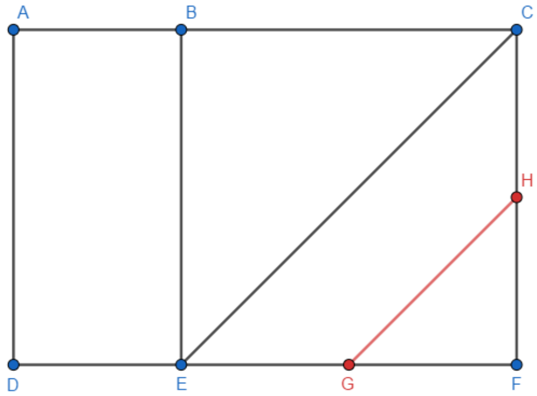


Figura 21: Construcción del Tangram, donde aparecen puntos medios G y H.

Luego de trazar el segmento $\overline{GH}$, la situación fue aprovechada para revisar la noción de paralelismo entre los segmentos $\overline{GH}$ y $\overline{EC}$ (ver Figura 21).

La Figura 22 muestra el siguiente paso en el proceso de construcción del Tangram, y la Figura 23, el resultado final.

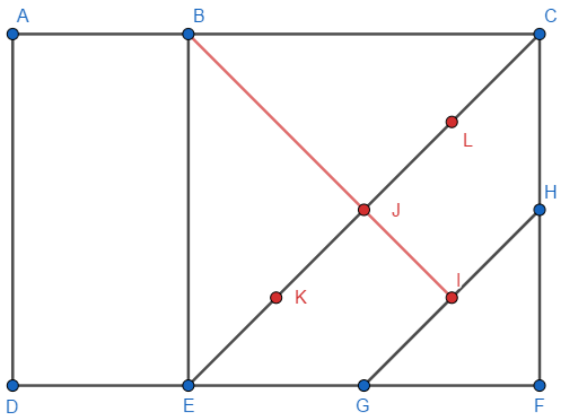


Figura 22: Otro paso de la construcción del Tangram donde se observan distintos polígonos determinados mediante dobleces y puntos medios de algunos segmentos.

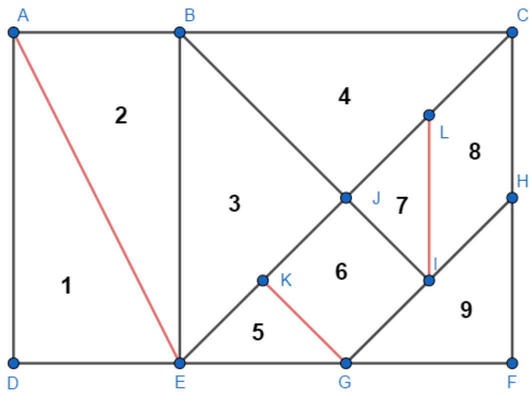


Figura 23: Proceso de construcción del Tangram terminado, donde han quedado determinados distintos polígonos.

La caracterización de la congruencia de segmentos y ángulos se registró en la carpeta de los estudiantes, de la siguiente manera:

Diremos que dos segmentos o dos ángulos son congruentes si, al superponerlos, todos sus puntos coinciden.

Esta caracterización fue importante para el desarrollo de la siguiente actividad: se propuso a los alumnos pintar del mismo color todos los segmentos congruentes entre sí (pares de segmentos congruentes se caracterizaban con un mismo color), y luego, realizar la misma acción con los ángulos congruentes, siempre acudiendo a la superposición de elementos para comprobar la congruencia. La misma acción se realizó en el Tangram de la pizarra a través de un intercambio con los estudiantes; las piezas fueron numeradas para identificarlas. El resultado final puede observarse en la Figura 24.

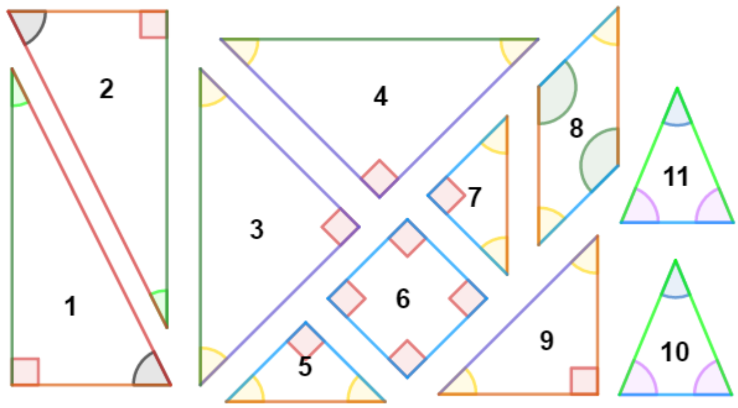


Figura 24: Figuras del Tangram con los lados congruentes en distintos colores y numeradas para una mejor identificación.

En el Anexo B se encuentra una guía de actividades que fue resuelta por los estudiantes utilizando las piezas del Tangram (ver Figura 25).

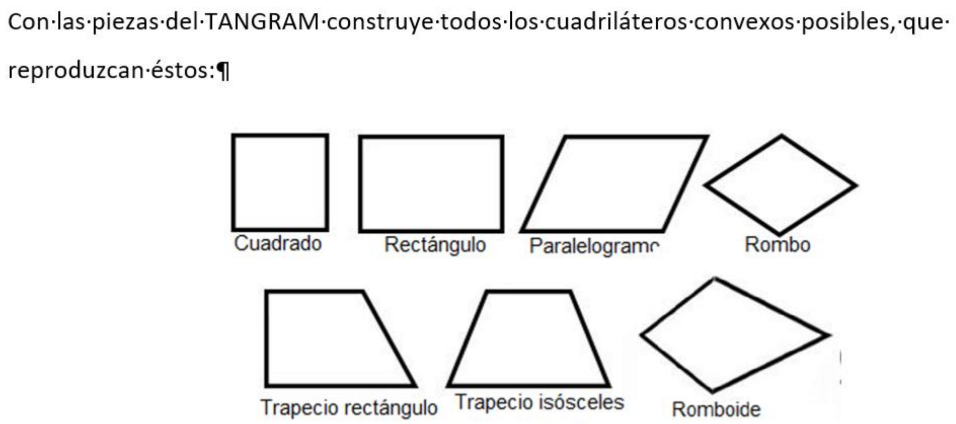


Figura 25: Cuadriláteros que los estudiantes construyeron, mediante la combinación de las piezas del Tangram.

La Figura 26 muestra, en el papel, el resultado de la formación de estos cuadriláteros con las piezas del Tangram identificados con números.

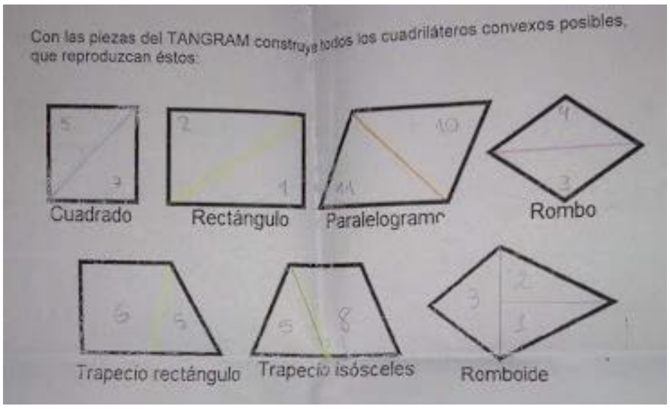


Figura 26: Formación de cuadriláteros con piezas del Tangram.

El color asignado a los distintos elementos (lados y ángulos) de los polígonos determinados en el Tangram permitió la reflexión acerca de las propiedades particulares de los cuadriláteros de la Figura 25 que se construían. Es decir, al formar un rectángulo, podía observarse que sus lados opuestos son congruentes, puesto que aparecían con el mismo color (ver Figura 27).

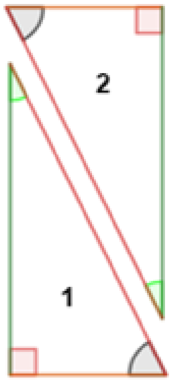


Figura 27: Piezas del Tangram utilizadas para la construcción del rectángulo, destacando sus lados y ángulos congruentes a partir del coloreado común de los mismos.

A partir del armado de cuadriláteros con piezas del Tangram, y la observación de congruencia entre pares de lados y ángulos se determinaron propiedades necesarias y suficientes de las distintas familias de cuadriláteros, para así construir sus definiciones y determinar sus propiedades. Las discusiones para la elaboración de estas construcciones se realizaron con la ayuda de un archivo de GeoGebra[12], creado con el fin de que los estudiantes puedan reconocer las distintas propiedades a través de elementos invariantes en las construcciones mostradas en la pantalla (Figura 28).

[12] El archivo se encuentra disponible en: https://www.geogebra.org/classic/chteh2cp

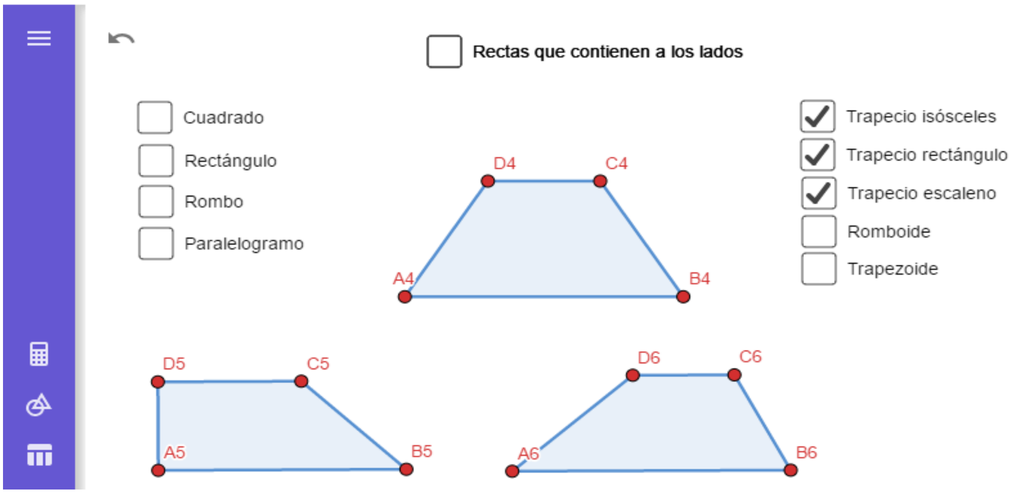


Figura 28: Tipos de trapecios construidos en GeoGebra para verificar propiedades a través de la modificación de los mismos.

Las discusiones que se suscitaron en el aula en términos de la definición de características que constituirían la definición y distinguir las que son propiedades pueden ilustrarse de la siguiente manera: en la Figura 29, ¿qué sucede si la recta A_6D_6 es perpendicular a D_6C_6? (esto es posible de observar desplazando de manera dinámica en GeoGebra). De esta acción, el cuadrilátero resulta un rectángulo, hecho que motivó la pregunta ¿el rectángulo es un paralelogramo?

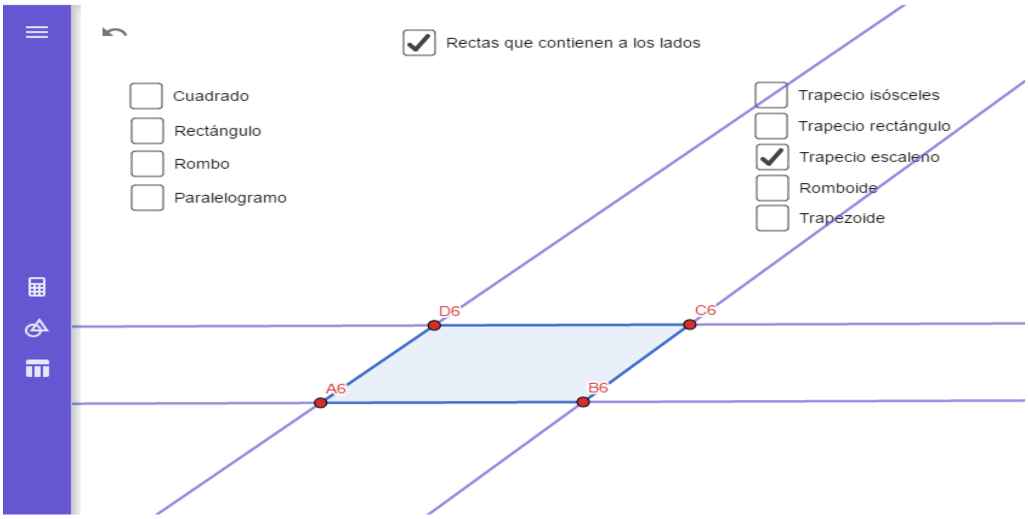


Figura 29: Modificación de un paralelogramo para convertirlo en un rectángulo, a partir del desplazamiento dinámico de sus vértices en GeoGebra.

Discusiones similares fueron establecidas para los distintos cuadriláteros y sus propiedades. En base a estas consideraciones, se elaboró el esquema que muestra la Figura 30 que resume propiedades de estas figuras:

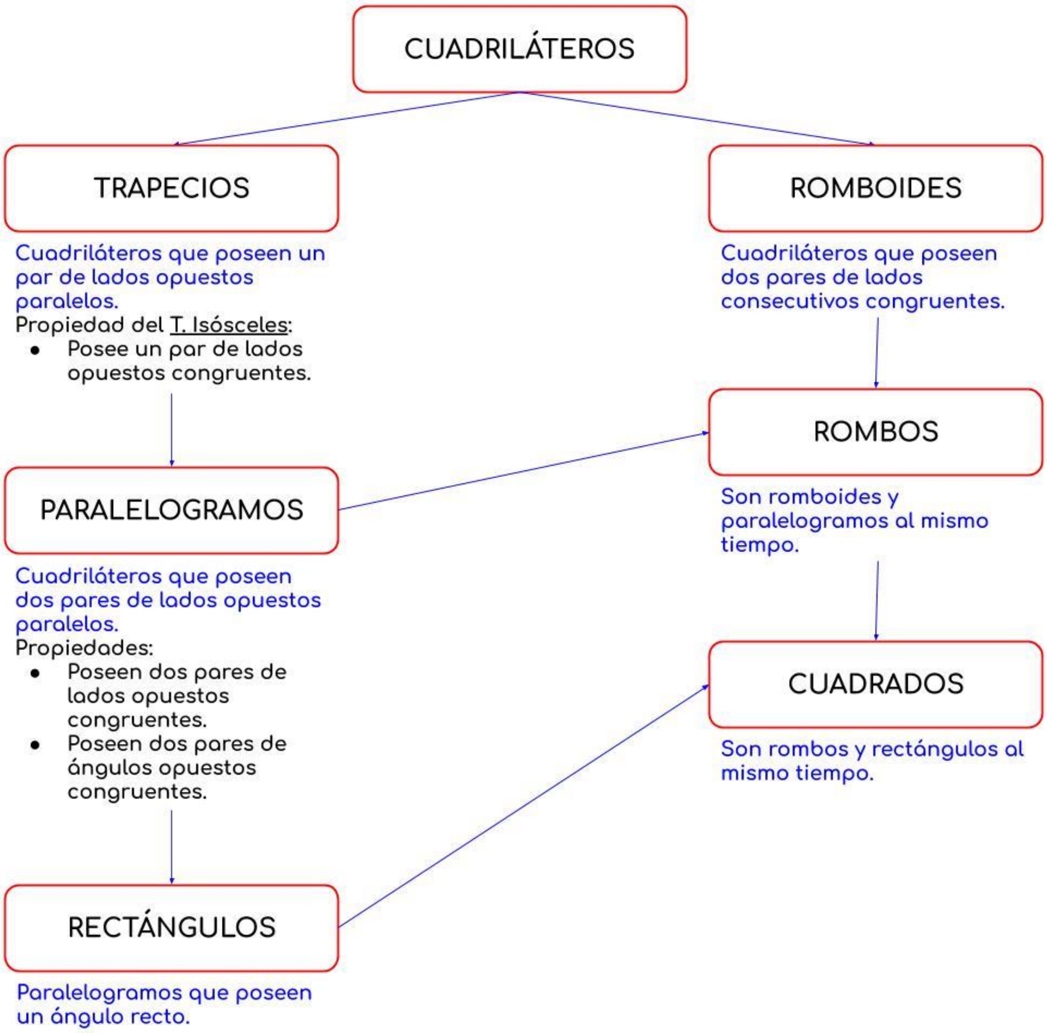


Figura 30: Esquema de las familias de cuadriláteros y sus propiedades elaborado a modo de síntesis de las discusiones con los estudiantes.

Un trabajo práctico con tres actividades (ver Anexo C) fue empleado para aplicar esta clasificación de cuadriláteros y, a la vez, practicar la notación simbólica pertinente.

2.5 Planificación y puesta en aula de los contenidos del Bloque III: Área y perímetro de cuadriláteros

Los contenidos del Bloque III fueron desarrollados con importantes restricciones de tiempo y recorte de contenidos, tal como se expresó en la sección 2.2. Con estas limitaciones, se desarrollaron ideas de perímetro y área, como así también, una ejercitación relativa a estos contenidos aplicados a los cuadriláteros. Es importante destacar que las actividades de construcción del Tangram y el coloreado de pares de elementos para representar su congruencia, resultó de utilidad para la construcción de las fórmulas de perímetro en particular.

Respecto al perímetro de los cuadriláteros, se introdujo bajo un simple problema planteado oralmente: *"Supongamos que, ahora que se acerca el día del estudiante, queremos decorar el aula. Quiero hacer una guirnalda que cubra todo el borde de la pizarra, ¿qué tan larga debería ser la guirnalda? ¿Cómo calculo esta medida?"*. A partir de la resolución del mismo, luego de medir los lados de la pizarra, se introdujo la definición de perímetro:

Definición: el perímetro de una figura es la suma de las longitudes de todos sus lados.

De esta manera, se vinculó el perímetro que calcularon los estudiantes en el problema de la guirnalda con el de un rectángulo particular, representado con la pizarra, y se escucharon propuestas sobre cómo podríamos escribir la fórmula de perímetro para cualquier rectángulo. Se acordó, entonces, que podríamos llamar a los lados consecutivos como lado1 y lado2, representados con las letras l_1 y l_2 respectivamente.

Discusiones similares, y usando la idea de colores iguales para pares de lados congruentes (en la medida que esto era pertinente para la elaboración de fórmulas de cálculo de perímetros de cuadriláteros) se completó la siguiente tabla (ver Figura 31):

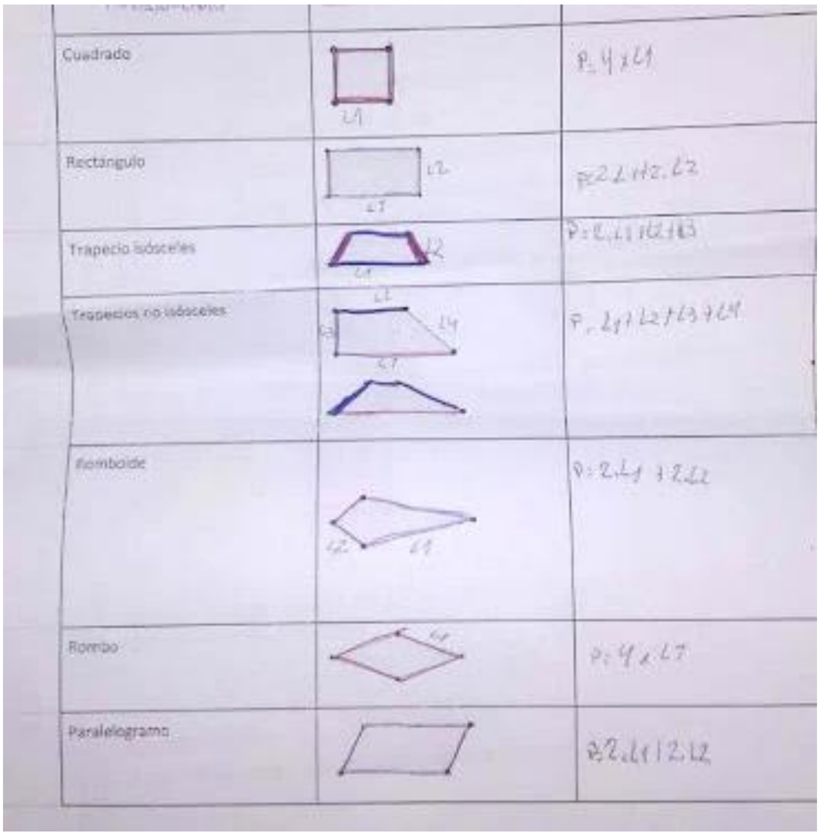


Figura 31: Fórmulas para el cálculo del perímetro de cuadriláteros donde se observan referencias de color a pares de lados congruentes.

Los estudiantes, en la última jornada declararon que la construcción de estas fórmulas resultó uno de los temas que más les gustó y menos dificultades tuvieron, lo cual se vio reflejado en los resultados de la evaluación.

Un abordaje similar se realizó con el área de cuadriláteros, donde se consideró el área del rectángulo como base para luego "rectangulizar" cada cuadrilátero, es decir, de forma de utilizar la fórmula del cálculo del área del rectángulo en las demás figuras. También se introdujo la notación correspondiente, pues designamos la letra *b* para la base y *h* para la altura, por su traducción al inglés (base and height). La tabla completada como resultado de esta actividad fue la siguiente (ver Tabla 8).

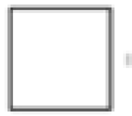
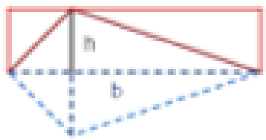
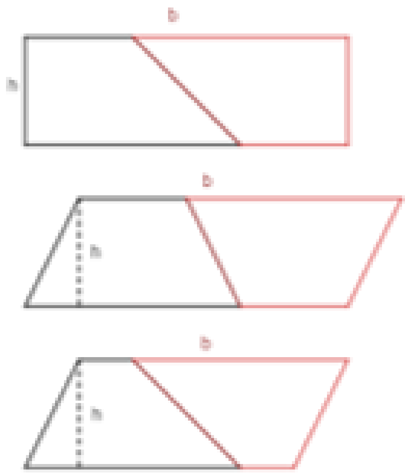
Cuadrilátero	Fórmula para calcular el área
Rectángulo 	$A = b \cdot h$
Cuadrado 	$A = l^2$
Paralelogramo 	$A = b \cdot h$
Rombo y Romboide 	$A = \frac{D + d}{2}$
Trapecios 	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Tabla 8: Fórmulas para el cálculo del área de los cuadriláteros.

2.6 El proceso de evaluación

Las condiciones en que se realizaron las prácticas, sin par pedagógico, dificultaron la recolección de información que me permitieran realizar una evaluación de naturaleza formativa de la evolución de los aprendizajes de los estudiantes. Por ello, se describe a continuación el proceso de evaluación sumativa[13] administrada hacia el final del período de práctica.

2.6.1 Repaso general previo a la evaluación sumativa

El repaso de todos los contenidos que serían evaluados en una instancia sumativa se realizó en dos oportunidades: el primero, en la clase anterior a la evaluación, el cual consistió en la resolución de un trabajo práctico, y el segundo, el mismo día de la evaluación, ya que se inició la clase con un repaso general, de forma oral, de los contenidos a evaluar.

Se diseñó un trabajo práctico (ver Anexo D), que integró todos los temas y procesos vistos durante la práctica Los alumnos resolvieron el trabajo práctico de manera grupal (2 a 4 integrantes). Para realizar la puesta en común, algunas actividades fueron resueltas de manera oral por alumnos elegidos al azar, salvo las Actividades 2 y 3, las cuales se resolvieron en la pizarra con todos los estudiantes.

2.6.2 La evaluación sumativa de los contenidos

Se decidió implementar una única evaluación de tipo sumativa en la última clase correspondiente a la práctica. En ella se evaluaron los contenidos abordados: el proceso de clasificación (decidir a qué subconjunto pertenece una figura bajo un criterio específico), polígono, polígono cóncavo y convexo, elementos de un polígono y, definiciones de cuadriláteros, sus propiedades y cálculo de perímetro.

Los criterios de evaluación se informaron a los estudiantes una semana antes de su aplicación, de manera oral y escrita. Además, las fechas y criterios de evaluación se registraron en el cuaderno de comunicados para informar a las familias de los estudiantes sobre la actividad. También, estos criterios se hicieron explícitos en el instrumento de evaluación. A continuación,

[13] "La evaluación sumativa se propone apreciar el grado de apropiación de los contenidos por parte del alumno. Su objetivo es emitir un juicio sobre los resultados, sobre lo que el alumno ha aprendido." (Gvirtz, S. y Palamidessi, M., 1988).

se presenta el texto del instrumento señalado, el contenido, los criterios de evaluación y el puntaje asignado.

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

TEMA 1. Fecha: 15/08/19

Nombre y Apellido: ____Curso: _________

Criterios de evaluación:

- Decidir y justificar por escrito si una figura es un polígono o no, y si un polígono es cóncavo o convexo.
- Reconocer la clasificación de polígonos según la cantidad de lados que poseen.
- Prolijidad a la hora de construir figuras.
- Reconocer y nombrar correctamente cada elemento de un polígono.
- Resolver actividades aplicando las fórmulas de perímetro de los distintos cuadriláteros, su definición y propiedades.

Puntajes:

Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	TOTAL

Actividad 1: (1 pto.) Decide si las siguientes figuras son polígonos o no. Justifica por escrito tus respuestas.

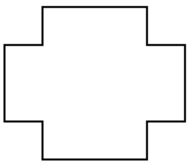


Figura 1

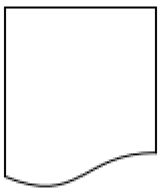
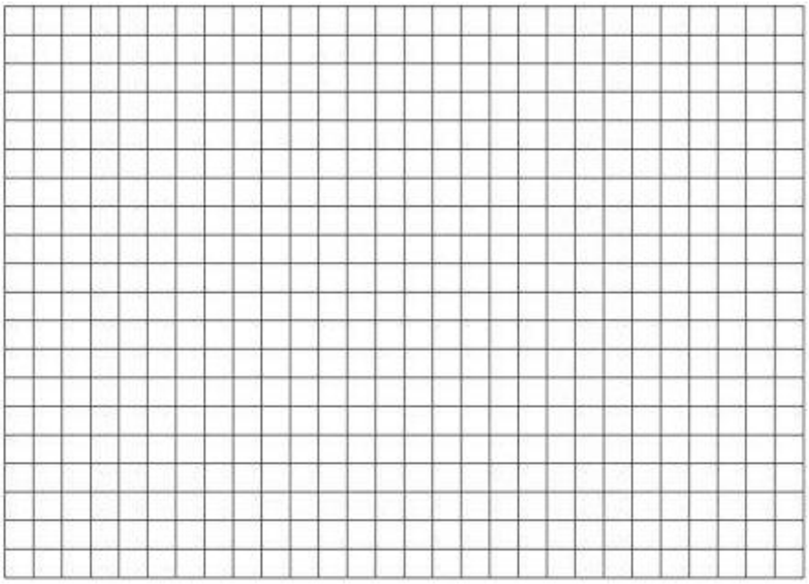


Figura 2

Actividad 2: (1,5 pts.) Decide si el siguiente polígono es cóncavo o convexo. Justifica mediante un dibujo tu respuesta.

Actividad 3: (3 pts.)

a) Dibuja un RECTÁNGULO en la siguiente cuadrícula.



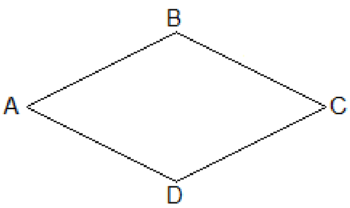
b) Escribe su definición.

c) Pinta del mismo color los lados congruentes.

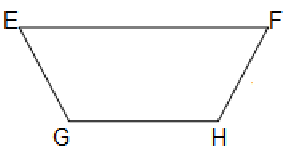
d) Pinta del mismo color los ángulos congruentes.

e) Nombra TODOS sus elementos, utilizando la notación simbólica.

Actividad 4: (2 pts.) Calcula el valor del perímetro de los siguientes cuadriláteros.



Dato: En este ROMBO el lado mide 6 cm.



Datos: En este TRAPECIO ISÓSCELES, el lado mide 3 cm.

El lado mide 7 cm. El lado opuesto al lado mide 5 cm.

Actividad 5: (2,5 pts.) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las que consideres falsas por escrito.

a) En un dodecágono, pueden trazarse 11 diagonales desde UNO de sus vértices.

b) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

c) Un cuadrado es un rectángulo.

d) Un rombo posee sus lados opuestos congruentes.

e) No existe ningún polígono sobre el cual puedan trazarse 7 diagonales desde UNO de sus vértices.

Las actividades propuestas en la evaluación fueron de la misma naturaleza que las trabajadas en los distintos trabajos prácticos resueltos durante la práctica, intentando así una coherencia entre lo evaluado y lo efectivamente trabajado.

A continuación, se presentarán los criterios de corrección de cada actividad con los puntajes correspondientes (ver Tabla 9).

Actividad		**Criterio de corrección**	**Puntaje asignado**
1	Con respecto a la Figura 1	Decidir que la figura es un polígono	0,25 puntos
		Justificar apelando a la definición de polígono de manera completa	0,5 puntos
	Con respecto a la Figura 2	Decidir que la figura no es un polígono	0,25 puntos
		Justificar mencionando la parte incumplida de la definición de polígono	0,5 puntos
2		Decidir que el polígono es cóncavo	0.75 puntos
		Justificar dibujando una recta sobre un lado que muestre la concavidad del polígono	0,75 puntos
3		Dibujar de forma prolija el cuadrilátero solicitado	0,5 puntos
		Escribir de manera completa la definición del cuadrilátero solicitado	0,75 puntos
		Pintar del mismo color los lados congruentes	0,5 puntos
		Pintar del mismo color los ángulos congruentes	0,5 puntos
		Nombrar todos los elementos del polígono utilizando la notación simbólica pertinente	0,75 puntos
4	Cuadrilátero 1	Identificar los valores de las longitudes de cada lado del cuadrilátero	0,25 puntos
		Calcular el perímetro utilizando la fórmula correspondiente	0,75 puntos
	Cuadrilátero 2	Identificar los valores de las longitudes de cada lado del cuadrilátero	0,25 puntos
		Calcular el perímetro utilizando la fórmula correspondiente	0,75 puntos
5	Afirmaciones verdaderas	Decidir que la afirmación es correcta	0,5 puntos
	Afirmaciones falsas	Decidir que la afirmación es incorrecta	0,25 puntos
		Refutar la afirmación proponiendo un contraejemplo	0,25 puntos

Tabla 9: Puntajes asignados para cada criterio de corrección de las actividades del instrumento de evaluación.

Los resultados cuantitativos y algunos cualitativos que arrojó el análisis de cada una de estas actividades se presentan a continuación. Todos estos datos se tomaron sobre 30 de los 33 estudiantes del curso, de los cuales uno estuvo ausente y el análisis de las dos alumnas integradas presentará más adelante en una sección especial, para dar cuenta de las particularidades de la valoración de su trabajo.

El análisis cuantitativo de la Actividad 1 se refleja en los gráficos presentados a continuación (ver Figuras 32 y 33). Con respecto al análisis cualitativo[14], derivado del anterior, existe una notoria diferencia entre los estudiantes que lograron justificar correctamente su decisión en cada figura (53% para el polígono de la Figura 1 y 80% para el de la Figura 2). Esto puede tener su explicación en que para los estudiantes es más fácil decidir que una figura es un

[14] Este análisis se profundizará en el capítulo 3, al igual que las reflexiones sobre la Actividad 3 (inciso b) y la Actividad 5.

contraejemplo de un concepto (en este caso el de polígono) colocando la atención en sólo un aspecto, que justificar de manera completa con todos los atributos de un ejemplo de ese mismo concepto.

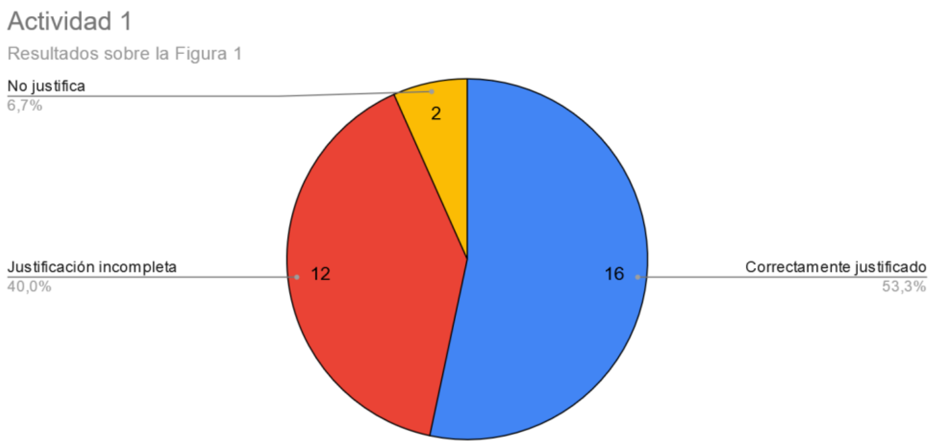


Figura 32: Resultados acerca de la decisión de si Figura 1 de la Actividad 1 de la evaluación es un polígono o no.

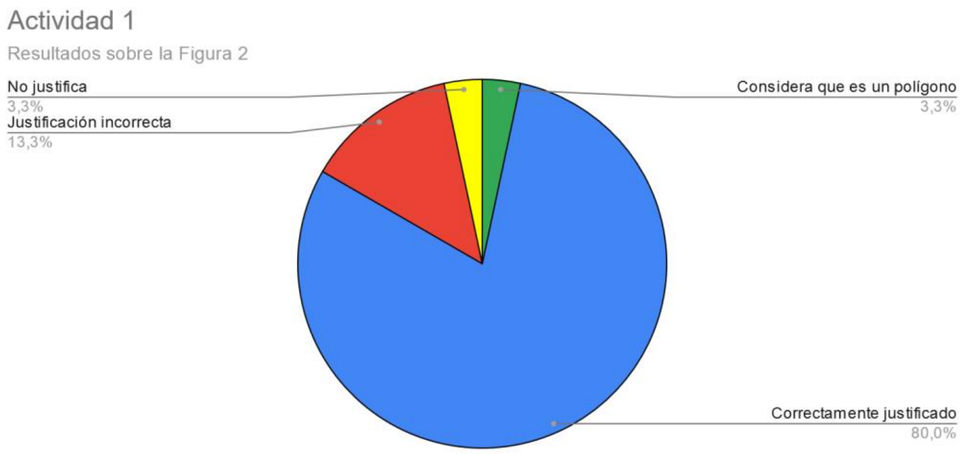


Figura 33: Resultados acerca de la decisión de si Figura 2 de la Actividad 1 de la evaluación es un polígono o no.

Con respecto a la Actividad 2, los resultados se muestran en el siguiente gráfico de la Figura 34, donde se puede notar que la justificación fue correcta en el 76,7% de los estudiantes, por lo que no se presentaron mayores dificultades.

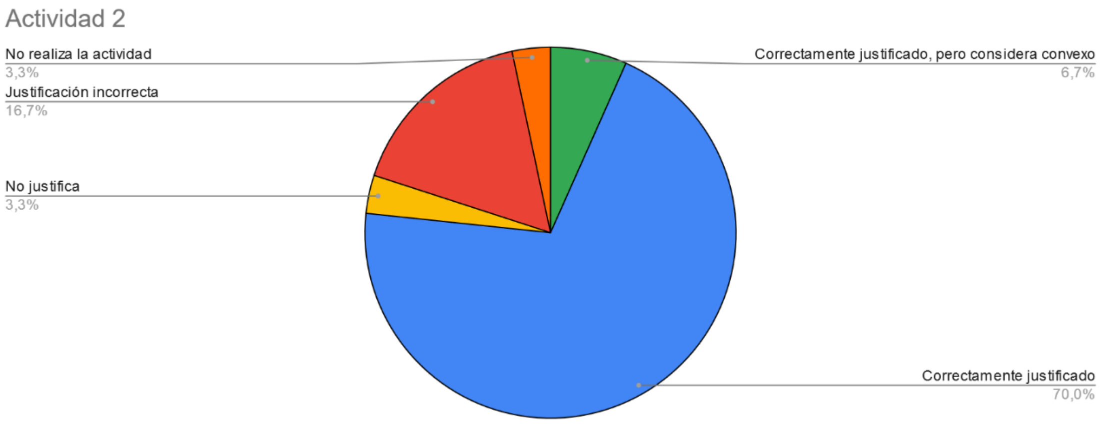


Figura 34: Resultados de la Actividad 2 de la evaluación.

La Actividad 3, constaba de 5 ítems. La Figura 35 muestra que el dibujo de un rectángulo no resultó de dificultad para los estudiantes, puesto que se los ayudaba con la cuadrícula para ello.

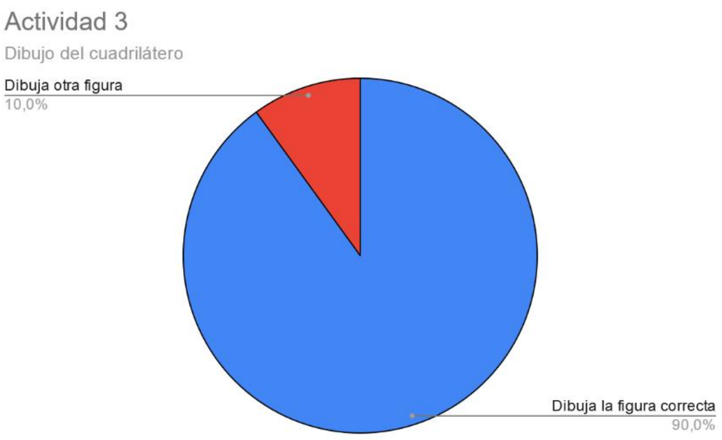


Figura 35: Resultados del dibujo de un rectángulo en una cuadrícula (Ítem a de la Actividad 3 de la evaluación).

Sin embargo, la escritura de la definición de ese cuadrilátero arrojó resultados poco favorables, siendo sólo un 25%, aproximadamente, las respuestas correctas (ver Figura 36).

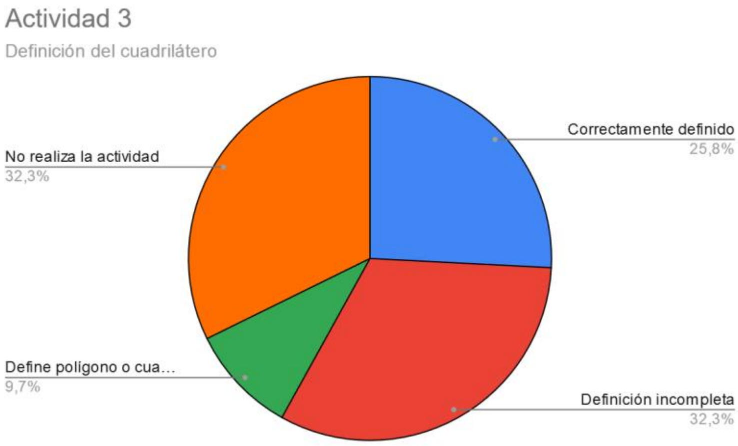


Figura 36: Resultados acerca de la escritura de la definición de rectángulo (ítem b de la Actividad 3 de la evaluación).

En los siguientes ítems c y d los alumnos debían pintar del mismo color los pares de lados y ángulos congruentes de un rectángulo, lo que no resultó de dificultad para los estudiantes (ver Figura 37) dado el contexto de la cuadrícula que ayudaba en este proceso.

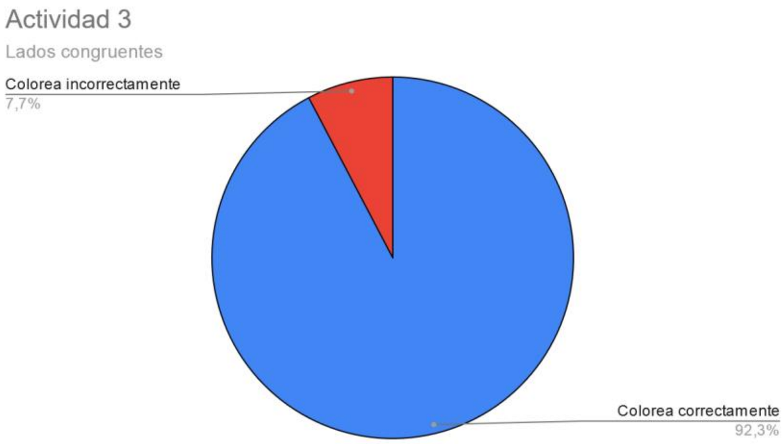


Figura 37: Resultados sobre el reconocimiento de lados congruentes en un rectángulo (ítem c en la Actividad 3 de la evaluación).

Un resultado distinto se observa para el reconocimiento de ángulos congruentes de un rectángulo (ver Figura 38). A pesar de la ayuda de la cuadrícula, el 46,7% de los estudiantes resolvió correctamente la actividad; es probable que la noción detrás de la palabra “congruencia” pueda no haber sido comprendida por los estudiantes.

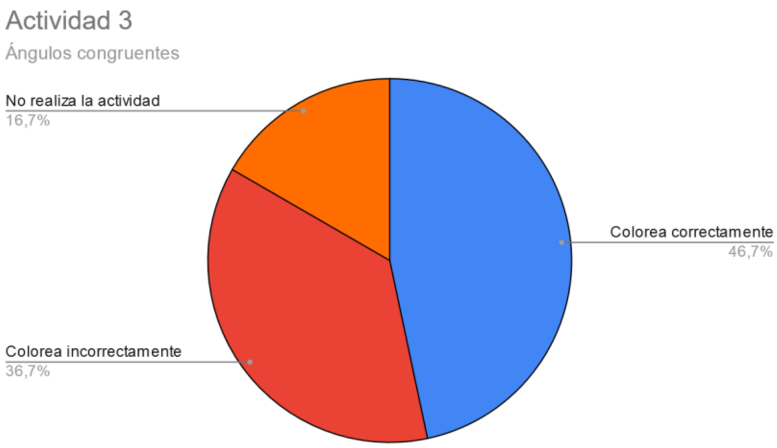


Figura 38: Resultados sobre el reconocimiento de ángulos congruentes en un rectángulo (ítem d en la Actividad 3 de la evaluación).

Es importante señalar, que la evaluación tuvo una segunda versión donde estos ítems se referían a las particularidades de un rombo. Si bien no se analizan en detalle los resultados, a continuación, se muestra el trabajo de uno de los estudiantes (Figura 39), donde se observa el coloreado de pares de elementos congruentes.

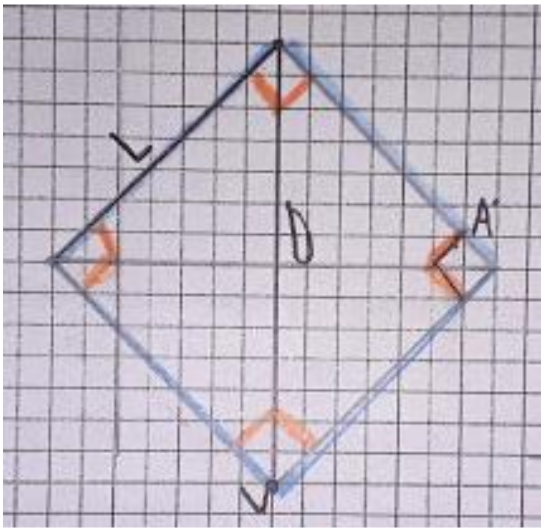


Figura 39: Coloreado de pares de lados y ángulos congruentes en un rombo.

En el ítem e de la Actividad 3, se solicitaba que los alumnos nombren, simbólicamente, todos los elementos del polígono que dibujaron (rectángulo o rombo). En esta consigna se evaluó que supieran distinguir sus elementos y que se nombren todos ellos utilizando la notación simbólica pertinente. Los resultados cuantitativos de esta actividad (ver Figura 40) mostraron que, sólo un 33% de los estudiantes pudo cumplir con la consigna correctamente.

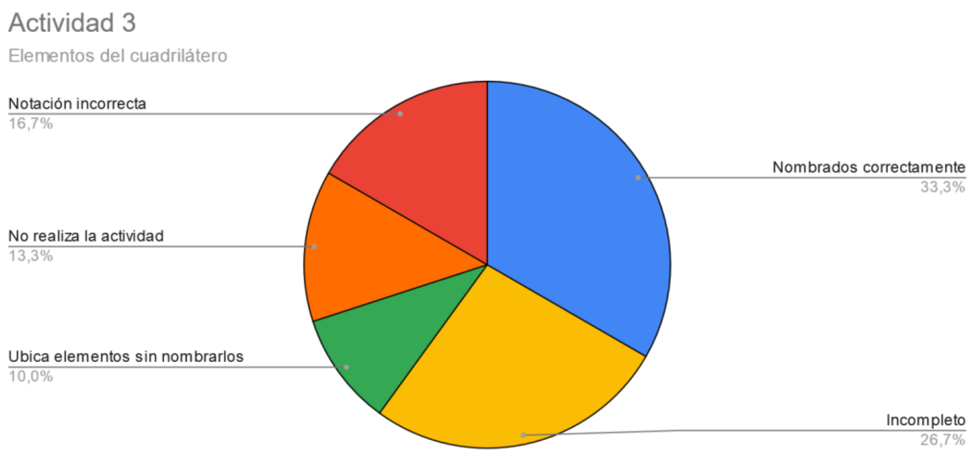


Figura 40: Resultados del reconocimiento de los elementos de un cuadrilátero y notación simbólica (ítem e de la Actividad 3 de la evaluación).

En términos generales, los estudiantes tuvieron mayores dificultades para reconocer ángulos que lados. En la Figura 41 aparece evidencia de esto en las correcciones colocadas al trabajo del autor de esa actividad.

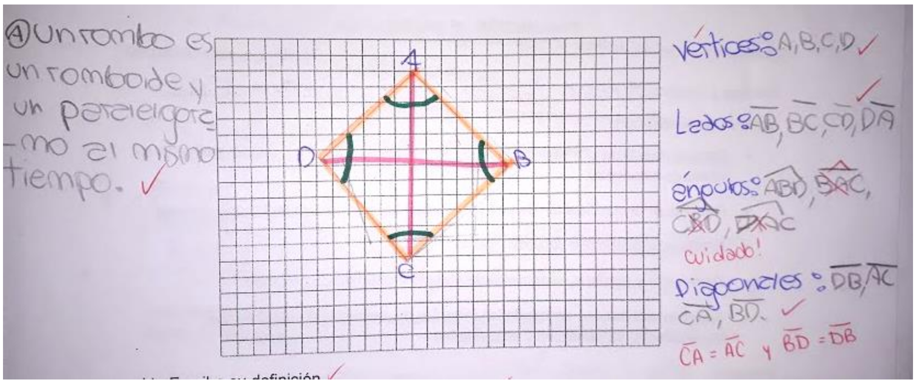


Figura 41: Segmentos perfectamente identificados por un estudiante frente a algunos pocos ángulos (ítem e de la Actividad 3 de la evaluación administrada).

Con respecto a la Actividad 4 de la evaluación, se solicitó que los alumnos calcularan el perímetro de dos cuadriláteros dadas las medidas necesarias para ello, en forma de texto vinculadas al nombre de los lados correspondientes. Los resultados que muestran las Figuras 42 y 43 muestran que la actividad pudo ser abordada por los estudiantes, no mostrando diferencias en las respuestas para cualquiera de esos cuadriláteros (70% y 73,3%, respectivamente).

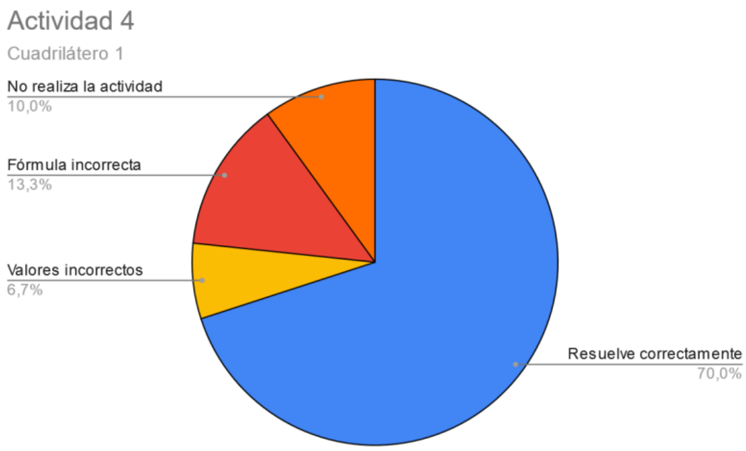


Figura 42: Resultados del cálculo del perímetro del cuadrilátero 1 de la Actividad 4 de la evaluación.

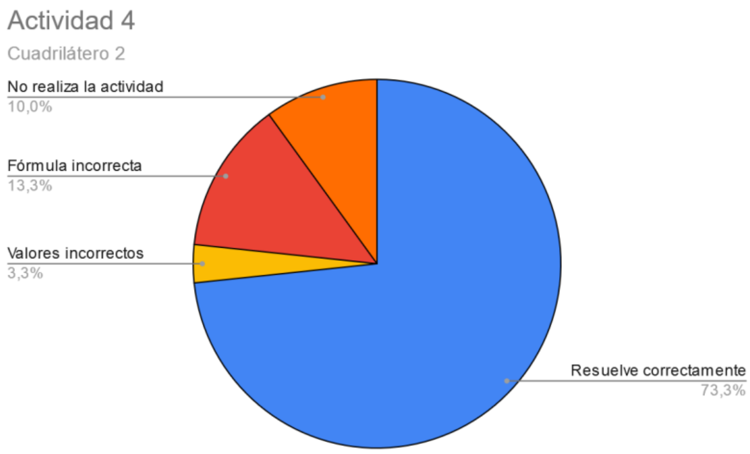


Figura 43: Resultados del cálculo del perímetro del cuadrilátero 2 de la Actividad 4 de la evaluación.

Con referencia a la Actividad 5, los alumnos debían responder si las afirmaciones presentadas eran verdaderas o falsas, y se pidió que justificaran sólo aquellas que consideraban falsas. En el período de la práctica, los estudiantes habían demostrado mayor capacidad para refutar una afirmación, por lo que se decidió promover esta posibilidad en la evaluación.

Respecto a aquellas afirmaciones verdaderas, la mayoría de los estudiantes mostraron resultados positivos en sus respuestas (ver Figuras 44, 45 y 46).

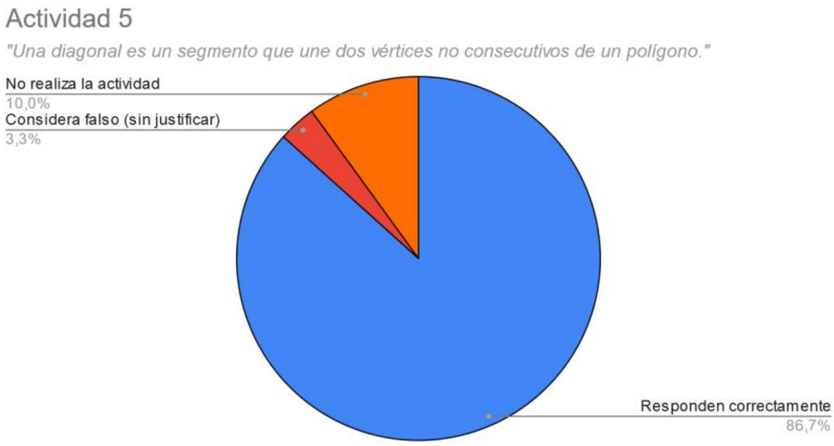


Figura 44: Resultados de la afirmación a la expresión presentada en el ítem b la Actividad 5 de la evaluación.

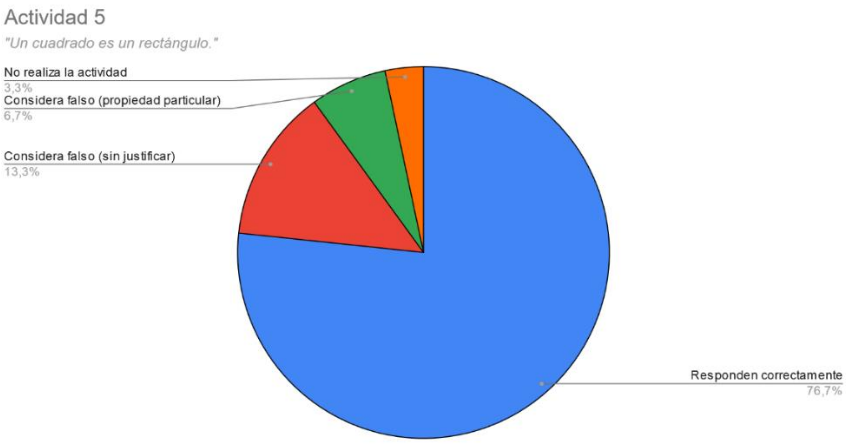


Figura 45: Resultados de la afirmación a la expresión presentada en el ítem c la Actividad 5 de la evaluación.

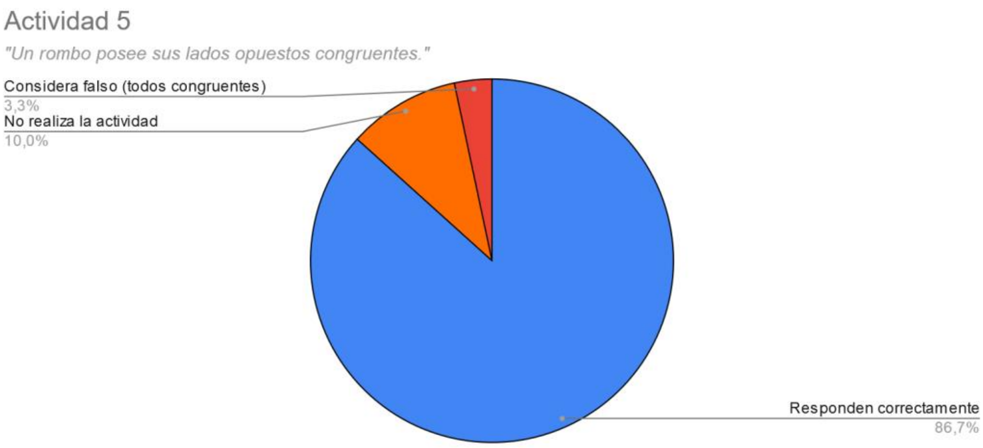


Figura 46: Resultados de la afirmación a la expresión presentada en el ítem d la Actividad 5 de la evaluación.

Por el contrario, en aquellas afirmaciones que resultaron falsas los resultados muestran una mayor variación en las respuestas de los estudiantes (ver Figuras 47 y 48). Ambas referían a la cantidad de diagonales por vértice en un polígono.

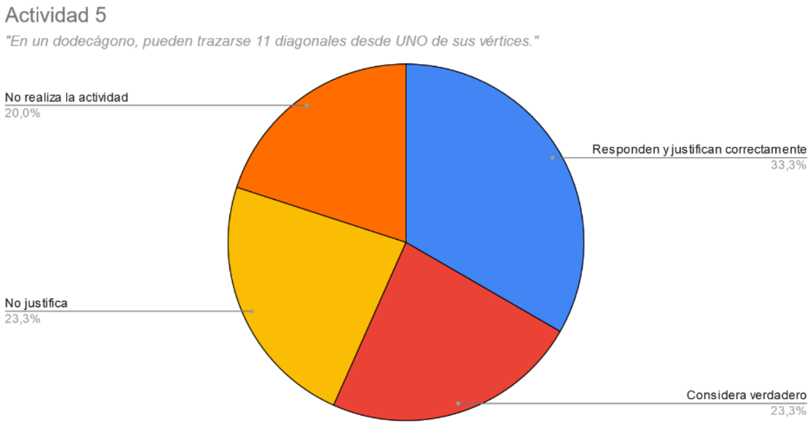


Figura 47: Resultados de la afirmación a la expresión presentada en el ítem a la Actividad 5 de la evaluación.

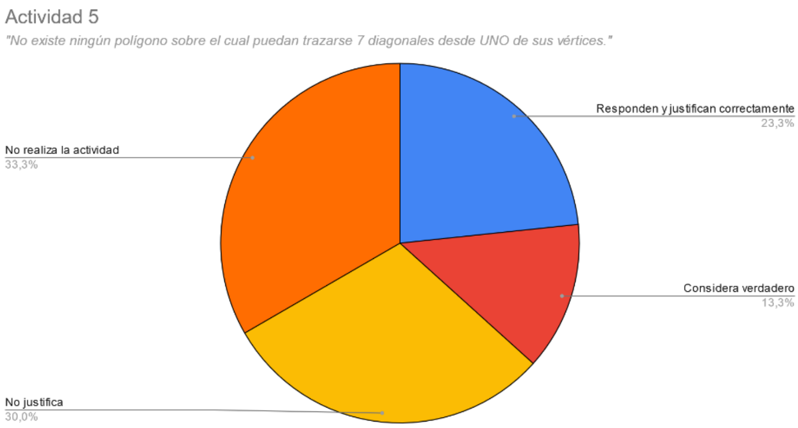


Figura 48: Resultados de la afirmación a la expresión presentada en el ítem e de la Actividad 5 de la evaluación.

Finalmente, en la Figura 49 se muestra el gráfico de las calificaciones obtenidas por los estudiantes, incluyendo aquí a las calificaciones de las alumnas integradas. Es importante notar que en el *"Programa Nuevo Régimen Académico para la Escuela Secundaria"*, los alumnos aprueban la unidad con una nota mayor o igual a 7, y deben obtener al menos un 3 para poder acceder a una instancia de recuperación. Tal como se observa en la Figura 49, el 63,6%[15] de los estudiantes presentes aprobaron la unidad correspondiente a los temas trabajados en la práctica.

[15] Este porcentaje resulta de la suma de los porcentajes de los resultados con nota 10 (9,1%), nota 9 (12,1%), nota 8 (18,2%) y nota 7 (24,2%).

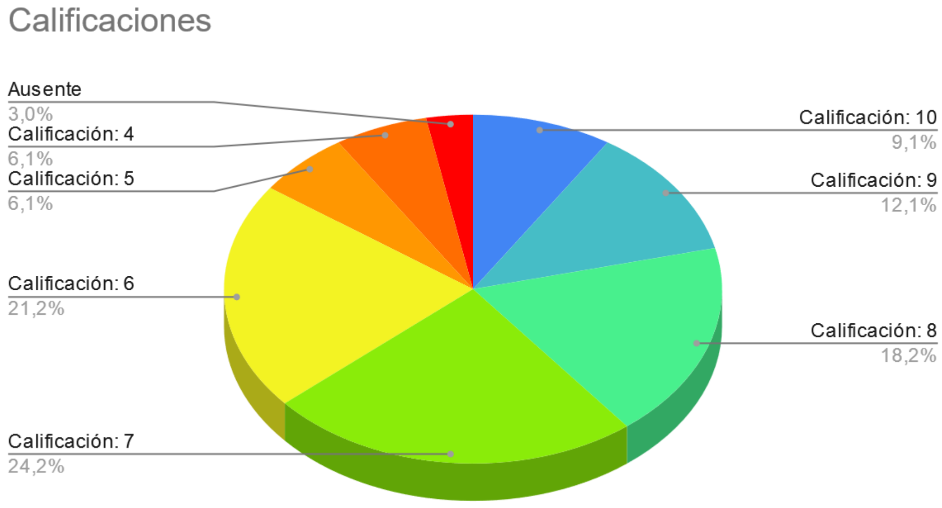


Figura 49: Calificaciones de los alumnos de segundo año en la evaluación sumativa administrada al finalizar la práctica.

2.6.3 Evaluación al proceso de aprendizaje de las alumnas integradas

De acuerdo a la Resolución N° 635[16], divulgada por el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, se entiende por alumno integrado o con Necesidades Educativas Especiales (NEE) a aquellos que requieren en un período de su escolarización o a lo largo de toda ella, de determinados apoyos y atenciones educativas específicas por padecer alguna discapacidad física, psíquica o sensorial, por manifestaciones de trastornos graves de conducta o por estar en situación social o cultural desfavorable.

Una de estas atenciones educativas específicas consistió en la variación del instrumento de evaluación propuesto para las alumnas integradas, éste se modificó con respecto al de sus compañeros, según sugerencias de sus docentes integradoras y revisado por las ellas.

Las modificaciones realizadas sobre estos instrumentos consistieron en el análisis de polígonos cóncavos, la información para el cálculo de perímetros estaba contenida en la misma figura (no en una leyenda aparte como en el instrumento original) y el ejercicio de análisis de oraciones para determinar si eran verdaderas o falsas (Actividad 5) fue eliminado y reemplazado por otro de dibujar un polígono particular y nombrar sus elementos.

[16] Disponible en: https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/PolSocioeducativas/Documentos/Integracion/ResolucionMinisterialNro-635.pdf

Los criterios de evaluación fueron idénticos a los elaborados originalmente para todos los estudiantes; sin embargo, se consideró que no se incluyeran justificaciones.

2.7 Cronograma de actividades

A continuación, se presenta el cronograma de los temas desarrollados y actividades realizadas durante cada clase de la práctica docente, de acuerdo con lo explicitado a lo largo de este capítulo.

Clase	Temas desarrollados	Actividades realizadas
Martes 23/7 (80 minutos)	Proceso de clasificación en contextos extra e intramatemático. Criterios de clasificación.	Presentación y pautas de trabajo. Exploración de criterios de clasificación en la página web MercadoLibre y procesos de clasificación en las distintas ciencias. Elaboración de criterios de clasificación sobre un conjunto de figuras planas y cerradas.
Jueves 25/7 (120 minutos)	Definición de polígonos. Elementos de un polígono. Polígono cóncavo y convexo.	Elaboración de un criterio de clasificación en base a subconjuntos dados (Polígonos – No polígonos, Polígonos Cóncavos – Convexos). Elementos de un polígono: reconocimiento y notación simbólica.
Martes 30/7 (80 minutos)	Definición de polígonos. Elementos de un polígono. Polígono cóncavo y convexo. Clasificación de polígonos según la cantidad de lados que poseen.	Resolución del primer trabajo práctico, integrando los temas desarrollados hasta el momento.
Jueves 1/8 (120 minutos)	Cantidad de diagonales por vértice de un polígono. Introducción a congruencia de lados y ángulos.	Puesta en común de las actividades del TP. Resolución de actividad exploratoria (diagonales). Construcción del Tangram.
Martes 6/8 (80 minutos)	Congruencia de lados y ángulos de un polígono por superposición.	Coloreado de las piezas del Tangram (pintar del mismo color lados y ángulos congruentes). Construcción de cuadriláteros con las piezas del Tangram

Clase	Temas desarrollados	Actividades realizadas
Jueves 8/8 (120 minutos)	Cuadriláteros: definición y propiedades.	Elaboración de la definición de cuadrilátero. Construcción de un esquema que relaciona las distintas familias de cuadriláteros, mencionando su definición y propiedades en base a las construcciones con las piezas del Tangram
Martes 13/8 (80 minutos)	Definición de polígonos. Elementos de un polígono. Polígono cóncavo y convexo. Cuadriláteros: definición, propiedades y perímetro.	Resolución de un TP integrador, como repaso para la evaluación. Construcción de fórmulas para calcular el perímetro de un cuadrilátero.
Jueves 15/8 (120 minutos)	Definición de polígonos. Elementos de un polígono. Polígono cóncavo y convexo. Cuadriláteros: definición, propiedades, perímetro y área.	Repaso para la evaluación. Evaluación sumativa de los aprendizajes. Construcción de fórmulas para calcular el área de un cuadrilátero.

3. La escritura de argumentos en matemática escolar: análisis de las producciones de estudiantes de segundo año de secundaria y de libros de texto

3.1 Introducción: elección de la problemática

La problemática elegida se desarrolla en torno a la escritura de argumentos en Matemática, uno de los objetivos a desarrollar durante la práctica, y que proporcionó una impronta particular al plan inicial casi en su totalidad.

Teniendo en cuenta las capacidades fundamentales para la mejora en los aprendizajes, la escritura de argumentos constituye un pilar fundamental en la formación del estudiante de nivel secundario. En efecto, las capacidades fundamentales a las que refiere este documento son:

- Oralidad, lectura y escritura: aquí la escritura, en particular de argumentos, juega un rol fundamental en la comunicación, donde, para llevarla a cabo, debe presentarse la reflexión, análisis, organización, autocorrección y difusión de ideas.
- Abordaje y resolución de situaciones problemáticas: dentro de esta capacidad, la escritura de argumentos contribuye a la reflexión y evaluación tanto de la resolución de la situación problemática como de los procedimientos utilizados para arribar a ella.
- Pensamiento crítico y creativo: la acción de construir argumentos pertinentes como de contraargumentar lo expuesto por otros, contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, fortaleciendo el necesario cuestionamiento a las distintas aserciones presentadas en distintos contextos, dentro y fuera del ámbito escolar.
- Trabajo en colaboración para relacionarse e interactuar: aquí se muestra tan importante la producción de argumentos como el análisis de los argumentos expuestos por los demás para lograr una mejor interacción entre los miembros involucrados. (Mejora en los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias: Capacidades fundamentales, 2017)

Ciertamente, la argumentación es reconocida como una meta para la matemática escolar. Considerando las recomendaciones planteadas en el Diseño Curricular para el Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba (2011) una de las tareas del docente es que:

> Promoverá la reflexión y justificación, es decir, instará a producir argumentos para validar respuestas sin recurrir a la constatación empírica. En síntesis, lo que se persigue es el abordaje de la geometría desde la deducción (p. 47).

Sin embargo, podría pensarse que la clase matemática, en la mayoría de los casos actuales, se basa en la transmisión de algoritmos que los estudiantes repiten hasta su memorización, dejando poco lugar a la argumentación, proceso esencial para la constitución del pensamiento matemático, según Ponte (citado en Bohórquez & Espinoza, 2013):

> la enseñanza de la matemática ha tenido este mismo enfoque transmisionista como consecuencia de una concepción filosófica formalista que la reduce al manejo de un lenguaje estrictamente simbólico; en estas condiciones, la comunicación se entiende, en palabras de Ponte (2007, cit. en: Jiménez, Suárez y Galindo, 2010), como una organización y transmisión de informaciones, lo cual conduce a que en las clases el profesor se limite a exponer conceptos y algoritmos que los estudiantes deben aprender y repetir, dejando de lado la argumentación y otros procesos que son esenciales para la constitución del pensamiento matemático (p.103).

Es por ello que se propuso indagar la naturaleza de las argumentaciones que elaboraron los estudiantes a lo largo de la práctica en torno a las definiciones, es decir, si estos pudieron apropiarse de esta tarea, cuáles fueron las dificultades que emergieron, y si los libros de texto promueven, a través de sus actividades, el desarrollo de dicha práctica.

A lo largo de este capítulo, se analiza la información recogida en instancia de la evaluación (ver en el Capítulo 2, sección 6), de forma tal de poder estudiar la capacidad de los estudiantes al argumentar sus respuestas con respecto a ejemplo, contraejemplos, propiedades de objetos geométricos, etc. Además, se indagó en algunos libros de texto para la educación secundaria buscando evidencias sobre propuestas para los estudiantes que fomenten esta escritura de argumentos, de manera tal que puedan vincularse ambos análisis, respondiendo al siguiente interrogante que dirige este estudio:

Teniendo en cuenta las características de las producciones escritas de los estudiantes cuando justificaban sus decisiones sobre ejemplos y contraejemplos de un concepto, o propiedades, ¿existen en los libros de texto propuestas (teórico-prácticas) que pudieran ser de ayuda para desarrollar la capacidad de argumentar?

Antes de comenzar con el análisis de las producciones de argumentos de los alumnos, surge la necesidad de considerar qué es una capacidad y cómo valorarla, como así también qué significa argumentar.

3.2 La capacidad de argumentar

En esta sección se pretende esclarecer qué es una capacidad, cuáles son sus características, qué es argumentar y su importancia, qué tipo de argumento fue solicitado se redacte en las actividades de la evaluación y qué enunciado de los estudiantes será considerado correcto. De esta manera, a partir de esta información, se pretende enmarcar el posterior análisis a las respuestas de los estudiantes, plasmadas en las evaluaciones.

3.2.1 ¿Qué es una capacidad? ¿Puede evaluarse?

Las capacidades hacen referencia a un conjunto de modos de pensar, actuar y relacionarse que los estudiantes deben tener oportunidad de desarrollar de manera progresiva a lo largo de su escolaridad, puesto que se consideran relevantes para manejar las situaciones complejas de la vida cotidiana, en cada contexto y momento particular de la vida de las personas (Roegiers, 2016). Una capacidad incluye

> saber (datos, conceptos, conocimientos), saber hacer (habilidades, destrezas, métodos de actuación), saber ser (actitudes y valores que guían el comportamiento) y saber estar (capacidades relacionada con la comunicación interpersonal y el trabajo cooperativo). (Giral, F.; Giral, A.; Giral, J. citado en Lovaiza & Marceschini, 2017, p.84).

Roegiers (2000) destaca la naturaleza evolutiva a largo plazo de una competencia y su “no evaluatividad”, puesto que considera difícil valorar con certeza el logro de una capacidad determinada. El aporte de este autor es particularmente interesante para reflexionar acerca de, a pesar de las estrategias de escritura que se intentó motivar en los estudiantes, que es comprensible las dificultades observadas al respecto.

3.2.2 ¿Qué es argumentar?

Para responder a esta pregunta se decidió comenzar con una búsqueda en el diccionario de la Real Academia Española[17] (RAE), que define argumentar como “razonamiento que se

[17] Disponible en: https://www.rae.es/

emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega", la cual se relaciona con la actividad de argumentar en matemática.

En el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba (2011), se hace explícito el pedido de elaboración de argumentaciones en geometría como contenido a desarrollar durante el segundo año del nivel secundario, entre otros objetivos, haciendo referencia a las propiedades de las figuras bidimensionales, tal como se trabajó durante las prácticas:

> Elaboración de argumentaciones acerca de la validez de las propiedades de las figuras bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos) para analizar afirmaciones, reconociendo los límites de las pruebas empíricas. (p. 41)

Es necesario reflexionar sobre cada contenido que el Diseño Curricular solicita que sea trabajado, en particular, destacando de qué manera se sugiere su desarrollo, bajo qué objetivos y de qué forma potencia la producción de conocimiento matemático. En este sentido, y haciendo foco en la argumentación, Bohórquez y Espinosa (2013), sostienen que:

> para comprender algo [contenido matemático] se debe argumentar y contraargumentar sobre su validez, discutir y buscar consensos para llegar a conclusiones y así construir nuevos saberes (p.103-104).

Esto establece un vínculo muy fuerte entre la argumentación y el conocimiento, el cual se vio reflejado durante el desarrollo de las actividades propuestas durante la práctica. En estas actividades, se solicitaba la redacción de argumentos para refutar afirmaciones falsas y para justificar si un objeto geométrico es ejemplo o contraejemplo de una noción, y si cumplía propiedades particulares o no.

Durante la resolución de tales argumentos, se esperaba lograr una mayor comprensión sobre el alcance de la definición de cada figura, distinguiéndola de otras, generalmente, a partir de las particularidades que cumplía o no, para así generar nuevas definiciones. Un claro ejemplo sucedió al construir el esquema de cuadriláteros, allí se elaboraron las definiciones en base a las propiedades que posee cada familia de cuadriláteros, y, al momento de analizar una figura que no pertenecía a ella, o bien que pertenecía y cumplía propiedades "extras", los estudiantes construían nuevas definiciones o bien se remitían a las trabajadas anteriormente.

A lo largo de las actividades propuestas dilucidar si un evento si era un ejemplo o contraejemplo de una definición, elaborar un contraejemplo que refute cada afirmación falsa, fueron tareas propuestas a los estudiantes. Es decir, al solicitar a los estudiantes que justifiquen, mediante la escritura de argumentos, que una figura constituye un ejemplo de una definición, se pretendía que den razones por las cuales esa figura es un caso particular que la misma.

Un contraejemplo, según Góngora (2015), es un ejemplo que prueba la falsedad de un enunciado. Cuando se quiere demostrar la falsedad de una afirmación es suficiente con encontrar un ejemplo que no cumpla la afirmación. Autores como Calvo (2001) concuerdan con esta definición, haciendo referencia a esta cualidad de ser condición suficiente para refutar una aserción:

> La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad. (p. 61)

Teniendo en cuenta estas descripciones que realizan los distintos autores, queda claro que se pretendía la muestra de un contraejemplo para refutar las afirmaciones plasmadas en una de las actividades del instrumento de evaluación. Para el caso en que los estudiantes debían justificar que una cierta figura es contraejemplo de una definición, se esperaba que expliciten la condición de la definición que dicha figura incumplía a modo de argumento.

De esta manera, las exposiciones sobre qué es un ejemplo y contraejemplo y de qué manera se utilizan, ayudaron a dictaminar si las respuestas de los estudiantes, plasmadas en las evaluaciones, son correctas o no, y, a partir de ello, se realizó el análisis sobre dichos enunciados.

3.3 Análisis de los argumentos de los estudiantes

El análisis se centró en las respuestas a las distintas consignas presentadas en el instrumento de evaluación (ver en el Capítulo 2, sección 6) aplicado durante las prácticas, en donde se solicitaba a los estudiantes algún tipo de argumentación. Se analizaron para este estudio las Actividades 1 y 5 del instrumento de evaluación, en las cuales se requería redactar una justificación, para decidir si una figura es ejemplo o contraejemplo de polígono y para refutar afirmaciones falsas, respectivamente.

Respecto de la Actividad 1 (ver Figura 50), se esperaba que los estudiantes pudieran decidir si las figuras presentadas cumplían cada condición de la definición de polígono, es decir, si eran casos particulares de ese concepto, y realizaran una argumentación sobre su decisión.

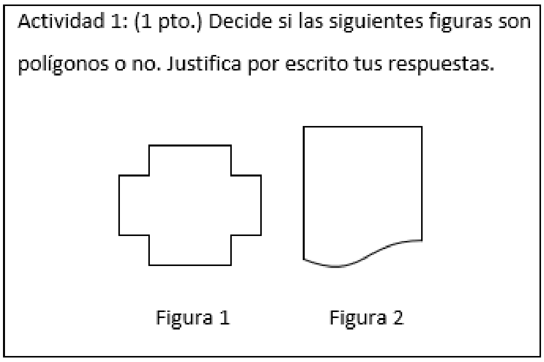


Figura 50: Actividad 1 del Tema 1 de la evaluación, en donde los estudiantes debían justificar si esas figuras eran casos particulares de polígono.

Las Figuras 51 y 52 muestran prototipos de argumentaciones dadas por los estudiantes acerca de si una figura es un caso particular, o no, de polígono.

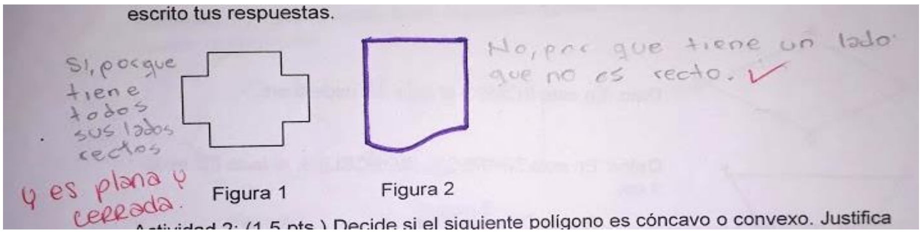


Figura 51: Ejemplo de justificación incompleta, para la Figura 1, en las respuestas de los alumnos.

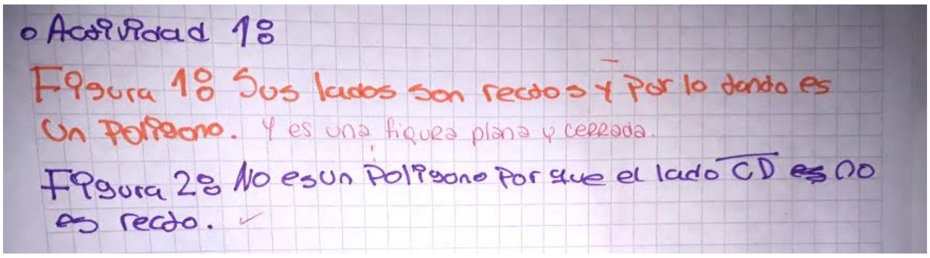


Figura 52: Ejemplo de justificación incompleta en las respuestas de los alumnos.

Tanto en la argumentación que aparece en la Figura 51, como en la Figura 52, se observa que los estudiantes centraron la atención en un único aspecto (que un solo lado no es recto para la figura 2) para construir un texto pertinente y completo acerca de por qué esa figura no es un polígono. Sin embargo, para ambos casos la argumentación, acerca de porqué la figura 1 resulta un polígono es incompleta, conjeturando que los estudiantes consideran que no resulta necesario indicar la clase a la que pertenece esa figura (el conjunto de las figuras planas y cerradas).

A lo largo de la práctica, se señaló a los estudiantes que para argumentar acerca de un contraejemplo resultaba suficiente escribir acerca de sólo un aspecto que ese caso particular no cumpliera de las condiciones solicitadas para ser polígono. Contrariamente, cuando un caso era polígono, se debía apelar al enunciado completo de las condiciones presentes en la definición. A pesar de estas intenciones didácticas, las respuestas de los estudiantes pueden entenderse desde perspectivas que consideran la importancia de las imágenes mentales iniciales en el estudio de la geometría. De acuerdo a estudios realizados por Abrate Pochulu y Vargas, (2006), se afirma que:

> […] un estudiante comienza a construir la imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Por lo tanto, las ejemplificaciones presentadas en el momento que se abordó el tema juegan un papel fundamental, más que las definiciones verbales que las acompañan (p.123).

Por lo tanto, las imágenes mentales construidas por los estudiantes acerca de un polígono colocaron la atención en el aspecto particular de sus lados rectos, dejando en segundo plano el enunciado verbal de la definición que acompañó la propuesta. Esto se aplicó tanto para el ejemplo (figura 1), como para el contraejemplo (figura 2).

En la Actividad 5 (ver Figura 53), se solicitaba a los alumnos que indicaran si las afirmaciones presentadas, con respecto a distintos tópicos estudiados durante la propuesta de práctica, eran verdaderas o falsas (ver Figuras 54, 55, 56 y 57). Estas afirmaciones, plasmadas en ambos temas del instrumento de evaluación, eran las mismas, sólo se vio modificado el orden en el que fueron presentadas.

Actividad 5: (2,5 pts.) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las que consideres falsas por escrito.

a) En un dodecágono, pueden trazarse 11 diagonales desde UNO de sus vértices.

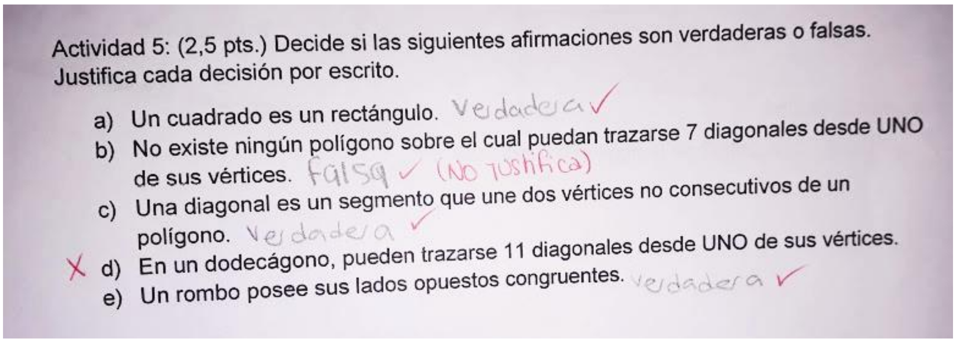
b) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

c) Un cuadrado es un rectángulo.

d) Un rombo posee sus lados opuestos congruentes.

e) No existe ningún polígono sobre el cual puedan trazarse 7 diagonales desde UNO de sus vértices.

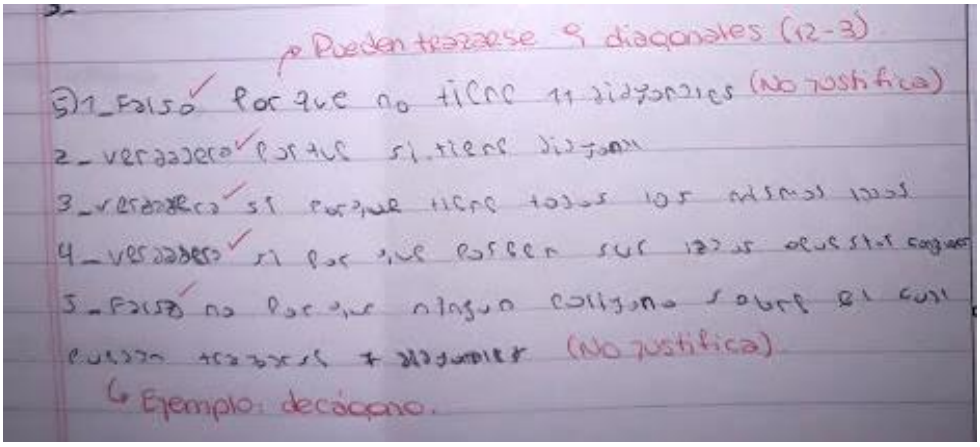
Figura 53: Actividad 5 del Tema 1 del instrumento de evaluación.



Actividad 5: (2,5 pts.) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada decisión por escrito.

a) Un cuadrado es un rectángulo. Verdadera ✓
b) No existe ningún polígono sobre el cual puedan trazarse 7 diagonales desde UNO de sus vértices. falsa ✓ (No justifica)
c) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono. Verdadera ✓
✗ d) En un dodecágono, pueden trazarse 11 diagonales desde UNO de sus vértices.
e) Un rombo posee sus lados opuestos congruentes. verdadera ✓

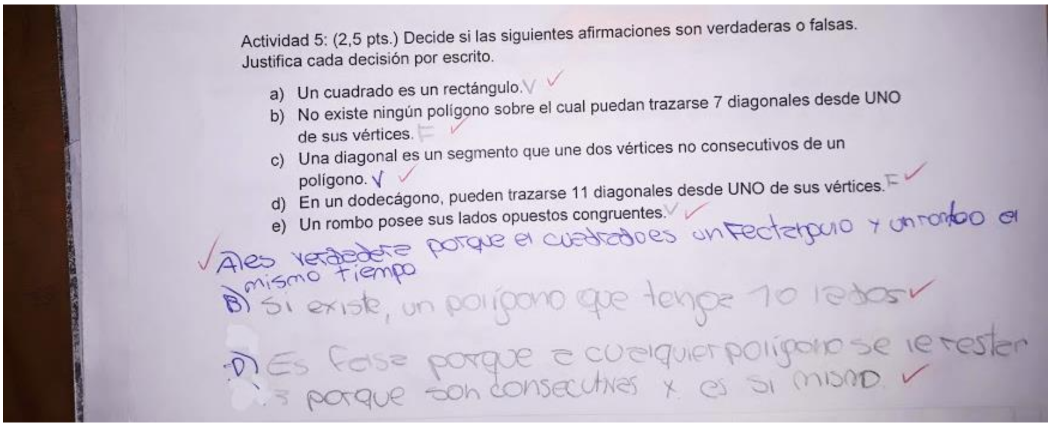
Figura 54: Respuestas consideradas falsas donde el estudiante no presenta una justificación (Tema 2 de la evaluación).



Pueden trazarse 9 diagonales (12-3)

5) 1_ Falso ✓ por que no tiene 11 diagonales (No justifica)
2_ verdadero ✓ por que si tiene diagonal
3_ verdadero ✓ si por que tiene todos los mismos lados
4_ verdadero ✓ si por que poseen sus lados opuestos congruentes
5_ Falso ✓ no por que ningun poligono sobre el cual puedan trazarse 7 diagonales (No justifica)
Ejemplo: decágono.

Figura 55: Negar la afirmación a modo de justificación de una sentencia falsa.



Actividad 5: (2,5 pts.) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada decisión por escrito.

a) Un cuadrado es un rectángulo. V ✓
b) No existe ningún polígono sobre el cual puedan trazarse 7 diagonales desde UNO de sus vértices. F ✓
c) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono. V ✓
d) En un dodecágono, pueden trazarse 11 diagonales desde UNO de sus vértices. F ✓
e) Un rombo posee sus lados opuestos congruentes. V ✓

✓ A) es verdadera porque el cuadrado es un rectángulo y un rombo al mismo tiempo
B) Si existe, un polígono que tenga 10 lados ✓
D) Es falsa porque a cualquier polígono se le restan 3 porque son consecutivos y es sí mismo. ✓

Figura 56: Respuestas y justificaciones correctas.

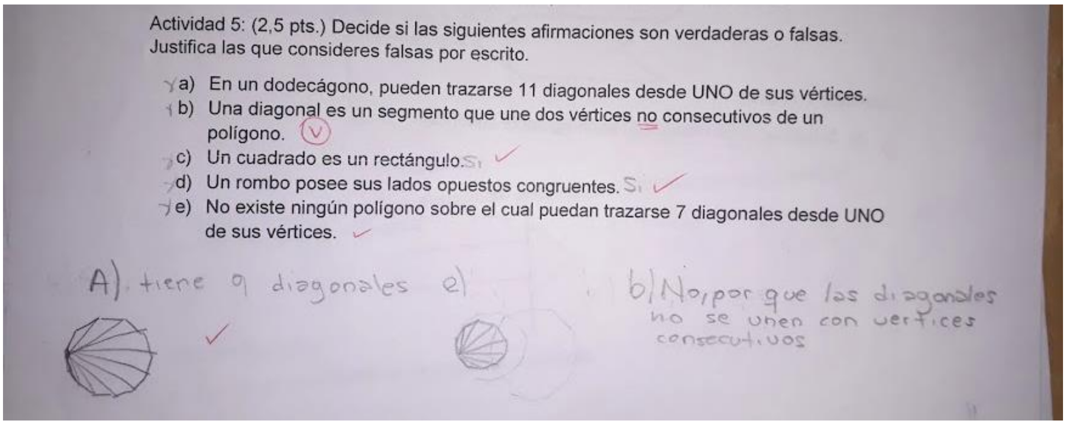


Figura 57: Justificaciones donde los estudiantes apelan a dibujos.

Es importante destacar que en las respuestas a la Actividad 5, en cualquiera de sus dos versiones, hubo mayor variación en la naturaleza de las producciones de los estudiantes. A su vez, resultó ser la actividad donde muchos estudiantes no realizaron la actividad.

Dentro de las respuestas dadas por los estudiantes aparecen sin justificar su decisión o sólo negando la afirmación (ver Figuras 54 y 55). En otros casos, las respuestas fueron consideradas correctas para estos estudiantes (ver Figura 56) aunque no completaran totalmente el argumento. En la Figura 56, se observa que en el ítem (b), el estudiante refuta la “no existencia” de un polígono donde pueda trazarse siete diagonales por uno de sus vértices, argumentando la existencia del caso del polígono de 10 lados sin indicar porqué este caso responde a la condición de tener siete diagonales por cada vértice. En otras situaciones, los estudiantes apelaron a un dibujo como modo de argumentar (ver Figura 57). Si bien a lo largo de la práctica se motivó la escritura de argumentos, en la evaluación el uso de un dibujo como modo de justificar una idea fue considerado válido.

Este hecho puede explicarse desde la mayor demanda cognitiva que se solicitaba a los estudiantes: por un lado, los estudiantes debían tener apropiadas distintas ideas desarrolladas durante la práctica (relación entre cantidad de lados de un polígono y la cantidad de diagonales por un vértice, definiciones de cuadriláteros particulares y su clasificación, etc.) y, por otro lado, la capacidad de construir un argumento sobre esas relaciones.

En resumen, tras el análisis de las respuestas de los estudiantes podrían identificarse ciertas dificultades generales en la redacción de argumentos, como la influencia de las imágenes presentadas o bien la demanda cognitiva que significa la elaboración de un contraejemplo. Es a partir de ellas que se propuso el análisis de la teoría y actividades propuestas en los libros de texto que pudieran ser de ayuda para desarrollar la capacidad de argumentar.

3.4 Análisis de las propuestas de argumentación en los libros de texto escolares

A partir del análisis de la información recabada de las evaluaciones acerca de la capacidad de argumentar, el reconocimiento de su importancia y desafíos para docentes y estudiantes que conlleva, surgió la pregunta sobre qué herramientas tienen los docentes para guiar sus actividades de modo tal que fomenten la escritura de argumentaciones en Matemática.

Entre estas herramientas se encuentran los libros de texto escolares, por lo que se decidió indagar en varios de ellos a fin de obtener información sobre la presencia de la argumentación, las actividades propuestas que promueven esta capacidad, de qué manera lo hace, bajo qué objetivos, la precisión que se exige en ellas (posibles soluciones), si acude a imágenes como guía, etc.

A continuación, se presenta el análisis de algunos libros de texto de matemática editados para primer y segundo año del nivel secundario se decidió incluir los del año anterior al curso donde se desarrollaron las prácticas puesto que algunos contenidos trabajados se incluyen en primer año según el diseño curricular, tal como la noción de polígono.

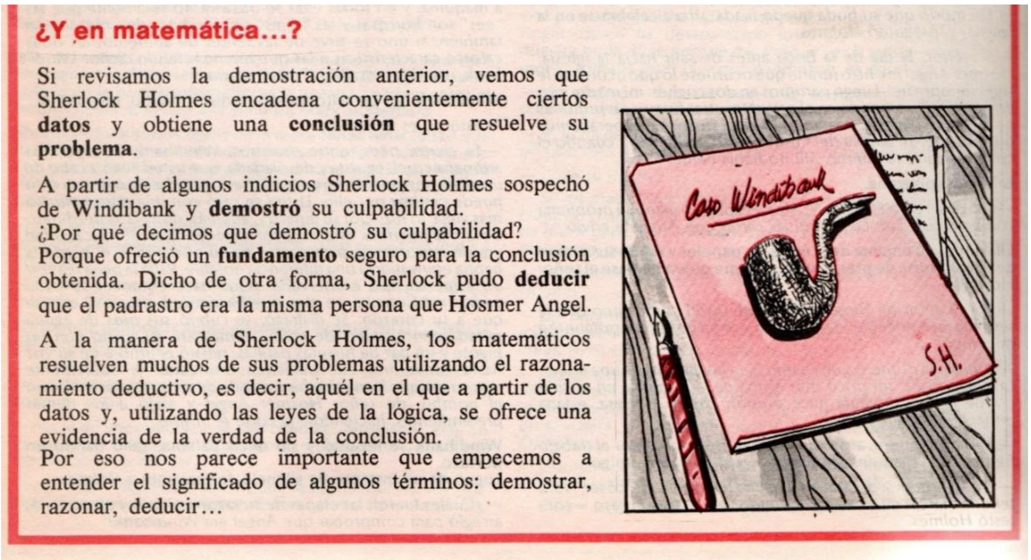
El orden en que se presenta el análisis de cada libro se basa en el objetivo por el cual solicitan la construcción de argumentos (ya sean redactados formalmente o como forma de explicar o justificar procedimientos o resultados), destacando en ellos actividades y contenidos específicos relacionados a esta capacidad, dentro de los temas trabajados durante la práctica o bien en capítulos donde se desarrolla específicamente este proceso.

3.4.1 Libros de texto donde el aprendizaje del proceso de una demostración formal es objeto de estudio

En el libro de texto *“Matemática 2” (1989, Ed: Santillana),* se encuentra un capítulo especialmente dedicado al aprendizaje de la escritura de demostraciones en matemática. Resulta interesante que los autores propongan abordar la idea de demostración desde una mirada extramatemática, utilizando un fragmento del relato sobre Sherlock Holmes: “Un caso de identidad”[18].

[18] Disponible en: https://tallerpuac.files.wordpress.com/2012/12/3-sir-arthur-canan-doyle_un-caso-de-identidad.pdf

En esta adaptación (ver Figura 58), Holmes intenta demostrar la culpabilidad de un sospechoso, Windibank.



¿Y en matemática...?

Si revisamos la demostración anterior, vemos que Sherlock Holmes encadena convenientemente ciertos **datos** y obtiene una **conclusión** que resuelve su **problema**.

A partir de algunos indicios Sherlock Holmes sospechó de Windibank y **demostró** su culpabilidad.
¿Por qué decimos que demostró su culpabilidad?
Porque ofreció un **fundamento** seguro para la conclusión obtenida. Dicho de otra forma, Sherlock pudo **deducir** que el padrastro era la misma persona que Hosmer Angel.

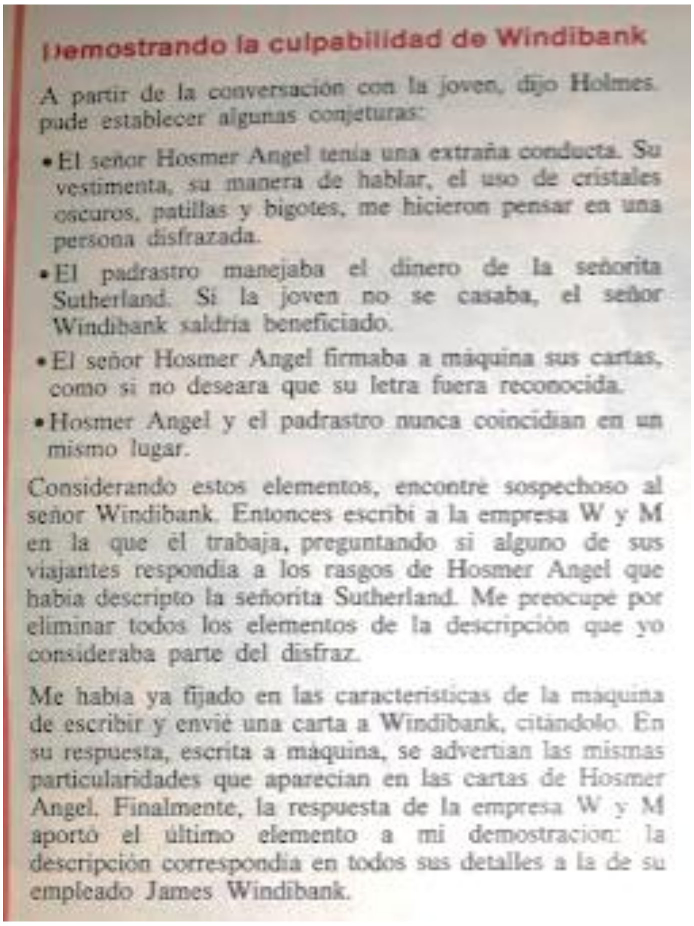
A la manera de Sherlock Holmes, los matemáticos resuelven muchos de sus problemas utilizando el razonamiento deductivo, es decir, aquél en el que a partir de los datos y, utilizando las leyes de la lógica, se ofrece una evidencia de la verdad de la conclusión.
Por eso nos parece importante que empecemos a entender el significado de algunos términos: demostrar, razonar, deducir...

Figura 58: Introducción a la demostración matemática con referencia a la actividad de un detective: Sherlock Holmes (p. 132).

Dentro de este fragmento "Un caso de identidad", se resaltan algunas palabras específicas como observación, deducción y frases que podrían utilizarse como argumentos para la demostración, las cuales se listan luego para su análisis (ver Figuras 59 y 60).

> **Un caso de identidad**
> (Adaptación del cuento de Sir Arthur Conan Doyle)
>
> Me encontraba plácidamente conversando con Sherlock Holmes en sus habitaciones de Baker Street. De repente unos golpes en la puerta interrumpieron nuestra charla y entró el botones para anunciar a la señorita Mary Sutherland.
>
> Sherlock Holmes la acogió con la espontánea amabilidad que lo distinguía. Una vez cerrada la puerta y después de indicarle con una inclinación que se sentase en un sillón, la contempló de la manera minuciosa, y sin embargo discreta, que era peculiar en él.
>
> *—¿No le parece —le dijo Holmes— que es un poco molesto para una persona corta de vista como usted el escribir tanto a máquina?*
>
> *—Lo fue al principio —contestó ella—, pero ahora sé dónde están las letras sin necesidad de mirar.*
>
> De pronto, dándose cuenta de todo el alcance de las palabras del señor Holmes...
>
> *—¡Usted ha oído hablar de mi, señor Holmes! —exclamó—. De otro modo, ¿cómo podría saber que escribo a máquina y soy corta de vista?*
>
> *—No le dé importancia —le dijo Holmes, riéndose—. Éste no es más que otro caso de* **observación** *y* **deducción**. *¿Cuál es el motivo de su consulta?*

Figura 59: Fragmento de texto donde se destacan las palabras observación y deducción (p.130).



Demostrando la culpabilidad de Windibank

A partir de la conversación con la joven, dijo Holmes, pude establecer algunas conjeturas:

- El señor Hosmer Angel tenía una extraña conducta. Su vestimenta, su manera de hablar, el uso de cristales oscuros, patillas y bigotes, me hicieron pensar en una persona disfrazada.
- El padrastro manejaba el dinero de la señorita Sutherland. Si la joven no se casaba, el señor Windibank saldría beneficiado.
- El señor Hosmer Angel firmaba a máquina sus cartas, como si no deseara que su letra fuera reconocida.
- Hosmer Angel y el padrastro nunca coincidían en un mismo lugar.

Considerando estos elementos, encontré sospechoso al señor Windibank. Entonces escribí a la empresa W y M en la que él trabaja, preguntando si alguno de sus viajantes respondía a los rasgos de Hosmer Angel que había descripto la señorita Sutherland. Me preocupé por eliminar todos los elementos de la descripción que yo consideraba parte del disfraz.

Me había ya fijado en las características de la máquina de escribir y envié una carta a Windibank, citándolo. En su respuesta, escrita a máquina, se advertían las mismas particularidades que aparecían en las cartas de Hosmer Angel. Finalmente, la respuesta de la empresa W y M aportó el último elemento a mi demostración: la descripción correspondía en todos sus detalles a la de su empleado James Windibank.

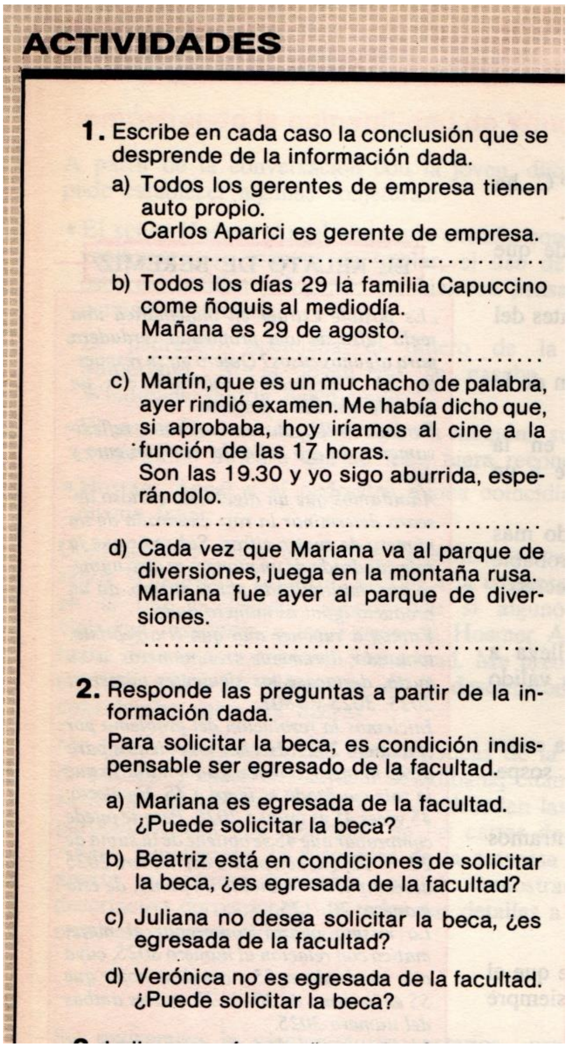
Figura 60: Listado de frases del relato que son utilizadas para argumentar la culpabilidad de Windibank (p. 132).

Luego, se relaciona el proceso que desarrolla Sherlock Holmes con el que realizan los matemáticos para sus demostraciones y, a continuación, se especifica que, en el caso de una demostración matemática existen ciertos factores a tener en cuenta, por ejemplo, que si se quiere demostrar una propiedad válida para un conjunto infinito de elementos, la demostración debe realizarse sobre un elemento arbitrario de dicho conjunto que represente a cualquiera de ellos, y en el caso en que se quiera probar que una sentencia es falsa, basta con mostrar un contraejemplo que la invalide.

El libro de texto propone, además, a realizar deducciones a partir de información dada extramatemática (ver Figura 61), para luego introducirse en temas intramatemáticos (ver Figura 62). En este sentido, existe una corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista[19], reconociendo a Hans Freudenthal (1905-1990) como su fundador, donde se persigue la misma estrategia utilizada por la autora del texto; la idea central de esta corriente es relacionar todo contenido matemático con contextos extramatemáticos, en lo

[19] Más información disponible en: http://gpdmatematica.org.ar/sobre-la-matematica-realista/

posible cercanos a los alumnos y relevantes para la sociedad, para luego introducirse en la resolución de problemas extra e intramatemáticos, permitiendo de esta forma una mayor comprensión de los conceptos trabajados.



ACTIVIDADES

1. Escribe en cada caso la conclusión que se desprende de la información dada.

a) Todos los gerentes de empresa tienen auto propio.
Carlos Aparici es gerente de empresa.
....

b) Todos los días 29 la familia Capuccino come ñoquis al mediodía.
Mañana es 29 de agosto.
....

c) Martín, que es un muchacho de palabra, ayer rindió examen. Me había dicho que, si aprobaba, hoy iríamos al cine a la función de las 17 horas.
Son las 19.30 y yo sigo aburrida, esperándolo.
....

d) Cada vez que Mariana va al parque de diversiones, juega en la montaña rusa.
Mariana fue ayer al parque de diversiones.
....

2. Responde las preguntas a partir de la información dada.

Para solicitar la beca, es condición indispensable ser egresado de la facultad.

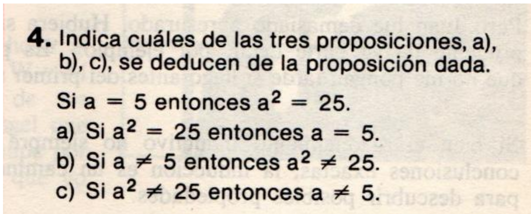
a) Mariana es egresada de la facultad. ¿Puede solicitar la beca?

b) Beatriz está en condiciones de solicitar la beca, ¿es egresada de la facultad?

c) Juliana no desea solicitar la beca, ¿es egresada de la facultad?

d) Verónica no es egresada de la facultad. ¿Puede solicitar la beca?

Figura 61: Deducciones con contenido extramatemático (p.134).



4. Indica cuáles de las tres proposiciones, a), b), c), se deducen de la proposición dada.

Si $a = 5$ entonces $a^2 = 25$.

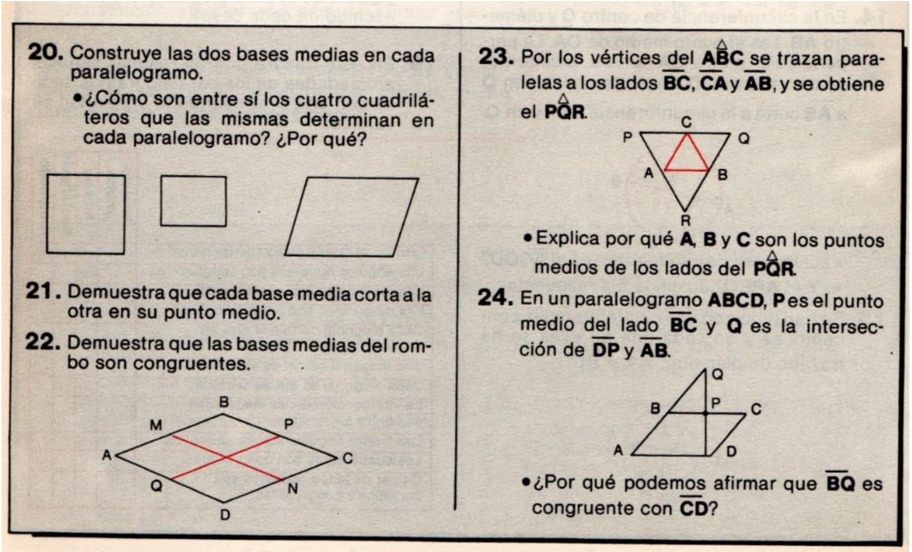
a) Si $a^2 = 25$ entonces $a = 5$.

b) Si $a \neq 5$ entonces $a^2 \neq 25$.

c) Si $a^2 \neq 25$ entonces $a \neq 5$.

Figura 62: Deducciones con contenido intramatemático (p. 134).

Con respecto a los temas de geometría plana, las actividades propuestas a los estudiantes también requieren algún tipo de justificación. En algunas de ellas, el texto solicita explícitamente una demostración (ver Actividades 21 y 22 en la Figura 63), la cual se espera que sea formal de acuerdo a la presentación teórica del tema (ver Figura 64), y, en otras actividades sólo una explicación sobre su procedimiento o resultado (ver Actividades 20, 23 y 24 en la Figura 63).


20. Construye las dos bases medias en cada paralelogramo.

- ¿Cómo son entre sí los cuatro cuadriláteros que las mismas determinan en cada paralelogramo? ¿Por qué?

21. Demuestra que cada base media corta a la otra en su punto medio.

22. Demuestra que las bases medias del rombo son congruentes.

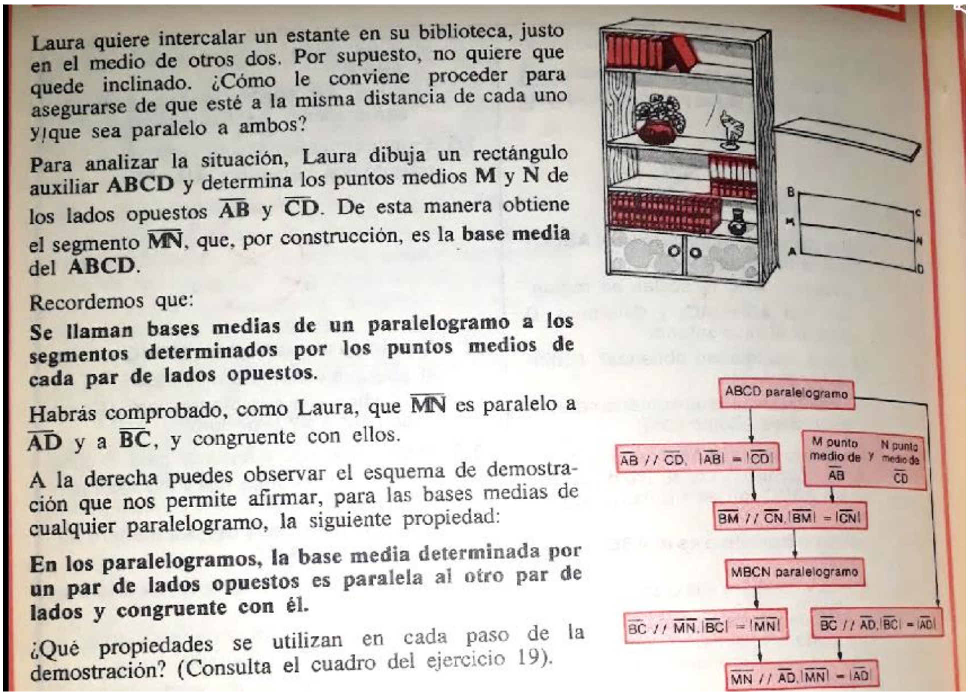
23. Por los vértices del $\overset{\triangle}{ABC}$ se trazan paralelas a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, y se obtiene el $\overset{\triangle}{PQR}$.

- Explica por qué **A**, **B** y **C** son los puntos medios de los lados del $\overset{\triangle}{PQR}$.

24. En un paralelogramo **ABCD**, **P** es el punto medio del lado $\overline{BC}$ y **Q** es la intersección de $\overline{DP}$ y $\overline{AB}$.

- ¿Por qué podemos afirmar que $\overline{BQ}$ es congruente con $\overline{CD}$?

Figura 63: Actividades que requieren demostraciones (p. 154).


Laura quiere intercalar un estante en su biblioteca, justo en el medio de otros dos. Por supuesto, no quiere que quede inclinado. ¿Cómo le conviene proceder para asegurarse de que esté a la misma distancia de cada uno y que sea paralelo a ambos?

Para analizar la situación, Laura dibuja un rectángulo auxiliar **ABCD** y determina los puntos medios **M** y **N** de los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. De esta manera obtiene el segmento $\overline{MN}$, que, por construcción, es la **base media** del **ABCD**.

Recordemos que:

Se llaman bases medias de un paralelogramo a los segmentos determinados por los puntos medios de cada par de lados opuestos.

Habrás comprobado, como Laura, que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AD}$ y a $\overline{BC}$, y congruente con ellos.

A la derecha puedes observar el esquema de demostración que nos permite afirmar, para las bases medias de cualquier paralelogramo, la siguiente propiedad:

En los paralelogramos, la base media determinada por un par de lados opuestos es paralela al otro par de lados y congruente con él.

¿Qué propiedades se utilizan en cada paso de la demostración? (Consulta el cuadro del ejercicio 19).

Figura 64: Presentación teórica sobre las bases medias del paralelogramo.

En *"El libro de la Matemática 8" (*1998, Ed: Estrada*)*, también se desarrolla una aproximación a las demostraciones, pero de alguna manera, transformándola en objeto de estudio. Aquí, se incluye un capítulo exclusivo al aprendizaje de la elaboración de una demostración, pero sólo en torno a propiedades de los números naturales. En el texto se explica que, si la afirmación se considera verdadera, deben buscar la manera de representar todos los casos posibles que prueban la propiedad, y, de lo contrario, si encuentran un ejemplo que incumpla la misma, éste es llamado contraejemplo y es suficiente para demostrar que la afirmación es falsa (ver Figuras 65 y 66).

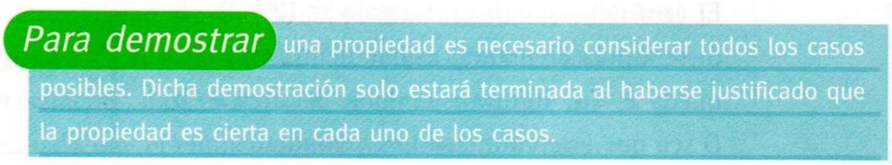

Para demostrar una propiedad es necesario considerar todos los casos posibles. Dicha demostración solo estará terminada al haberse justificado que la propiedad es cierta en cada uno de los casos.

Figura 65: Explicación para demostrar una afirmación verdadera (p. 19)

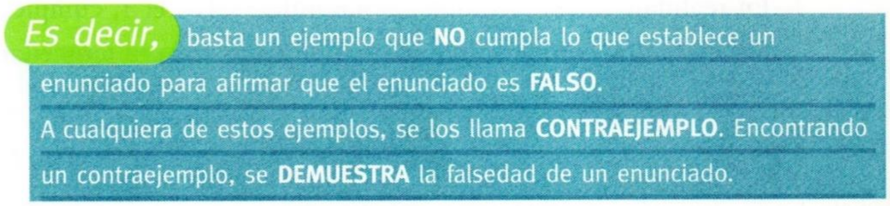
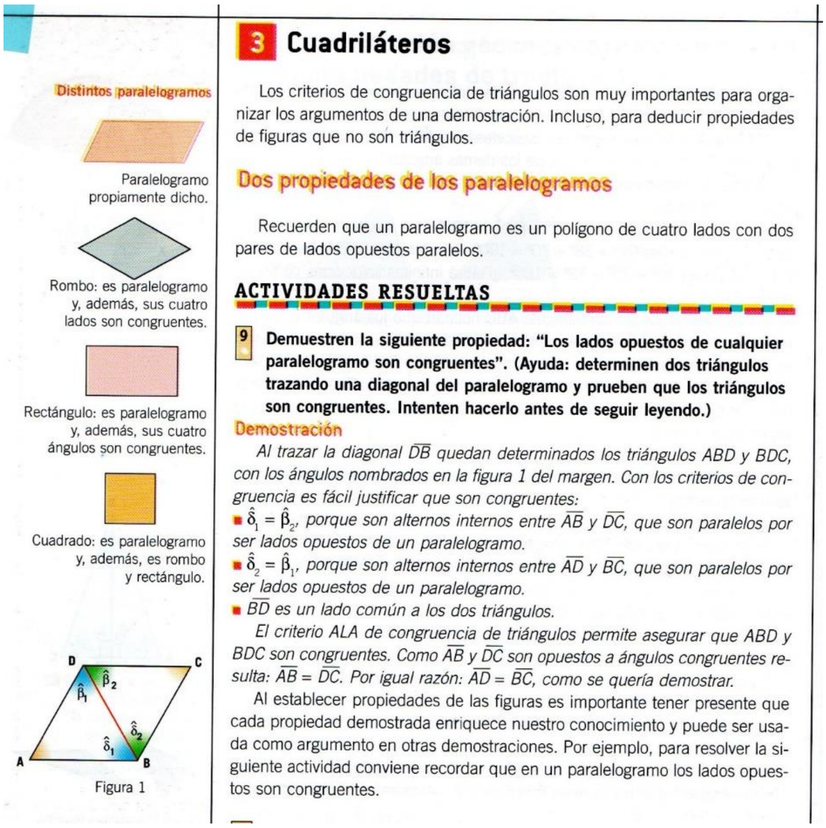

Es decir, basta un ejemplo que **NO** cumpla lo que establece un enunciado para afirmar que el enunciado es **FALSO**.
A cualquiera de estos ejemplos, se los llama **CONTRAEJEMPLO**. Encontrando un contraejemplo, se **DEMUESTRA** la falsedad de un enunciado.

Figura 66: Explicación para demostrar una afirmación falsa (p. 17).

Sin embargo, en el capítulo donde se tratan los temas de geometría plana, las actividades propuestas a los estudiantes no refieren a ningún tipo de justificación o argumento, sólo a la búsqueda de ejemplos y contraejemplos.

Por su parte, en el texto *"Pitágoras 8: Matemática" (2005, Ed: SM), p*ara iniciar a los estudiantes en el proceso de escritura de la demostración de la congruencia de los lados opuestos de un paralelogramo, el texto proporciona una ayuda (que se intente se apele a un argumento que involucre la congruencia de dos triángulos determinados cuando se traza una diagonal, sugerida mediante un dibujo). Luego, se presenta el texto de una demostración formal (Figura 67). Al final del texto, se indica que, una vez demostrada una propiedad, puede ser utilizada como argumento para demostrar otras. De este modo, el texto revela al estudiante una de las particularidades de la construcción y estructura del saber matemático.



3 Cuadriláteros

Distintos paralelogramos

Paralelogramo propiamente dicho.

Rombo: es paralelogramo y, además, sus cuatro lados son congruentes.

Rectángulo: es paralelogramo y, además, sus cuatro ángulos son congruentes.

Cuadrado: es paralelogramo y, además, es rombo y rectángulo.

Figura 1

Los criterios de congruencia de triángulos son muy importantes para organizar los argumentos de una demostración. Incluso, para deducir propiedades de figuras que no son triángulos.

Dos propiedades de los paralelogramos

Recuerden que un paralelogramo es un polígono de cuatro lados con dos pares de lados opuestos paralelos.

ACTIVIDADES RESUELTAS

9 **Demuestren la siguiente propiedad: "Los lados opuestos de cualquier paralelogramo son congruentes". (Ayuda: determinen dos triángulos trazando una diagonal del paralelogramo y prueben que los triángulos son congruentes. Intenten hacerlo antes de seguir leyendo.)**

Demostración

Al trazar la diagonal $\overline{DB}$ quedan determinados los triángulos ABD y BDC, con los ángulos nombrados en la figura 1 del margen. Con los criterios de congruencia es fácil justificar que son congruentes:

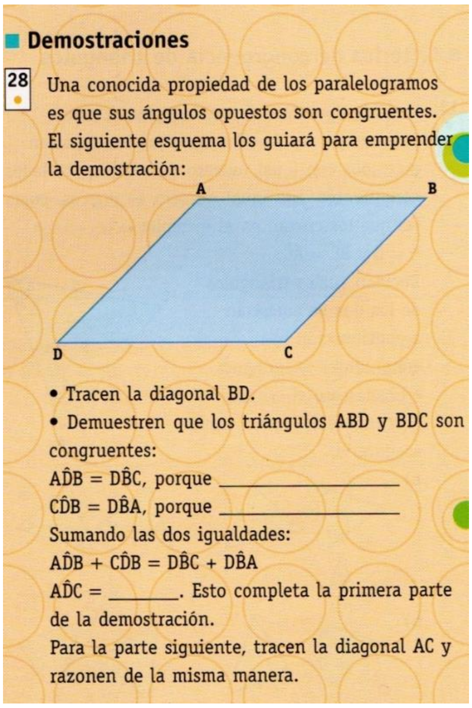
- $\hat{\delta}_1 = \hat{\beta}_2$, *porque son alternos internos entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, que son paralelos por ser lados opuestos de un paralelogramo.*
- $\hat{\delta}_2 = \hat{\beta}_1$, *porque son alternos internos entre $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, que son paralelos por ser lados opuestos de un paralelogramo.*
- *$\overline{BD}$ es un lado común a los dos triángulos.*

El criterio ALA de congruencia de triángulos permite asegurar que ABD y BDC son congruentes. Como $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son opuestos a ángulos congruentes resulta: $\overline{AB} = \overline{DC}$. Por igual razón: $\overline{AD} = \overline{BC}$, como se quería demostrar.

Al establecer propiedades de las figuras es importante tener presente que cada propiedad demostrada enriquece nuestro conocimiento y puede ser usada como argumento en otras demostraciones. Por ejemplo, para resolver la siguiente actividad conviene recordar que en un paralelogramo los lados opuestos son congruentes.

Figura 67: Demostración de una propiedad del paralelogramo (p. 172).

Entre las actividades, se observan un conjunto de "Demostraciones" donde se invita al estudiante a elaborar escritura de argumentos, guiados por pasos y sugerencias (ver Figura 68). También, se pide proponer una figura como contraejemplo para refutar una propiedad incorrecta.



Demostraciones

28 Una conocida propiedad de los paralelogramos es que sus ángulos opuestos son congruentes. El siguiente esquema los guiará para emprender la demostración:

- Tracen la diagonal BD.
- Demuestren que los triángulos ABD y BDC son congruentes:

$A\hat{D}B = D\hat{B}C$, porque ______________

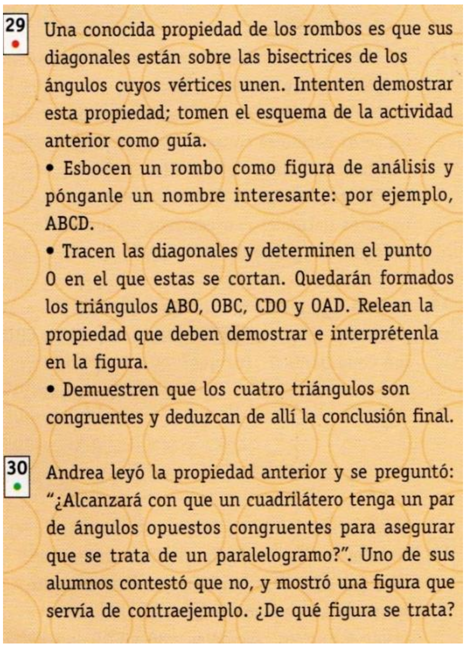
$C\hat{D}B = D\hat{B}A$, porque ______________

Sumando las dos igualdades:

$A\hat{D}B + C\hat{D}B = D\hat{B}C + D\hat{B}A$

$A\hat{D}C =$ _______. Esto completa la primera parte de la demostración.

Para la parte siguiente, tracen la diagonal AC y razonen de la misma manera.



29 Una conocida propiedad de los rombos es que sus diagonales están sobre las bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen. Intenten demostrar esta propiedad; tomen el esquema de la actividad anterior como guía.

- Esbocen un rombo como figura de análisis y pónganle un nombre interesante: por ejemplo, ABCD.
- Tracen las diagonales y determinen el punto O en el que estas se cortan. Quedarán formados los triángulos ABO, OBC, CDO y OAD. Relean la propiedad que deben demostrar e interprétenla en la figura.
- Demuestren que los cuatro triángulos son congruentes y deduzcan de allí la conclusión final.

30 Andrea leyó la propiedad anterior y se preguntó: "¿Alcanzará con que un cuadrilátero tenga un par de ángulos opuestos congruentes para asegurar que se trata de un paralelogramo?". Uno de sus alumnos contestó que no, y mostró una figura que servía de contraejemplo. ¿De qué figura se trata?

Figura 68: Actividades relacionadas a demostraciones formales de propiedades de cuadriláteros (p. 176).

Finalmente, en el tomo *"Matemática en red 8: EGB 3° ciclo" (2000, Ed: A-Z)*, inicialmente se utiliza la estrategia de sugerir propiedades de los paralelogramos y no paralelogramos apelando a situaciones de referencia (cerámicos) sin prestar atención a enunciados completos que conformen definiciones de esas figuras (ver Figura 69).

Los cerámicos que vieron Alicia y Alberto son todos **paralelogramos**, es decir, cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos.

Dentro del conjunto de los paralelogramos hay algunos especiales como por ejemplo:

Rombo: es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales.

Rectángulo: es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos.

Cuadrado: es un paralelogramo que tiene cuatro lados y cuatro ángulos iguales.

Dentro de la familia de los cuadriláteros existen también:

Trapezoide: es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

Romboide: es un trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos iguales.

Trapecio: es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos. Dentro de ese grupo se encuentran:

- **Trapecio isósceles:** tiene un par de lados iguales.
- **Trapecio rectángulo:** tiene dos ángulos rectos.

Figura 69: Caracterización de paralelogramos y no paralelogramos. (p. 161)

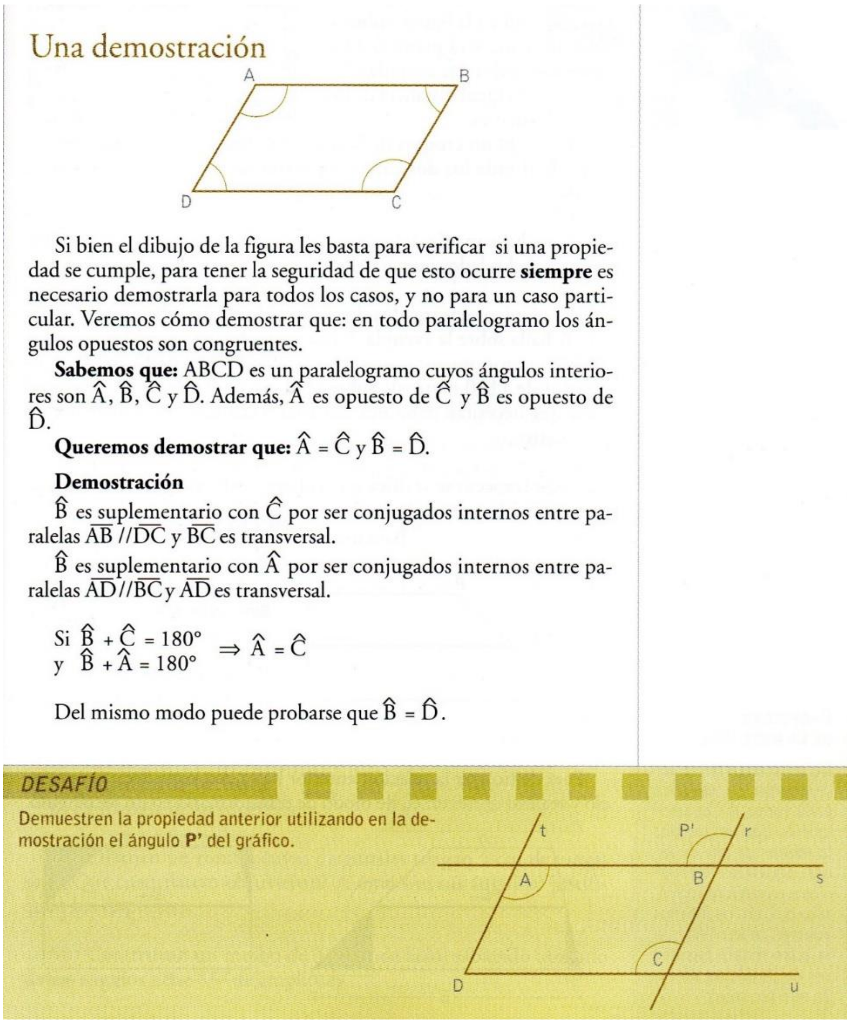
En la Figura 70 se observa una actividad de justificación de enunciados, sin que aparezcan pistas acerca de la naturaleza de las argumentaciones esperadas.

40) Coloquen verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifiquen en todos los casos.

a) Todos los cuadrados son rectángulos.
b) Algunos rectángulos no son paralelogramos.
c) Todos los rombos son paralelogramos.
d) Algunos paralelogramos son rectángulos.
e) Si un paralelogramo tiene cuatro ángulos rectos entonces es un cuadrado.
f) Si un paralelogramo tiene cuatro lados iguales entonces es un rombo.

Figura 70: Actividad sobre cuadriláteros con pedido de justificación (p. 162).

Finalizando el capítulo sobre cuadriláteros, se presenta una demostración formal de una propiedad de los paralelogramos (congruencia de ángulos opuestos), luego se propone a los estudiantes realizarla nuevamente nombrando un ángulo particular como condición (ver Figura 71), ésta representa la única actividad donde se requiere que los estudiantes elaboren una demostración formal, caracterizada como “desafío”. Además, el autor del texto coloca la tensión entre la posibilidad de hacer un dibujo para “verificar” la propiedad con la práctica de la ciencia matemática de “demostrar” esa propiedad, según aparece al comenzar el texto.



Una demostración

Si bien el dibujo de la figura les basta para verificar si una propiedad se cumple, para tener la seguridad de que esto ocurre **siempre** es necesario demostrarla para todos los casos, y no para un caso particular. Veremos cómo demostrar que: en todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.

Sabemos que: ABCD es un paralelogramo cuyos ángulos interiores son $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$. Además, $\hat{A}$ es opuesto de $\hat{C}$ y $\hat{B}$ es opuesto de $\hat{D}$.

Queremos demostrar que: $\hat{A} = \hat{C}$ y $\hat{B} = \hat{D}$.

Demostración

$\hat{B}$ es suplementario con $\hat{C}$ por ser conjugados internos entre paralelas $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ es transversal.

$\hat{B}$ es suplementario con $\hat{A}$ por ser conjugados internos entre paralelas $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ es transversal.

$$\begin{array}{l} \text{Si } \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \text{y } \hat{B} + \hat{A} = 180° \end{array} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

Del mismo modo puede probarse que $\hat{B} = \hat{D}$.

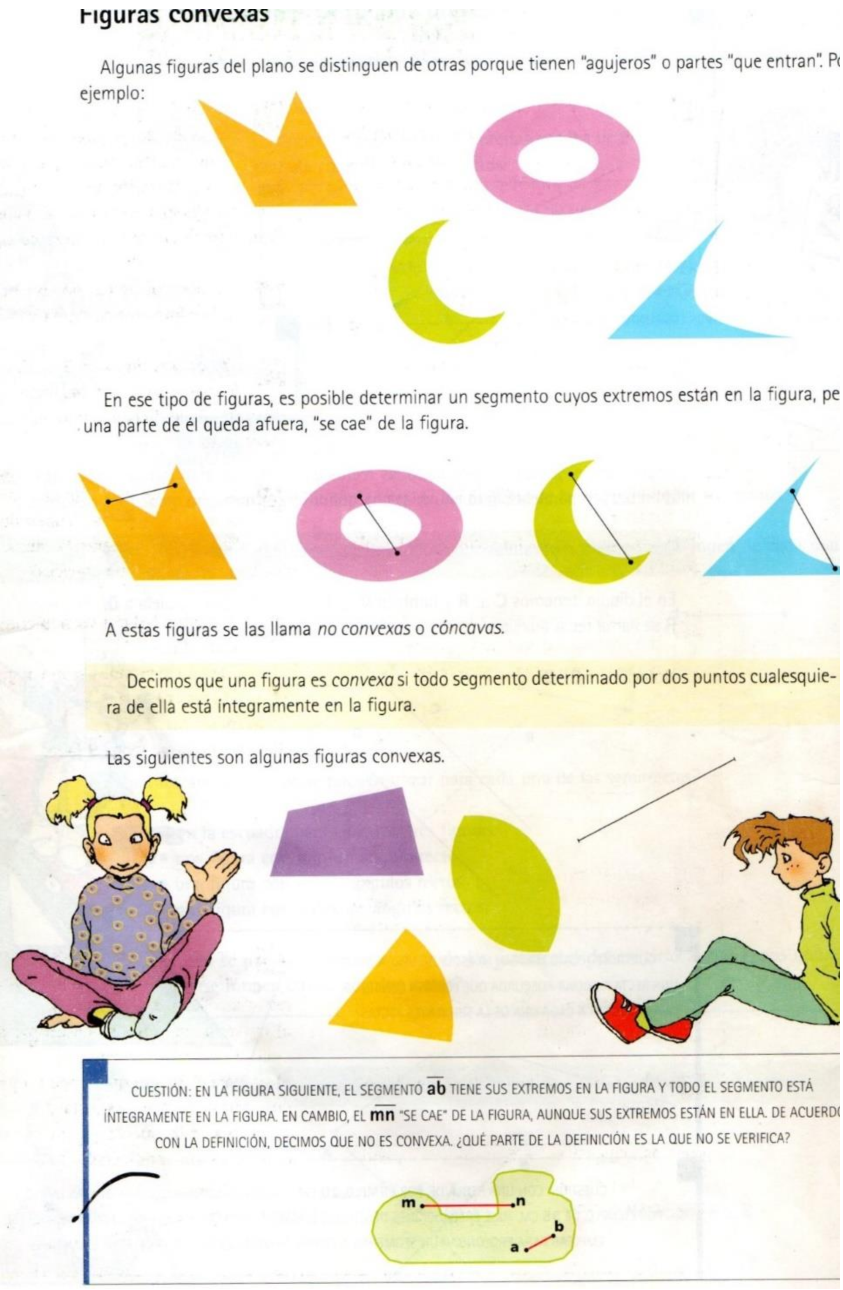
DESAFÍO

Demuestren la propiedad anterior utilizando en la demostración el ángulo **P'** del gráfico.

Figura 71: Demostración formal de una propiedad del paralelogramo (p. 167).

3.4.2 Libros de texto que solicitan la escritura de argumentos en base a definiciones y propiedades de los objetos geométricos

En *"El libro de la Matemática 7"* (1997, Ed: Estrada) se puede observar que las autoras no recurren a términos matemáticos para definir la concavidad de una figura (ver Figura 72), sino que se mantiene el lenguaje al que suelen recurrir los estudiantes al realizar una justificación dentro de este contenido. Concretamente, define una figura cóncava como aquella que "tiene agujeros" o partes "que entran" donde pueden determinarse segmentos con extremos dentro de la figura, pero que una parte del segmento "queda afuera" o "se cae" de la figura; sin recurrir a la pertenencia de todos los puntos del segmento en el interior de la figura.



Figuras convexas

Algunas figuras del plano se distinguen de otras porque tienen "agujeros" o partes "que entran". Po
ejemplo:

En ese tipo de figuras, es posible determinar un segmento cuyos extremos están en la figura, pe
una parte de él queda afuera, "se cae" de la figura.

A estas figuras se las llama *no convexas* o *cóncavas*.

Decimos que una figura es *convexa* si todo segmento determinado por dos puntos cualesquiera de ella está íntegramente en la figura.

Las siguientes son algunas figuras convexas.

CUESTIÓN: EN LA FIGURA SIGUIENTE, EL SEGMENTO $\overline{ab}$ TIENE SUS EXTREMOS EN LA FIGURA Y TODO EL SEGMENTO ESTÁ ÍNTEGRAMENTE EN LA FIGURA. EN CAMBIO, EL $\overline{mn}$ "SE CAE" DE LA FIGURA, AUNQUE SUS EXTREMOS ESTÁN EN ELLA. DE ACUERD
CON LA DEFINICIÓN, DECIMOS QUE NO ES CONVEXA. ¿QUÉ PARTE DE LA DEFINICIÓN ES LA QUE NO SE VERIFICA?

Figura 72: Definición de figuras cóncavas y convexas en el texto (p. 90).

En sintonía con esta propuesta, dentro de las actividades prácticas, particularmente en la Actividad 10 (ver Figura 73) las autoras sugieren el trazado de un dibujo a modo de justificación. Otra actividad a destacar es la número 17 (ver Figura 73), donde las autoras explican de qué manera se refuta una afirmación recurriendo a un contraejemplo.

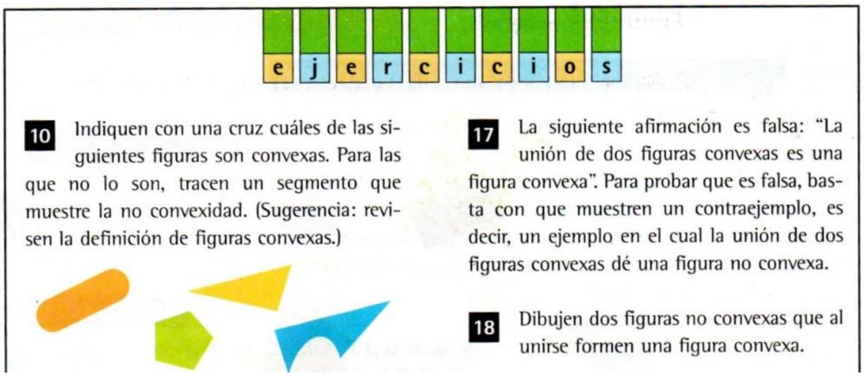
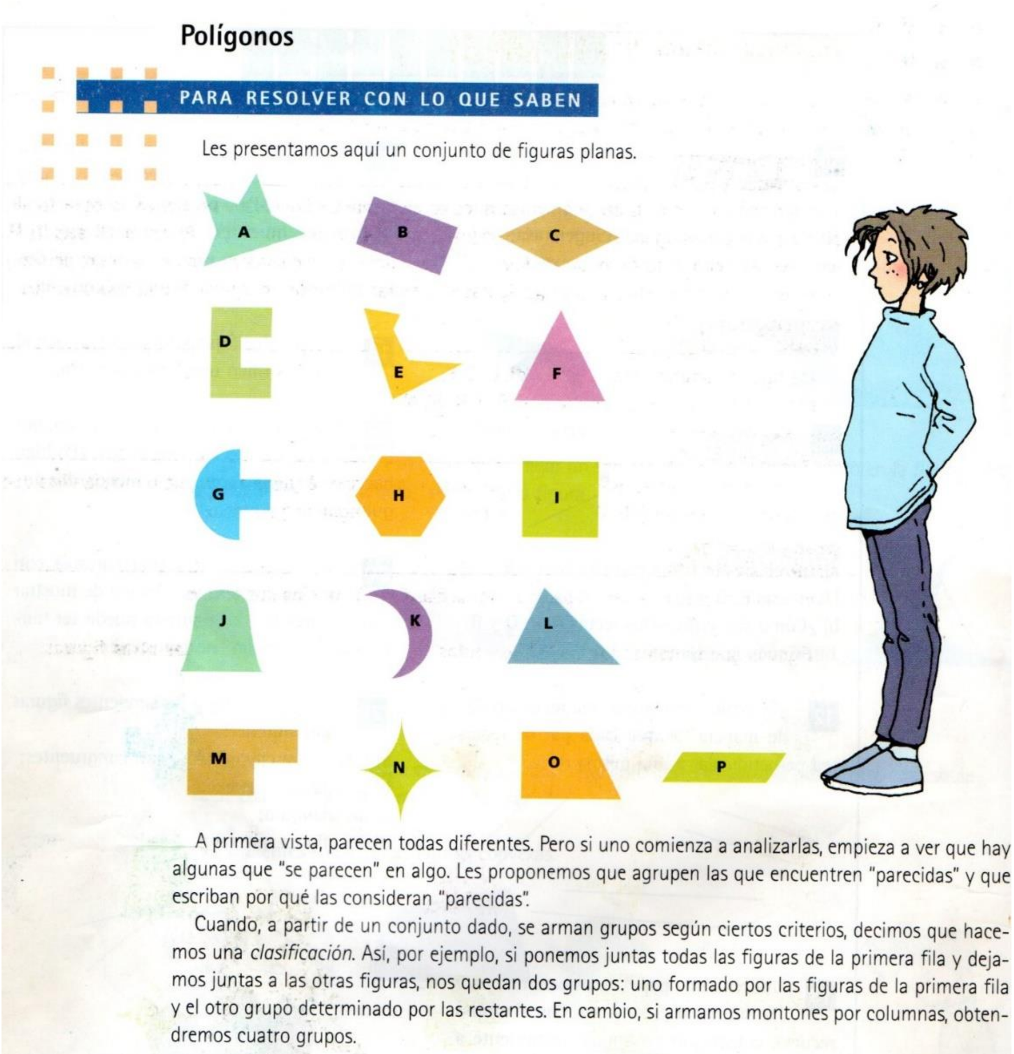


Figura 73: Actividades destacadas en sobre concavidad y convexidad de figuras (p. 91).

Luego, la autora define polígono mediante la clasificación de figuras planas (ver Figura 74), ofreciendo un breve desarrollo teórico acerca del proceso de clasificación y los criterios para realizarlo. Sin embargo, más adelante, el texto opta por definir al polígono teniendo como única condición que todos sus lados sean rectos (ver Figura 75), dando por sentado que toda figura será plana y cerrada.



Polígonos

PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

Les presentamos aquí un conjunto de figuras planas.

A primera vista, parecen todas diferentes. Pero si uno comienza a analizarlas, empieza a ver que hay algunas que "se parecen" en algo. Les proponemos que agrupen las que encuentren "parecidas" y que escriban por qué las consideran "parecidas".

Cuando, a partir de un conjunto dado, se arman grupos según ciertos criterios, decimos que hacemos una *clasificación*. Así, por ejemplo, si ponemos juntas todas las figuras de la primera fila y dejamos juntas a las otras figuras, nos quedan dos grupos: uno formado por las figuras de la primera fila y el otro grupo determinado por las restantes. En cambio, si armamos montones por columnas, obtendremos cuatro grupos.

Figura 74: Clasificación de figuras planas a parir de las cualidades compartidas (p. 92).

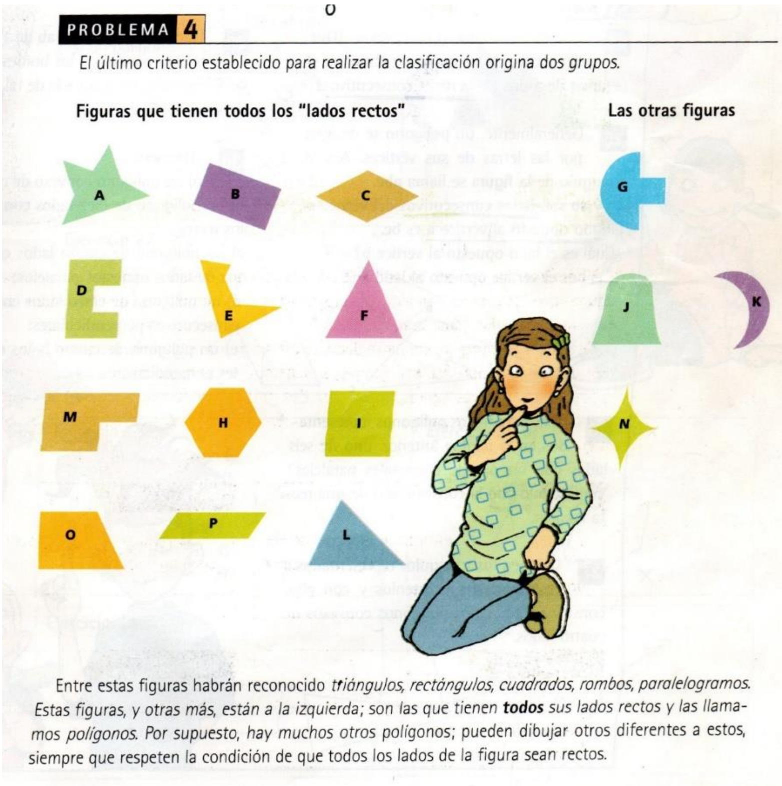


Figura 75: Clasificación de figuras planas según sean polígonos o no, y definición de polígono (p. 93).

Las autoras proponen que los conocimientos sean reorganizaos utilizando la capacidad de comunicar saberes aprendidos como motivación (ver Figura 76).

¿Qué sabemos sobre los cuadriláteros planos?

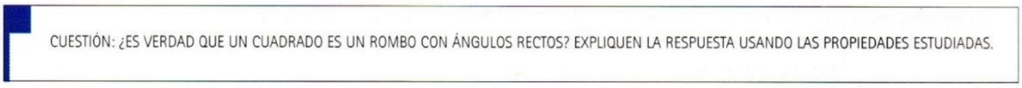
Después de todas las construcciones que hicieron desde el inicio del capítulo, seguramente tendrán la sensación de haber aprendido una serie de cosas sobre los cuadriláteros, pero que tal vez no podrían contarlas. Trataremos de poner un poco de orden a todo este conjunto de definiciones y propiedades. Si ustedes también ordenan todo lo que aprendieron, les resultará más fácil hablar sobre ello. No olviden que esto es tan importante como lo que estudiaron antes.

Figura 76: Discurso sobre la importancia de comunicar los conocimientos (p 105).

Acompañando esta propuesta de reorganización de conceptos, se presentan algunas preguntas que invitan a los estudiantes a construir una argumentación en base a las definiciones y propiedades de los cuadriláteros estudiadas (ver Figuras 77 y 78).

CUESTIÓN: EL PARALELOGRAMO, EL RECTÁNGULO Y EL ROMBO DEL PROBLEMA 2 (PÁGINA 103) SON PARALELOGRAMOS. EL CUADRADO TAMBIÉN. ¿CÓMO LO EXPLICAN SEGÚN LA DEFINICIÓN DADA?

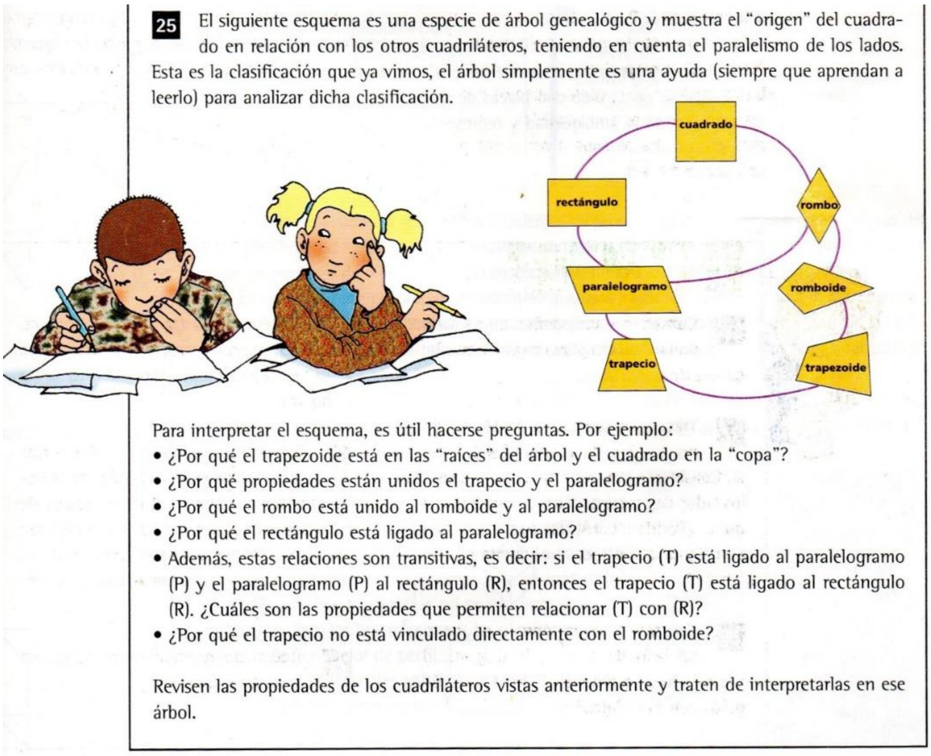
Figura 77: Propuesta para fomentar la argumentación, basada en definiciones (p. 105).



CUESTIÓN: ¿ES VERDAD QUE UN CUADRADO ES UN ROMBO CON ÁNGULOS RECTOS? EXPLIQUEN LA RESPUESTA USANDO LAS PROPIEDADES ESTUDIADAS.

Figura 78: Propuesta para fomentar la argumentación, basada en propiedades (p. 105).

En cuanto a la relación entre las distintas familias de cuadriláteros, se presenta a modo de Actividad para los estudiantes (ver Figura 79). En ella los alumnos deben observar un esquema denominado "árbol genealógico" donde se ubican las familias de cuadriláteros definidas anteriormente, luego responder una serie de preguntas que invitan a la reflexión y análisis de dichas definiciones y sus propiedades, y redactar (tal vez, sugeridos por la imagen de los niños que aparecen en la figura) argumentos en base a ellas.



25 El siguiente esquema es una especie de árbol genealógico y muestra el "origen" del cuadrado en relación con los otros cuadriláteros, teniendo en cuenta el paralelismo de los lados. Esta es la clasificación que ya vimos, el árbol simplemente es una ayuda (siempre que aprendan a leerlo) para analizar dicha clasificación.

Para interpretar el esquema, es útil hacerse preguntas. Por ejemplo:

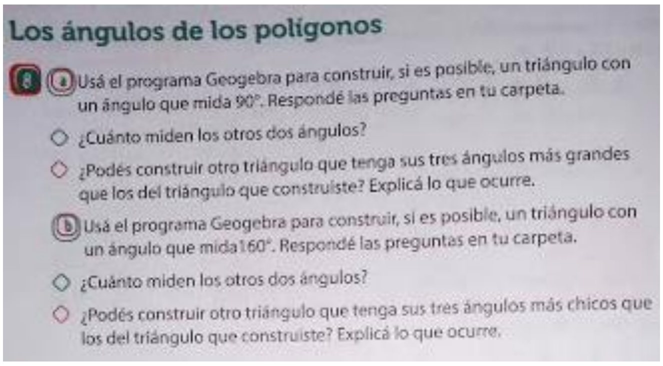
- ¿Por qué el trapezoide está en las "raíces" del árbol y el cuadrado en la "copa"?
- ¿Por qué propiedades están unidos el trapecio y el paralelogramo?
- ¿Por qué el rombo está unido al romboide y al paralelogramo?
- ¿Por qué el rectángulo está ligado al paralelogramo?
- Además, estas relaciones son transitivas, es decir: si el trapecio (T) está ligado al paralelogramo (P) y el paralelogramo (P) al rectángulo (R), entonces el trapecio (T) está ligado al rectángulo (R). ¿Cuáles son las propiedades que permiten relacionar (T) con (R)?
- ¿Por qué el trapecio no está vinculado directamente con el romboide?

Revisen las propiedades de los cuadriláteros vistas anteriormente y traten de interpretarlas en ese árbol.

Figura 79: "Árbol genealógico" de las distintas familias de cuadriláteros (p. 107).

3.4.3 Libros de texto que solicitan la justificación de pasos de una construcción

En el texto *"Hacer matemática 2" (2013, Ed: Estrada)*, a diferencia de los anteriores, se incluyen actividades donde se espera que los estudiantes expliquen algunas conjeturas y/o mediciones realizando previamente construcciones con GeoGebra (ver Figura 80). Los estudiantes deben construir figuras bajo ciertas condiciones, y luego de explorarlas y manipularlas con las herramientas que posee el software, para responder algunas preguntas.



Los ángulos de los polígonos

8 a) Usá el programa Geogebra para construir, si es posible, un triángulo con un ángulo que mida 90°. Respondé las preguntas en tu carpeta.

◇ ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

◇ ¿Podés construir otro triángulo que tenga sus tres ángulos más grandes que los del triángulo que construiste? Explicá lo que ocurre.

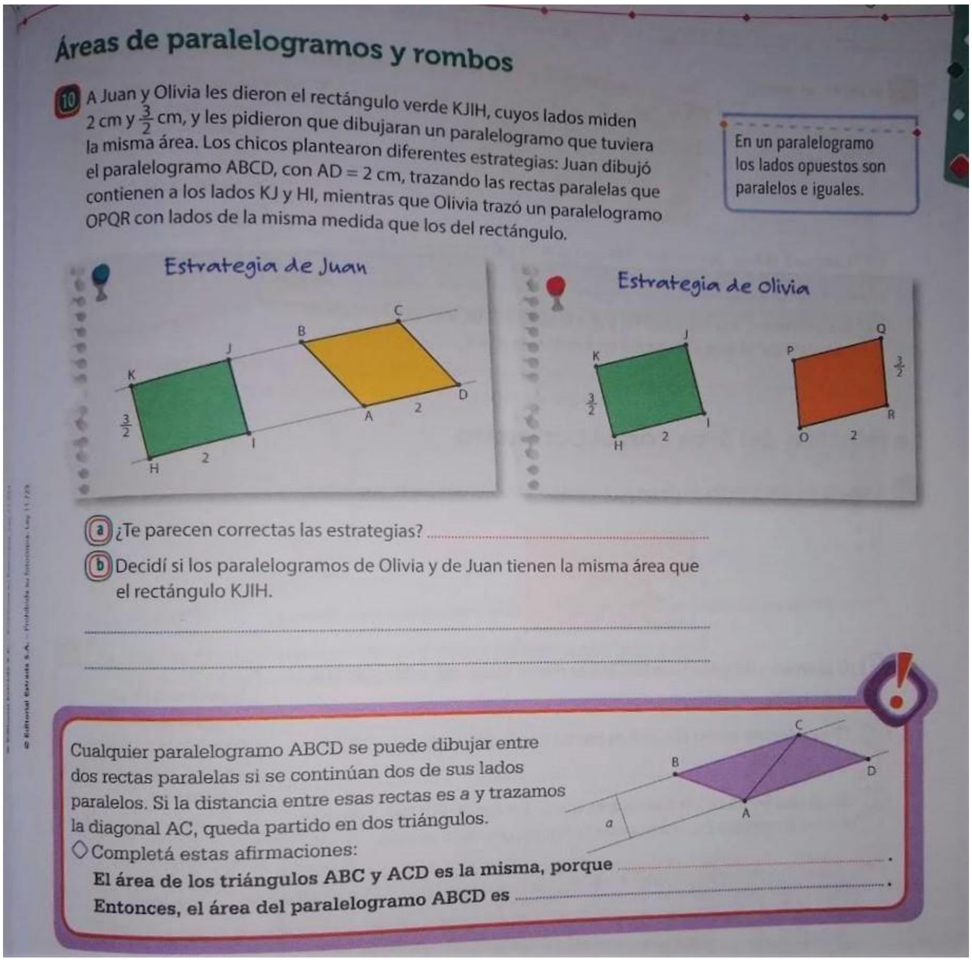
b) Usá el programa Geogebra para construir, si es posible, un triángulo con un ángulo que mida 160°. Respondé las preguntas en tu carpeta.

◇ ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

◇ ¿Podés construir otro triángulo que tenga sus tres ángulos más chicos que los del triángulo que construiste? Explicá lo que ocurre.

Figura 80: Actividades para analizar algunas conjeturas/mediciones con el uso de GeoGebra (p. 74).

Las actividades propuestas no sugieren la elaboración de textos completos de justificación sobre su resultado o procedimiento, sino que en la mayoría de los casos el énfasis se encuentra en la construcción basada en propiedades dadas, ya sea mediante el uso de GeoGebra o en papel con regla no graduada y compás (ver Figura 81).



Áreas de paralelogramos y rombos

10 A Juan y Olivia les dieron el rectángulo verde KJIH, cuyos lados miden 2 cm y $\frac{3}{2}$ cm, y les pidieron que dibujaran un paralelogramo que tuviera la misma área. Los chicos plantearon diferentes estrategias: Juan dibujó el paralelogramo ABCD, con AD = 2 cm, trazando las rectas paralelas que contienen a los lados KJ y HI, mientras que Olivia trazó un paralelogramo OPQR con lados de la misma medida que los del rectángulo.

En un paralelogramo los lados opuestos son paralelos e iguales.

a) ¿Te parecen correctas las estrategias? ....

b) Decidí si los paralelogramos de Olivia y de Juan tienen la misma área que el rectángulo KJIH.

....

....

Cualquier paralelogramo ABCD se puede dibujar entre dos rectas paralelas si se continúan dos de sus lados paralelos. Si la distancia entre esas rectas es a y trazamos la diagonal AC, queda partido en dos triángulos.

◇ Completá estas afirmaciones:

El área de los triángulos ABC y ACD es la misma, porque ....

Entonces, el área del paralelogramo ABCD es ....

Figura 81: Actividad de construcción de cuadriláteros (p. 87).

3.4.4 Libros de texto que no evidencian pedidos de justificación

En un contraste marcado con los anteriores, el libro de texto *"Matemática 1: Educación secundaria obligatoria" (1996, Ed: Anaya)* propone la aplicación de propiedades de cuadriláteros, para clasificarlos, sin un pedido explícito de justificación (ver Figura 82).

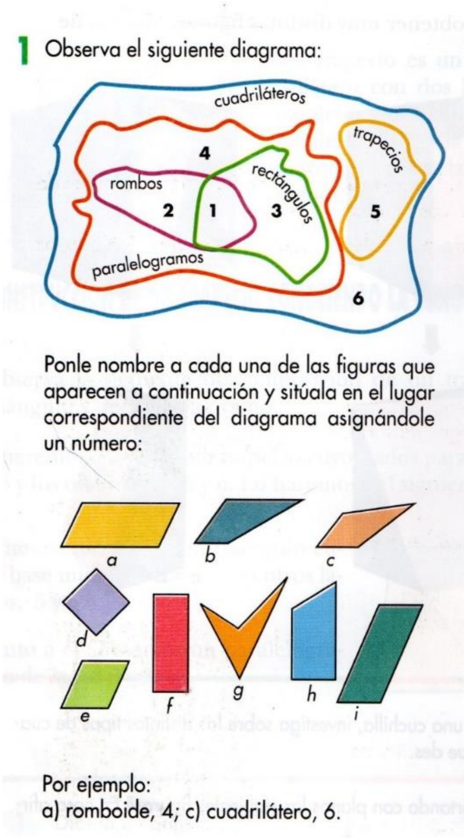
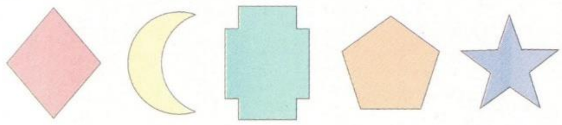


Figura 82: Diagrama de clases de cuadriláteros (p. 198).

Del mismo modo, en el texto *"Matemática en red 7: EGB 3° ciclo" (2000, Ed: A-Z)* tampoco se observan actividades que den evidencia sobre propuestas de argumentación, ni pistas para ello, para el estudiante. Las actividades sugieren la ejemplificación apelando sólo al dibujo (Figura 83); también, aparecen caracterizaciones de las distintas familias de cuadriláteros sin preocupaciones acerca de una estructura lingüística de definición para reconocer sus miembros (Figura 84).

Actividades

1) Señalen cuáles de las siguientes figuras son cóncavas y cuáles son convexas.



2) Dibujen dos figuras de cuatro lados: una cóncava y otra convexa.

Figura 83: Actividades relacionadas a la concavidad y convexidad de figuras (p. 96).

Cuadriláteros

En el diseño del vitral aparecen distintos polígonos: triángulos (polígonos de tres lados), cuadriláteros (polígonos de cuatro lados), pentágonos (polígonos de cinco lados) y hexágonos (polígonos de seis lados).

Dentro de la familia de los cuadriláteros hay miembros especiales:

- Si no tiene lados paralelos se llama **trapezoide**.
- Si tiene un par de lados paralelos se llama **trapecio**.

Los lados paralelos son las bases del trapecio. Si los lados no paralelos son iguales es un **trapecio isósceles**.

En el vitral hay varios trapecios, traten de ubicarlos.

- Si tiene dos pares de lados paralelos se llama **paralelogramo**.
- Los paralelogramos que tienen los cuatro lados iguales se llaman **rombos**.
- Si tenemos en cuenta los ángulos vemos que en el vitral hay, por ejemplo, trapecios con un ángulo recto, llamados **trapecios rectángulos**.
- Si un paralelogramo tiene sus cuatro ángulos rectos se llama **rectángulo**.
- Si un rectángulo tiene sus cuatro lados iguales es un **cuadrado**.

Figura 84: Caracterización de distintos cuadriláteros. (p. 97)

Se presentan actividades exploratorias para los estudiantes, donde en este caso tampoco se exige ningún tipo de justificación, salvo lo que puede ser comprobado mediante un dibujo u otro medio manipulativo (ver Figura 85).

38) Empleando los recursos que prefieran (útiles de geometría, papel de calcar, tijera), comprueben lo siguiente: en **todos** los paralelogramos:

a) Las diagonales se cortan en su punto medio.

b) Los lados opuestos son iguales.

c) Los ángulos opuestos son iguales.

Figura 85: Actividad exploratoria sobre propiedades de los paralelogramos. (p. 110).

3.5 Conclusiones sobre el análisis de los textos realizado y su vínculo con la producción de argumentos de los estudiantes. Aportes para una propuesta de enseñanza

En esta sección se intentará dar respuesta a nuestro interrogante a partir del análisis realizado en la sección anterior:

> *Teniendo en cuenta las características de las producciones escritas de los estudiantes cuando justificaban sus decisiones sobre ejemplos y contraejemplos de un concepto, o propiedades, ¿existen en los libros de texto propuestas (teórico-prácticas) que pudieran ser de ayuda para desarrollar la capacidad de argumentar?*

Por un lado, se analizaron las respuestas de los estudiantes en actividades específicas propuestas en las evaluaciones, desde allí se recabaron algunos datos sobre sus producciones:

- En primer lugar, que en la argumentación realizada por los estudiantes intervienen, aparentemente, las imágenes visuales construidas y la forma en que se inició el desarrollo del contenido, en nuestro caso los polígonos.
- En segundo lugar, la dificultad de los estudiantes para exponer un contraejemplo al refutar un enunciado falso, o para justificar un ejemplo de manera completa, teniendo en cuenta su definición.

Teniendo en cuenta el primer indicio mencionado, esta relación entre la escritura de una argumentación guiada por las figuras o imágenes presentes en la actividad, se encontró un texto en particular que trabaja el contenido de polígonos de manera muy similar a lo desarrollado durante las prácticas, "El Libro de la Matemática 7", en el cual la definición de polígonos surge de la clasificación de un conjunto concreto de figuras planas, sólo que esta definición se basa en la diferencia entre los subconjuntos de figuras, es decir, polígonos son aquellas figuras que poseen todos sus lados rectos. Podría pensarse, entonces, que los libros de textos no apuntan a la construcción de una definición textual completa para caracterizar un concepto, sino que lo hacen enunciando sus características principales. Es decir, será tarea del docente completar los enunciados presentados por los libros de texto.

Con respecto al segundo indicio, referente a la refutación de una afirmación, la teoría se presenta de manera muy clara en los libros de texto, en su mayoría haciendo referencia a la mención de un contraejemplo que no cumpla el concepto presentado, pero no todos los textos indican la forma en que debe escribirse un enunciado que refute y lo haga de manera pertinente y completa. Nuevamente, la tarea del docente será importante en este sentido.

Por otra parte, en el análisis realizado sobre los libros de texto escolares, se reconoce una gran diversidad de enfoques en cuanto al pedido de justificaciones y argumentaciones en las actividades de los estudiantes. Sin embargo, se considera que todos ellos aportan al desarrollo de esta capacidad, aunque cada uno de ellos desde un aporte parcial:

- Algunos ejemplares apuntan al aprendizaje del proceso de una demostración formal, con capítulos exclusivamente dedicados a la enseñanza de la misma desde miradas extra e intramatemática, de la misma forma que fue trabajado el proceso de clasificación durante la práctica docente. Si bien en algunos casos este proceso se encuentra guiado por los autores del texto, permite una reflexión constante sobre la teoría presentada, potenciando el desarrollo de argumentos simples en cada paso de la demostración formal.

- Otros textos, solicitan el pedido de justificaciones basadas en las definiciones y propiedades de las distintas figuras planas, en general para probar o refutar afirmaciones, con el objetivo de reflexionar sobre las mismas y así emplear formas de comunicar lo aprendido a través de la elaboración de argumentos. Bajo este mismo objetivo se realizaron los pedidos de argumentaciones durante el desarrollo de la práctica docente.

- Existen algunos libros que incluyen justificación o explicación de pasos y resultados de una construcción, ya sea en papel o mediante software de geometría dinámica, lo que ayuda al estudiante a realizarla de manera consciente además de autoevaluarse constantemente mediante pruebas empíricas. Sin embargo, en estos casos no es sustancial el aporte al desarrollo de la capacidad de argumentar.

- Finalmente, se encontraron textos donde están ausentes las argumentaciones. En estos casos, las actividades se centraban en la mera aplicación de definiciones y propiedades de las distintas figuras.

Ponte (2005), ubica este último tipo de actividades dentro del *Paradigma del ejercicio* y, si bien son una herramienta útil para consolidar conocimientos ya apropiados, explica los riesgos de centrarse únicamente en ellas durante la enseñanza:

> Reducir la enseñanza de las matemáticas para resolver ejercicios conlleva grandes riesgos de empobrecimiento en los desafíos propuestos y la desmotivación de los estudiantes. Por lo tanto, los ejercicios tienen su propio lugar en la enseñanza de las matemáticas, pero, como señala José Sebastião e Silva (1964), lo más importante que hacer muchos ejercicios será hacer ejercicios cuidadosamente elegidos que evalúen la comprensión de los conceptos fundamentales de los estudiantes (p. 4).

En síntesis, considerando en su conjunto el análisis de las producciones de los estudiantes y lo que ofrecen los libros de texto, observo la importancia de la elección de un libro de texto que sea efectivamente una herramienta útil en concordancia a los objetivos propuestos para la enseñanza. En efecto, considerando la actividad de escritura de argumentaciones, se observa su existencia en la mayoría de ellos, aunque bajo distintos objetivos. No obstante, estos objetivos no se dilucidan sino luego de un análisis del texto; incluso, distintas investigaciones indican que gran parte de los libros reflejan, (al menos en la enunciación de contenidos) las prescripciones curriculares, ya que de esta forma pueden ser comercialmente aptos para su adquisición y económicamente rentables.

Finalmente, teniendo en cuenta la tarea de estudio que demanda la elaboración de tareas que promuevan la producción escrita en los estudiantes con la ayuda de libros de texto, me surgen ciertas preguntas que podrían ser estudiadas en un futuro: ¿Cuáles son los criterios para elegir un libro de texto que atienda los objetivos propuestos para la enseñanza? ¿Se solicita la producción de argumentos en los demás contenidos no geométricos dentro de los libros de texto? ¿Cómo podrían complementarse las actividades trabajadas durante la práctica en base a las propuestas presentadas en los libros de texto?

4. Reflexiones finales

En este último capítulo del informe, se realizará una breve reflexión sobre lo acontecido en la práctica profesional docente; desde el proceso de escritura de la planificación inicial, pasando por la experiencia de la práctica misma y la evaluación realizada a los estudiantes, hasta el análisis posterior de lo efectivamente ejecutado.

El primer desafío previo a la práctica, fue la elaboración de la planificación general y de los guiones conjeturales de las primeras clases. Si bien se tuvo una instancia previa de observación de la institución y de la propia clase de Matemática, la forma de trabajo de los estudiantes seguía siendo, en cierta forma, impredecible; puesto que se desconocía sus posibles reacciones y potencialidades al participar de clases con una docente practicante.

Sin embargo, se destaca la importancia de aprovechar al máximo el período de observaciones, considerando aspectos detallados del trabajo de los alumnos, durante el trabajo en grupos y el debate de resultados que ello generaba. En este aspecto, la realización de una práctica con un par pedagógico hubiera sido fructífera.

Transcurrida las prácticas, se recalca la importancia de definir bloques de contenidos que le proporcionen coherencia a los contenidos matemáticos, sus objetivos y actividades.

Además, se establecieron objetivos generales para cada bloque de contenidos que se trabajarían durante las prácticas, lo que ayudó a la planificación de las primeras actividades a desarrollar. No obstante, no fue sino luego del comienzo de la práctica que se reorganizó gran parte de la planificación inicial, donde se reconocieron las bases teórico-prácticas que debían fortalecerse en los estudiantes para que el aprendizaje fuera realmente significativo, específicamente surgió a partir de la dificultad que presentaron en la redacción de argumentos en base a las primeras definiciones desarrolladas como la de polígono, y la concavidad y convexidad del mismo.

La experiencia de la práctica docente considero que, también, arrojaba datos sobre la forma de trabajo de los estudiantes, siendo diferente a la registrada durante la etapa de observación previa, probablemente debido a que la propuesta y los contenidos mismos fueron de distinta naturaleza; en particular, podría destacarse que el debate generado entre los estudiantes durante la resolución de actividades grupales y las dudas que en general consultaban giraban en torno al proceso de trabajo y no únicamente a sus resultados.

A partir de esta información y a medida que las jornadas iban transcurriendo, la planificación de las clases siguientes se realizaba de forma más rápida, con propuestas para ese grupo de alumnos en particular, es decir respetando y potenciando sus hábitos de trabajo, y atendiendo a las necesidades generales observadas, mencionadas anteriormente. También la escritura de los guiones surgía de manera más firme, más segura, puesto que ya no resultaba tan impredecible la respuesta de los estudiantes ante los diferentes pedidos realizados por la docente.

Si bien no se trabajó sobre una cantidad significativa de contenidos, incluso algunos de ellos fueron planificados y por motivos de tiempo no pudieron desarrollarse, como la introducción a ecuaciones lineales, se considera que el trabajo realizado por el alumnado permitió el fortalecimiento de bases teórico-prácticas esenciales para múltiples áreas del aprendizaje, como la reflexión y análisis de una definición, la escritura de argumentaciones, la relación entre conceptos, etc.

Respecto a los resultados de la evaluación podría decirse que fueron satisfactorios, puesto que la mayoría de los estudiantes alcanzó el cumplimiento de los principales objetivos propuestos; espero que esto sea el fruto del trabajo que realizaron durante el transcurso de toda la práctica, donde se los pudo observar realizar cada tarea con esfuerzo y dedicación. Sin embargo, reconozco que, aunque emergieron algunas dificultades para redactar argumentos, esto motivó a un análisis de esta problemática, indagando sobre los libros de texto para la educación secundaria correspondientes y aprendiendo para elaborar una mejor propuesta al respecto en un futuro.

Al analizar las propuestas presentadas en los libros de texto, pudo observarse que la muestra de imágenes es potencialmente influyente en el aprendizaje, por lo que debe utilizarse para potenciar el mismo y de manera que no sea un condicional a la hora de reflexionar sobre los objetos geométricos con los que se está trabajando. Además, que deben existir bases teóricas claras que indiquen la forma correcta de argumentar una sentencia, ya sea para probarla o refutarla; y finalmente, se advirtió que existen distintos objetivos bajo los cuales se solicita la escritura de una argumentación, pero que todos ellos implican una reflexión sobre la teoría desarrollada.

En resumen, la experiencia resultó ser un espacio de aprendizaje constante, la cual me brindó herramientas fundamentales para la futura labor docente, y más aún, fue ámbito de reflexión permanente sobre las responsabilidades de dicha labor, donde creo que se transmitieron mucho más que conocimientos matemáticos a un grupo de alumnos, sino también bases para el desarrollo de un pensamiento crítico en un grupo de personas que se encuentran en formación para la integración a la sociedad.

5. Referencias y Bibliografía

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006) *"Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo"* Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, Argentina. Disponible en: http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

- Barallobres, G. (1998) *"Matemática 7 EGB"* Buenos Aires, Argentina: Editorial AIQUE.

- Bohórquez, L. y Espinoza, A. (2013) "Comunicación y argumentación en la clase de Matemática" *Revista Educación y Ciencia Núm. 16, p.101-116.*

- Calvo, C. (2001) "*Un estudio sobre el papel de definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral."* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.

- Canteros, L., Felissia, A., Fregona, D. (1997) *"El libro de la Matemática 7"* Buenos Aires, Argentina: Editorial Estrada.

- Chorny, F., Krimker, G., Salpeter, C. (2005) *"Pitágoras 8: Matemática"* Buenos Aires, Argentina: Editorial SM.

- Colera, J., Gaztelu, I., Guzmán, M., García, E. (1996) *"Matemática 1: Educación secundaria obligatoria"* Madrid: Editorial Anaya.

- Díaz, H., Palomeque, J. (2016) *"Un abordaje de la geometría con construcciones y tecnología".* Informe final de prácticas. Universidad Nacional de Córdoba.

- Giral, F.; Giral, A.; Giral, J. (2017) *"Conocimiento y Competencias. Cultura de efectividad 2.0"* Chapultepec, México: Editorial LID. Disponible en: https://goo.gl/xb3sui

- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Ciclo Básico de la Educación Secundaria (Versión definitiva 2011-2020)* Disponible en: https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/TOMO%202%20Ciclo%20Basico%20de%20la%20Educacion%20Secundaria%20web%208-2-11.pdf

- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. *Mejora en los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias: Capacidades fundamentales.* Disponible en: https://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/Prioridades/fas_22.pdf

- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. *Programa Nuevo Régimen Académico para la Escuela Secundaria*. Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/Capacitacion/IntegracionSaberes/NuevoRegimenAcademico.php

- Góngora, A. (2015). Contraejemplos en Matemática. *Pensamiento Matemático, Vol. V N° 2.*

- Guelman, N., Itzcovich, H., Pavesi, L., Rudy, M. (1998) *"El Libro de la Matemática 8"* Buenos Aires, Argentina: Editorial Estrada.

- Gvirtz, S., Palamidessi, M. (2008) *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Aique.

- Kass, M., Panizza, M., Reyna, M., Sadovsky, P. (1989) *"Matemática 2"* Buenos Aires, Argentina: Editorial Santillana.

- López, A., Pellet, C., Camus, N. (coord.) (2000) *"Matemática en red 7: EGB 3° ciclo"* Buenos Aires: Editorial A-Z.

- López, A., Pellet, C., Camus, N. (coord.) (2000) *"Matemática en red 8: EGB 3° ciclo"* Buenos Aires: Editorial A-Z.

- Parra, C., Saiz, I. (2013) *"Hacer matemática 2"* Buenos Aires, Argentina: Editorial Estrada.

- Ponte, J. P. (2005) Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

- Roegiers, X. (2000) Saberes, capacidades y competencias en la escuela: una búsqueda de sentido, *Innovación Educativa,* N°10. Disponible en: http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/70361/pg_105-122_inneduc10.pdf?sequence=1&isAllowed=y

- Roegiers, X. (2016) “*Marco conceptual para la evaluación de las competencias”* UNESCO –OIE. Disponible en: http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/ipr4-roegiers-competenciesassessment_spa.pdf
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.

6. Anexos

6.1 Anexo A: Primer trabajo práctico.

<u>TRABAJO PRÁCTICO</u>

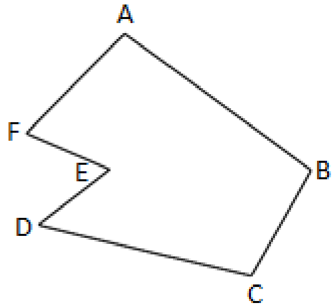
<u>Temas:</u> Polígonos: Definición, elementos de un polígono, polígonos cóncavos y convexos, clasificación de polígonos según la cantidad de lados que poseen.

<u>Resolución de las actividades:</u>

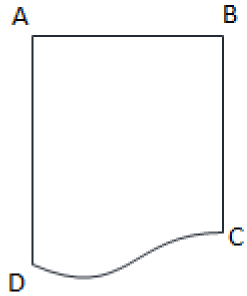
- Las respuestas deberán ser justificadas por escrito, nombrando correctamente cada objeto matemático.
- Si tienen que nombrar algún elemento del polígono, deberán utilizar la notación acordada.
- Utilizar regla o escuadra para construir los polígonos que se requieran.

1) Decidir si las siguientes figuras son polígonos o no. <u>Justifica</u> por escrito tu respuesta.

a)



b)



2) Resuelve el siguiente problema: Lara y Facundo quieren colocar una lámpara en sus habitaciones. Lara dice que no importa dónde ubique la lámpara, ésta siempre iluminará toda la habitación; Facundo, en cambio, dice que en su cuarto no ocurre lo mismo.

a) ¿Cuáles de las siguientes figuras podrían corresponder a la forma de la habitación de Lara y cuáles a la habitación de Facundo? ¿Por qué?

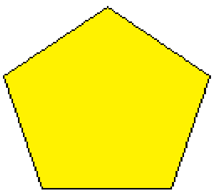


FIGURA 1

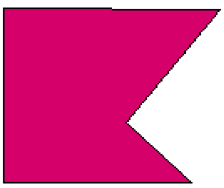


FIGURA 2

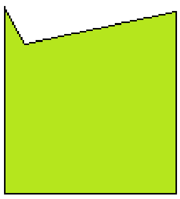


FIGURA 3

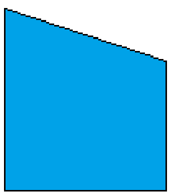


FIGURA 4

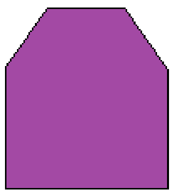
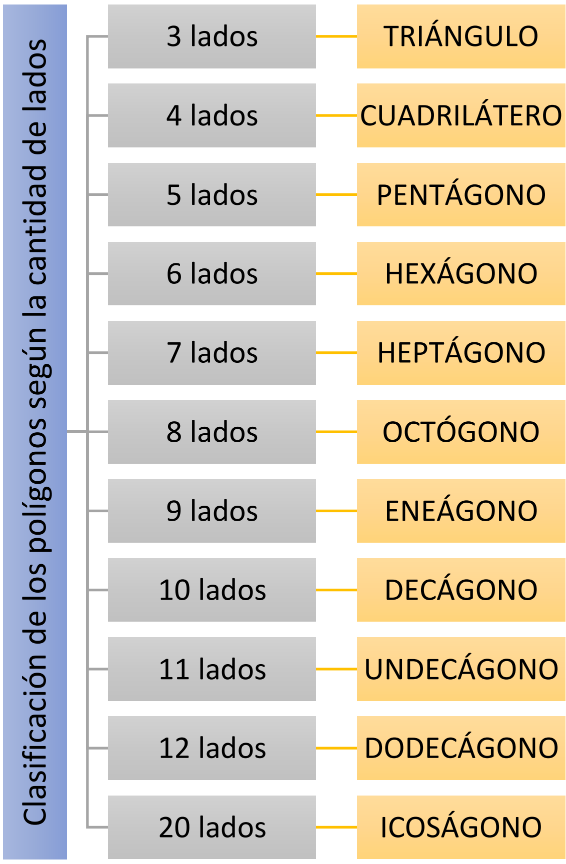


FIGURA 5

b) De acuerdo a tu respuesta anterior, ¿qué tipos de polígono son los que corresponden a la habitación de Facundo? Justifica por escrito tu respuesta.

Ayuda: nombra los vértices de cada figura, de esta manera, en la justificación, podrás referirte a algún elemento particular del polígono utilizando la notación correspondiente.

3) Observa la clasificación de los polígonos según la cantidad de lados que poseen. Deberás utilizarla en las siguientes actividades.



4) Dibuja un hexágono y nombra <u>todos</u> sus elementos utilizando la notación acordada. (Vértices, lados, ángulos interiores, diagonales)

5) a) ¿Cuántas diagonales tiene en total un heptágono? Realiza el dibujo correspondiente y nombra las diagonales.

b) Si un polígono tiene 5 diagonales en total, ¿de qué polígono se trata? Justifica por escrito tu respuesta.

c) ¿Existe algún polígono que tenga 7 diagonales en total? Justifica por escrito tu respuesta.

6) Completa la siguiente tabla:

Tipo de polígono	Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices	Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales
Triángulo			
Cuadrilátero			
Pentágono			
	6		
	7		
Octógono			
	9		
	10		

a) ¿Existe alguna relación entre la cantidad de lados de un polígono y la cantidad de diagonales desde uno de sus vértices? Explica por escrito.

) Continúa completando la siguiente tabla:

Cantidad de lados de un polígono	Cantidad de diagonales desde UNO de sus vértices	Cantidad de triángulos formados al trazar las diagonales
14 lados		
	20	
30 lados		
	54	
78 lados		
	600	
n lados		

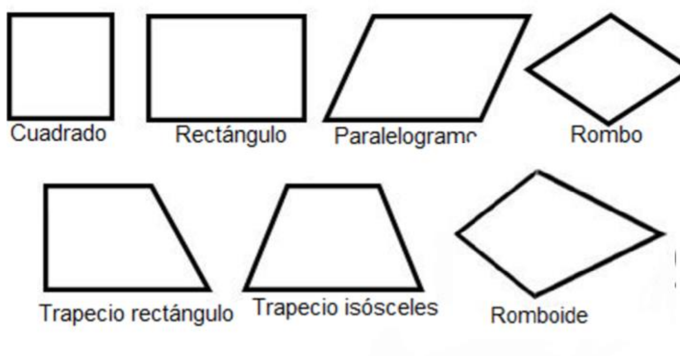
c) DESAFÍO: ¿Cómo podrías calcular la cantidad total de diagonales de un polígono cualquiera? ¿Bastaría con multiplicar la expresión anterior por la cantidad total de vértices? Dibuja un polígono como ejemplo y justifica por escrito tu respuesta.

6.2 Anexo B: Trabajo Práctico sobre construcción de cuadriláteros con las piezas del Tangram.

TRABAJO PRÁCTICO

CONSTRUCCIÓN Y PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

Con las piezas del TANGRAM construye todos los cuadriláteros convexos posibles, que reproduzcan éstos:



Condiciones:

- **Para construir los cuadriláteros deben utilizarse AL MENOS DOS piezas del Tangram.**
- **Las piezas no pueden superponerse ni deben quedar espacios vacíos al unirlas, es decir, sólo pueden unirse los lados congruentes de las figuras.**
- **Las figuras no pueden repetirse, es decir, si hay más de una forma de construir, por ejemplo, un cuadrado, aunque sean cuadrados de distintos tamaños, deberán considerar sólo una de estas maneras.**

Sobre la fotocopia, marca los segmentos correspondientes a las figuras que utilizaste, también, deberás colorearla con los mismos colores que en tu construcción (lados y ángulos congruentes) y señalar aquellos lados paralelos.

6.3 Anexo C: Trabajo práctico sobre definición y propiedades de los cuadriláteros.

TRABAJO PRÁCTICO

Temas: Definición y propiedades de los cuadriláteros.

1) Responde las siguientes preguntas, justificando por escrito cada una de ellas:

   a) ¿Un rectángulo es un trapecio?

   b) ¿Un romboide es un rombo?

   c) ¿Un cuadrado es un paralelogramo?

   d) ¿Un paralelogramo es un cuadrado?

   e) ¿Un rombo tiene todos sus lados congruentes?

   f) ¿Un rectángulo tiene sus cuatro ángulos rectos?

2) Dibuja dos cuadriláteros teniendo en cuenta las propiedades que posee (al menos tres). Deberán nombrar los vértices de cada cuadrilátero y explicar sus propiedades enunciando correctamente cada elemento implicado. Por ejemplo, si desean expresar que el cuadrilátero posee sus lados opuestos congruentes, deberán nombrar dichos lados y su relación: y

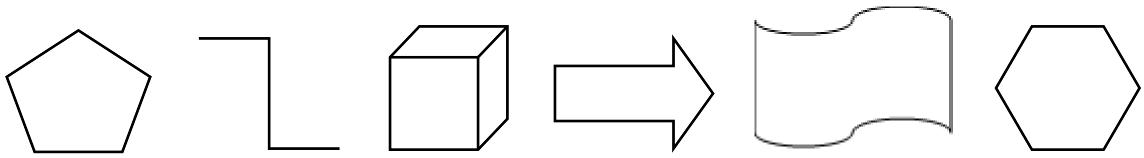
3) Desafía a tu compañero de banco: deberás pedirle que construya, con las piezas del Tangram (al menos dos), un cuadrilátero que cumpla dos propiedades a tu elección. Luego deberá justificar por qué cumple dichas propiedades.

6.4 Anexo D: Trabajo práctico integrador

TRABAJO PRÁCTICO

Temas: Polígono, definición y elementos. Polígono cóncavo y convexo. Cuadriláteros, definiciones y propiedades. Perímetro de los cuadriláteros.

1. Decide si las siguientes figuras son polígonos o no, en caso de no ser un polígono, justifica por escrito tu decisión, utilizando la definición de polígono.



A B C D E F

2. Observa los POLÍGONOS de la Actividad 1 y decide si son cóncavos o convexos. Elige uno de cada uno y justifica por qué es cóncavo/convexo.

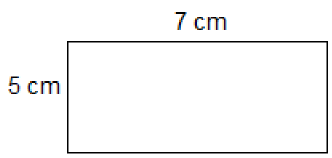
3. Observa los POLÍGONOS CONVEXOS de la Actividad 2, elige uno y nombra TODOS sus elementos. Además, nómbralo según la cantidad de lados que posee.

Nota: Puedes marcar estos elementos en la fotocopia, no es necesario dibujar el polígono.

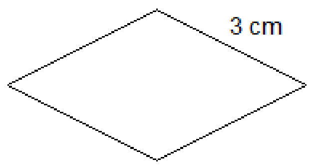
4. Dentro de la siguiente tabla, podemos observar algunas propiedades de los cuadriláteros, indica con una X aquellos que cumplen dicha propiedad.

	Trapecio	Paralelogramo	Rectángulo	Romboide	Rombo	Cuadrado
Un par de lados paralelos.						
Dos pares de lados opuestos congruentes.						
Dos pares de lados consecutivos congruentes.						
Todos sus ángulos congruentes.						
Dos pares de lados opuestos congruentes.						
Todos sus lados congruentes.						

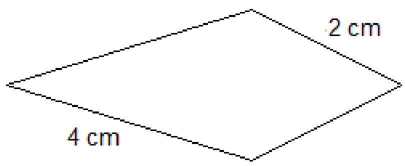
5. Calcula el perímetro de los siguientes cuadriláteros.



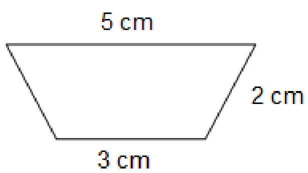
Rectángulo



Rombo



Romboide



Trapecio isósceles

6. Responde las siguientes preguntas justificando cada caso.

Nota: puedes escribir la fórmula y calcular el perímetro como justificación.

a. Si el perímetro de un cuadrado es igual a 16 cm, ¿cuánto mide uno de sus lados?

b. Un lado de un rectángulo mide 3 cm y su consecutivo mide el doble. ¿Cuál es la medida de su perímetro?

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 351 4334054