



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN ASTRONOMÍA

# ANÁLISIS DINÁMICO DEL GRUPO DE ASTEROIDES HUNGARIA

---

Autora: Nair Elisa Trógolo  
Director: Dr. Alejandro Martín Leiva



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0  
Internacional.



*“Quiero verlo todo. Y aunque en un principio todo me resulte extraño, al cabo de un tiempo formará parte de mi nuevo yo. Fíjate en el mundo, Dios mío, Dios mío. Fíjate en ese mundo, fuera de mí, más allá de mi rostro...”*

Ray Bradbury



# Agradecimientos

A Martín por acompañarme en todo este proceso. Gracias por el tiempo, la paciencia y por brindarme tantos conocimientos.

A todo el grupo de Mecánica, en especial a Fede que siempre fue un gran apoyo.

A mi mamá y a mi papá, por brindarme la posibilidad de estudiar y darme la libertad de elegir esta carrera. Gracias por su amor incondicional y esa generosidad infinita.

A mis hermanos, Maitén y Jairo, por el aguante diario. A mi abuela Tita, siempre pendiente de las fechas de exámenes, prendiendo un arsenal de velitas.

A mis pilares dentro de la facultad: Vane, Lupe, Juli, Sofi, Eli y Manu. Gracias por no dejarme nunca bajar los brazos.

A Carlitos, por todos estos años de viajes, gracias por tanta generosidad.

La familia Raviolo que fue durante los primeros años mi segunda familia, gracias por alimentarme y hacerme un lugar en sus vidas.

A Ignacio, María José y Federico de Despacho de Alumnos, no sé qué haríamos sin ustedes! Gracias de corazón.

A cada uno de los profesores que me acompañaron en este paso por la facultad y que contribuyeron en mi formación.

A LA UNIVERSIDAD PÚBLICA Y GRATUITA, ¡GRACIAS!



# Resumen

Entre el planeta Marte y el borde interno del cinturón principal de asteroides se encuentra la región de asteroides Hungaria ( $1,77 \text{ UA} < a < 2,06 \text{ UA}$ ). Estos objetos se hallan rodeados por las resonancias seculares  $\nu_5$ ,  $\nu_6$  y  $\nu_{16}$ , las resonancias de movimientos medios 5:1 y 4:1 con Júpiter y el espacio orbital que ocupan los cruzadores de Marte. En el presente trabajo estudiamos la estructura del espacio de fases de la región Hungaria mapas dinámicos de alta resolución. Encontramos complejas interacciones entre resonancias seculares de altos órdenes, resonancias de movimientos medios y desplazamientos seculares del semieje mayor producidos por el efecto Yarkovsky.

Utilizando métodos de agrupamiento jerárquico, encontramos indicios de la existencia de un sub-grupo en la región, que podría ser el resultado de una colisión posterior a la que dio origen a la familia principal.





# Abstract

Between the orbit of Mars and the inner edge of the main asteroid belt ( $1,77 \text{ UA} < a < 2,06 \text{ UA}$ ) we find the Hungaria asteroid region. That objects are surrounded by  $\nu_5$ ,  $\nu_6$  y  $\nu_{16}$  planetary secular resonances, the 5:1 and 4:1 planetary mean motion resonances with Jupyter and the orbital space occupied by Mars crossers. In this work, we have studied the Hungaria's region by using high resolution dynamics maps. We have found complex interactions between high order secular resonances, planetary mean motion resonances and semimajor axis drift caused by the Yarkovsky effect.

Applying hierarchical clustering methods, we have noticed clues about the existence of a dynamical sub-group in the region, which could have been the result of a subsequent collision that took place after the event that gave birth to the main family.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Características dinámicas . . . . .	2
1.1.1. Distribución de asteroides según semieje mayor . . . . .	4
1.1.2. Resonancias orbitales . . . . .	8
1.2. Características físicas . . . . .	9
1.2.1. Clasificación taxonómica . . . . .	13
1.2.2. Familias de asteroides . . . . .	17
1.3. Influencia de fuerzas no gravitatorias . . . . .	18
1.3.1. Efecto Yarkovsky: descripción del fenómeno . . . . .	19
1.3.2. Efecto YORP: descripción del fenómeno . . . . .	21
<b>2. Hungarias</b>	<b>23</b>
2.1. Mapas dinámicos osculadores . . . . .	29
2.1.1. Integraciones numéricas . . . . .	30
2.1.2. Mapas dinámicos con cuatro planetas perturbadores, $t = 6 \times 10^5$ años . . . . .	31
2.1.3. Mapas dinámicos con siete planetas perturbadores, $t = 6 \times 10^5$ años . . . . .	34
2.1.4. Mapas dinámicos con cuatro planetas perturbadores a $t = 1 \times 10^6$ años . . . . .	35
<b>3. Identificación de resonancias seculares</b>	<b>41</b>
3.1. Resonancias seculares . . . . .	42
3.2. Resonancias seculares en el espacio de elementos propios . . . . .	45
3.2.1. Ajuste empírico . . . . .	45
3.3. Caracterización de las estructuras observadas en los mapas dinámicos	48

<b>4. Sub-grupo resonante en el espacio de frecuencias propias</b>	<b>57</b>
4.1. Método de agrupamiento jerárquico (HCM) . . . . .	61
4.1.1. HCM en el espacio de frecuencias propias . . . . .	63
4.1.2. Implementación del HCM . . . . .	65
4.2. Evolución orbital de asteroides por efecto Yarkovsky . . . . .	67
4.2.1. Efecto Yarkovsky: modelo matemático . . . . .	71
4.2.2. Simulaciones numéricas . . . . .	73
<b>5. Conclusiones y perspectivas futuras</b>	<b>81</b>
<b>A. Datos del Sistema Solar</b>	<b>87</b>
<b>B. Formulación matemática del efecto Yarkovsky</b>	<b>89</b>
B.1. Parámetros físicos . . . . .	90

---

# Capítulo 1

## Introducción

En el Sistema Solar existe una gran cantidad de cuerpos rocosos y metálicos, más pequeños que los planetas, conocidos como asteroides, que en general orbitan alrededor del Sol y son de forma irregular. Se asume que se formaron a partir de la misma nube molecular que dio origen al Sistema Solar, hace 4600 millones de años, y que se tratan de planetesimales que no llegaron a acretar en cuerpos de mayor tamaño debido a la influencia gravitatoria principalmente de Júpiter. Por este motivo, usualmente se hace referencia a ellos como los “escombros de la formación planetaria”. Si bien es posible hallarlos a lo largo de todo el Sistema Solar, la población principal se encuentra confinada en una región localizada entre las órbitas de los planetas Marte y Júpiter, en lo que se denomina Cinturón Principal de asteroides.

En el año 1801 el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubre por primera vez un objeto en esta región, el asteroide (1)Ceres, que tiene un diámetro aproximado de 950 km y orbita a una distancia media heliocéntrica de 2,77 UA. A partir de este descubrimiento, en los años siguientes se fue incrementando rápidamente el número de objetos nuevos identificados. La Tabla 1 muestra los primeros cuatro asteroides identificados.

Asteroide	Diámetro medio (km)	Distancia media (UA)	Año y descubridor
(1)Ceres	~ 950	2,77	1801, Giuseppe Piazzi
(2)Palas	~ 520	2,77	1802, Heinrich W. Olbers
(3)Juno	~ 230	2,67	1804, Karl L. Harding
(4)Vesta	~ 525	2,36	1807, Heinrich W. Olbers

Tabla 1.1: Primeros asteroides encontrados en la región del Cinturón Principal.

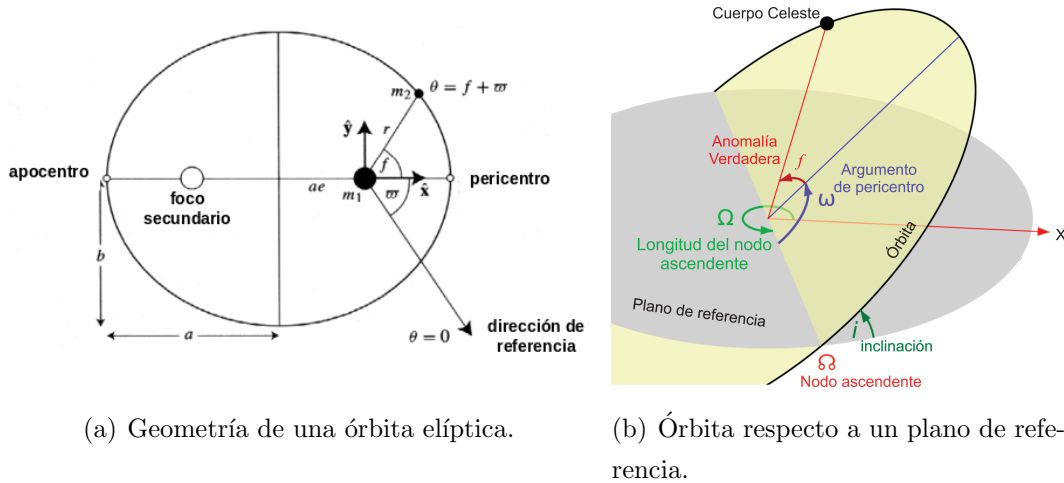
Gracias a la construcción de nuevos y grandes telescopios, y a la realización de campañas de búsqueda, al día de la fecha se encuentran catalogados alrededor de 800 mil objetos cuyas características principales se exponen en la base de datos del Minor Planet Center (MPC) (<https://www.minorplanetcenter.net>). A aquellos asteroides cuyas órbitas se encuentran bien determinadas, se les asigna un número de identificación según el orden en el que fueron descubiertos, por esta razón se los llama asteroides numerados. No obstante, a pesar de ser numerosos, la masa total combinada de todos los asteroides no supera las  $5 \times 10^{-4} M_{\oplus}$  (masas de la Tierra).

Los asteroides pueden ser clasificados según sus características dinámicas (por ej., elementos orbitales, rotación) y físicas (por ej., albedo, tipo espectral) lo que permite muchas veces definir regiones en el Sistema Solar que albergan poblaciones específicas de asteroides con cualidades comunes (asteroides resonantes, grupos dinámicos, familias, gradientes químicos, entre otras). A continuación se describen algunas de las distribuciones y características más relevantes.

## 1.1. Características dinámicas

A lo largo de este trabajo haremos constante referencia a las trayectorias que siguen los asteroides alrededor del Sol. Desde el punto de vista de la mecánica celeste, esto responde a un problema de dos cuerpos. El problema de los dos cuerpos busca determinar la trayectoria de dos masas puntuales, en general  $m_1 \gg m_2$ , que se mueven únicamente por la fuerza de atracción gravitatoria que se ejercen entre sí, asumiendo que cumplen con la Ley de Gravitación Universal de Newton (para detalles en el planteamiento y resolución del problema ver Murray C. y Dermott S., *Solar system dynamics*, Capítulo 2). La masa  $m_2$  describirá una trayectoria cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) alrededor de  $m_1$ . Los vectores posición y velocidad de  $m_2$  respecto a la masa  $m_1$  siempre se mantienen en el plano perpendicular al vector momento angular; la órbita osculadora del objeto puede construirse si se mide la posición y velocidad en un instante de tiempo  $t$  determinado. Sin embargo, en la práctica resulta útil hacer uso de los elementos orbitales, que también describen la trayectoria del cuerpo de interés y además proporcionan nociones sobre la geometría de la órbita. Estos son: excentricidad ( $e$ ), semieje mayor ( $a$ ), inclinación ( $i$ ), argumento del pericentro ( $\omega$ ), longitud del nodo ascendente ( $\Omega$ ) y anomalía verdadera ( $f$ ). Dados estos seis parámetros y especificando un plano de referencia,

puede describirse una órbita de forma unívoca en el espacio (Ver Figura 1.1).



(a) Geometría de una órbita elíptica.

(b) Órbita respecto a un plano de referencia.

Figura 1.1: (a) Relación entre los elementos orbitales y la geometría de una órbita elíptica. (b) Órbita respecto a un plano de referencia.

El valor del semieje mayor y de la excentricidad determinan la forma de la órbita (circunferencia  $e = 0$ , elipse  $0 < e < 1$ , parábola  $e = 1$ , hipérbola  $e > 1$ ). En el Sistema Solar las órbitas más estables tienen  $e \ll 1$ , es el caso de los planetas (excepto Mercurio,  $e = 0,21$ ) y algunos asteroides (los elementos orbitales de los planetas del Sistema Solar referidos a la eclíptica media y el equinoccio J2000, se encuentran listados en el Apéndice A).

La distancia relativa entre los dos cuerpos resulta:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (1.1)$$

La ecuación anterior muestra que  $r$  toma un valor mínimo  $r_p = a(1 - e)$  y un valor máximo  $r_a = a(1 + e)$ , para  $f = 0$  y  $f = \pi$ , respectivamente. Estos puntos de la órbita son llamados pericentro y apocentro, y comúnmente se denotan por  $q = r_p$  y  $Q = r_a$ . La anomalía verdadera  $f$  se mide respecto de la línea que une el foco principal con el pericentro de la órbita, en sentido directo. La longitud del pericentro  $\varpi$  es una constante en el problema de dos cuerpos, sin embargo, si se introducen perturbaciones adicionales puede variar con el tiempo; se define como la separación angular entre la dirección a un punto de referencia, comúnmente el punto vernal, y la dirección del pericentro de la órbita. Para completar la descripción,

es necesario introducir dos ángulos más, que nos permitan orientar la órbita en el espacio tridimensional respecto a un sistema de coordenadas de referencia, como se muestra en la Figura 1.1b. Si consideramos el movimiento de los planetas alrededor del Sol, usualmente se toma como plano de referencia el de la eclíptica y línea de las abscisas en dirección al punto vernal, la terna tendrá orientación positiva con uno de los ejes perpendicular al plano de referencia. En general, el plano orbital estará inclinado respecto del plano de referencia un ángulo  $i$ . La línea de intersección entre el plano orbital y el plano de referencia es llamada línea de los nodos; sobre esta línea el punto por el que cruce el objeto moviéndose de abajo hacia arriba del plano de referencia se denomina nodo ascendente. La longitud del nodo ascendente  $\Omega$  es el ángulo formado entre la dirección al nodo ascendente y la línea de referencia (por ej., punto vernal).

A lo largo de este trabajo se hará referencia a dos tipos de elementos orbitales: los osculadores y los propios. Se denomina elementos osculadores a los parámetros orbitales de un objeto que se miden en cierto instante de tiempo, mientras que los elementos propios se obtienen a partir de los elementos osculadores cuando se realiza un promedio sobre largas escalas de tiempo, en las que pueden ser considerados como constantes.

### 1.1.1. Distribución de asteroides según semieje mayor

Según el semieje mayor, la distribución de asteroides no es uniforme, tal como puede observarse en la Figura 1.2, donde se muestra como ejemplo que para  $1 \text{ UA} < a < 5,5 \text{ UA}$  existen regiones densamente pobladas y otras prácticamente desprovistas de objetos para valores específicos de  $a$ . En particular, algunos de estos vacíos se conocen como Lagunas de Kirkwood (Kirkwood, 1885) y son regiones de alta inestabilidad dinámica, producidas por resonancias de movimientos medios (RMM), que definiremos en la próxima sección.

La Tabla 1.1.1 es una adaptación del trabajo de Hartmann et al. (2005), donde se observa que a pesar de que el cinturón principal se encuentra entre las órbitas de Marte y Júpiter, los asteroides también pueblan la región interna a la órbita del planeta rojo y la externa a la del planeta Júpiter. De forma cualitativa, esto mismo se expone en la Figura 1.3, donde se aprecia la distribución actual de asteroides en el plano de semieje mayor vs. excentricidad.



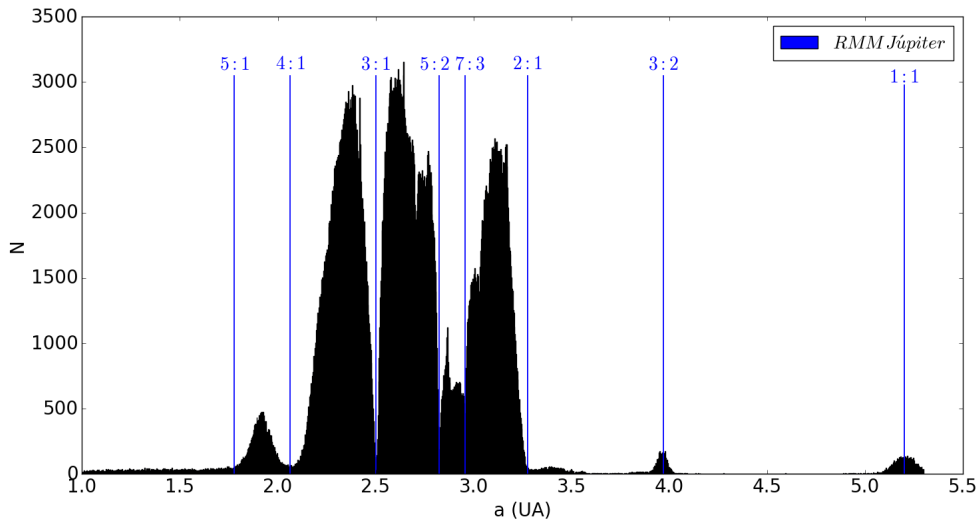


Figura 1.2: Distribución de asteroides para  $1UA < a < 5,5UA$ . Se evidencian regiones densamente pobladas de objetos y otras prácticamente vacías, asociadas con regiones donde actúan resonancias de movimientos medios con los planetas. En particular, en azul se muestran algunas de las RMM más influyentes asociadas al planeta Júpiter.

Grupo de asteroides	Distancia media [UA]	q [UA]	Q [UA]
Aten	0,83 – 0,97	0,46 – 0,79	1,14 – 1,22
Apollo	1,24 – 2,39	0,42 – 0,89	1,66 – 3,91
Amor	1,46 – 2,66	1,12 – 1,48	1,78 – 4,07
Cinturón principal interno	2,20 – 2,45	1,79 – 2,20	2,57 – 2,93
Cinturón principal medio	2,58 – 3,06	1,78 – 2,82	2,81 – 3,60
Cinturón principal externo	3,13 – 4,26	2,46 – 4,12	3,29 – 4,40
Trojanos	5,08 – 5,28	4,40 – 5,0	5,20 – 6,0
Centauros	13,7 – 24,9	6,6 – 11,9	19,0 – 37,7

Tabla 1.2: Clasificación de asteroides según su distancia heliocéntrica. Tomado de Hartmann (2005).

Esta primera clasificación de objetos resulta del análisis de sus características dinámicas, principalmente la distancia heliocéntrica, el análisis de distancias mínimas ( $q$ ) y máximas ( $Q$ ) al Sol que pueden hacerlos cruzadores de planetas, la in-

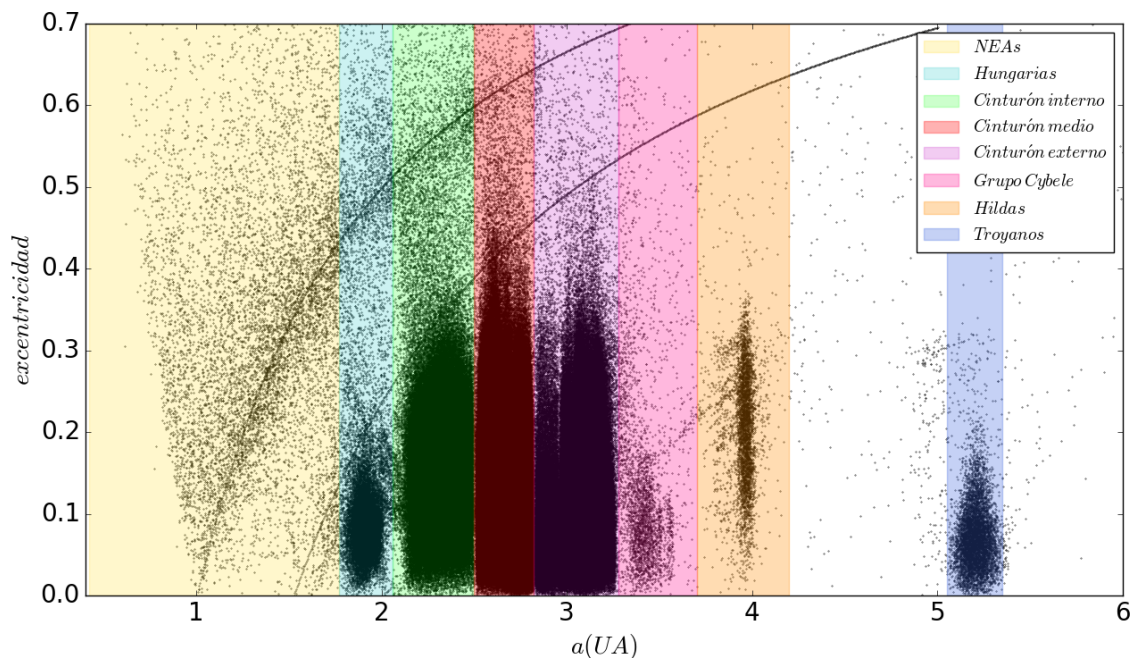


Figura 1.3: Distribución de asteroides en el plano de elementos osculadores semieje mayor vs. excentricidad, para cuerpos con  $0,5UA < a < 6UA$  (datos extraídos del MPC). Las franjas de colores separan algunos de los grupos mencionados en la Tabla 1.1.1. Las curvas en negro representan los límites para que un objeto se convierta en cruzador del planeta Tierra (curva izquierda) y cruzador de Marte (curva derecha).

teracción con resonancias de movimientos medios y con resonancias seculares. Los grupos más destacados son:

- **Aten:** sus órbitas, por lo general, son internas a la órbita de la Tierra. Sin embargo, aquellos asteroides con una distancia afélica  $Q > 1UA$ , son cruzadores de la órbita terrestre. Hartmann (2005) indica que el rango de diámetros para estos objetos oscila entre 0,2 y 3,4 km.
- **Apollo:** cruzan regularmente las órbitas de la Tierra y Marte, debido a que sus distancias perihélicas son  $q < 1UA$  y las distancias afélicas mayores que el afelio de Marte,  $Q > 1,52 UA$ . Tienen diámetros que van desde los 2 a los 10 km.
- **Amor:** tienen distancias perihélicas que los mantienen apartados de la órbita terrestre, sin embargo sus distancias afélicas los hacen cruzadores de la órbita del planeta Marte. Los diámetros de estos cuerpos varían entre 6 y 30 km.

- **Hungarias:** se encuentran entre la órbita de Marte y el borde interno del cinturón principal, aislados del mismo por las interacciones con las resonancias de movimientos medios 5:1 y 4:1 con Júpiter y las resonancias seculares  $\nu_5$ ,  $\nu_6$  y  $\nu_{16}$  (Gradie et al., 1979; Milani et al., 2010). Una de sus características más distintivas es el apartamiento de más de  $16^\circ$  del plano de la eclíptica. (434)Hungaria posee alrededor de 11 km de diámetro y es el mayor objeto hallado en la región.
- **Cinturón principal interno:** las órbitas de los asteroides se caracterizan por ser menos excéntricas que los grupos anteriores, y por tener inclinaciones muy próximas al plano de la eclíptica. Esta parte del cinturón queda separada del resto por la presencia de la RMM 3:1 con Júpiter en 2,5 UA. El objeto más grande de la región es (4)Vesta que posee un diámetro de  $\sim 525$  km.
- **Cinturón principal medio:** tienen distancias heliocéntricas promedio que van desde 2,58 a 3,06 UA e inclinaciones que pueden alcanzar los  $35^\circ$ . (1)Ceres, (2)Pallas, (704)Interamnia, (15)Eunomia y (3)Juno, son los objetos de mayor tamaño con diámetros aproximados de 950 km, 520 km, 334 km, 272 km y 230 km, respectivamente.
- **Cinturón principal externo:** las órbitas en la región más externa tienen distancias promedio al Sol de entre 3,13 y 4,26 UA, bajas excentricidades e inclinaciones que no superan los  $26^\circ$ . El más conspicuo representante de la región es (10) Hygea, con un diámetro de  $\sim 429$  km.
- **Hildas:** se concentran en los alrededores de la resonancia de movimientos medios 3:2 con Júpiter, en una fina franja en semieje mayor centrada en  $\sim 3,97$  UA (Ferraz-Mello et al., 1998b). Esta población constituye un ejemplo de que las resonancias de movimientos medios también pueden agrupar objetos, protegiéndolos de otras perturbaciones planetarias, creando una zona de gran estabilidad dinámica.
- **Trojanos:** son asteroides coorbitales con el planeta Júpiter, están ubicados en la región estable asociada a los puntos de equilibrio del modelo circular de tres cuerpos restringido Sol-Júpiter, conocidos como puntos lagrangeanos  $L_4$  y  $L_5$  (Szebehely, 1967). Al ser coorbitales con Júpiter, se los considera capturados en resonancia de movimientos medios 1:1 con el planeta.

- **Centauros:** la variación de sus afelios y perihelios indica órbitas de alta excentricidad, por fuera de la órbita de Júpiter y más allá de la de Neptuno. El rango de tamaños para estos asteroides se encuentra entre los 40 a 300 km de diámetro.

### 1.1.2. Resonancias orbitales

Las resonancias de movimientos medios (RMM) se presentan cuando existe conmensurabilidad entre los movimientos medios  $n$  de dos o más cuerpos; un caso que resultará de interés para este trabajo es el que involucra a un planeta y un asteroide. Un ejemplo de esto se presentó en la sección anterior con la población de los Hildas, que se encuentran capturados en RMM 3:2 con Júpiter, es decir que sus movimientos medios verifican  $2n = 3n_j$ , siendo  $n$  y  $n_j$  los movimientos medios del asteroide y de Júpiter, respectivamente. En otras palabras, esto significa que en el tiempo en que uno de estos asteroides completa tres órbitas alrededor del Sol, Júpiter completa dos. Este caso constituye un ejemplo de que las RMM pueden proteger una población, generando una isla de estabilidad dinámica, donde los asteroides quedan protegidos de la acción perturbadora del resto de los planetas. Sin embargo, las RMM pueden también generar zonas de mucha inestabilidad produciendo los vaciamientos de objetos que se observan en las Lagunas de Kirkwood. Cuando un planeta y un asteroide están en resonancia, la configuración orbital se repite de forma periódica potenciándose así la acción perturbadora del planeta sobre el asteroide, lo que genera una modificación de los parámetros orbitales del cuerpo menos masivo. No se trata de un efecto instantáneo sobre la órbita del asteroide, el movimiento resonante surge luego de promediar el efecto acumulativo de las pequeñas perturbaciones del planeta sobre el asteroide luego de muchas revoluciones heliocéntricas.

Matemáticamente puede realizarse un cálculo sencillo que provee las posiciones nominales de los semiejes en los cuales actúan las RMM. A modo de ejemplo, supongamos que Júpiter es el planeta que perturba la órbita de un asteroide (la cuenta es análoga para cualquier planeta). La tercera ley de Kepler aplicada al perturbador resulta

$$n_J^2 a_J^3 = \mu_J \tag{1.2}$$

donde  $n_J$  es el movimiento medio de Júpiter,  $a_J$  es el semieje mayor de la órbita y  $\mu_J = G(m_\odot + m_J)$  siendo  $G$  la constante de gravitación universal,  $m_\odot$  la masa del

Sol y  $m_J$  la masa del planeta. De forma análoga, para el asteroide se obtiene

$$n_A^2 a_A^3 = \mu_A \quad (1.3)$$

con  $n_A$  el movimiento medio del asteroide,  $a_A$  el semieje mayor de la órbita y  $\mu_a = G(m_\odot + m_A)$ , siendo  $m_A$  la masa del asteroide. Asumiendo  $\mu_J \sim \mu_A$  y haciendo el cociente entre las ecuaciones 1.2 y 1.3 se obtiene

$$a_A \approx \left( \frac{n_J}{n_A} \right)^{2/3} a_J \quad (1.4)$$

Si se define  $p$  como el grado de la resonancia y  $q$  el orden de la misma, siendo ambos valores enteros, se puede definir la commensurabilidad entre movimiento medios de dos objetos como

$$\frac{n_J}{n_A} = \frac{p}{p+q} \quad (1.5)$$

la localización aproximada de la resonancia  $|p+q| : |p|$  es

$$a \approx \left( \frac{p}{p+q} \right)^{2/3} a_J \quad (1.6)$$

siendo el orden  $q \geq 0$ . El objeto resonante puede ser interior a la órbita del perturbador, en tal caso  $p > 0$ , o exterior, donde  $p < 0$ . Existen infinitas RMM, sin embargo, solo las de órdenes más bajos tienen influencias dinámicas de mayor relevancia. En la Figura 1.2 se observan las RMM más importantes con el planeta Júpiter.

Por otra parte, existen otro tipo de mecanismos resonantes como las resonancias seculares, la resonancia de evección y el mecanismo de Kozai-Lidov. Las resonancias seculares son combinaciones resonantes entre las frecuencias de los ángulos relacionados con la retrogradación de la línea de los nodos ( $\Omega$ ) y la precesión del pericentro de las órbitas ( $\varpi$ ), de uno o más planetas y un asteroide. La obtención de la posición nominal de estas resonancias en el espacio de elementos propios no es tan inmediata como en el caso de las RMM. En el Capítulo 3 presentaremos una idea de cómo estudiar debidamente esta situación. Mientras que en este trabajo no serán contemplados los mecanismos evección y de Kozai-Lidov.

## 1.2. Características físicas

Las propiedades físicas de los asteroides se estudian a través de técnicas observacionales como la espectroscopía, la fotometría, y la polarimetría. Estas técnicas son

complementarias y útiles para la determinación del albedo, la mineralogía, el color y la porosidad de estos objetos.

La espectroscopía proporciona información sobre la mineralogía, es decir, el material que compone la superficie de los asteroides. Estos pueden ser olivinos, piroxenos, espinelas, filosilicatos, componentes orgánicos, minerales hidratados, entre otros. La luz solar incidente es dispersada o absorbida por los átomos de los cristales de los minerales, en longitudes de onda que son específicas, produciendo un espectro de reflexión característico que dependerá de las propiedades ópticas de los materiales que forman la superficie (Bus et al., 2002). A partir de los espectros se define una característica fundamental que es el *color* de los asteroides.

En general, la primer información que se obtiene a partir de la observación fotométrica de un asteroide es su magnitud aparente ( $m$ ). Una observación más detallada, a largo plazo, proporciona la curva de luz de un asteroide que será útil para el cálculo de su periodo de rotación, la dirección del eje de rotación en el espacio, forma del cuerpo y propiedades ópticas de la superficie. El valor de la magnitud no solo está relacionada con el tamaño del objeto y la distancia a la que se encuentra, sino que también dependerá del ángulo de fase  $\alpha$  con el que se realice la observación y del *albedo* del cuerpo. El albedo se define como la fracción de luz incidente, proveniente del Sol, que es reflejada por la superficie del asteroide.

En la Figura 1.4 vemos representado un asteroide de radio  $R$ , que se encuentra a una distancia  $r$  del Sol y  $\Delta$  de la Tierra, el cual es observado con un ángulo de fase  $\alpha$ . Bajo estas circunstancias, la luminosidad proveniente del Sol que incide en la superficie del objeto será:

$$L_{in} = F_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \pi R^2 \quad (1.7)$$

donde  $F_{\odot} = \sigma T_{\odot}^4$  es el flujo del Sol dado por la ley de Stefan-Boltzmann,  $\sigma = 5,670367 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  es un valor constante,  $T_{\odot}$  la temperatura solar efectiva y  $R_{\odot}$  el radio solar. Parte de esta energía será reflejada por el asteroide, siguiendo la relación:

$$L_{ref} = L_{in} A \quad (1.8)$$

donde  $A$  es un factor que toma valores entre 0 y 1, llamado *albedo Bond*, y que representa la fracción de energía reflejada integrada en todo el espectro y para todo

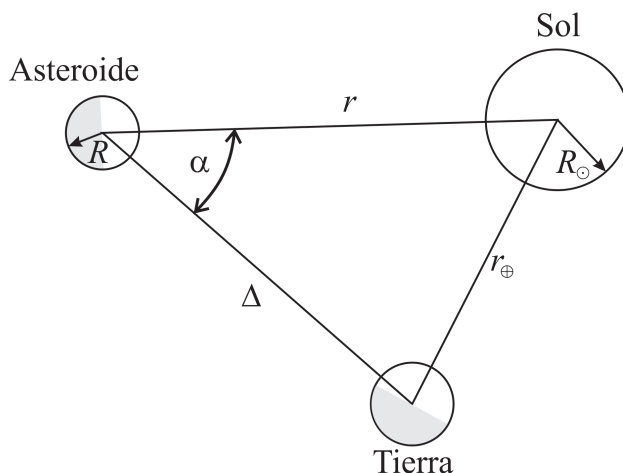


Figura 1.4: Esquema de observación de un asteroide desde la Tierra bajo un ángulo de fase  $\alpha$ .

ángulo de fase.

El flujo observado del asteroide en un cierto ángulo de fase  $\alpha$  (energía por unidad de área y de tiempo) será:

$$F_{obs}(\alpha) = \frac{L_{ref}}{4\pi\Delta^2}\phi(\alpha)C \quad (1.9)$$

donde  $\phi(\alpha)$  es la función de fase tal que  $\phi(0) = 1$ . La constante de normalización  $C$  se obtiene de:

$$\int_S F_{obs}(\alpha)dS = L_{ref} \quad (1.10)$$

$$\int_S \frac{L_{ref}}{4\pi\Delta^2}\phi(\alpha)CdS = L_{ref} \quad (1.11)$$

$$\int_S \frac{1}{4\pi\Delta^2}\phi(\alpha)CdS = 1 \quad (1.12)$$

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\Delta^2}\phi(\alpha)C\Delta \sin(\alpha)d\alpha\Delta d\varphi = 1 \quad (1.13)$$

de donde

$$C = \frac{2}{\int_{\alpha=0}^{\pi} \phi(\alpha) \sin(\alpha)d\alpha} \quad (1.14)$$

Para una superficie plana ideal (Lambertiana) se define  $A_L = 1$  y la función de fase toma la forma:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha) & 0 < \alpha < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases} \quad (1.15)$$

con lo que se deduce  $C_L = 4$ .

Por otra parte, se define el *albedo geométrico*  $p$  como la relación existente entre el flujo observado del objeto en fase cero y el flujo de una superficie plana ideal:

$$p = \frac{F_{obs}(\alpha = 0)}{F_L} = \frac{CA}{C_L A_L} = \frac{CA}{4} \quad (1.16)$$

El vínculo entre albedo Bond y geométrico viene dado por:

$$A = pq \quad (1.17)$$

donde  $q = 2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \phi(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha$ .

En general la función de fase  $\phi(\alpha)$  no se conoce, pero siempre es posible medir  $F_{obs}(0)$ . Es decir, siempre puede tenerse una estima del albedo geométrico, mientras que el albedo Bond solo se conoce en los casos en que  $q$  puede calcularse.

Por otra parte, dado que:

$$F_{obs}(\alpha) = cte \frac{\phi(\alpha)}{(r\Delta)^2} \quad (1.18)$$

por definición de magnitud aparente  $m$ , se tiene que:

$$m = C' - 2,5 \log F_{obs}(\alpha) = H + 5 \log(r\Delta) - 2,5 \log \phi(\alpha) \quad (1.19)$$

siendo  $H$  la magnitud absoluta del objeto, que se define como el brillo aparente del asteroide que podría medirse a una distancia  $r = \Delta = 1 \text{ UA}$  con un ángulo de fase  $\alpha = 0$ .

Existe una relación empírica entre diámetro  $D$  en km de un asteroide, su albedo geométrico  $p$  y la magnitud absoluta  $H$  (Vokrouhlický et al., 2006):

$$D \simeq \frac{1340}{\sqrt{p}} 10^{-H/5} \quad (1.20)$$



esta estima resulta muy útil en numerosas situaciones, aunque trae consigo el problema de que los tres parámetros involucrados no se relacionan de forma unívoca y por esta razón, para un asteroide de gran tamaño con un bajo albedo se puede obtener la misma magnitud absoluta que para un asteroide pequeño con alto albedo. Sin embargo, cuando el radio del cuerpo puede ser medido de forma directa, el albedo puede ser calculado utilizando la magnitud observada, así mismo, el radio puede ser estimado utilizando la magnitud absoluta y asumiendo un valor para el albedo.

Por último, el estudio de la variación del porcentaje de luz polarizada en función del ángulo de fase, permite obtener información sobre diferentes propiedades físicas del objeto, tales como la rugosidad y porosidad, en las que no vamos a hacer mayor énfasis en este trabajo.

### 1.2.1. Clasificación taxonómica

Desde que las primeras mediciones de color fueron reportadas por Bobrovnikoff en 1929, hubo intentos por desarrollar un sistema de clasificación a partir de las similitudes observadas. Zellner (1973) fue uno de los primeros en proponer una bimodalidad en la distribución de los albedos, separándolos en dos grandes grupos:

- Brillantes o “rocosos”
- Oscuros o “carbonáceos”

Chapman et al. (1975), motivados por la combinación de espectrofotometría de banda angosta, junto con mediciones de albedo fotométricos y radiométricos desarrollados a mitad de los 70, proponen la primera nomenclatura taxonómica basada en un sistema de letras:

- C: objetos carbonáceos oscuros
- S: objetos silíceos
- U: objetos que no se ajustaban a las últimas dos categorías.

En los años siguientes, no solo mejoras en la instrumentación sino también en las técnicas observacionales, propiciaron un aumento sustancial de las bases de datos, que permitieron desarrollar las bases de una taxonomía más rigurosa.

La clasificación taxonómica más utilizada fue la desarrollada por Tholen (1984), a partir de los espectros de banda ancha obtenidos por el *Eight-Color Asteroid Survey* (ECAS), en un rango entre  $0.31 \mu\text{m}$  y  $1.06 \mu\text{m}$ . La Tabla 1.3 recopila las principales características espectrales de las 14 clases propuestas por Tholen, cada una indicada con una letra.

Una clasificación más reciente es la planteada por Bus & Binzel (2002 y 2002b) a partir de los datos proporcionados por el *Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey* (SMASS), que produjo una muestra de observaciones espectroscópicas para 1447 asteroides cuya resolución era superior a los de la ECAS. Inicialmente estos autores intentaron apearse a la clasificación propuesta por Tholen, pero ciertos factores lo imposibilitaron: se observó en un rango de longitudes de onda menor, entre  $0.44 \mu\text{m}$  y  $0.92 \mu\text{m}$ , y no se tuvieron en cuenta los albedos. Es así que las clases se ampliaron de 14 a 26, y se dividieron en tres grandes grupos con distintas subclases cada uno.

- Grupo espectral C: objetos carbonáceos.  
Subclases: B, C, Cg, Cgh, Ch, Cb.
- Grupo espectral S: Objetos rocosos con abundancia de silicatos.  
Subclases: A, Q, R, K, L, S, Sa, Sq, Sr, Sk, Sl.
- Grupo espectral X: objetos mayoritariamente metálicos.  
Subgrupos: Xe, Xc, Xk. Incluye los tipos E, M y P de Tholen.
- Fuera de los grupos principales: T, D, Ld, O,V.

A partir de las observaciones espectroscópicas de los asteroides es posible realizar comparaciones con la muestra de meteoritos presentes en la Tierra, con el fin de hallar análogos meteoríticos a las diferentes clases taxonómicas propuestas y así tener una mejor comprensión de la composición de los objetos.

La Figura 1.5 muestra la distribución de los tipos taxonómicos respecto a la distancia heliocéntrica y puede advertirse que esta no es homogénea. Si se asume que las diferencias entre los espectros y albedos de las diferentes clases taxonómicas se debe a diferencias en la mineralogía, entonces lo que observamos es una estratificación en la composición del cinturón de asteroides, que tuvo lugar en el proceso de condensación de la nebulosa solar. De acuerdo con esto, el gradiente de temperaturas alteró la composición química del disco haciendo que solo los silicatos de altas y

## 1. INTRODUCCIÓN

Clase	Características espectrales y mineralogía
Clases de bajo albedo ( $< 0,065$ )	
C	Asteroides carbonosos. Dominantes en el cinturón después de las 2.7 UA. Presentan una banda de absorción cercana a los $0.4 \mu m$ . Su espectro es plano y levemente enrojecido en longitudes de onda superiores a $0.4 \mu m$ . Subclases: <b>B</b> , <b>F</b> y <b>G</b> .
D	Espectro rojo sin marcas distintivas, posiblemente debido a material orgánico. Borde externo del cinturón y Troyanos.
P	Podrían contener una gran fracción de polímeros de carbono o silicatos ricos en compuestos orgánicos. Espectro plano o levemente enrojecido cuya forma semeja la de los asteroides tipo M.
T	Moderadas bandas de absorción próximas a los $0.85 \mu m$ , espectro plano en longitudes de onda largas. Raros, composición desconocida, posiblemente tipo C muy alterado o tipo P.
Clases de albedo moderado ( $\sim 0,14$ )	
S	Asteroides rocosos. Cantidades significativas de silicatos y metales, incluyen minerales como olivina y piroxeno en sus superficies. Clase prevalente en el cinturón interno y medio. Banda característica de absorción cercana a $0.7 \mu m$ . Leves bandas de absorción próximas a 1 y $2 \mu m$ .
M	Asteroides de roca y hierro o hierro-niquel; espectro sin rasgos característicos, plano o levemente enrojecido.
Q	Semejante a los meteoritos de la condritas ordinarias. Bandas de absorción antes y después de $0.7 \mu m$ .
A	Espectro muy enrojecido antes de $0.7 \mu m$ . Fuerte banda de absorción cerca de $1 \mu m$ .
V	Fuerte banda de absorción antes de $0.7 \mu m$ y cerca de $0.1 \mu m$ . Similar a las acondritas basálticas.
R	Espectro intermedio entre las clases A y V. Similar al de las acondritas ricas en olivinos.
Clase de alto albedo ( $> 0,3$ )	
E	Asteroides de enstatita. Concentrados en el borde interno del cinturón. Espectro sin rasgos distintivos, plano y levemente enrojecido.

Tabla 1.3: Tipos taxonómicos en la clasificación de Tholen. Tabla extraída de Cañada-Assandri (2012).

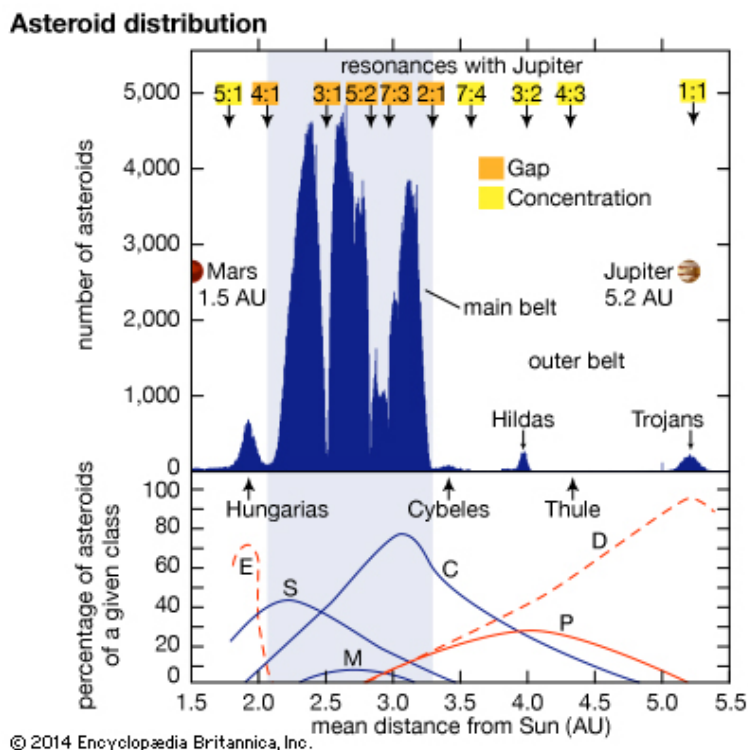


Figura 1.5: Distribución de tipos taxonómicos en función de la distancia heliocéntrica.

moderadas temperaturas sobrevivan en la zona más interna del Sistema Solar y que los minerales carbonáceos de más baja temperatura prevalezcan en las zonas más frías y externas del mismo. A menos de 2 UA, en la región de asteroides Hungaria, predominan los objetos de tipo E, que son asteroides muy brillantes, compuestos por enstatita libre de hierro, consistente con una formación a altas temperaturas. El cinturón interno está dominado por el tipo S, compuesto de materiales refractarios como el silicato y de metales como níquel y hierro, ricos en olivinos y piroxenos. Este tipo de asteroides cuenta con un albedo moderado. Los asteroides de tipo C predominan en la región externa del cinturón principal, son cuerpos oscuros formados por minerales carbonosos de bajas temperaturas y ricos en elementos volátiles como el agua. En torno a las 4 UA se encuentra el máximo de asteroides tipo P, mientras que el tipo D se halla en 5.2 UA; ambos son asteroides enriquecidos con compuestos de carbono, orgánicos complejos, arcillas, agua y volátiles.

La distribución orbital original de los asteroides se ha ido modificando a causa de las perturbaciones ocasionadas por los planetas, en particular Júpiter, y por los efectos gravitatorios producidos entre los mismos asteroides. Como resultado, las

estratificaciones iniciales han sido alteradas, produciendo un ensanchamiento de las mismas que derivaron en la superposición de tipos taxonómicos visible en la Figura 1.5.

### 1.2.2. Familias de asteroides

Las familias de asteroides son grupos de objetos generados por la ruptura total o parcial de un cuerpo parental debido a una colisión catastrófica o a un evento craterizante. Constituyen un escenario importante para el estudio de la física de los procesos colisionales, aportan información sobre la distribución de tamaños, el campo de velocidades de eyección, la composición química de los asteroides, y la evolución orbital por procesos gravitacionales y no gravitacionales que se producen en el cinturón principal.

Al momento de la formación de una familia, es de esperar que los elementos orbitales osculadores o instantáneos de los fragmentos sean muy similares entre sí. Sin embargo, las perturbaciones planetarias en distintas escalas temporales a las que quedan expuestos los asteroides, modifican de forma constante estos parámetros orbitales, generando una dispersión que los alejará del lugar de origen. Por esto, es imprescindible hallar alguna “marca” que se conserve en la evolución orbital de estos cuerpos para poder inferir un origen común luego de millones de años de evolución. En el caso de órbitas regulares, lejos de condiciones resonantes, es posible realizar un promedio de los elementos osculadores sobre largas escalas de tiempo, en el cual las fluctuaciones de corto y largo periodo son eliminadas. A estos nuevos elementos orbitales se les asigna el nombre de **elementos orbitales propios** y resultan ser cuasi-invariantes de movimiento, que caracterizan la órbita de los asteroides y nos recuerdan la proximidad inicial de las mismas, generadas al momento de la colisión.

El astrónomo japonés Kiyotsugu Hirayama (Hirayama, 1918, 1919), fue el primero en identificar agrupamientos de objetos en el espacio de elementos propios con órbitas casi idénticas entre sí. Hirayama interpretó que esto no podía ser casual, sino que todos los cuerpos de un mismo grupo debían tener un origen colisional común y los denominó “familias de asteroides”.

Debido al modo en el que se originan, todos los miembros de una misma familia tienen composiciones químicas similares entre sí, es decir, comparten la taxonomía

(por ej., Cellino et al. 2002).

Los fragmentos más grandes producidos por la colisión son eyectados con velocidades del orden de la velocidad de escape del cuerpo parental. Luego de que la familia se forme, las órbitas de los distintos fragmentos evolucionan dinámicamente a causa de perturbaciones gravitatorias, como se mencionó anteriormente, pero también producto de fuerzas de radiación térmica tales el efecto Yarkovsky y el efecto YORP, que describiremos en la siguiente sección.

Las familias más destacadas del cinturón principal se observan en la Figura 1.6. Eos, Themis, Koronis, Flora y María conforman el grupo de las cinco familias halladas inicialmente por Hirayama, ese número en la actualidad asciende a decenas. Sin embargo, no existe un consenso acerca del número total, ya que la definición de cada familia se encuentra sujeta al modelo y a la precisión que utilicen los autores para calcular los elementos propios.

### 1.3. Influencia de fuerzas no gravitatorias

El movimiento y la evolución de los cuerpos celestes son generalmente considerados bajo un único dominio, el de la gravedad. El modelo clásico plantea que las colisiones y las fuerzas gravitacionales son los mecanismos principales que rigen la evolución de los asteroides y sus fragmentos. Si bien este modelo nos ha ayudado a comprender numerosos aspectos de la evolución orbital, realiza predicciones que son inconsistentes con las observaciones. En las últimas dos décadas se ha ampliado la comprensión acerca de la evolución de los asteroides considerando la dispersión que producen las fuerzas no gravitacionales tales como el efecto Yarkovsky y YORP (Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack).

El efecto Yarkovsky es un empuje térmico producido cuando los cuerpos pequeños que orbitan alrededor del Sol absorben la luz solar, calientan y re-irradían la energía térmica después de un breve retraso producido por la inercia térmica. Esta emisión, aunque pequeña, produce una fuerza que puede llevar a cambios seculares en la distancia heliocéntrica del objeto, causando que asteroides de 0.1 m a  $\sim 40$  km de diámetro formen una espiral hacia adentro o hacia afuera a diferentes velocidades en función de su tasa de rotación, semieje mayor y propiedades del material

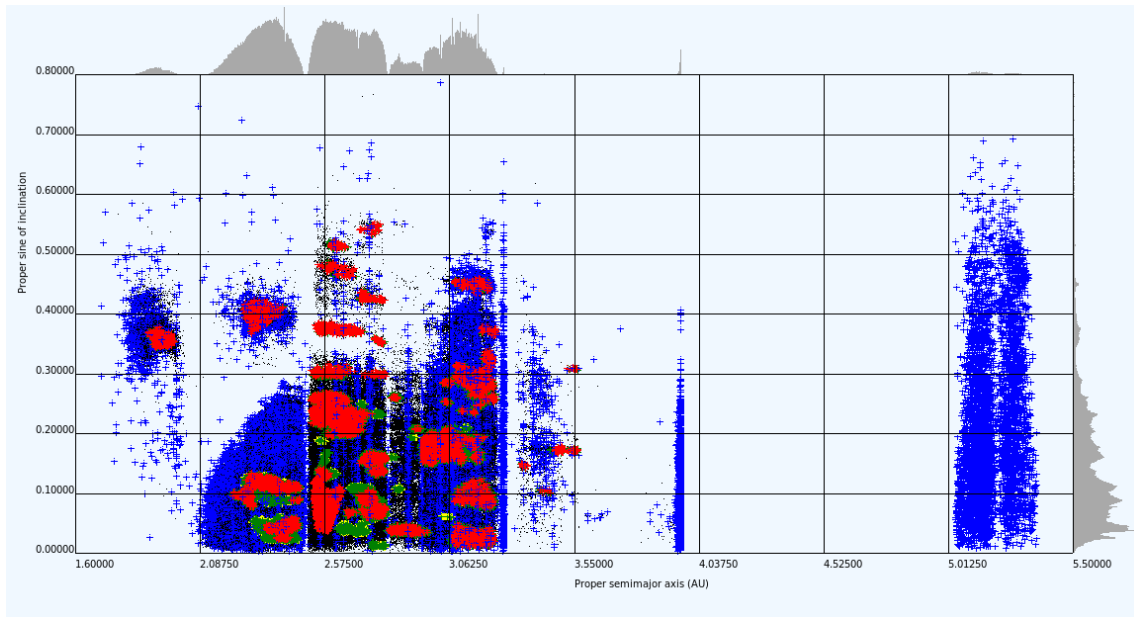


Figura 1.6: Distribución de asteroides en el espacio semieje mayor propio vs. seno de la inclinación propia, para cuerpos con  $1,6 \text{ UA} < a < 5,5 \text{ UA}$ . El código de color hace referencia al estatus de la familia y a las resonancias. Puntos negros=asteroides de fondo, rojo=núcleo de las familias, amarillo=pequeñas familias, verde=familias existentes, púrpura=doble clasificación, azul=resonantes/caóticos. Gráfico extraído del Asteroids Dynamic Site (AstDyS) (Milani et al., 1990, Knežević et al., 2000, Knežević et al, 2003).

que componen su superficie. Esta misma fuerza produce un torque llamado efecto YORP, que además es capaz de modificar las velocidades de giro y las orientaciones de los ejes de rotación de los asteroides.

### 1.3.1. Efecto Yarkovsky: descripción del fenómeno

Puede hacerse una distinción entre dos componentes del efecto Yarkovsky: la diurna y la anual. La idea básica detrás del efecto Yarkovsky diurno se muestra en la Figura 1.7a, donde por simplicidad, vamos a considerar un meteoroide esférico en órbita circular alrededor del Sol y con el eje de rotación de forma perpendicular al plano orbital. La radiación solar incide sobre el hemisferio que apunta al Sol, cerca del ecuador del objeto, de esta manera se tendrá un hemisferio caliente y otro frío. La energía acumulada en la superficie del asteroide será re-irradiada al espacio, típicamente en longitudes de onda del infrarrojo. Sin embargo, como los cuerpos

tienen inercia térmica, la radiación reemitida se producirá con cierto retraso, y por ese motivo, la parte más caliente del objeto será la que se halle sobre el atardecer y no en la zona donde se produzca el medio día solar. Como resultado, la fuerza sobre el meteoroides no será completamente en la dirección radial apuntando hacia el Sol o en sentido opuesto, sino que tendrá una gran componente tangencial al movimiento de traslación. Si bien esta fuerza es muy pequeña en magnitud, acumulada en el tiempo es capaz de causar cambios notorios en la órbita del objeto.

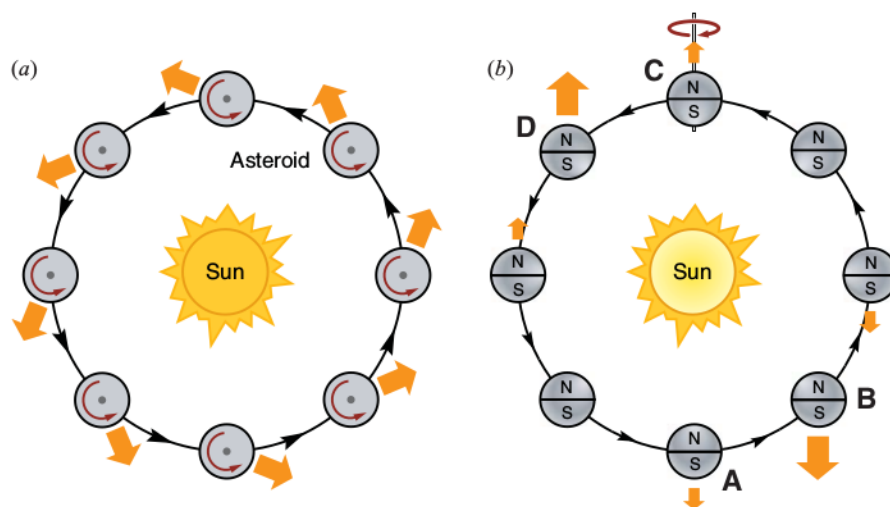


Figura 1.7: (a) Efecto Yarkovsky diurno para un objeto con eje de rotación perpendicular al plano orbital. El meteoroides de rotación prógrada (retrógrada) re-irradia la energía térmica que recibe del Sol, produciendo una fuerza en el mismo sentido (en sentido opuesto) de su trayectoria incrementando (disminuyendo) el valor de semieje de la órbita. (b) Efecto Yarkovsky anual para un asteroide con eje de rotación es paralelo al plano orbital. El calentamiento de ambos hemisferios se produce en los puntos A y C, por inercia térmica la radiación es reemitida en los puntos B y D de la órbita. Como consecuencia se producirá una fuerza transversal opuesta a la velocidad orbital que causará una disminución constante del semieje del meteoroides. Créditos: Bottke et al., 2006b.

El signo de la fuerza del efecto Yarkovsky diurno dependerá del sentido de rotación del meteoroides, si el sentido es prógrada (en sentido contrario a las agujas del reloj, como en la Figura 1.7a) la fuerza se producirá en sentido a la traslación, incrementando el semieje mayor de la órbita, provocando que el objeto se aleje del Sol. Caso contrario, si el meteoroides posee una rotación retrógrada (sentido de las



agujas del reloj) la fuerza se opondrá a su trayectoria provocando una disminución del semieje mayor y una migración en dirección al Sol. En primera aproximación, la componente diurna es mayor cuando el eje de rotación es perpendicular al plano orbital y es nula cuando es paralelo.

La magnitud del efecto diurno depende de la cercanía al Sol, la inclinación del eje de rotación respecto al plano orbital, del tamaño del cuerpo, las propiedades térmicas y la velocidad de rotación. El efecto es insignificante para un cuerpo grande como la Tierra, así como para un objeto muy pequeño en el que la onda térmica penetra en todo el cuerpo y reduce las amplitudes térmicas entre el día y la noche. El efecto es débil, además, para cuerpos con velocidades de rotación nulas o infinitamente rápidas.

La componente anual del efecto Yarkovsky se ilustra en la Figura 1.7b, donde nuevamente consideramos un meteoróide en órbita circular alrededor del Sol pero cuyo eje de rotación paralelo al plano orbital. A diferencia del efecto diurno esta componente es nula cuando el eje de rotación es perpendicular al plano de la órbita. Cuando el objeto está en el punto A el Sol brilla más fuertemente sobre el hemisferio norte, y tal como ocurre en el efecto diurno, existe un retraso debido a la inercia térmica y por esta razón el hemisferio norte se halla más caliente en B. Del mismo modo, en C la radiación llega al hemisferio sur del cuerpo, pero esta zona será más caliente en el punto D. Como resultado la fuerza siempre tenderá a disminuir el semieje de la órbita del meteoróide.

### 1.3.2. Efecto YORP: descripción del fenómeno

La reflexión y reemisión de la luz solar en la superficie de un asteroide puede producir un torque térmico cuando la superficie reflectante tiene forma irregular (Figura 1.8a). Con el tiempo, estos pares pueden afectar la velocidad de giro y las oblicuidades de los cuerpos menores en el Sistema Solar.

El efecto YORP es importante porque controla las velocidades de rotación de los asteroides y esto tiene relación directa con la magnitud y la dirección de las tasas de cambio de semieje en función del tiempo producidas por efecto Yarkovsky.

Rubincam (2000) ilustra en la Figura 1.8b cómo actúa el efecto YORP utilizando

un asteroide rotante de forma esférica con dos cuñas ubicadas a cada lado sobre el ecuador. Los fotones que inciden sobre la zona esférica son reemitidos de forma normal a la superficie sin producir torque alguno, pero en las cuñas no ocurre lo mismo, en A y B las fuerzas térmicas tendrán distintas direcciones produciendo un torque neto que, acumulado en el tiempo, relentizará o aumentará la velocidad de rotación e incluso será capaz de alterar inclinación del eje de rotación.

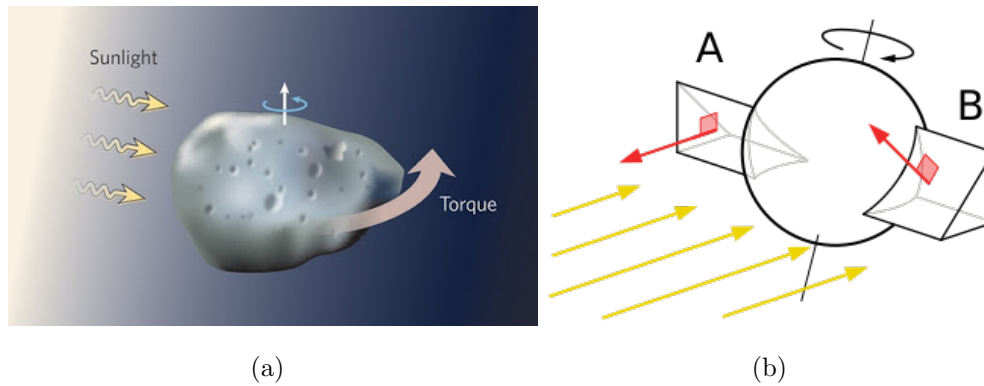


Figura 1.8: Representación gráfica del efecto YORP. El asteroide asimétrico es modelado como una esfera con dos cuñas posicionadas sobre el ecuador. El objeto recibe la radiación del sol y la reemite en la región infrarroja del espectro electromagnético. Los fotones reemitidos por las cuñas poseen diferentes direcciones, produciendo un torque neto a favor o en contra del sentido de giro ocasionando un aumento o disminución de la velocidad de rotación. Créditos imagenes: Nature.

---

## Capítulo 2

# Hungarias

Los Hungarias son una población de asteroides ubicados entre el planeta Marte y el borde interno del cinturón de asteroides, en una franja localizada entre 1,77 y 2,06 UA, relativamente a altas inclinaciones ( $16^\circ < i < 35^\circ$ ) y excentricidades típicas menores que 0.18 (Figura 2.1). Se encuentran rodeados por las resonancias seculares  $\nu_5$ ,  $\nu_6$  y  $\nu_{16}$ , las resonancias de movimientos medios 5:1 y 4:1 con Júpiter, y el espacio orbital que ocupan los cruzadores de Marte (Gradie et al., 1979; Milani et al., 2010). La cercanía a estas resonancias, junto con la interacción con Marte imponen límites dinámicos inestables que rodean la región y la separan del resto del cinturón principal.

La región deriva su nombre del primer objeto descubierto allí y el miembro más grande del grupo, (434)Hungaria. Con un diámetro de  $\sim 11$  km (Warner et al., 2009), este asteroide ha sido identificado como el cuerpo parental de la única familia confirmada hasta la fecha (Lemaitre, 1994), creada por una colisión catastrófica cerca de  $0,5 \times 10^9$  años atrás (Warnet et al., 2009).

De acuerdo a la Figura 1.5, la localización del grupo Hungaria es consistente con la zona ocupada por el máximo en la distribución de asteroides del tipo E, ligados a meteoritos condritos de enstatita y caracterizados por poseer alto albedo (0,3 – 0,4, Tedesco et al., 1989, Gaffey & Kelley, 2004). Sin embargo, estudios espectroscópicos (Carvano et al., 2001) y polarimétricos (Gil-Hutton et al., 2007) realizados en la región concluyen que la distribución de tipos taxonómicos no sería homogénea debido a que existe un porcentaje no despreciable de asteroides de bajo albedo pertenecientes a los tipos taxonómicos S, C y A. Así mismo, Assandri & Gil-Hutton

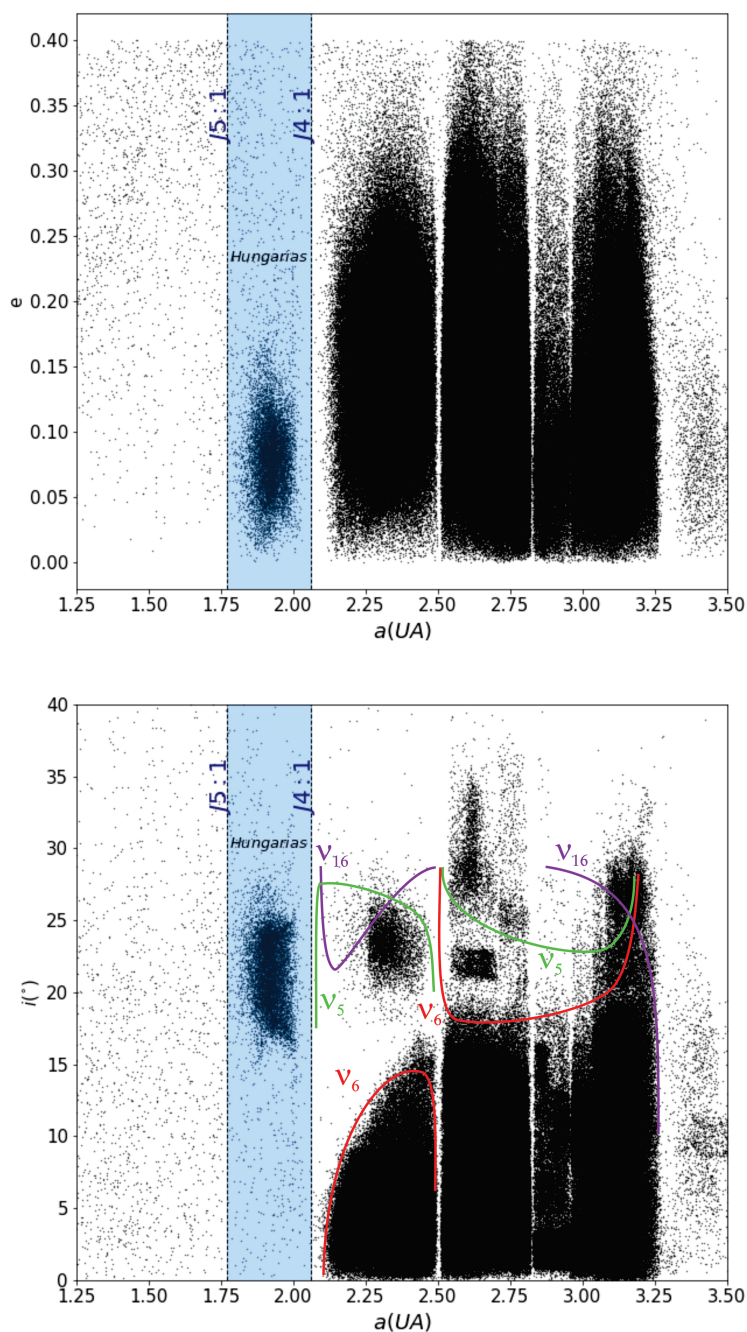


Figura 2.1: Distribución de asteroides en el rango  $1,25 \text{ UA} < a < 3,5 \text{ UA}$ . (a) Semieje mayor vs. excentricidad osculadora. (b) Semieje mayor vs. inclinación osculadora. Las líneas de punto representan las RMM 5:1 y 4:1 con Júpiter, la zona sombreada entre ellas marca la localización del grupo Hungaria. Las curvas continuas de colores representan las principales resonancias seculares localizadas en el cinturón principal.

(2008) determinaron los tipos taxonómicos para una muestra de 614 asteroides

extraída de la cuarta versión del *Moving Object Catalog* (Ivezić et al., 2001) del *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS-MOC4), encontrando:

- 56 % de objetos en la clase amplia X
- 26 % en la clase amplia C
- 10 % de clase S
- 2 % de tipo O
- 1 % de tipo D
- 5 % sin clasificación confiable

Entre ellos, un grupo numeroso liderado por (434) Hungaria, exhibe espectros planos característicos de asteroides de tipo E (pertenecientes a la clase amplia X), que conformarían la familia Hungaria. Además, encuentran que una fracción importante de la población no comparte esta taxonomía. Este último grupo está conformado por asteroides de tipo S y C, que resultan típicos de la región interna del cinturón de asteroides y de zonas intermedias-externas, respectivamente; por lo que no serían miembros originales del grupo, aunque posean características orbitales comunes. Estas observaciones han llevado a los astrónomos a estudiar diversos mecanismos de transporte que permitan explicar la diversidad de tipos taxonómicos en la región. Un trabajo de McEachern et al., (2010) señala que la población Hungaria debe ser repoblada tanto por medios dinámicos como colisionales. Encuentran objetos cuya órbita es cruzadora de la órbita de Marte que pueden quedar atrapados en RMM con este planeta, y una combinación con difusión caótica y efecto Yarkovsky puede conducirlos a la región de los Hungaria.

Por otro lado, las variaciones en la excentricidad de Marte (en un rango de entre 0 y 0,12) producto de las perturbaciones seculares (Laskar et al., 2004b) tienen un impacto directo en la estabilidad de los Hungaria que provoca que constantemente escapen a la región de los cruzadores de la órbita de Marte. A causa de esto, McEachern et al., (2010), encuentran mediante simulaciones numéricas que la población Hungaria no sería estable por la edad del Sistema Solar.

Es posible hacer una interpretación de los límites dinámicos que rodean a la región Hungaria en términos de perturbaciones sobre largas escalas temporales, para

esto, resulta útil trabajar con elementos orbitales propios.

El conocimiento acerca de las características orbitales de las familias de asteroides avanzó significativamente en los años 90, gracias a una serie de trabajos publicados por Milani y Knežević, quienes estudiaron analítica (Milani & Knežević, 1990) y numéricamente (Knežević & Milani, 2000; 2003) cómo determinar elementos propios. Estos autores analizaron de qué manera las resonancias seculares no lineales podrían afectar los valores de los elementos propios cuando fuerzas puramente gravitacionales eran consideradas. En base a la teoría desarrollada por Lemaître y Morbidelli (Lemaître, 1994; Lemaître & Morbidelli, 1994) fueron capaces de obtener elementos propios para órbitas de alta inclinación en el cinturón principal y la región de los Hungaria. El resultado de este proyecto es una gran base de datos de acceso público Asteroids Dynamic Site (AstDyS - <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>), que contiene elementos propios sintéticos y las frecuencias seculares de los cuerpos menores numerados del Sistema Solar.

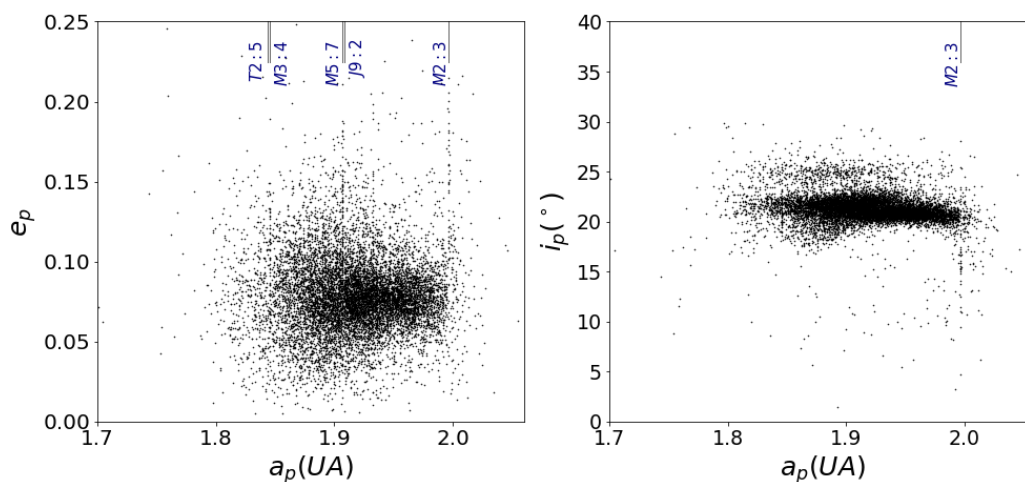


Figura 2.2: Población de asteroides Hungaria en el espacio de elementos propios. Izq.: semieje mayor propio vs excentricidad propia. Der.: semieje mayor propio vs. inclinación propia. Datos extraídos del Asteroids Dynamic Site (AstDyS) (Milani et al., 1990; Knežević & Milani, 2000; 2003). Se muestran las principales RMM que atraviesan la región.

La Figura 2.2 muestra  $\sim 10000$  miembros del grupo Hungaria en el espacio de elementos propios a partir de datos extraídos del AstDyS. En primer lugar obser-

vamos una fuerte concentración de objetos en el espacio de semieje mayor propio vs. excentricidad propia. La excentricidad promedio del grupo es de  $\sim 0,08$  y solo una pequeña fracción de asteroides posee valores de excentricidad superiores a  $0,15$ . El espacio orbital de los Hungaria se encuentra atravesado por numerosas RMM, siendo las resonancias externas con Marte las más relevantes (McEachern et al., 2010), podemos mencionar la M3:4 en 1,8458 UA, M5:7 en 1,9068 UA y la M2:3 en 1,9966 UA, a su vez las dos primeras se encuentran muy cercanas a la T2:5 con la Tierra (1,8436 UA) y a la J9:2 con el planeta Júpiter (1,9082 UA). Esto se evidencia a partir de la acumulación en una disposición vertical de objetos, en los valores de semieje mayor antes mencionados, que se encuentran capturados en dichas resonancias. En el espacio semieje mayor propio vs. inclinación propia observamos un gran cúmulo de objetos en un rango entre  $\sim 20^\circ$  y  $\sim 23^\circ$  de inclinación y otro grupo menos numeroso y menos compacto a más altas inclinaciones. Algunos autores, entre ellos Milani et al., (2010) y Cañada-Assandri (2012), proponen la existencia de una segunda familia colisional que ocupa la región de más altas inclinaciones. Sin embargo, en el momento en el que se desarrollaron los trabajos mencionados, la información espectroscópica y polarimétrica útil para determinar tipos taxonómicos estaba disponible solo de forma parcial y esto resultó insuficiente para llegar a una conclusión firme.

Existen indicios de que la mayoría, pero no todos los objetos que se encuentran en el espacio orbital de los Hungaria, se formaron a partir de una colisión catastrófica que involucró a (434)Hungaria. Warner et al., (2009) estudiaron la distribución en el diagrama de semieje mayor en función de la magnitud absoluta ( $H$ ) (Figura 2.3). Se puede ver la gran concentración de asteroides alrededor de (434)Hungaria (triángulo oscuro) que caen dentro de la zona en forma de V (líneas curvas) característica de un grupo de asteroides originados a partir de una colisión (ver, por ejemplo, Zappalà et al., 2002) y que han sido influenciados por efecto Yarkovsky a lo largo de millones de años. Para definir la zona de la familia en el diagrama, utilizaron la forma canónica (Vokrouhlický et al., 2006)

$$0,2H = \log((a - a_c)/C) \quad (2.1)$$

donde los parámetros  $a_c = 1,94$  UA y  $C = 3 \times 10^{-4}$  UA, fueron elegidos en base a lo discutido por Vokrouhlický et al. (2006b). Encuentran que los miembros de la Familia Hungaria son los que dominan la población, la línea vertical representa el centro de la V y dentro de las líneas curvas residen 2589 del total de objetos, en un

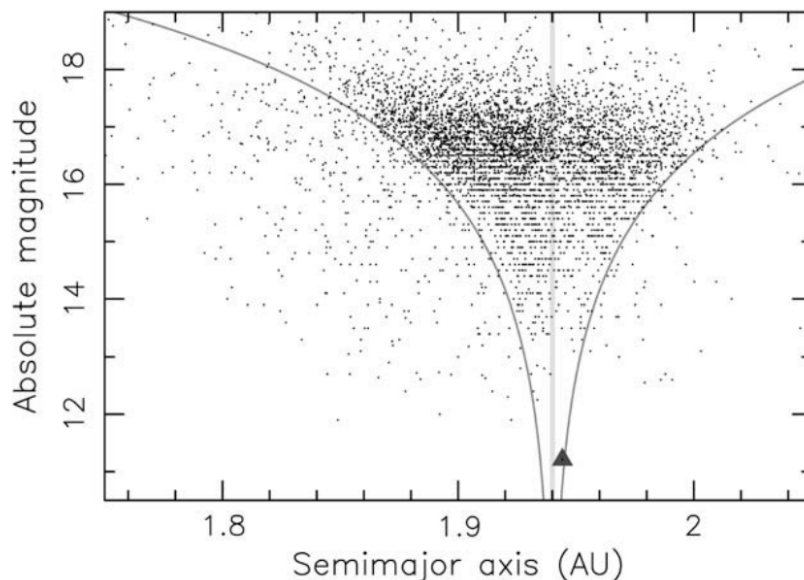


Figura 2.3: Población Hungaria ( $\sim 3000$  objetos extraídos del AstDyS) proyectada en el plano magnitud absoluta  $H$  comparada con el semieje mayor propio. Las líneas curvas en forma de V encierran la mayor concentración de objetos, y la recta vertical gris señala el centro de la V, esta distribución es característica de familias que han sido influenciadas por efecto Yarkovsky. El triángulo negro representa el cuerpo parental, (434)Hungaria. Extraído de Warner et al., (2009)

rango de  $15,5 < H < 17,0$ , mientras que los 232 asteroides que quedan por fuera no serían miembros de la misma. Los autores de este trabajo estiman que el volumen conjunto de todos los asteroides que caen dentro de las curvas es equivalente al de un cuerpo de 26 km, el cálculo se realiza asumiendo que el albedo geométrico de todos los asteroides es 0,38, el mismo que el de (434)Hungaria. Esto implica que la mayoría de los fragmentos son muy pequeños, incluido el cuerpo parental remanente (434)Hungaria, para el que estiman un diámetro de  $\sim 11$  km.

En el gráfico  $a$  vs.  $H$ , la magnitud absoluta se utiliza como un indicador del tamaño de los asteroides (Ecuación 1.20), es así que en la parte superior del diagrama encontramos los objetos de menor tamaño, y en la parte inferior escasos objetos de mayor tamaño. La gran dispersión de objetos observada en la parte superior, tomando como referencia la recta central gris, tiene su origen en que los asteroides más pequeños migran hacia adentro o hacia afuera del centro de la V más rápidamente que los asteroides de mayor tamaño. En particular, los objetos con rotación prógrada migran hacia afuera de la línea vertical gris y aquellos con rotación retrógrada,



migran hacia adentro. (434)Hungaria posee rotación prógrada y se lo observa desplazado del centro de masa de la familia (línea vertical gris) una cantidad  $\sim 0,0045 \text{ UA}$  (Warner et al., 2009). El desplazamiento en semieje mayor de los asteroides debido al campo de velocidades de eyección inicial se calcula mediante:

$$\delta a \sim 2\nu_{esc}/\nu_{orb} \quad (2.2)$$

se tiene que la velocidad de escape del cuerpo parental es  $\nu_{esc} \sim 16 \text{ m/s}$  y la velocidad orbital característica a 2 UA es  $\nu_{orb} \sim 21 \text{ km/s}$ , lo que da como resultado  $\delta a \sim 1,5 \times 10^{-3} \text{ UA}$ . Sin embargo, el corrimiento observado para (434)Hungaria es mucho mayor. Se postula, entonces, que la mayor parte de este corrimiento no es debido a la velocidad inicial del asteroide, sino que es el resultado de la acción del efecto Yarkovsky acumulado en el tiempo. El ancho de la dispersión en semieje mayor de los miembros del grupo y del cuerpo parental, respecto del centro de masa de la familia, indican que la colisión que dio origen a la familia Hungaria ocurrió hace  $\sim 0,5 \times 10^9$  años atrás (Warner et al., 2009).

Lo expuesto hasta el momento fue un repaso por el conocimiento actual que se tiene acerca de la población Hungaria y de la compleja región dinámica en la que está localizada. El cambio de paradigma ocurrido en el último tiempo, la hace interesante para el desarrollo de estudios que tengan presente no solo las perturbaciones seculares gravitatorias a la que se encuentran expuestos los asteroides que allí conviven, si no también las perturbaciones ocasionadas por fuerzas no gravitatorias, como el efecto Yarkovsky. En este contexto, nos propusimos realizar un estudio detallado de la estructura interna del espacio de fases que rodea a la población Hungaria mediante la confección de mapas dinámicos de alta resolución, que describiremos en la siguiente sección.

## 2.1. Mapas dinámicos osculadores

Los mapas dinámicos son una excelente herramienta para estudiar la estructura dinámica global que presenta el espacio de fases. Distintos tipos de mapas pueden ser construídos de acuerdo al indicador que se utiliza; entre ellos, podemos mencionar a MEGNO (Mean Exponential Growth Factor of Nearby Orbits; Cincotta y Simo, 2000), MLE (The Maximum Lyapunov Exponent),  $\max(\Delta a)$ ,  $\max(\Delta e)$  y  $\max(\Delta i)$ . Los dos primeros son indicadores de caos. La caoticidad de la región Hungaria se

encuentra bien explorada en un trabajo reciente de Correa-Otto y Cañada-Assandri (2018), quienes realizan un análisis a partir de un mapa MEGNO de la región. Los últimos tres indicadores dan una idea acerca de la variación rápida que se produce en los elementos orbitales, ya que cuantifican la máxima variación del semieje mayor, de la excentricidad y de la inclinación de una órbita durante el periodo de tiempo que duren las integraciones numéricas. De forma esquemática, la Figura 2.4a muestra la variación temporal del semieje mayor y la Figura 2.4b la de la excentricidad para una partícula ficticia a la que se dejó evolucionar un tiempo  $t$ . Al cabo de este periodo de tiempo los parámetros orbitales toman un valor mínimo y un máximo, la amplitud existente entre estos valores extremos definen la “máxima variación en semieje mayor”,  $\max(\Delta a)$ , y “máxima variación en excentricidad”,  $\max(\Delta e)$ . El caso para la “máxima variación de la inclinación”,  $\max(\Delta i)$ , es análogo a los anteriores.

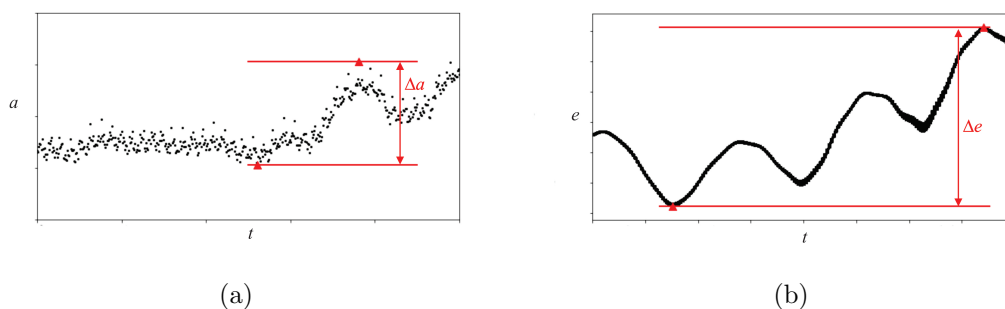


Figura 2.4: (a) Variación con el tiempo del semieje mayor propio de una partícula ficticia integrada durante un tiempo  $t$ . (b) Variación temporal de la excentricidad para la misma partícula, en el mismo intervalo de tiempo. Los triángulos rojos representan los valores mínimos y máximos que asumen ambos parámetros orbitales.

En términos generales, el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación de una órbita pueden verse afectadas de distintas maneras ante perturbaciones gravitatorias, razón por la cual se decidió crear mapas dinámicos implementando tres indicadores diferentes.

### 2.1.1. Integraciones numéricas

Para construir los mapas dinámicos de la región de los asteroides Hungaria, se utilizó un integrador de  $N$  cuerpos para simular la evolución orbital de una grilla

uniforme de 20000 condiciones iniciales en el plano semieje mayor vs. inclinación, en el rango  $1,6 \text{ UA} < a < 2,2 \text{ UA}$  y  $0^\circ < i < 30^\circ$  en inclinación, con  $\Delta a = 0,003 \text{ UA}$  y  $\Delta i = 0,3^\circ$ . A cada partícula se le asignó una excentricidad inicial igual al valor promedio del grupo,  $e = 0,08$ , y todos los ángulos  $M = 0^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$  y  $\Omega = 0^\circ$ . Se dejó evolucionar las partículas por un tiempo  $t = 6 \times 10^5$  años. El tiempo de integración fue elegido como el doble del periodo de precesión del pericentro del planeta Júpiter ( $\sim 3 \times 10^5$  años), considerado tiempo suficiente para que las principales estructuras seculares se manifiesten en los mapas. A pesar de esto, se realizó una segunda integración aumentando el tiempo a  $t = 1 \times 10^6$  años, para tener seguridad de que las estructuras observadas en los primeros mapas no se modifiquen de forma abrupta al cabo de un millón de años.

Es importante mencionar que las integraciones numéricas solo contemplan fuerzas de interacción gravitatoria entre las partículas ficticias y los planetas, o las partículas y el Sol. En primera instancia, se efectuaron integraciones numéricas considerando los cuatro planetas más cercanos a la región de interés: la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Y en segundo lugar, incluyendo siete planetas, desde Venus a Neptuno e incluyendo la masa de Mercurio en la masa del Sol. Los elementos orbitales para los planetas y el Sol se extrajeron de JPL Horizons NASA (<https://www.jpl.nasa.gov/>), para el 21 de Septiembre de 2017, información que se encuentra disponible en el Apéndice A.

### **2.1.2. Mapas dinámicos con cuatro planetas perturbadores, $t = 6 \times 10^5$ años**

En la Figura 2.5 se presenta en escala de colores logarítmica el mapa  $max(\Delta a)$  construido con cuatro planetas perturbadores (La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno). Pueden observarse diversas estructuras que separan regiones de baja y alta variación de  $a$ . En particular, en la parte inferior derecha se manifiesta la influencia de la resonancia secular  $\nu_6$  con su correspondiente separatriz. Esta resonancia es una de las más influyentes en la distribución de asteroides del cinturón principal, corresponde a la conmensurabilidad entre la frecuencia de precesión  $g$  de un asteroide con la  $g_6$  del planeta Saturno (Ver Capítulo 3, Sección 3.1) y se caracteriza por ser muy eficiente en remover objetos que fueron capturados por ella en un periodo de

tiempo muy corto. En la parte inferior izquierda se observan otras dos estructuras posiblemente relacionadas con resonancias seculares, que a diferencia de la anterior constituyen zonas donde la variación en semieje mayor es baja. Estas últimas se encuentran rodeadas por una región donde la variación en  $a$  es moderada, asociada a la cercanía con el espacio orbital que ocupa el planeta Marte ( $a_M = 1,52$  UA) que produce fuertes perturbaciones en la región. En esta zona del mapa, se observa la existencia de numerosas resonancias de movimientos medios (rectas verticales) con los planetas Tierra, Marte y Jupiter, entre las que podemos mencionar la T3:7, T5:12, M6:7, M5:6, M4:5, M7:9, J11:2 y J5:1.

En la Figura 2.6 observamos el mapa  $max(\Delta e)$  realizado con los cuatro planetas perturbadores anteriormente mencionados, la escala de colores es logarítmica. Como podía esperarse, el mapa revela estructuras dinámicas diferentes al primero. En particular, las bandas verticales asociadas a RMM resultan menos evidentes. Sin embargo, en la región inferior derecha nuevamente notamos la presencia de la resonancia secular  $\nu_6$ , considerada la resonancia secular lineal más efectiva para incrementar la excentricidad de los asteroides (Carruba et al., 2018). En la parte superior del mapa, para valores de inclinación de  $30^\circ$ , se encuentra otra región de gran variación de excentricidad que se asocia a la resonancia secular  $\nu_5$ , en este caso existe conmensurabilidad entre la frecuencia de precesión  $g$  de un asteroide con la  $g_5$  asociada a Júpiter (Ver Capítulo 3, Sección 3.1). Lo más llamativo de este mapa son las subestructuras que aparecen en el centro, donde actualmente no existen asteroides Hungaria pero que parecen ser relevantes dinámicamente en las escalas temporales que estamos estudiando. Por un lado, la región comprendida entre  $1,86$  UA  $< a < 2,03$  UA y  $6^\circ < i < 15^\circ$ , está dominada por subestructuras de variación moderada de excentricidad, delimitadas por regiones de excentricidad estacionaria, formando una distribución de “espigas”. Por el otro, a la izquierda de las “espigas” se hace visible una estructura delgada y horizontalmente alargada que presenta la menor variación en excentricidad existente en todo el mapa. Es probable, que mucha de estas subestructuras -que no son visibles en el mapa  $max(\Delta a)$ - puedan explicarse mediante resonancias seculares de altos órdenes.

El grupo Hungaria se encuentra concentrado en una franja entre los  $20^\circ$  y  $25^\circ$ , tal como se observa en la Figura 2.7, esta superposición no es estrictamente correcta debido a que estamos superponiendo asteroides en elementos orbitales propios

sobre un mapa realizado con elementos osculadores, sin embargo, resulta útil para visualizar la posición de los mismos en el espacio de fases. Pueden identificarse los dos grupos antes mencionados, uno más poblado de objetos en torno a los  $\sim 22^\circ$  de inclinación y otro grupo más difuso a  $i \sim 25^\circ$ ; el lugar de separación entre ambos cúmulos coincide con la intersección entre una región de baja y mediana variación de la excentricidad. Es interesante notar cómo los asteroides capturados en RMM se ubican sobre las estructuras verticales que muestran los mapas. En la Figura 2.7 se presentan algunas de las RMM de dos planetas más importantes que influyen en la región. Para distinguirlas,  $T$  hace referencia al planeta Tierra,  $M$  a Marte y  $J$  a Júpiter. A la derecha se puede observar la superposición entre la  $M7 : 11$  y la  $J4 : 1$ , que deriva en una región de alta excitación en la excentricidad que actúa como límite a la distribución de objetos observada.

Para visualizar las variaciones en inclinación producto de perturbaciones gravitatorias, construimos el mapa  $max(\Delta i)$  que se muestra en la Figura 2.8. Del mismo modo que ocurría en los mapas  $max(\Delta a)$  y  $max(\Delta e)$ , la zona derecha del mapa se halla dominada por la resonancia secular  $\nu_6$ , que también tiene una gran influencia en el incremento de las inclinaciones. La acción perturbadora de esta resonancia se suaviza de forma gradual a medida que nos desplazamos a valores menores de  $a$ . Entre  $1,6 \text{ UA} < a < 1,8 \text{ UA}$  las franjas verticales exponen la acción de las RMM, pero no podríamos decir que  $max(\Delta i)$  es el mejor indicador para identificarlas. La región ocupada propiamente por la población Hungría presenta una variación moderada en inclinación, al menos en los tiempos fijados. La parte superior izquierda del mapa es una de las únicas regiones en donde la inclinación permanece estacionaria.

Como hemos podido observar, la confección de mapas con distintos indicadores nos demuestra que las perturbaciones gravitatorias no afectan de la misma manera los tres elementos orbitales  $(a, e, i)$ . Este resultado nos da la libertad de elegir un mapa u otro, de acuerdo al estudio que desee realizarse; por ejemplo, si estuviésemos interesados en hacer un relevamiento de las RMM que tienen influencia en la región, con seguridad utilizaríamos el mapa  $max(\Delta a)$ , caso contrario, si quisieramos centrar el estudio en las resonancias seculares el mapa  $max(\Delta e)$  es el que mayor cantidad de información brinda.

### 2.1.3. Mapas dinámicos con siete planetas perturbadores, $t = 6 \times 10^5$ años

Luego de realizar el primer conjunto de mapas, se elaboraron nuevas simulaciones numéricas teniendo en cuenta todos los cuerpos masivos del Sistema Solar, los siete planetas desde Venus a Neptuno y se incluyó la masa de Mercurio dentro de la del Sol, con el objetivo de estudiar si existían diferencias significativas respecto a los mapas con cuatro planetas. El resultado de las integraciones se observa en las Figuras 2.9 y 2.10, que corresponden a los mapas  $max(\Delta a)$  y  $max(\Delta e)$ , respectivamente, para integraciones en  $t = 6 \times 10^5$  años.

Una comparación detallada entre de los mapas  $max(\Delta a)$  entre cuatro (Figura 2.5) y siete planetas (Figura 2.9) nos muestra que la zona más afectada por la inclusión de mayor número de perturbadores se produce a bajos valores de  $a$ , es decir, en la región cercana a la órbita del planeta Marte, en la que ahora el semieje mayor de las órbitas señalan una mayor variación. En el rango entre 1,8 y 2,2 UA y para todo valor de inclinación no ocurren cambios apreciables. Por su parte, en los mapas  $max(\Delta e)$  para cuatro (Figura 2.6) y siete planetas (Figura 2.10) ocurre lo mismo, la región contenida entre 1,6 y 1,8 UA se vuelve más inestable para las excentricidades al incluir mayor número de perturbadores, mientras que entre 1,8 y 2,2 UA los mapas resultan muy similares.

A grandes rasgos, no existen diferencias radicales entre la influencia gravitatoria que producen los cuatro planetas más cercanos a la región con la que producirían todos los planetas del Sistema Solar al cabo de  $t = 6 \times 10^5$  años. Esto permite concluir que la evolución dinámica en la región se encuentra principalmente dominada por la acción perturbadora de la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Esta observación resulta valiosa ya que se reduce el costo computacional al trabajar con la mitad de los planetas en futuras integraciones. Otra de las ventajas que presenta es al momento de cotejar las subestructuras de los mapas con con la posición de RMM y resonancias seculares, tarea que se vuelve más compleja conforme aumenta el número de planetas involucrados. Como veremos más adelante (Sección 3.1) las resonancias seculares de altos órdenes se construyen a partir de la combinación lineal de las diferentes frecuencias fundamentales  $g_k$  y  $s_k$  de los planetas, con las frecuencias  $g$  y  $s$  de los asteroides.

### 2.1.4. Mapas dinámicos con cuatro planetas perturbadores a $t = 1 \times 10^6$ años

En un próximo paso en la construcción de mapas dinámicos aumentamos el tiempo de integración a un millón de años. Esto tiene por propósito verificar si las estructuras dinámicas principales prevalecen si se deja evolucionar las condiciones iniciales un tiempo mayor.

En la Figura 2.11 se presenta el resultado de las integraciones para  $t = 1 \times 10^6$  años, utilizando como indicador  $\max(\Delta a)$  y como perturbadores los cuatro planetas más influyentes en la región. En términos generales, el mapa está caracterizado por las mismas estructuras que se observan en las Figuras 2.5 y 2.9. Puede notarse cómo a medida que pasa el tiempo la influencia de Marte se hace más notoria en los valores bajos de semieje y para toda inclinación, y persisten para valores de  $a$  fijos las bandas asociadas a RMM. La parte central del mapa permanece como una isla de color azul que protege de cambios en semieje mayor a los objetos.

En el mapa  $\max(\Delta e)$ , Figura 2.12, la zona de la “espiga” se separa en dos partes, la parte superior se mantiene como una región donde las variaciones moderadas en excentricidad se ven interrumpidas por regiones donde la misma se mantiene estacionaria, mientras que en la parte inferior emergen regiones en la que la variación en  $e$  se vuelve elevada. La zona central sigue manteniendo, en general, una variación baja de  $e$ , sin embargo, para  $a < 1,78$  UA la proximidad con la órbita de Marte convierte a la región en una zona donde la variación en excentricidad se vuelve grande. En esta parte del mapa aún es posible identificar RMM.

En este capítulo construimos mapas dinámicos que nos permitieron explorar la estructura global del espacio de fases. En el proceso se fue variando tanto el indicador, como la cantidad de planetas perturbadores (de cuatro a siete) y el tiempo de integración (de  $t = 6 \times 10^5$  a  $t = 1 \times 10^6$  años). En conclusión:

- Las estructuras dinámicas que se manifiestan en el espacio de fases varían significativamente al utilizar los diferentes indicadores. El semieje mayor resulta más sensible a las perturbaciones generadas por RMM, mientras que la excentricidad tiene mayor sensibilidad a las perturbaciones producidas por resonancias seculares.
- En la región de los asteroides Hungaria la dinámica se encuentra principal-

mente dominada por la acción perturbadora de la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Trabajar con cuatro planetas en vez de siete, reduce los tiempos de cálculos considerablemente, y además tiene grandes ventajas a la hora de identificar resonancias seculares de altos órdenes en la región.

- Al aumentar el tiempo de integración de  $t = 6 \times 10^5$  a  $t = 1 \times 10^6$  años, los cambios se generan principalmente en la zona izquierda de la imagen, ya que la acción perturbadora de Marte se vuelve mayor. En el mapa  $max(\Delta e)$  las “espigas” se visualizan en ambos casos. En el mapa  $max(\Delta a)$  la apariencia general se mantiene.
- Consideraremos suficiente un tiempo de integración de  $t = 6 \times 10^5$  años y trabajaremos en base al mapa  $max(\Delta e)$  por ser el que muestra mayor detalle en las subestructuras seculares.



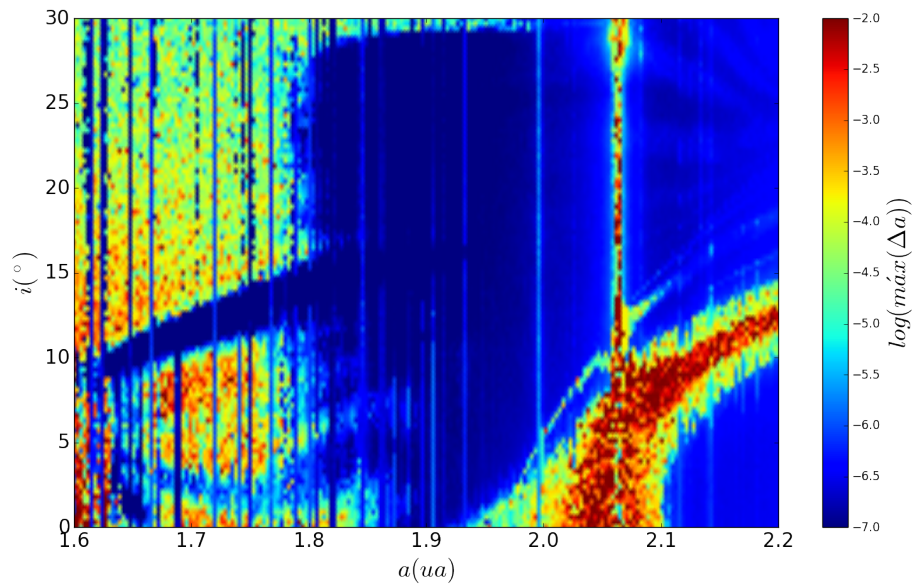


Figura 2.5: Mapa con la máxima variación en semieje mayor, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando cuatro planetas perturbadores: La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, integrando en  $t = 6 \times 10^5$  años.

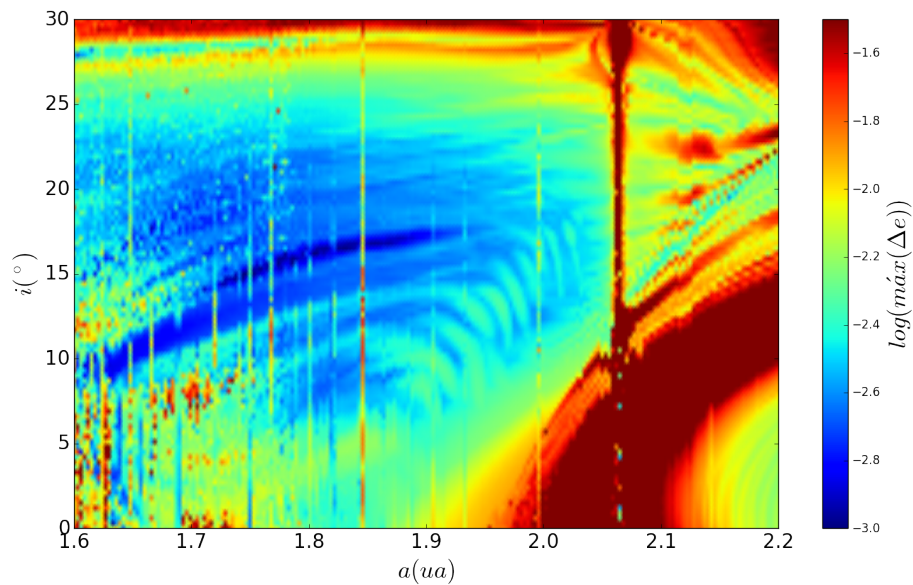


Figura 2.6: Mapa con la máxima variación en excentricidad, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando cuatro planetas perturbadores: La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, integrando en  $t = 6 \times 10^5$  años.

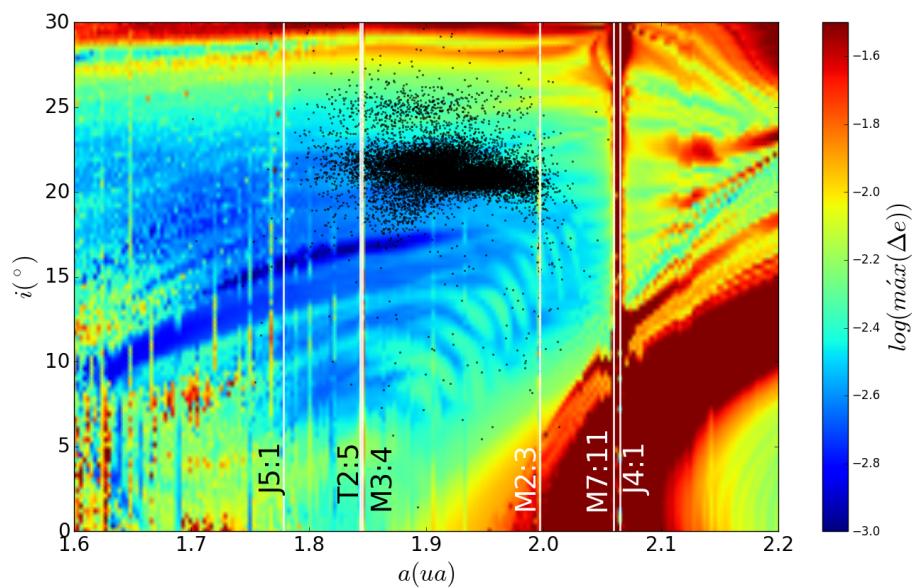


Figura 2.7: Población Hungaria proyectada sobre el mapa dinámico  $\max(\Delta e)$  (puntos negros). Se presentan algunas de las principales RMM de dos planetas que atraviesan la región. Se identifican con  $T$  las RMM asociadas a la Tierra,  $M$  a Marte y  $J$  a Júpiter.

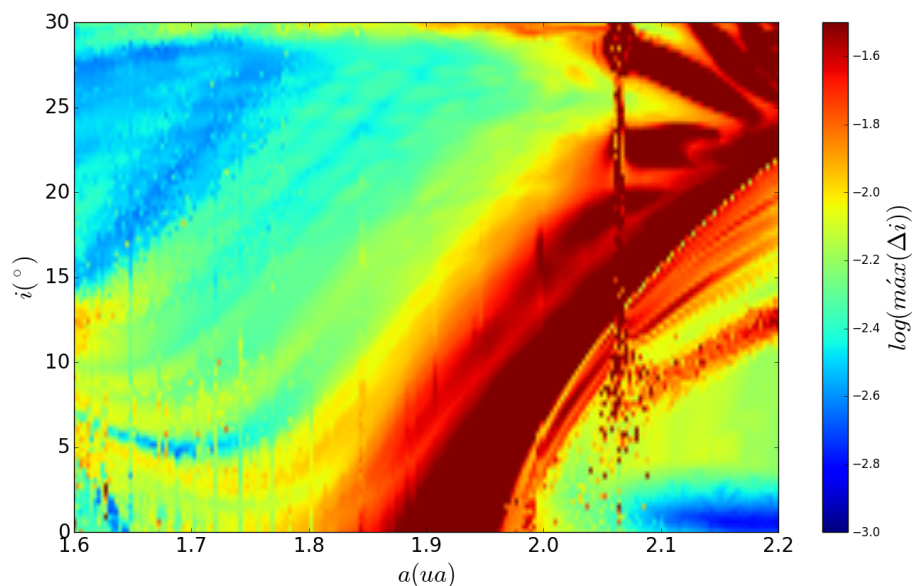


Figura 2.8: Mapa con la máxima variación en inclinación, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando cuatro planetas perturbadores: La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, integrando en  $t = 6 \times 10^5$  años.

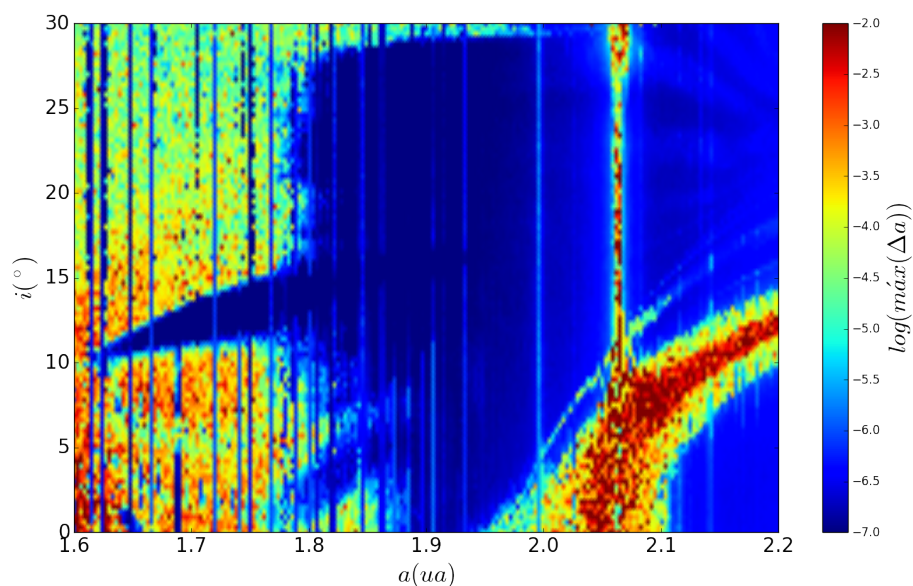


Figura 2.9: Mapa con la máxima variación en el semieje mayor, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando 7 planetas perturbadores, desde Venus a Neptuno y habiendo incluido la masa de Mercurio dentro de la solar, para un tiempo de integración  $t = 6 \times 10^5$  años.

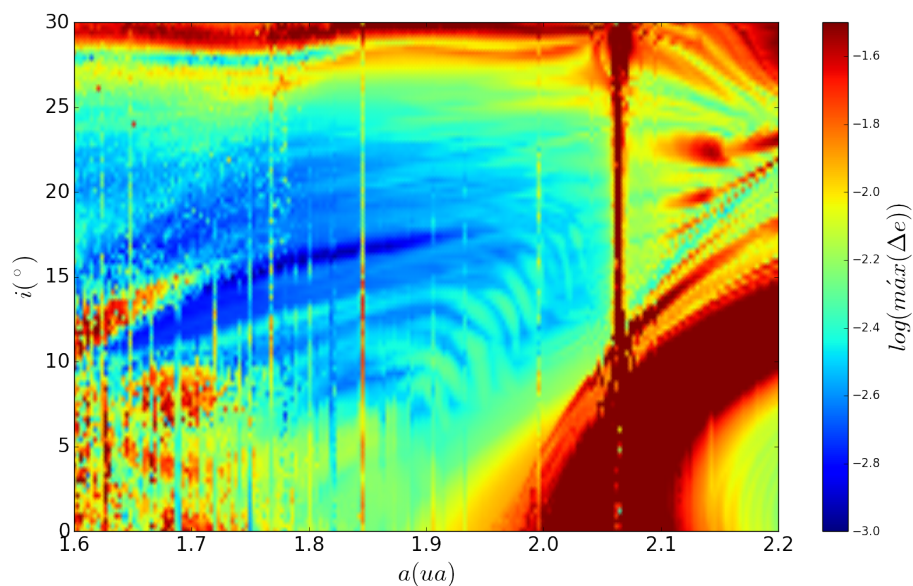


Figura 2.10: Mapa con la máxima variación en excentricidad, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando 7 planetas perturbadores, desde Venus a Neptuno y habiendo incluido la masa de Mercurio dentro de la solar, para un tiempo de integración  $t = 6 \times 10^5$  años.

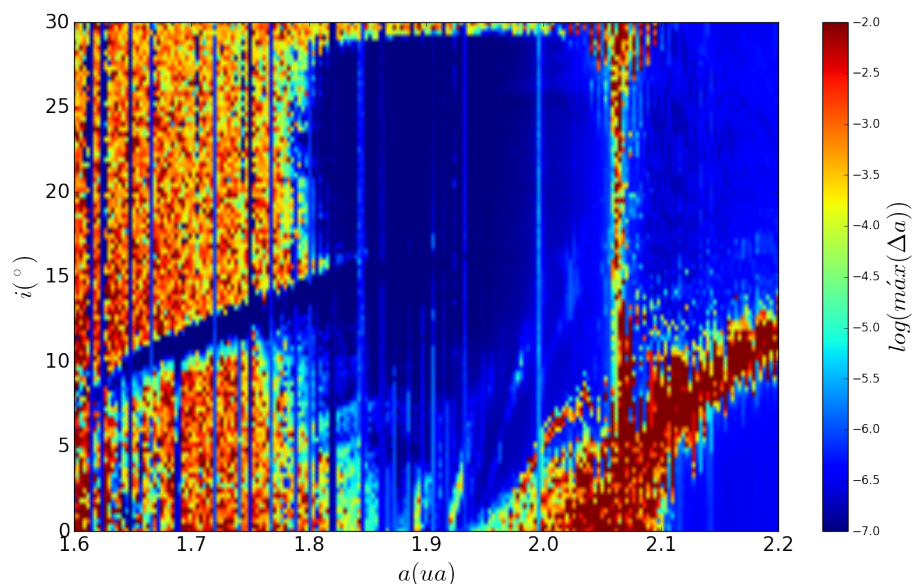


Figura 2.11: Mapa con la máxima variación en semieje, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando 4 planetas perturbadores: La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, para un tiempo de integración  $t = 1 \times 10^6$  años.

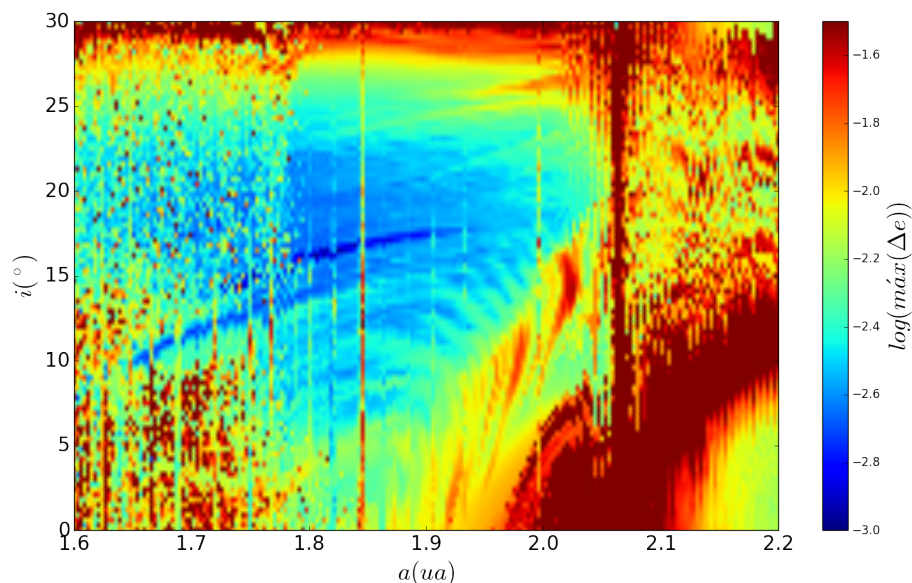


Figura 2.12: Mapa con la máxima variación en excentricidad, para la región del espacio de fases  $(a, i)$  ocupada por la población Hungaria. Construido utilizando 4 planetas perturbadores: La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, para un tiempo de integración  $t = 1 \times 10^6$  años.

---

## Capítulo 3

# Identificación de resonancias seculares

Asociados a la evolución orbital de los cuerpos celestes, existen distintas frecuencias angulares relacionadas con los ángulos  $f$ ,  $\varpi$  y  $\Omega$ . En la jerga de mecánica celeste se denomina *ángulo rápido* a  $f$ , que está relacionado con el movimiento medio y tiene periodos del orden de  $10^1$  años en el Sistema Solar. Por otra parte, los ángulos  $\varpi$  y  $\Omega$ , asociados con la retrogradación de la línea de los nodos y la precesión de los pericentros, se denominan *ángulos lentos* ya que sus frecuencias se encuentran entre  $10^2 - 10^5$  años. Esta diferenciación nos permite separar la dinámica de corto y largo plazo. En particular, el estudio de la dinámica secular del Sistema Solar se realiza a través de teorías analíticas que involucran formalismo Hamiltoniano (Ver Morbidelli, A., 2001. Modern Celestial Mechanics; Capítulo 7 y 8). A partir de la forma normal secular del Hamiltoniano se arriba a una solución a primer orden llamada solución planetaria de Lagrange-Laplace. Estas ecuaciones relacionan los elementos orbitales de los planetas con las frecuencias planetarias propias  $g_k = \dot{\varpi}_k$  y  $s_k = \dot{\Omega}_k$  del k-ésimo planeta.

Laskar (1985) computó la forma normal secular a orden 2 en las masas planetarias y de grado 6 en las excentricidades e inclinaciones para el sistema planetario completo (de Mercurio a Neptuno), pero en lugar de recurrir al cálculo analítico, resolvió las integraciones de forma numérica para calcular las frecuencias de movimiento con buena precisión (Laskar, 1988), en un intervalo de 10 millones de años. Por su parte, Nobili et al., (1989) consiguió calcular de forma numérica las frecuencias seculares de los planetas exteriores del Sistema Solar integrando completas las

ecuaciones de movimiento (evitando el cálculo de la forma normal secular), consiguiendo una precisión sin precedentes. La Tabla 3.1 recopila los valores para las frecuencias propias planetarias  $g_k$  y  $s_k$  calculados por Nobili et al., (1989) y Laskar (1990), que utilizaremos a lo largo del trabajo.

$k$	$g_k$	$s_k$	Planeta asociado
1	5,5964	-5,6174	Mercurio
2	7,4559	-7,0795	Venus
3	17,3646	-18,8512	Tierra
4	17,9156	-17,7482	Marte
5	4,2575	0,0000	Júpiter
6	28,2455	-26,3450	Saturno
7	3,0868	-2,9927	Urano
8	0,6726	-0,6925	Neptuno

Tabla 3.1: Frecuencias planetarias propias. Los valores de  $g_1, \dots, g_4$  y  $s_1, \dots, s_4$  fueron tomados de Laskar (1990), los de  $g_5, \dots, g_8$  y  $s_5, \dots, s_8$  fueron tomados de Nobili et al., (1989); todas las frecuencias vienen dadas en "/año. Estos valores han sido computados tomando la eclíptica como plano de referencia para el año 2000 en la época JD 2451545.0.

### 3.1. Resonancias seculares

Las resonancias seculares se presentan cuando existen conmensurabilidades que involucren las frecuencias de longitud del perihelio  $g$  de un asteroide y la del nodo  $s$  y las frecuencias planetarias fundamentales  $g_k$  y  $s_k$ . Usualmente se denotan

$$\nu_k = g - g_k \quad \nu_{1k} = s - s_k$$

a las resonancias seculares lineales o de primer orden. Así, un asteroide en resonancia secular  $\nu_5$  tiene una frecuencia de precesión del pericentro igual a la frecuencia  $g_5$  asociada al planeta Júpiter (Ver Tabla 3.1) y uno en resonancia  $\nu_{16}$  posee una frecuencia de retrogradación del nodo igual a  $s_6$ , asociada Saturno. Las resonancias seculares no lineales involucren conmensurabilidades de alto orden, y pueden ser expresadas como combinaciones de la forma:

$$p.g + q.s + \sum_i (p_i.g_i + q_i.s_i) = 0 \tag{3.1}$$

la elección de los enteros  $p, q, p_i, q_i$  está sujeta a las Reglas de D'Alembert: la suma de todos los coeficientes debe ser cero y la suma de los coeficientes que acompañan a las frecuencias de las longitudes nodales debe ser cero o un número par. El orden de una resonancia secular está definido como la suma de los valores absolutos de los coeficientes  $p, q, p_i, q_i$ .

Las resonancias seculares tienen una estructura compleja en el espacio tridimensional de elementos propios  $a - e - \sin(i)$  debido a que la posición de estas depende de los tres elementos orbitales a la vez. Esto hace que representarlas en el plano bidimensional  $(a, \sin(i))$  no sea una tarea sencilla, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con las resonancias de movimientos medios. La posición de una resonancia secular particular sobre el plano  $(a, \sin(i))$  dependerá significativamente del valor de excentricidad fijado, haciendo difícil visualizar qué miembros de una familia podrían estar interactuando (o no) con dicha resonancia. Para evitar este inconveniente, suele ser útil trabajar en el espacio de frecuencias propias  $(g, s)$  o  $(g, g + s)$ , donde las resonancias seculares lineales se representarán como rectas  $g = cte$  o  $s = cte$ , y las combinaciones resonantes entre ambas vendrán dadas por rectas con determinada pendiente.

Es posible hacer un análisis detallado de algunas regiones del espacio de frecuencias propias para el grupo de asteroides Hungaria gracias a la base de datos de acceso público AstDyS, donde se encuentran publicados no solo los elementos orbitales propios para estos asteroides  $(a_p, e_p, \sin(i_p))$ , sino que también las frecuencias asociadas al movimiento medio, a la longitud del pericentro y a la longitud del nodo  $(n, g, s)$ . La Figura 3.1 revela la distribución del grupo Hungaria en el espacio de frecuencias propias  $(g, s)$ , en la que podemos observar dos cúmulos de objetos. El grupo más numeroso se extiende entre  $12 \text{ "/año} < g < 18 \text{ "/año}$  con moderada dispersión y a su izquierda ( $g < 12 \text{ "/año}$ ) encontramos objetos que no se acoplan a esta distribución y se encuentran más dispersos. En este segundo grupo, se destaca un conjunto de asteroides que presentan una distribución en línea recta de muy baja dispersión. Se trata de asteroides capturados en una resonancia secular particular que mencionaremos en detalle en el próximo capítulo. En esta figura, además, se muestran las principales resonancias lineales que atraviesan el espacio de frecuencias del grupo Hungaria. Las rectas verticales representan la posición de las resonancias de pericentro y las horizontales la localización de las resonancias nodales, tal co-

mo se explicó con anterioridad. Milani et al. (2010) mencionan que las resonancias seculares simples más influyentes que delimitan la distribución observada son las relacionadas con Marte ( $g_4$  y  $s_4$ ), Júpiter ( $g_5$  y  $s_5$ ) y Saturno ( $s_6$ ), aunque como se observa en la Figura 3.1, las resonancias seculares con la Tierra podrían jugar un rol importante a través de  $g_3$  y  $s_3$ .

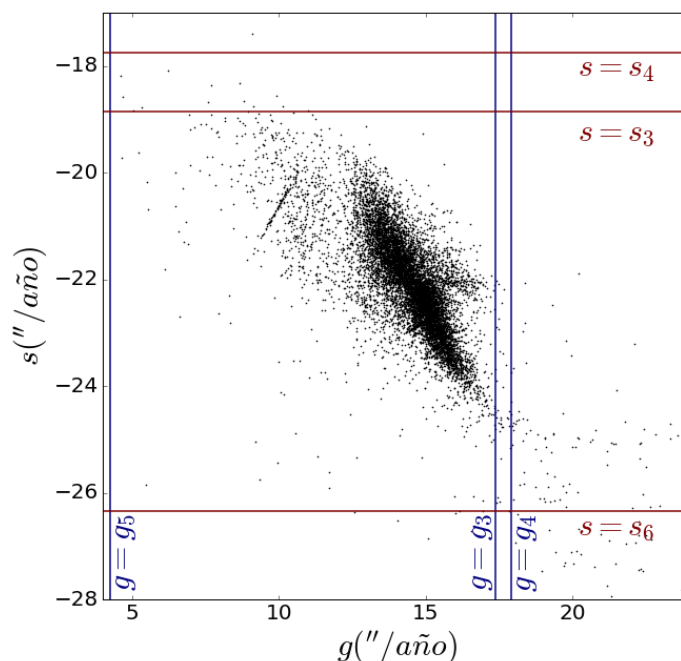


Figura 3.1: Proyección de  $\sim 10000$  objetos del grupo Hungaria en el espacio de frecuencias propias  $g$  vs.  $s$ . Datos extraídos de la base de datos AstDyD. Las rectas verticales y horizontales corresponden a las principales resonancias lineales que atraviesan la región.

En muchas ocasiones resulta útil contar con la posición de las resonancias seculares en el plano  $(a_p, \sin(i_p))$ . Para nuestro trabajo, sería beneficioso poder cotejar las estructuras y subestructuras que revelan los mapas dinámicos del Capítulo 2 con la posición de las múltiples resonancias seculares que atraviesan la región de los Hungaria.



## 3.2. Resonancias seculares en el espacio de elementos propios

Determinar la localización de las resonancias seculares en el espacio de elementos propios  $(a_p, \sin(i_p))$  es una tarea compleja, que puede abordarse analítica o numéricamente. Una primera forma sería trabajar a partir de un modelo analítico donde se construye un hamiltoniano secular para el sistema completo y se busca la solución a los pequeños divisores que acusan la posición de las resonancias buscadas. Por otra parte, Milani et al. (2010) desarrollaron un método alternativo completamente numérico con el que pueden obtenerse las posiciones de las resonancias seculares con una muy buena aproximación.

En el presente trabajo, se decidió adoptar el criterio de Milani et al. (2010) para identificar las posiciones de las diferentes resonancias seculares que atraviesan la región de los Hungaria. La metodología aplicada se detallará a continuación.

### 3.2.1. Ajuste empírico

Asumiendo que las frecuencias seculares propias varían de forma suave con los elementos propios, podemos pensar en ajustar funciones que determinen  $g = g(a_p, e_p, \sin(i_p))$  y  $s = s(a_p, e_p, \sin(i_p))$ . Debe tenerse en cuenta que esta condición no será necesariamente válida en regiones donde haya RMM o donde convivan dinámicas particulares como la de Kozai. Siguiendo los lineamientos del trabajo de Milani et al. (2010), planteamos un ajuste polinomial de segundo grado para cada frecuencia teniendo como punto de referencia al cuerpo parental, (434) Hungaria, cuyos elementos orbitales son  $a_H = 1,94426$  UA,  $e_H = 0,0778972$ ,  $\sin(i_H) = 0,356224$ . Definiendo la variables  $x = a_p - a_H$ ,  $y = e_p - e_H$ ,  $z = \sin(i_p) - \sin(i_H)$ , se utilizó una expresión tal como:

$$g = B_0 + B_1x + B_2y + B_3z + B_4x^2 + B_5y^2 + B_6z^2 + B_7xy + B_8xz + B_9yz \quad (3.2)$$

$$s = C_0 + C_1x + C_2y + C_3z + C_4x^2 + C_5y^2 + C_6z^2 + C_7xy + C_8xz + C_9yz \quad (3.3)$$

donde  $B_0 = g_H = 15,1526$  "/año y  $C_0 = s_H = -22,6802$  "/año son las frecuencias propias del asteroide de referencia, y los coeficientes  $B_i$  y  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) se ajustaron por el método de cuadrados mínimos.

Estudiamos la bondad del ajuste a partir de los errores relativos y absolutos definidos de la siguiente manera:

$$E_g^{ABS} = g - g_r \quad E_s^{ABS} = s - s_r \quad (3.4)$$

$$E_g^R = \frac{|g - g_r|}{g_r} \quad E_s^R = \frac{|s - s_r|}{s_r} \quad (3.5)$$

Donde  $g$  y  $s$  hacen referencia a las frecuencias que se obtienen mediante el ajuste empírico, y  $g_r$  y  $s_r$  son los valores reales o deseados, que vienen previamente establecidos por la base de datos.

El procedimiento de obtención de los coeficientes se llevó a cabo siguiendo los pasos que se detallan a continuación. Se realizó un primer ajuste haciendo uso de la base de datos completa ( $\sim 10500$  asteroides). En un primer intento, registramos frecuencias con errores relativos y absolutos mayores a los deseados. Esto se debe, por un lado, a que aquellos asteroides situados a grandes distancias del objeto de referencia aportan errores mayores comparados con los que proporcionan asteroides cercanos a (434)Hungaria. Por otro lado, existen asteroides capturados o cercanos a las RMM o superposición de resonancias seculares que no respetan necesariamente el ajuste planteado. Para mejorar la determinación de los coeficientes, se descartaron todos aquellos objetos que arrojaban errores absolutos mayores a tres desviaciones estándares del promedio ( $3\sigma$ ). En base a este nuevo conjunto de datos, se realizó nuevamente el ajuste. El proceso de eliminación de asteroides con errores en sus frecuencias mayores a  $3\sigma$  volvió a repetirse un total de cinco veces, hasta que finalmente se logró la precisión deseada, obteniendo errores relativos acotados entre  $2 \times 10^{-8}$  "/año  $< E_g^R < 9 \times 10^{-3}$  "/año, para la frecuencia  $g$  y  $2 \times 10^{-7}$  "/año  $< E_s^R < 1 \times 10^{-3}$  "/año, para la frecuencia  $s$  (Figura 3.2).

Finalmente, el ajuste quedó determinado por 7502 asteroides que se muestran la Figura 3.3 con puntos azules. Los puntos negros corresponden a los objetos que fueron excluidos por presentar errores mayores a los deseados. Como era de esperarse, coinciden con asteroides capturados en RMM o que se ubican en la periferia del cúmulo, alejados del punto de referencia. Los coeficientes del ajuste polinomial

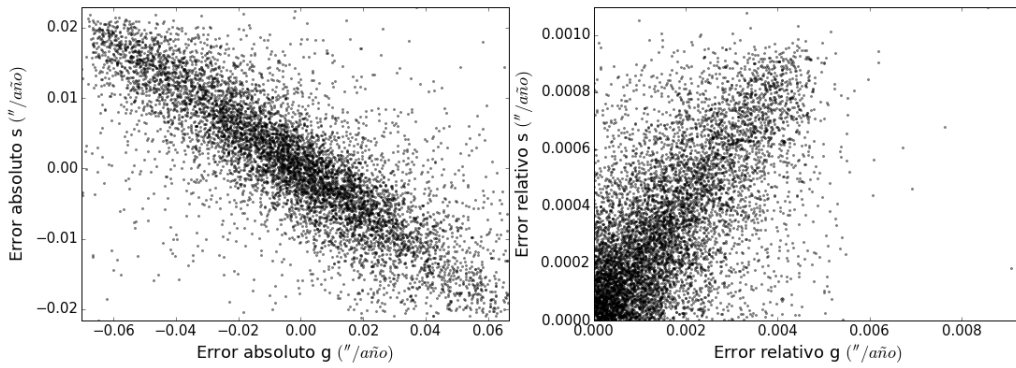


Figura 3.2: Izq.: errores absolutos, obtenidos como la diferencia entre los valores de frecuencia calculados y los reales. Der.: errores relativos para nuestro ajuste secular, obtenidos como el valor absoluto del error absoluto sobre el valor real de la frecuencia secular.

obtenidos a partir de estos datos se muestran en la Tabla 3.2.1.

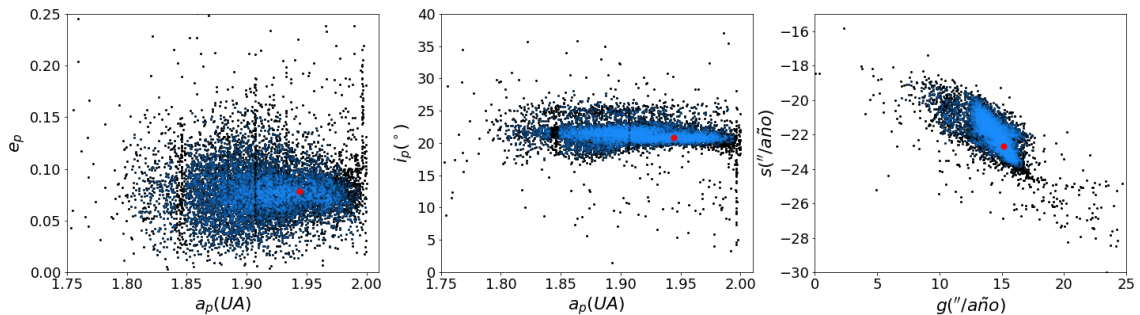


Figura 3.3: Los puntos negros corresponden a los asteroides de la base de datos completa, en azul los utilizados para realizar el ajuste secular. El punto rojo representa la posición del asteroide de referencia, (434)Hungaria.

Como se mencionó anteriormente, la proyección de las resonancias seculares en el plano  $(a_p, \sin(i_p))$  depende de los tres elementos orbitales  $(a_p, e_p, \sin(i_p))$  a la vez. Para cotejar las estructuras observadas en los mapas dinámicos con las posiciones de las diferentes resonancias seculares, fue necesario fijar el valor de excentricidad en  $e_p = 0,08$ , de la misma forma en que lo hicimos en las condiciones iniciales de la grilla con la que se construyeron los mapas. Mediante un algoritmo de bisección en el plano  $(a_p, \sin(i_p))$  con  $\Delta a_p = 10^{-4}$  UA y  $\Delta \sin(i_p) = 10^{-4}$ , se determinaron las posiciones de las resonancias seculares de la Figura 8 del trabajo de Milani et

$k$	$B_k$	$C_k$
1	10,8806	-19,7403
2	1,0822	-11,9931
3	-60,1200	18,2060
4	-3,8599	-7,1551
5	1,4701	-70,0828
6	-101,2374	14,5668
7	0,8674	-11,4868
8	-72,6549	19,1286
9	24,1514	1,1259

Tabla 3.2: Coeficientes para los ajustes polinomiales planteados en la Ecuación 3.2 y 3.3, calculados por método de cuadrados mínimos, a partir de 7502 datos filtrados de la base de datos AstDyS.

al., (2010). El resultado obtenido se muestra en la Figura 3.4, a partir de la cual podemos afirmar que la posición de las principales resonancias seculares muestran un muy buen acuerdo con los resultados obtenidos por estos autores. Observamos que la distribución de asteroides está claramente delimitada por la posición de estas resonancias seculares. Por ejemplo, por debajo de los  $15^\circ$  existe una zona de superposición entre las resonancias  $\nu_3$  y  $\nu_4$ , y en efecto, prácticamente no se observan objetos por debajo de este valor de inclinación.

Si bien para nuestro estudio es representativo trabajar con una excentricidad fija de 0,08, en la Figura 3.5 se encuentran proyectadas las áreas de acción para las mismas resonancias de la figura anterior, en el rango  $0 \leq e_p \leq 0,2$ . Tal como se observa, las posiciones de las mismas son completamente susceptibles al valor de excentricidad con el que se las calcula.

### 3.3. Caracterización de las estructuras observadas en los mapas dinámicos

Realizado el ajuste, tenemos una herramienta para proyectar resonancias seculares en el plano  $(a_p, \sin(i_p))$ , en la región poblada por los asteroides Hungaria.

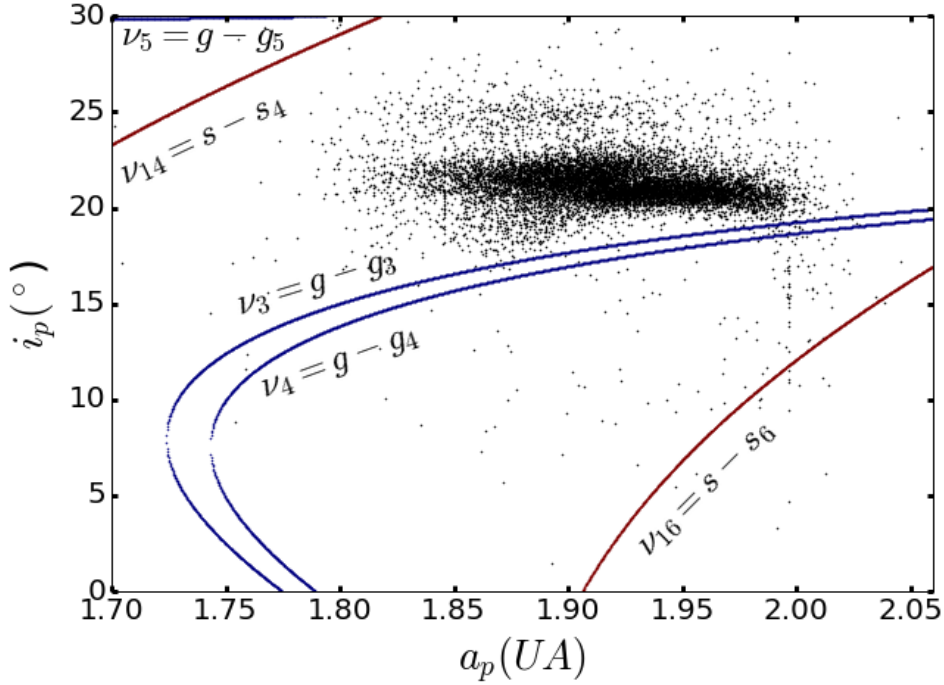


Figura 3.4: Asteroides Hungaria proyectados en el plano de semieje mayor propio vs. inclinación. Las curvas corresponden a las principales resonancias seculares que atraviesan la región:  $\nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_{14}$  y  $\nu_{16}$ . Construídas a partir de nuestro ajuste polinomial, calculadas para un valor fijo de excentricidad de 0,08.

Combinaciones como las que muestra la Ecuación 3.1, originan curvas resonantes de altos órdenes con las cuales intentaremos caracterizar algunas de las estructuras y subestructuras que observamos en el mapa  $max(\Delta e)$  a  $t = 6 \times 10^5$  años (Figura 2.6).

Muchos autores sugieren la relevancia de resonancias seculares de la forma:

$$k\nu_{ij} + l\nu_m = 0 \quad (3.6)$$

Por tal motivo, comenzamos con la búsqueda de las combinaciones:

$$-2s - g + \sum_i (p_i \cdot g_i + q_i \cdot s_i) = 0, \quad -3s - 2g + \sum_i (p_i \cdot g_i + q_i \cdot s_i) = 0$$

donde  $g_i$  y  $s_i$  hacen referencia a las frecuencias planetarias y  $p_i$  y  $q_i$  a los coeficientes que las acompañan. Se priorizaron aquellas curvas que coincidían con regiones de baja variación en la excentricidad en la zona de la “espiga”. Los resultados más relevantes y los respectivos órdenes de estas resonancias se exponen en la Tabla 3.3.

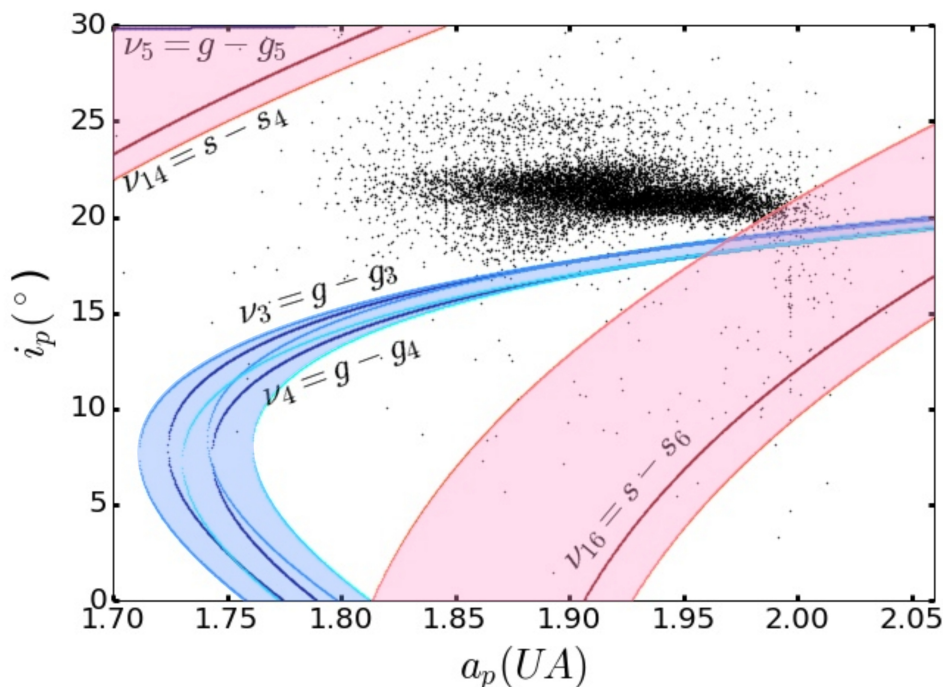


Figura 3.5: Asteroides Hungaria proyectados en el plano de semieje mayor propio vs. inclinación. Las curvas color azul corresponden a las resonancias  $\nu_3$ ,  $\nu_4$  y  $\nu_5$ , y las de color bordó para  $\nu_{14}$  y  $\nu_{16}$ , todas ellas para un valor fijo  $e = 0,08$ . El área sombreada se encuentra acotada por abajo por la curva con  $e = 0$  y por arriba por la resonancia calculada con  $e = 0,2$ .

Cada conjunto de resonancias se encuentra graficado en la Figura 3.6, en la sub-figura que especifica la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Combinaciones resonantes relevantes para caracterizar las estructuras del mapa dinámico  $max(\Delta e)$  (Figura 2.6). Las curvas resonantes se encuentran graficadas en la Figura 3.6.

Id.	Condición resonante	Resonancia	Orden
$N^\circ$ de figura: 3.6 A			
$L_1$	$2s_4 + 2g_3 - g_6 - 2s - g$	$2\nu_{14} + 2\nu_3 - \nu_6$	7
$L_2$	$s_3 + s_4 + g_3 + g_4 - g_6 - 2s - g$	$\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_3 + \nu_4 - \nu_6$	8
$L_3$	$2s_3 - s_4 + s_6 + g_3 - 2s - g$	$2\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_{16} + \nu_3$	8

Sigue en la página siguiente.

### 3. IDENTIFICACIÓN DE RESONANCIAS SECULARES

Id.	Condición resonante	Resonancia	Orden
$L_4$	$s_4 + s_6 - g_3 + g_5 + g_6 - 2s - g$	$\nu_{14} + \nu_{16} - \nu_3 + \nu_5 + \nu_6$	8
$L_5$	$s_3 + s_4 + 2g_4 - g_6 - 2s - g$	$\nu_{13} + \nu_{14} + 2\nu_4 - \nu_6$	8
$L_6$	$s_4 + s_6 - g_4 + g_5 + g_6 - 2s - g$	$\nu_{14} + \nu_{16} - \nu_4 + \nu_5 + \nu_6$	8
$N^\circ$ de figura: 3.6 B			
$L_7$	$s_3 + 2s_4 + g_4 + g_5 - 3s - 2g$	$\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_4 + \nu_5$	10
$L_8$	$s_3 + s_4 + s_6 + g_5 + g_6 - 3s - 2g$	$\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_{16} + \nu_5 + \nu_6$	10
$L_9$	$2s_3 + s_6 + g_5 + g_6 - 3s - 2g$	$2\nu_{13} + \nu_{16} + \nu_5 + \nu_6$	10
$L_{10}$	$3s_4 + g_3 + g_5 - 3s - 2g$	$3\nu_{14} + \nu_3 + \nu_5$	10
$L_{11}$	$2s_3 + s_4 + 3g_3 - g_6 - 3s - 2g$	$2\nu_{13} + \nu_{14} + 2\nu_3 - \nu_6$	12
$L_{12}$	$2s_3 + s_4 + g_3 + 2g_4 - g_6 - 3s - 2g$	$2\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_3 + \nu_4 - \nu_6$	12
$L_{13}$	$3s_3 + 2g_3 + g_4 - g_6 - 3s - 2g$	$3\nu_{13} + 2\nu_3 + \nu_4 - \nu_6$	12
$L_{14}$	$3s_3 + g_3 + 2g_4 - g_6 - 3s - 2g$	$3\nu_{13} + 2\nu_4 + \nu_3 - \nu_6$	12
$L_{15}$	$3s_3 - s_4 + s_6 + 2g_3 - 3s - 2g$	$3\nu_{13} + \nu_{16} - \nu_{14} + 2\nu_3$	12
$L_{16}$	$3s_4 + 2g_3 - g_4 + g_5 - 3s - 2g$	$3\nu_{14} + 3\nu_3 - \nu_4 + \nu_5$	12
$L_{17}$	$s_3 + 2s_4 + 3g_3 - g_6 - 3s - 2g$	$\nu_{13} + 2\nu_{14} + 3\nu_3 - \nu_6$	12
$L_{18}$	$s_3 + 2s_4 - g_3 + 2g_4 + g_5 - 3s - 2g$	$\nu_{13} + 2\nu_{14} + 2\nu_4 - \nu_3 + \nu_5$	12
$N^\circ$ de figura: 3.6 C			
$L_{19}$	$2s_4 + 2s_6 + 3g_4 - 4s - 3g$	$2\nu_{14} + 2\nu_{16} + 3\nu_4$	14
$L_{20}$	$s_3 + 3s_6 + g_3 + g_4 + g_6 - 4s - 3g$	$\nu_{13} + \nu_{16} + \nu_3 + \nu_4 + \nu_6$	14
$L_{21}$	$s_4 + 3s_6 + 2g_3 + g_6 - 4s - 3g$	$\nu_{14} + 3\nu_{16} + 2\nu_3 + \nu_6$	14
$L_{22}$	$s_3 + 3s_6 + 2g_4 + g_6 - 4s - 3g$	$\nu_{13} + 3\nu_{16} + 2\nu_4 + \nu_6$	14
$L_{23}$	$2s_3 + 2s_4 + g_3 + g_4 + g_5 - 4s - 3g$	$2\nu_{13} + 2\nu_{14} + \nu_3 + \nu_4 + \nu_6$	14
$L_{24}$	$s_4 + 3s_6 + 3g_3 - g_4 + g_6 - 4s - 3g$	$\nu_{14} + 3\nu_{16} + 3\nu_3 - \nu_4 + \nu_6$	16
$L_{25}$	$-s_3 + 3s_4 + 2s_6 + 2g_3 + g_4 - 4s - 3g$	$-\nu_{13} + 3\nu_{14} + 2\nu_{16} + 2\nu_3 + \nu_4$	16
$L_{26}$	$-s_3 + 3s_4 + 2s_6 + 3g_4 - 4s - 3g$	$-\nu_{13} + 3\nu_{14} + 2\nu_{16} + 2\nu_3 + \nu_4$	16
$N^\circ$ de figura: 3.6 D			
$L_{27}$	$s_4 + g_4 + g_5 - s - 2g$	$\nu_{14} + \nu_4 + \nu_5$	6
$L_{28}$	$s_4 + g_3 + g_5 - s - 2g$	$\nu_{14} + \nu_3 + \nu_5$	6
$L_{29}$	$s_3 + 2g_3 - s - 2g$	$\nu_{13} + 2\nu_3$	6
$L_{30}$	$s_3 + g_3 + g_4 - s - 2g$	$\nu_{13} + \nu_3 + \nu_4$	6
$L_{31}$	$s_3 + 2g_4 - s - 2g$	$\nu_{13} + 2\nu_4$	6
$L_{32}$	$s_4 + 2g_3 - s - 2g$	$\nu_{14} + 2\nu_3$	6
$L_{33}$	$s_6 + 2g_3 - s - 2g$	$\nu_{16} + 2\nu_3$	6

Sigue en la página siguiente.

Id.	Condición resonante	Resonancia	Orden
$L_{34}$	$s_6 + g_5 + g_6 - s - 2g$	$\nu_{16} + \nu_5 + \nu_6$	6
$L_{35}$	$-s_3 + 2s_6 + g_4 + g_6 - s - 2g$	$-\nu_{13} + 2\nu_{16} + \nu_4 + \nu_6$	8
$L_{36}$	$2s_4 - s_6 + g_3 + g_5 - s - 2g$	$2\nu_{14} - \nu_{16} + \nu_3 + \nu_5$	8
$L_{37}$	$2s_3 - s_4 + g_5 + g_6 - s - 2g$	$2\nu_{13} - \nu_{14} + \nu_5 + \nu_6$	8
$L_{38}$	$2s_3 - s_6 + g_4 + g_5 - s - 2g$	$2\nu_{13} - \nu_{16} + \nu_3 + \nu_5$	8
$L_{39}$	$2s_3 - s_4 + 2g_3 - s - 2g$	$2\nu_{13} - \nu_{14} + 2\nu_3$	8
$L_{40}$	$-s_3 + s_4 + s_6 + 2g_4 - s - 2g$	$-\nu_{13} + \nu_{14} + \nu_{16} + 2\nu_4$	8

En general, las resonancias de más bajos órdenes son las que rigen la dinámica secular. En nuestro caso, para testear la influencia de las resonancias determinadas, seleccionamos partículas de prueba con condiciones iniciales próximas a una resonancia de interés y reconstruimos numéricamente la evolución de los correspondientes ángulos críticos. Como ejemplo representativo del análisis hecho, en la Tabla 3.4 se muestran seis condiciones iniciales y sus respectivos ángulos seculares. La localización de estas condiciones iniciales se observan en la Figura 3.6 (puntos rojos).

Id.	$a$ (UA)	$i$ (°)	Ángulo resonante
A1	1,9662	13,7411	$\sigma_{A1} = 2\Omega_4 + 2\varpi_3 - \varpi_6 - 2\Omega - \varpi$
B1	1,9502	13,1793	$\sigma_{B1} = \Omega_3 + 2\Omega_4 + \varpi_4 + \varpi_5 - 3\Omega - 2\varpi$
C1	1,9304	10,0099	$\sigma_{C1} = 3\Omega_3 + 2\Omega_4 + \varpi_3 + \varpi_4 - 4\Omega - 3\varpi$
D1	1,8982	23,0375	$\sigma_{D1} = \Omega_4 + \varpi_3 + \varpi_5 - \Omega - 2\varpi$
D2	1,7356	14,3101	$\sigma_{D2} = 2\Omega_3 - \Omega_4 + \varpi_5 + \varpi_6 - \Omega - 2\varpi$
D3	1,9514	14,9757	$\sigma_{D3} = \Omega_3 + 2\varpi_3 - \Omega - 2\varpi$

Tabla 3.4: Elementos orbitales de las condiciones iniciales seleccionadas, en todos los casos  $e = 0,08$  y los ángulos  $M = \omega = \Omega = 0^\circ$ . La evolución temporal de cada uno de los ángulos resonantes se muestra en la Figura 3.7

La Figura 3.7 muestra la evolución temporal de los ángulos resonantes. En la primera imagen podemos ver la circulación del ángulo  $\sigma_{A1}$  al cabo de  $2 \times 10^5$  años, donde puede notarse que durante intervalos de tiempo de al menos  $\sim 4 \times 10^4$  años el ángulo se mantiene librando alrededor de un valor fijo. En el panel de abajo,  $\sigma_{B1}$  tiene periodos de circulación de  $\sim 1 \times 10^5$  años, cuestionablemente altos. El mismo comportamiento se repite para  $\sigma_{C1}$  y  $\sigma_{D1}$ . En el último panel, observamos cómo



$\sigma_{D3}$  libra alrededor de  $\sim 300^\circ$ , también durante un extenso periodo temporal. La libración intermitente durante largos periodos temporales es consistente con el comportamiento que tienen los ángulos cuando se encuentran afectados por la acción de resonancias.

En resumen, calculamos la posición de resonancias seculares mediante un ajuste polinomial empírico, obteniendo un muy buen acuerdo con los resultados obtenidos previamente por Milani et al., (2010). Localizar resonancias seculares de altos ordenes en la región de estudio nos permitió compararlas con las estructuras observadas en el mapa dinámico  $max(\Delta e)$  y así encontrar una posible explicación a lo observado. La acción de estas resonancias fue testada con resultados positivos.

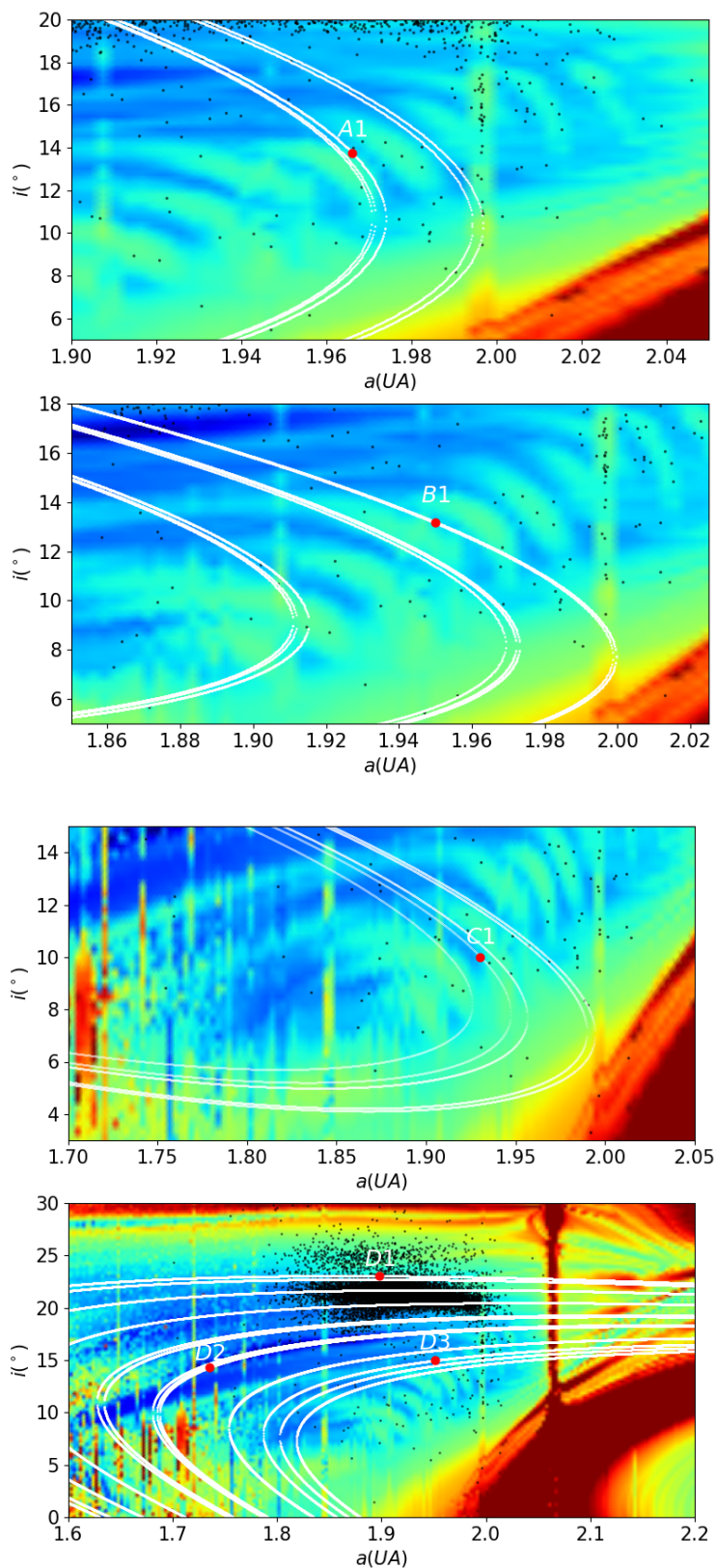


Figura 3.6: Resonancias seculares de alto orden que atraviesan la región de interés (Tabla 3.3). Los puntos rojos y blancos son las condiciones iniciales testeadas, cuyos ángulos críticos se observan en la Tabla 3.4.

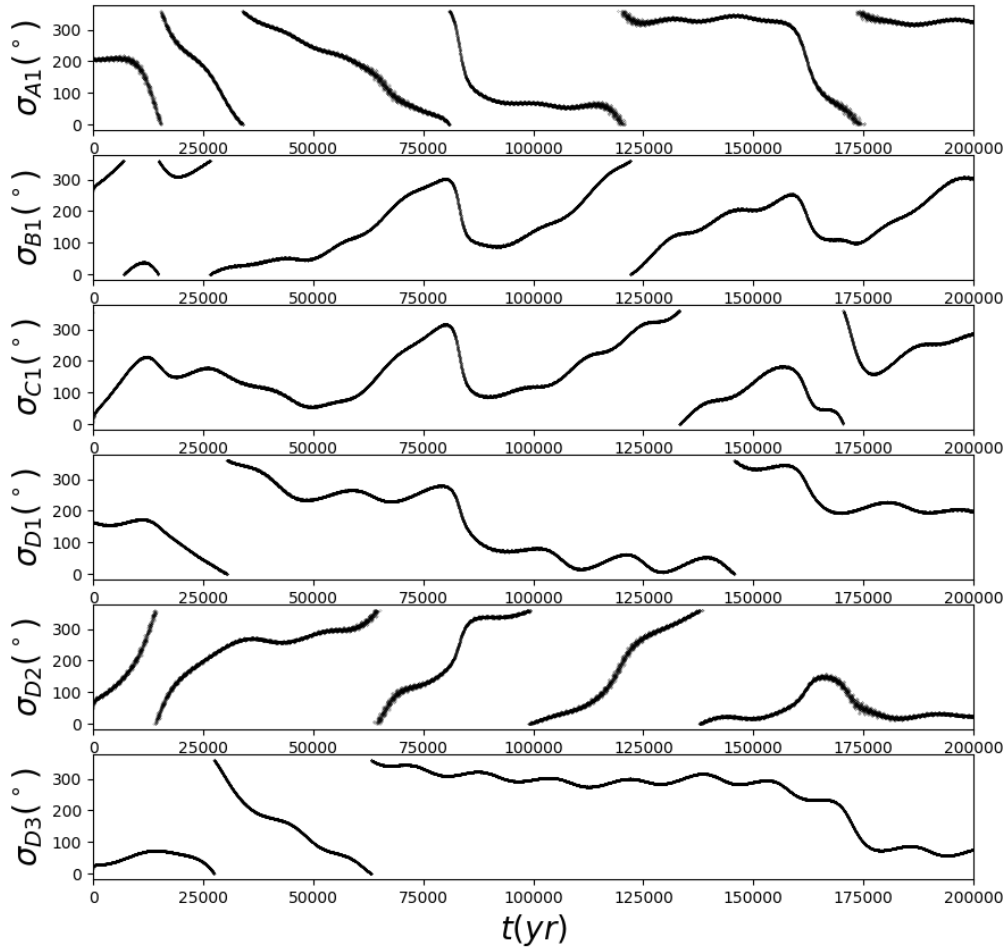


Figura 3.7: Evolución en el tiempo de los ángulos resonantes en un intervalo  $t = 2 \times 10^5$  años. En todos los casos se observan periodos de libraciones intermitentes que manifiestan claramente la presencia de resonancias de alto orden.



---

## Capítulo 4

# Sub-grupo resonante en el espacio de frecuencias propias

En este capítulo se presenta un análisis del grupo Hungaria en el espacio de frecuencias propias  $(g, s)$ . Trabajar en este espacio presenta numerosas ventajas. Por un lado, se evita la compleja estructura que presentan las resonancias seculares en el espacio  $(a_p, \sin(i_p))$  y por otro, es útil para caracterizar de forma eficiente algunas propiedades dinámicas que no son evidentes en el espacio de elementos propios.

La Figura 4.1 muestra a la población Hungaria en el espacio de frecuencias propias  $(g, s)$ . En ella se observa que a la izquierda del agrupamiento principal, para  $g \lesssim 12$  "/año, existe un conjunto de  $\sim 700$  objetos con una amplia dispersión, que no se acoplan a la distribución más numerosa. Una observación más detallada revela la existencia de asteroides dispuestos en línea recta con una muy baja dispersión. Milani et al., (2010) mencionan la presencia de unos pocos objetos en esa región influenciados por la resonancia  $(s - s_6) - (g - g_5)$ , o más precisamente  $\nu_{16} - \nu_5$ . Actualmente, al contar con una mayor cantidad de datos se observa que esta acumulación es significativa. Más allá de esta mención, no se halla en la literatura ningún estudio referido a este grupo de objetos, ni de los mecanismos que pueden llegar mantenerlos o difundirlos a lo largo de la resonancia.

Concentrándonos, entonces, en este grupo de asteroides, propusimos dos posibles hipótesis para explicar la distribución observada:

1. En primer lugar, podrían ser asteroides que fueron dispersados del cúmulo original, arrastrados por algún mecanismo de transporte y que quedaron capturados en resonancia.

- La segunda hipótesis plantea un escenario más interesante: podrían ser fragmentos de la disrupción de un asteroide pequeño, que originalmente se hallaba en las cercanías de la resonancia  $\nu_{16} - \nu_5$  y cuyos fragmentos quedaron atrapados en esta y evolucionaron a lo largo de la recta por Efecto Yarkovsky. Concretamente, se propone la existencia de una segunda familia colisional de más reciente creación que la que dio origen a la familia Hungaria hace  $0,5 \times 10^9$  años atrás.

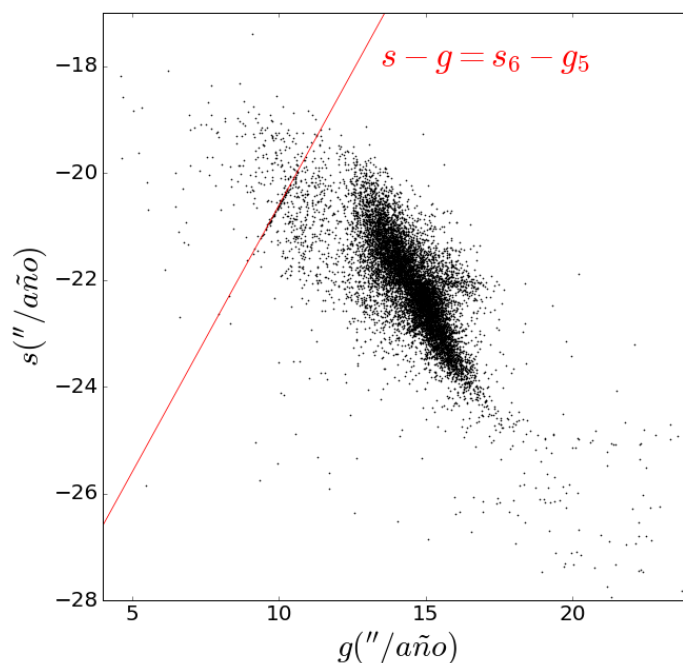


Figura 4.1: Asteroides Hungaria proyectados en el espacio de frecuencias propias  $g$  vs  $s$ . En rojo se representa la resonancia secular  $\nu_{16} - \nu_5$ .

Para comenzar con el análisis de este conjunto de asteroides, se analizó la distribución de los mismos a lo largo de la recta resonante  $s = Ag + B$ , la cual posee  $A = 1$  y  $B = s_6 - g_5$ . Para poder aislar objetos sobre la recta se definieron dos parámetros: el parámetro de arco  $\eta$  definido como la distancia de un asteroide a la ordenada al origen y la distancia mínima  $d_{min}$  a la línea secular (Ver Figura 4.2). Se identificaron aquellos asteroides cuyas distancias a la línea resonante cumplían  $d_{min} \leq 0,011 \text{ ''}/\text{año}$ . La búsqueda resultó en un total de 46 objetos. Esta  $d_{min}$  es la mínima distancia a la recta resonante que hace que la distribución de asteroides en  $\eta$ ,  $a$ , e  $i$  tenga una distribución aproximadamente gaussiana, como veremos más

#### 4. SUB-GRUPO RESONANTE EN EL ESPACIO DE FRECUENCIAS PROPIAS

adelante. En la Figura 4.3 se presentan los asteroides de la selección en el espacio de frecuencias propias (izq.); la proyección en el espacio de semieje mayor propio vs. excentricidad propia (medio), donde observamos que no ocupan una región preferencial respecto al resto de la población Hungaria; y la distribución en el espacio de semieje mayor propio vs. inclinación propia (der.), donde queda en evidencia que este conjunto de objetos pertenece al segundo grupo de más altas inclinaciones mencionado con anterioridad y que además, presenta una tendencia en cuanto a que a mayores valores de  $a_p$ , se tienen mayores valores de  $i_p$ .

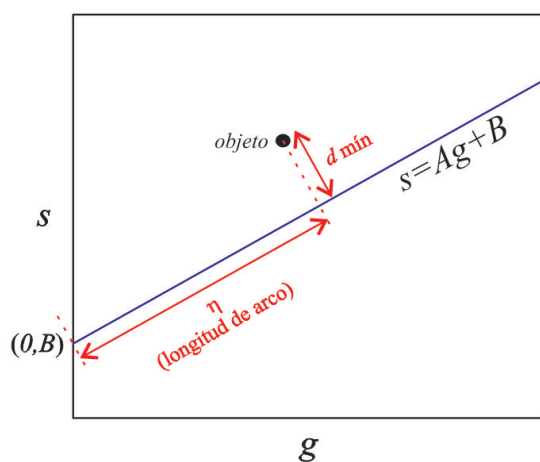


Figura 4.2: Longitud de arco  $\eta$  y distancia mínima de un objeto a la resonancia secular.

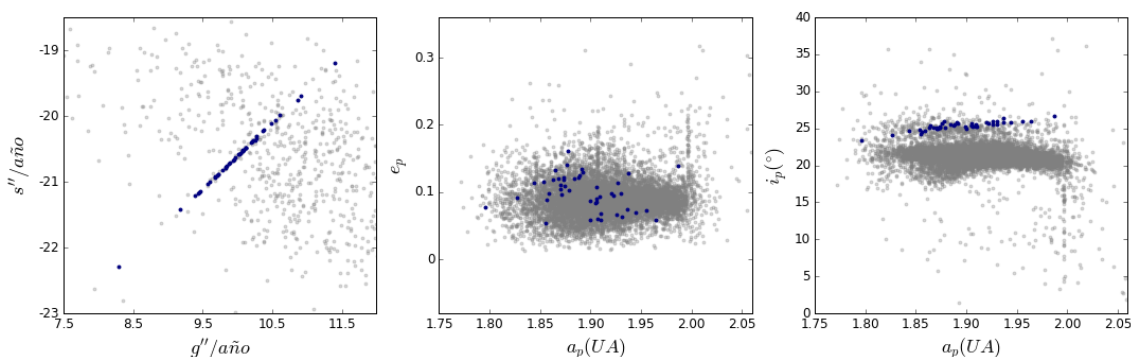


Figura 4.3: Puntos grises: población Hungaria. Puntos oscuros: objetos a una distancia  $d_{\min} \leq 0,011$  "/año de la recta resonante  $\nu_{16} - \nu_5$ . (a) Espacio de frecuencias propias ( $g, s$ ). (b) Espacio de elementos propios ( $a_p, e_p$ ). (c) Espacio de elementos propios ( $a_p, i_p$ ).

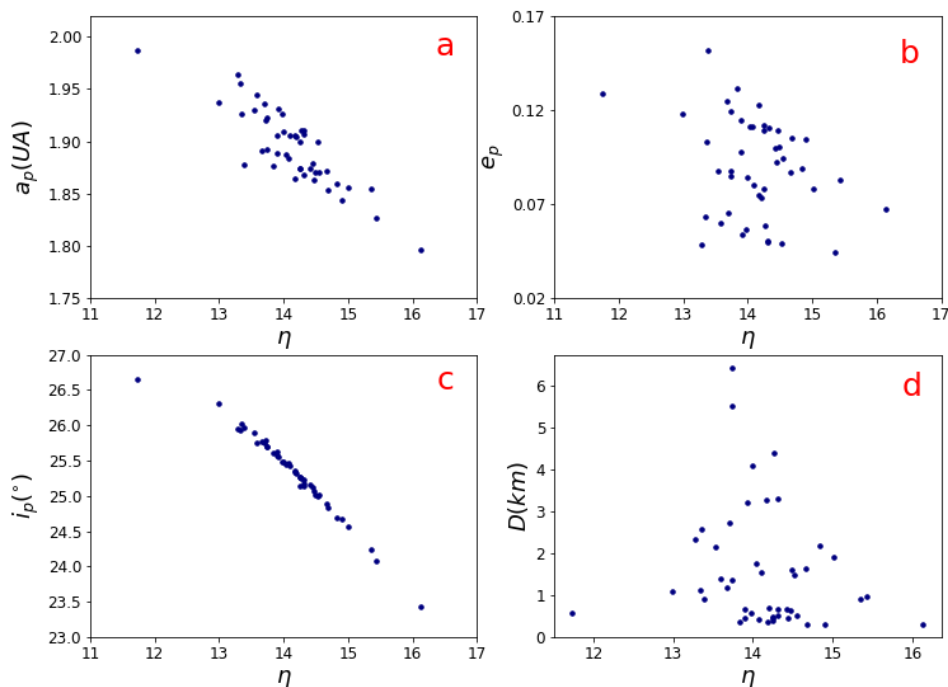


Figura 4.4: Correlaciones relevantes para el subgrupo de objetos que se hallan a una distancia  $d_{min} \leq 0,011$  ”/año de la recta resonante  $\nu_{16} - \nu_5$ . (a)  $(\eta, a_p)$ . (b)  $(\eta, e_p)$ . (c)  $(\eta, i_p)$ . (d)  $(\eta, D)$ .

La Figura 4.4 muestra algunas correlaciones relevantes del subgrupo de estudio. Por ejemplo, observamos que existe una correlación que puede modelarse por una función lineal, entre la longitud de arco  $\eta$  y el semieje mayor de los objetos en la recta resonante (Figura 4.4a), donde asteroides con valores más altos de  $a$  poseen menor valor de  $\eta$ . El parámetro  $\eta$  resulta valioso porque nos permite ordenar los objetos a lo largo de la resonancia y la Figura 4.4b nos muestra que no existe una relación aparente entre esto y el valor de excentricidad de los asteroides; sin embargo, se encuentra una correlación clara y llamativamente lineal, de muy baja dispersión, cuando se analiza cómo cambian las inclinaciones a lo largo de la resonancia, Figura 4.4c. En el último cuadro, Figura 4.4d, se encuentra la distribución de tamaño de los asteroides a lo largo de la recta. Observamos que existe un patrón que indica que los asteroides de mayor tamaño se concentran alrededor de  $\eta \sim 14$  y a ambos lados de este valor (sobre la recta) comienzan a dispersarse objetos de tamaño moderado. Los asteroides más pequeños, de diámetros menores a 1 km, se concentran



principalmente entre  $13,8 < \eta < 15$  y mientras que unos pocos ocupan los valores más extremos de la recta.

La Figura 4.5 muestra histogramas de la distribución de los distintos parámetros orbitales, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo: longitud de arco  $\eta$ ,  $a_p$ ,  $e_p$ ,  $i_p$  y por último, el diámetro de los asteroides en km, calculados a partir de la Ecuación 1.20, utilizando la magnitud absoluta extraída de la base de datos AstDyS y utilizando un mismo valor de albedo geométrico para todos los asteroides de  $p_v = 0,38$ . Este valor fue el estimado para (434)Hungaria por Morrison & Zellner, (1979). Se encuentra que los miembros del grupo tienen tamaños que van desde los 0,307 km a los 6,415 km. De la distribución aproximadamente gaussiana que se observa en  $\eta$ ,  $a_p$ ,  $i_p$  y en menor medida para  $e_p$ , se infiere que existe una acumulación de asteroides que yace en promedio en  $\eta \sim 14,12$ , centrados en  $a_p \sim 1,89$  UA y con inclinaciones medias de  $i_p \sim 25,32^\circ$ . Esta observación podría resultar significativa si se parte de la premisa de la segunda hipótesis. Puede pensarse que todo el cúmulo de objetos que se formó a partir de la fragmentación de un objeto en las cercanías de la resonancia, en un primer momento, tenían elementos orbitales similares al cuerpo parental, que de forma gradual evolucionaron dinámicamente producto de perturbaciones gravitatorias y no gravitatorias. Bottke et al., (2006) proponen que una resonancia secular podría actuar como un canal en el que se dispersan los asteroides cuando el semi-eje mayor de la órbita es influenciado por el efecto Yarkovsky. En este contexto, se esperaría encontrar una distribución de objetos de tipo gaussiana a lo largo de la línea resonante y aunque esta observación no es suficiente prueba para la segunda hipótesis, es un buen punto de partida.

### 4.1. Método de agrupamiento jerárquico (HCM)

Cuando una familia de asteroides se forma, sus miembros se esparcen en una región que además está poblada por otros objetos. Zappalà et al., (1990) introducen el método de agrupamiento jerárquico (HCM, por sus siglas en inglés) para identificar vecinos en el espacio de elementos propios y separar las familias de asteroides de los objetos de fondo. La idea fundamental del HCM es modelar la distancia en el espacio de elementos propios, a partir de las ecuaciones variacionales de Gauss, preservando el campo de velocidades de eyección puro de la familia de asteroides (Ver Moulton F. R., (1935)).

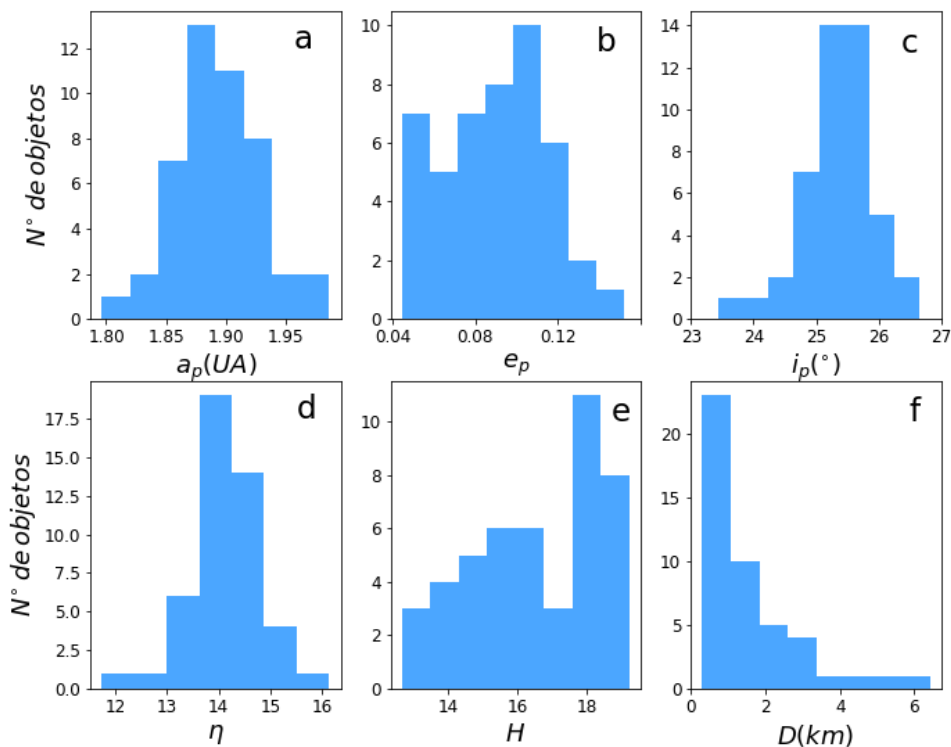


Figura 4.5: Distribución de parámetros de interés para el subgrupo de objetos que se hallan a una distancia  $d_{min} \leq 0,011$  ”/año de la recta resonante  $\nu_{16} - \nu_5$ . (a) Semieje mayor, (b) excentricidad, (c) inclinación, (d) parámetro  $\eta$ , (e) magnitud absoluta, y (f) diámetro.

Zappalà et al., (1990) define la velocidad en m/s entre dos objetos como:

$$d = na\sqrt{k_1(\Delta a/a)^2 + k_2(\Delta e)^2 + k_3(\Delta \sin(i))^2} \quad (4.1)$$

donde  $n$  es el movimiento medio del asteroide;  $\Delta a = a - a_0$ ,  $\Delta e = e - e_0$ ,  $\Delta \sin(i) = \sin(i) - \sin_0(i)$ , son las diferencias entre los elementos propios de dos asteroides diferentes; y  $k_1, k_2$ , y  $k_3$  son factores de peso, definidos como  $k_1 = 5/4$ ,  $k_2 = 2$  y  $k_3 = 2$ . Otros valores para los factores de peso son posibles y arrojan resultados similares (Ver Zappalà et al., (1990)). La velocidad así definida puede utilizarse como un indicador de la distancia en el espacio de fases.

El abordaje propuesto por Zappalà et al., (1990) se aplica de la siguiente manera:

dato un asteroide individual, la distancia (velocidad, Ecuación 4.1) entre este y otro objeto es computada. Si esta distancia es menor que una distancia límite ( $d_c$ ), el nuevo objeto es agregado a la lista. El procedimiento es repetido hasta que se deja de encontrar nuevos miembros para esa familia.

Sin embargo, si se desea trabajar con el espacio de frecuencias propias, Carruba y Michtchenko (2007), aseguran que no es correcto utilizar el enfoque propuesto por Zappalà. En primer lugar, porque las órbitas actuales de los miembros de las familias no reflejan el campo de velocidad de eyección original, debido a que han sido modificados por numerosos efectos, como los ya mencionados Yarkovsky, YORP, difusión por resonancias de movimientos medios y seculares, y los repetidos encuentros cercanos con asteroides masivos, especialmente en las familias más antiguas. En segundo lugar, a diferencia de lo que se creía los '90, ahora se sabe que el semieje mayor de la órbita es una de las cantidades que mayor variación experimenta desde que las familias se forman. Por lo tanto, estos autores proponen trabajar en el espacio de frecuencias propias con un abordaje alternativo.

#### 4.1.1. HCM en el espacio de frecuencias propias

Aquellas resonancias seculares no lineales que pueden ser escritas en términos de combinaciones de resonancias seculares lineales, poseen un mayor efecto dinámico que otras del mismo orden que no pueden ser escritas de esta manera (Carruba et al., 2007). En particular, la resonancia secular  $\nu_{16} - \nu_5$  entra dentro de esta categoría, para la cual se puede proponer un tratamiento especial a la hora de buscar asteroides que interactúen con ella.

En primera instancia, se necesita encontrar una métrica adecuada que sirva para medir las distancias típicas entre asteroides vecinos en el espacio de frecuencias propias. Si se mide la frecuencia propia  $n$  en grados/año y  $g$  y  $s$  en "/año, las diferencias entre vecinos de una misma familia tienen todos el mismo orden de magnitud. Para resonancias de tipo  $s - g$ , Carruba y Michtchenko (2009), proponen la métrica:

$$d_2 = \sqrt{h_1(\Delta n/h_0)^2 + h_2(\Delta g)^2 + h_3(\Delta(s - g))^2} \quad (4.2)$$

donde  $\Delta n = n - n_0$ ,  $\Delta g = g - g_0$ ,  $\Delta(s - g) = (s - g) - (s_0 - g_0)$ , son las diferencias entre las frecuencias propias de dos asteroides diferentes;  $h_0$  es un factor de normalización de dimensión 1 grado/",  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$  y la distancia en el espacio de

frecuencias propias tiene unidades de "/año.

Otra manera posible de medir distancias en el espacio de frecuencias es agrupando objetos en función de los cambios relativos en  $(n, g, s - g)$  y de esta manera evitar la dependencia en el cálculo de distancia que pueda existir por grandes diferencias entre estos valores. Proponemos como alternativa la métrica relativa:

$$d_3 = \sqrt{h_1 \left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2 + h_2 \left(\frac{\Delta g}{g_0}\right)^2 + h_3 \left(\frac{\Delta(s-g)}{s_0-g_0}\right)^2} \quad (4.3)$$

$\Delta n$ ,  $\Delta g$ ,  $\Delta(s - g)$ , tienen el mismo significado que en la ecuación anterior y nuevamente  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ . En este caso, la distancia carece de unidades.

Será útil considerar una tercera métrica, a la que llamaremos métrica bidimensional, en la que no tendremos presente el movimiento medio:

$$d_4 = \sqrt{h_2(\Delta g)^2 + h_3(\Delta(s - g))^2} \quad (4.4)$$

con  $h_2 = h_3 = 1$  y  $d_3$  unidades de "/año.

Una vez seleccionada la métrica, es necesario definir un criterio bajo el cual diremos que un asteroide pertenecerá o no a determinado grupo o familia. Para ello, seguiremos los lineamientos propuestos por Beaugé & Roig, (2001):

1. A partir de un conjunto de  $N$  asteroides, se calcula la distancia  $d_{ij}$  para cada asteroide  $i$ , siendo  $j$  el vecino más cercano.
2. Se define el promedio de las distancias mínimas:

$$d_c = \frac{\sum_{i=1}^N d_{ij}}{N} \quad (4.5)$$

3. Fijando la distancia  $d_c$ , se identifican todos los grupos aislados que existen en la población y el número de miembros en cada grupo tal que cumplan la condición  $d \leq d_c$ .
4. Se calcula el número promedio de miembros por grupo:

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1; N_i \neq 1}^{N_g} N_i}{N_g} \quad (4.6)$$

donde  $N_i$  es el número de miembros del grupo  $i$  y  $N_g$  la cantidad total de grupos que cumplen  $N_i \geq 2$ .

5. El número límite de objetos por grupo se define como:

$$N_c = \bar{N} + 2\sqrt{\bar{N}} \quad (4.7)$$

Así pues, valores grandes de  $d_c$  arrojarán pocos grupos de muchos miembros, y valores chicos, lo contrario. Los valores  $d_c$  y  $N_c$  dependerán de las características de la población, pero una vez establecidos, permitirán concluir que aquellos grupos que contengan un número de miembros mayor a  $N_c$  que aún sobrevivan a valores  $d \leq d_c$  serán grupos estadísticamente significativos.

#### 4.1.2. Implementación del HCM

Se seleccionaron asteroides localizados en la franja definida por  $6 \text{ "/año} \leq g \leq 12,36 \text{ "/año}$  y  $-26 \text{ "/año} \leq s \leq -18 \text{ "/año}$ , con el objetivo de buscar agrupaciones de asteroides en la cercanías de la resonancia  $\nu_{16} - \nu_5$ . A los 769 objetos seleccionados se les aplicó el HCM, siguiendo los pasos anteriormente detallados, utilizando tres diferentes métricas  $d_2$ ,  $d_3$  y  $d_4$ .

Primeramente, se midieron las distancias a partir de  $d_2$  (Ecuación 4.2), para esta métrica los cálculos arrojan una distancia límite de corte  $d_{2c} = 79,11 \text{ "/año}$ , con un número límite de  $N_{2c} = 6$  asteroides por grupo. Con esta información, comenzó la búsqueda de grupos cuya distancia entre miembros sea menor a  $d_{2c}$  y que estén conformados por 6 o más asteroides. La Figura 4.6a muestra los tres agrupamientos que sobreviven para una distancia de  $15 \text{ "/año}$  proyectados en el espacio  $(g, s)$ . Tal como se observa en la figura, no existe una correlación aparente entre los miembros de cada grupo; podría pensarse en principio que el método falla. Para entender lo que ocurre analizemos la Figura 4.6b, donde se muestran los tres grupos aislados en el espacio semieje mayor  $(a)$  vs. magnitud absoluta  $(H)$ . Se observa en esta imagen que los miembros de cada uno de los grupos tienen valores de  $a$  casi idénticos, esto se traduce en valores de movimiento medio  $n$  similares. Lo que significa que el agrupamiento real se debe a que los objetos son muy cercanos cuando se analiza la frecuencia  $n$ , pero no ocurre lo mismo en  $g$  o  $s$ . Con la primera métrica surge el inconveniente de que el término  $\Delta n$  es el que domina la Ecuación 4.2, debido a la

distancia heliocéntrica a la que se encuentra la población Hungaria. Esto ocurre ya que, históricamente, la misma fue propuesta para identificar familias de asteroides en el cinturón principal, donde las frecuencias  $n$  son más pequeñas y no toman un peso dominante respecto a los valores de  $g$  y  $s$ . Por tal motivo, no la vamos a considerar apropiada para el análisis en la región de los Hungaria.

La métrica relativa resulta apropiada para remediar el problema descripto. Es así, que en una segunda instancia repetimos el procedimiento de búsqueda de familias utilizando la Ecuación 4.3. Al hacerlo, encontramos una distancia límite de  $d_{3c} = 9,58 \times 10^{-3}$ , con un número límite de  $N_{3c} = 6$  asteroides por grupo. En la Figura 4.7a se observan dos de los agrupamientos que sobreviven a una distancia de  $8,6 \times 10^{-3}$  y a diferencia del caso anterior, en este gráfico se distingue la cercanía existente entre los miembros de un mismo grupo en el plano  $(g, s)$ . Estos dos grupos resultan significativos debido a que contienen la totalidad o gran parte de sus miembros en las proximidades de la resonancia. Recordando la relación empírica entre magnitud absoluta  $H$  y el diámetro de un asteroide,  $D \simeq \frac{1340}{\sqrt{p}} 10^{-H/5}$ , la Figura 4.7b revela que solo una pequeña cantidad de objetos poseen grandes tamaños ( $D \sim 5$  km), mientras que la mayoría de ellos serían asteroides muy pequeños, de diámetros que no superan el kilómetro.

Si bien la implementación de la métrica relativa mejora notablemente los resultados obtenidos, la dispersión por efecto Yarkovsky tiene su influencia sobre todo en  $a$  y en este sentido, el movimiento medio  $n$  sigue siendo el más influyente a la hora de identificar asteroides que pertenezcan a un mismo grupo. Para evitar este comportamiento selectivo, decidimos realizar el procedimiento haciendo uso de la métrica bidimensional (Ecuación 4.4), donde se quita por completo la dependencia con el movimiento medio  $n$ . Con esta nueva métrica, la distancia límite hallada es de  $d_{4c} = 8,68 \times 10^{-2}$  "/año, con un número límite de  $N_{4c} = 7$  asteroides por grupo. El análisis realizado para distancias menores que  $d_{4c}$  nos muestra que para una distancia de corte de  $6,8 \times 10^{-2}$  "/año un único grupo numeroso sobrevive en la proximidad de la línea resonante, tal como se observa en la Figura 4.8a.

La distribución de este sub-grupo de asteroides en el plano  $(a, H)$  (Figura 4.8b) exhibe aproximadamente un patrón en forma de "V", que es recurrente en muchas familias de asteroides. Se observa que los asteroides más grandes residen cerca del

valor medio de  $a$  para toda la familia, mientras que los valores extremos de  $a$  están ocupados por los miembros más pequeños, y por lo general, la región central de la “V” posee menor densidad de objetos. La distribución de fragmentos observada resulta difícil de explicar con cualquier campo de velocidades de eyección razonable producido por el evento de formación de la familia. En particular, significaría que dos flujos de fragmentos antialineados son expulsados del sitio donde se produce el impacto; estudios previos de simulaciones numéricas de colisión de asteroides no predicen esta geometría (Durda et al., 2004). Por otra parte, el agotamiento central de la familia podría ser causado por la dispersión a través de resonancias débiles, sin embargo, es un comportamiento recurrente y difícil de conciliar para todas las familias. El modelo de dispersión por efecto Yarkovsky ofrece la explicación más natural para interpretar las observaciones (Ver Capítulo 1, Sección 1.3).

## 4.2. Evolución orbital de asteroides por efecto Yarkovsky

Las familias de asteroides desde el momento de su formación están expuestas a la difusión en semieje mayor originada por el efecto Yarkovsky. Un asteroide con un diámetro  $D = 5$  km, por ejemplo, puede migrar hacia afuera o hacia adentro de su órbita original a una tasa de corrimiento medio  $|da/dt| \sim 2 \times 10^{-5}$  UA por millón de años, mientras que esta tasa es menor (por ej.,  $D = 20$  km con un corrimiento medio  $|da/dt| \sim 6 \times 10^{-6}$  UA por millón de años) para asteroides de mayor tamaño (Bottke et al., 2006b). Debido a que los modelos colisionales sugieren que las familias de asteroides tienen tiempos de vida de cientos a miles de millones de años (Bottke et al., 2005a,b), los corrimientos por fuerzas no gravitacionales serían lo suficientemente grandes como para explicar las dispersiones observadas en muchas familias. Además, dado que el efecto Yarkovsky depende del tamaño del asteroide, los miembros de la familia eventualmente tomarían la apariencia de que fueron lanzados utilizando una distribución de velocidades dependiente del tamaño.

Farinella y Vokrouhlický (1999) desarrollan la idea de que las edades de familias de asteroides podrían medirse estimando el tiempo que tardan en dispersarse producto de fuerzas térmicas, basándose en el hecho de que los miembros pequeños tienen una dispersión más rápida que los miembros grandes. Es así que la distribu-

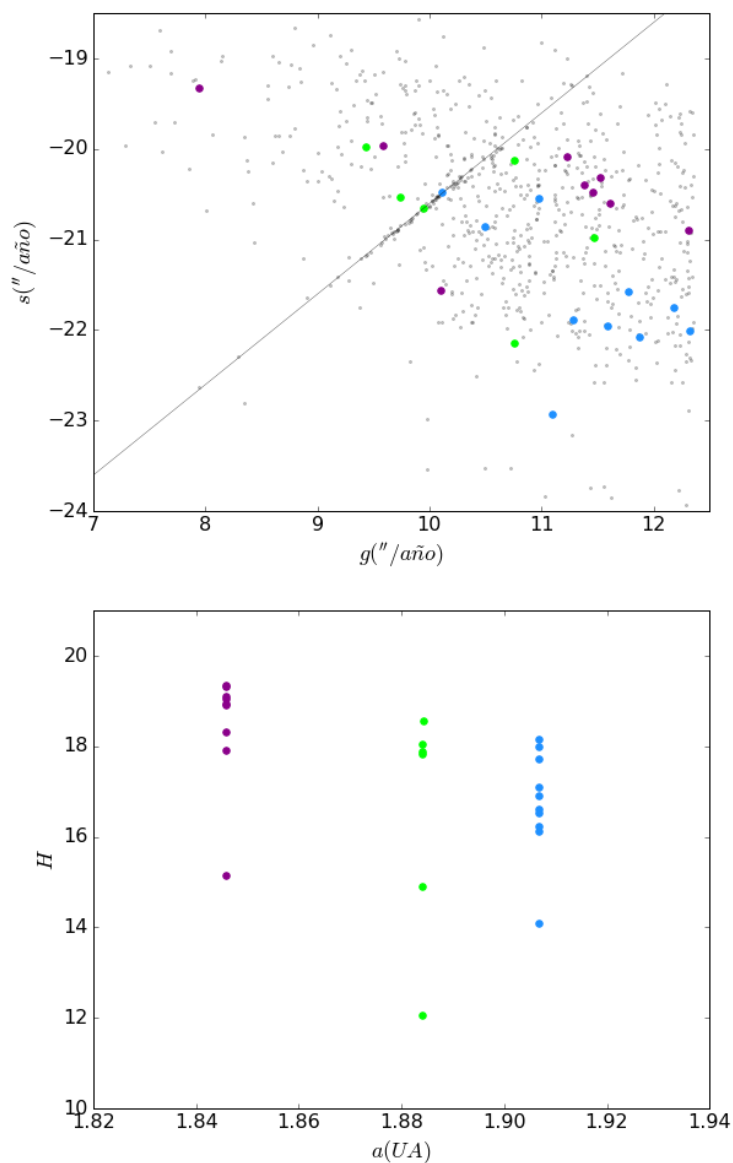


Figura 4.6: Grupos hallados con HCM, a partir de la métrica en el espacio de frecuencias (Ecuación 4.2). Los grupos violeta, verde y celeste poseen 9, 6 y 10 miembros, respectivamente, separados una distancia menor a  $15''/\text{año}$ . (Sup.) Proyección en el espacio de frecuencias  $g$  vs.  $s$ . Los puntos grises representan la población total analizada. (Inf.) Distribución en semieje mayor ( $a$ ) vs. magnitud absoluta ( $H$ ).



#### 4. SUB-GRUPO RESONANTE EN EL ESPACIO DE FRECUENCIAS PROPIAS

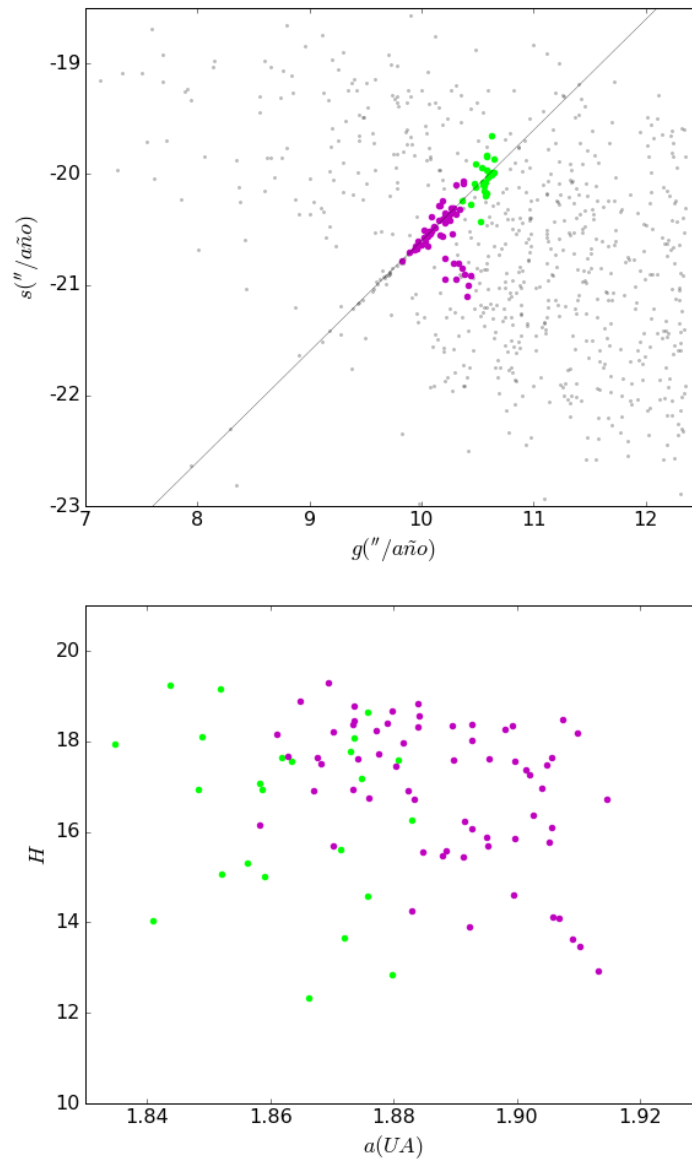


Figura 4.7: Grupos hallados con HCM, a partir de la métrica relativa (Ecuación 4.3). Los grupos magenta y verde poseen 63 y 24 miembros, respectivamente, separados una distancia menor a  $8,6 \times 10^{-3} ''/\text{año}$ . (Sup.) Proyección en el espacio de frecuencias  $g$  vs.  $s$ . Los puntos grises representan la población total analizada. (Inf.) Distribución en semieje mayor ( $a$ ) vs. magnitud absoluta ( $H$ ).

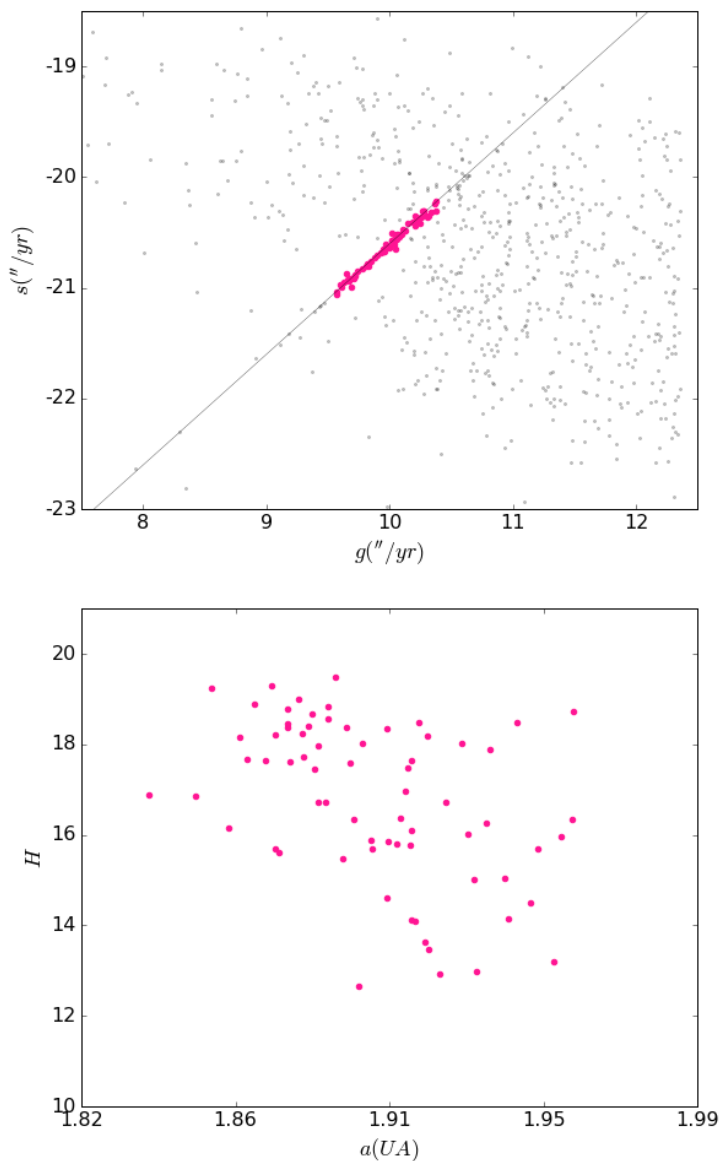


Figura 4.8: Grupos hallados con HCM, a partir de la métrica bidimensional (Ecuación 4.4). El grupo se encuentra compuesto por 69 miembros, separados una distancia menor a  $6,8 \times 10^{-2}$  ''/año. (Sup.) Proyección en el espacio de frecuencias  $g$  vs.  $s$ . Los puntos grises representan la población total analizada. (Inf.) Distribución en semieje mayor ( $a$ ) vs. magnitud absoluta ( $H$ ).

ción observada en el plano  $(a, H)$  puede utilizarse como un reloj para inferir la edad de la familia. La evolución, por su parte, de la excentricidad y la inclinación son despreciables, a menos que el cuerpo esté interactuando con alguna resonancia.

El efecto Yarkovsky es especialmente importante en la evolución dinámica de los Hungarias debido a que su influencia depende de la distancia del objeto al Sol y por lo tanto, la migración por este efecto es mayor en este grupo respecto al resto de los miembros del cinturón principal; aunque esto podría ser parcialmente compensado por los altos valores de albedo de los asteroides de tipo E.

Teniendo como hipótesis el posible origen colisional de este último sub-grupo hallado en la resonancia secular, se decidió incorporar la evolución por efecto Yarkovsky al integrador de N-cuerpos, que hasta el momento solo consideraba perturbaciones de origen gravitatorio, con el fin de cuantificar la tasa de corrimiento medio en semieje mayor causado por este efecto en la región donde se localiza el grupo.

### 4.2.1. Efecto Yarkovsky: modelo matemático

El cálculo de la fuerza Yarkovsky se divide en dos partes: la determinación de la distribución superficial de la temperatura, y la evaluación de la fuerza de radiación térmica (o torque).

Para determinar la distribución superficial de temperatura del asteroide se necesita resolver la ecuación de difusión del calor:

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.8)$$

con la condición de contorno:

$$(K \nabla T \cdot \mathbf{n}_\perp) + \epsilon \sigma T^4 = \alpha \epsilon \quad (4.9)$$

donde el parámetro  $K$  es la conductividad térmica,  $C_p$  es el calor específico a presión constante,  $\rho$  es la densidad del material,  $\epsilon$  es la emisividad térmica superficial,  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann y  $\alpha = 1 - A$ , con  $A$  el albedo Bond. Esta última ecuación se refiere a la conservación de la energía en un elemento de superficie normal al vector  $\mathbf{n}_\perp$ , donde  $\epsilon$  es el flujo de radiación solar incidente de un elemento de superficie, por lo que  $\alpha \epsilon$  representa la fracción de energía absorbida por dicho

elemento. El primer término de la derecha constituye la energía difundida hacia capas más profundas y el segundo término es la energía reemitida por el elemento de superficie asumiendo que la misma irradia como un cuerpo negro. Una vez que conocemos la función  $\varepsilon$  y los parámetros físicos del material en la superficie ( $K, C_p, \rho$ ), las Ecuaciones 4.8 y 4.9 pueden ser resueltas en forma numérica.

Con el objetivos de reducir la cantidad de parámetros en la formulación matemática se definen: (a) la profundidad de penetración de la onda térmica  $\ell_\nu$  y, (b) el parámetro termal  $\Theta_\nu$ , de la manera que sigue:

$$\ell_\nu = \sqrt{K/\rho C_p \nu} \quad (4.10)$$

$$\Theta_\nu = \frac{\sqrt{K \rho C_p \nu}}{\varepsilon \sigma T_*^3} \quad (4.11)$$

$T_*$  es la temperatura subsolar definida por  $\varepsilon \sigma T_*^4 = \alpha \varepsilon_*$ , siendo  $\varepsilon_*$  el flujo de radiación solar a la distancia donde se encuentra el asteroide. El parámetro termal  $\Theta_\nu$  es una medida de la relajación entre la absorción y la reemisión para una frecuencia  $\nu$ . A medida que  $\Theta_\nu$  disminuye, disminuye también la diferencia entre la absorción y la reemisión.

Resolviendo para la temperatura  $T$ , podemos calcular la fuerza de Yarkovsky debida a la reemisión térmica. Asumiendo una emisión isotrópica, cualquier elemento de superficie  $d\mathbf{S}$  de un cuerpo radiante, genera una fuerza  $d\mathbf{f}$  dada por (Spitale y Greenberg, 2001; Bottke, 2002):

$$d\mathbf{f} = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma}{mc} T^4 \mathbf{n}_\perp dS(u, v), \quad \mathbf{f} = \int_S d\mathbf{f} \quad (4.12)$$

donde la integración se realiza en toda la superficie parametrizada por un sistema de coordenadas  $u$  y  $v$  (como la longitud y la latitud en el caso esférico),  $m$  es la masa del cuerpo y  $c$  la velocidad de la luz. Adoptando un sistema de coordenadas local, con el eje  $z$  alineado con el eje de rotación del cuerpo y los ejes  $xy$  en el plano ecuatorial, es posible descomponer esta fuerza en dos componentes: (a) las vinculadas con  $(f_x, f_y)$  que dependen principalmente de la frecuencia de rotación  $\omega$  del asteroide, y (b) la componente  $f_z$  alineada con el eje de rotación que depende únicamente del movimiento medio  $n$ . Ambas dan origen a la componente diurna y

a la anual, respectivamente.

Asumiendo un cuerpo esférico de radio  $R$ , es posible expandir la solución en término de armónicos esféricos, por lo que la variación media del semieje puede ser escrita como (Vokrouhlický 1998a, 1998b):

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{diurna} = -\frac{8\alpha}{9} \frac{\Phi}{n} F_{\omega}(R', \Theta) \cos(\gamma) + O(e) \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{anual} = \frac{4\alpha}{9} \frac{\Phi}{n} F_{\omega}(R', \Theta) \sin^2(\gamma) + O(e) \quad (4.14)$$

donde  $\Phi = \pi R^2 \varepsilon_*/mc$  es el coeficiente de presión de radiación y  $\gamma$  es la oblicuidad del eje de rotación. La función  $F_{\omega}(R', \Theta)$  depende del radio del cuerpo escalado por el factor de profundidad de penetración de la onda térmica ( $R' = R/\ell_{\nu}$ ) y del parámetro termal  $\Theta_{\nu}$ , ambos referidos a la frecuencia  $\nu$ . Para el efecto diurno se tiene que  $\nu = \omega$ , mientras que para el anual  $\nu = n$ .

Para incorporar el efecto Yarkovsky al integrador de N-cuerpos se debe adicionar las aceleraciones producidas por el efecto diurno y anual a las ecuaciones de movimiento. Escribir de forma explícita una expresión para la aceleración anual tiene una complejidad alta si la comparamos con la expresión a la que puede arribarse para la aceleración diurna. Esta complejidad está asociada a que las expresiones analíticas a las que se ha llegado (Vokrouhlický, 1999) son válidas si se asume un cuerpo esférico y órbitas circulares, y pierden precisión cuando la excentricidad de la órbita del asteroide se aparta de cero. Debido a que el enfoque numérico es igualmente dificultoso, solo se incorporará a las simulaciones N-cuerpos con las que se venía trabajando un término correspondiente a la aceleración producida por la componente diurna del efecto Yarkovsky. La forma explícita para esta aceleración, así como los parámetros físicos adoptados para los asteroides Hungaria se encuentran detallados en el Apéndice B.

### 4.2.2. Simulaciones numéricas

Utilizamos un integrador N-cuerpos en el que se incluyó la acción perturbadora de cuatro planetas (La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) y la perturbación generada por el efecto Yarkovsky diurno. Estudiamos la evolución orbital de 20 asteroides

ficticios durante un periodo de tiempo de 10 millones de años. Las condiciones iniciales para las 20 partículas de prueba fueron las siguientes:

- Elementos orbitales:  $a_0 = 1,91415$  UA,  $e_0 = 0,0607383$ ,  $i_0 = 24,1777^\circ$ , ángulos  $M = \omega = \Omega = 0^\circ$ . Estas condiciones iniciales fueron fijadas asumiendo como cuerpo parental el objeto representado con un triángulo rojo en la Figura 4.10.
- Diámetros: 0,1 km, 0,2 km, 1 km, 2 km, y 6 km.
- Albedos: 0,2 y 0,4.
- Densidad:  $3 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>
- Periodo de rotación: 6 horas. Sentidos de rotación prógrado y retrógrado, habiendo orientado el eje de rotación de forma tal que se produzca la máxima variación en semieje.
- Emisividad  $\epsilon = 1$ .

La Figura 4.9 muestra la proyección de los 20 asteroides ficticios en el plano  $(a, H)$ , tras su evolución durante 10 millones de años. Acorde a las expectativas, se observa que las fuerzas de origen térmico producen una dispersión en semieje mayor y que la misma es fuertemente dependiente del tamaño de los cuerpos y del albedo. Siendo los asteroides más pequeños y los de menor albedo los que poseen una tasa más alta de migración hacia afuera o hacia adentro de la órbita original. Las tasas de desplazamiento  $|da/dt|$  (en unidades de UA por millón de años) para los 20 asteroides ficticios se muestran en la Tabla 4.1.

Para poner en contexto la migración sufrida al cabo de  $1 \times 10^7$  años de los asteroides ficticios respecto a la configuración actual del grupo de estudio, en la Figura 4.10 se superponen ambos conjuntos. Los puntos negros corresponden al sub-grupo hallado mediante el HCM, mientras que los puntos de colores (magenta y verde) pertenecen a los asteroides ficticios. El triángulo rojo señala el posible cuerpo parental, cuyos elementos orbitales  $(a, e, i)$  fueron tomados como referencia a la hora de determinar las condiciones iniciales para la simulación. Visto en esta escala de semieje mayor, se observa un corrimiento en  $a$  solo apreciable en los objetos ficticios más pequeños, mientras que en el rango de magnitud absoluta en el que se encuentran nuestros datos, los asteroides ficticios se apartan de forma imperceptible de la recta vertical que señala sus posiciones iniciales. Esta observación nos da un indicio

#### 4. SUB-GRUPO RESONANTE EN EL ESPACIO DE FRECUENCIAS PROPIAS

Asteroide $N^\circ$	D (km)	$p_v$	H	$ da/dt $ ( $UA/1 \times 10^6 \text{ años}$ )
1	0,1	0,4	21,63	$8,98 \times 10^{-5}$
2	0,1	0,4	21,63	$8,79 \times 10^{-5}$
3	0,2	0,4	20,12	$4,68 \times 10^{-5}$
4	0,2	0,4	20,12	$4,06 \times 10^{-5}$
5	1,0	0,4	16,63	$7,96 \times 10^{-6}$
6	1,0	0,4	16,63	$8,54 \times 10^{-6}$
7	2,0	0,4	15,12	$4,18 \times 10^{-6}$
8	2,0	0,4	15,12	$4,07 \times 10^{-6}$
9	6,0	0,4	12,73	$1,39 \times 10^{-6}$
10	6,0	0,4	12,73	$1,54 \times 10^{-6}$
11	0,1	0,2	22,38	$1,39 \times 10^{-4}$
12	0,1	0,2	22,38	$1,09 \times 10^{-4}$
13	0,2	0,2	20,87	$5,51 \times 10^{-5}$
14	0,2	0,2	20,87	$6,70 \times 10^{-5}$
15	1,0	0,2	17,38	$1,33 \times 10^{-5}$
16	1,0	0,2	17,38	$1,29 \times 10^{-5}$
17	2,0	0,2	15,87	$6,76 \times 10^{-6}$
18	2,0	0,2	15,87	$7,24 \times 10^{-6}$
19	6,0	0,2	13,49	$2,25 \times 10^{-6}$
20	6,0	0,2	13,49	$2,31 \times 10^{-6}$

Tabla 4.1: Diámetro, albedo ( $p_v$ ), magnitud absoluta ( $H$ ) y desplazamiento medio  $|da/dt|$  ( $UA / 1 \times 10^6$  años) debido al efecto Yarkovsky, para los 20 asteroides de prueba utilizados en las simulaciones numéricas.

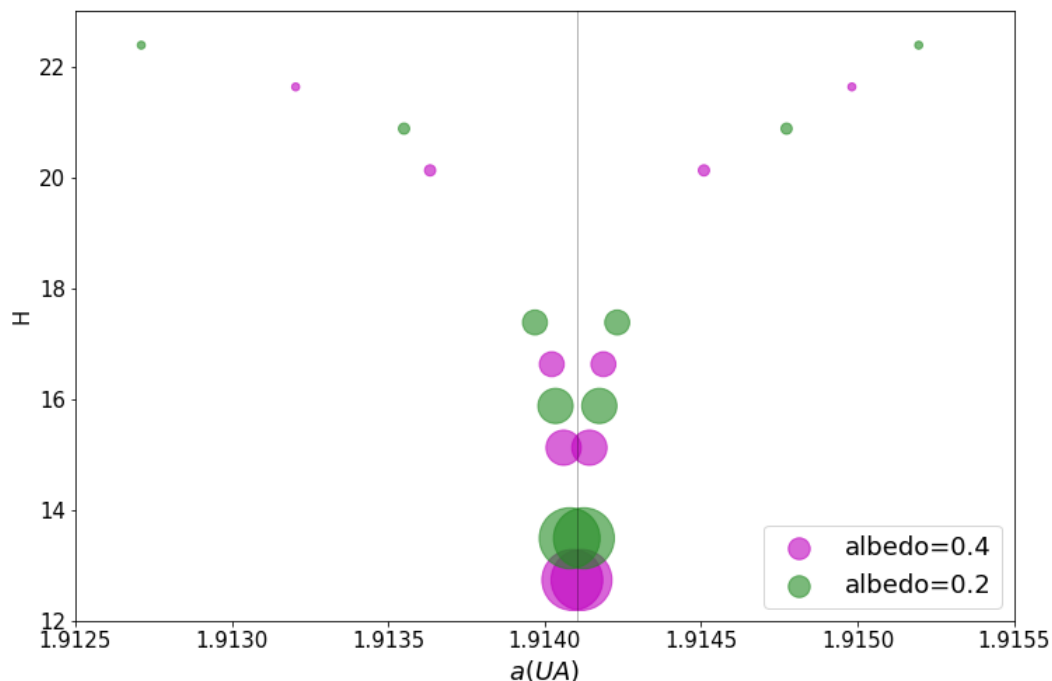


Figura 4.9: Proyección en el plano  $(a, H)$  de los 20 asteroides ficticios evolucionados durante  $1 \times 10^7$  años, con un integrador N-cuerpos en el que se incluyó la dispersión por la fuerza térmica Yarkovsky. La recta vertical hace referencia al valor inicial de semieje mayor asumido para todos los cuerpos; la diferencia de colores está asociada al valor del albedo y el tamaño de los puntos hace referencia al diámetro de los asteroides (0,1 km, 0,2 km, 1 km, 2 km, y 6 km).

de que, de tratarse de un grupo con un origen colisional común, los fragmentos han sido afectados por fuerzas gravitatorias y por efecto Yarkovsky, al menos, durante cientos de millones de años.

En la literatura encontramos que la tasa de corrimiento típico para asteroides -en el cinturón principal- de 5 km de diámetro es  $|da/dt| \sim 2 \times 10^{-5} \text{ UA}/1 \times 10^6$  años, mientras que asteroides de 20 km de diámetro tienen un desplazamiento típico de  $|da/dt| \sim 6 \times 10^{-6} \text{ UA} /1 \times 10^6$  años (Bottke et al., 2006). Para corroborar si estos valores son consistentes con los resultados obtenidos mediante nuestras simulaciones, se realizó un segundo experimento para asteroides de 5 y 20 km. Se obtuvo como resultado corrimientos de  $|da/dt| \sim 2 \times 10^{-6} \text{ UA} /1 \times 10^6$  años para asteroides



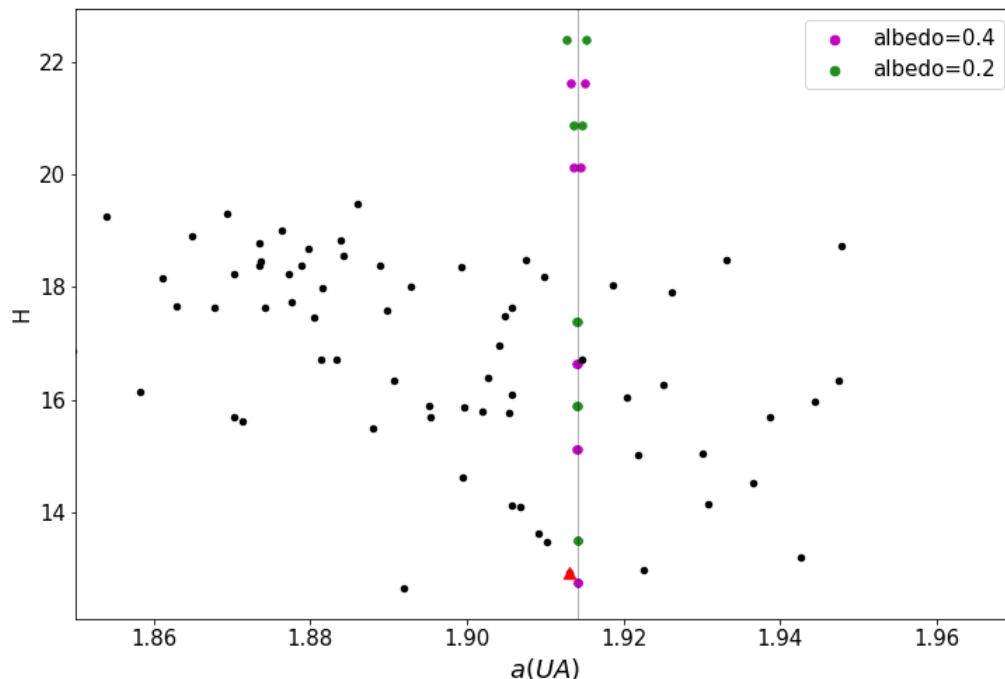


Figura 4.10: Proyección en el plano  $(a, H)$  de los 20 asteroides ficticios evolucionados durante  $1 \times 10^7$  años (puntos magenta y verdes), junto con el sub-grupo obtenido mediante el HCM (puntos negros). El triángulo rojo corresponde al posible cuerpo parental que dio origen a la familia. La recta vertical hace referencia al valor inicial de semieje mayor asumido en las simulaciones numéricas.

con  $D=5$  km; y de  $|da/dt| \sim 5 \times 10^{-7}$  UA /  $1 \times 10^6$  años para objetos con  $D=20$  km. Observamos que existe una diferencia de un orden de magnitud en los resultados. Esta discrepancia puede estar asociada, por un lado, a la gran cantidad de parámetros libres que poseen las ecuaciones. La densidad  $\rho$ , el calor específico a presión constante  $C_p$ , la emisividad  $\epsilon$ , la conductividad térmica  $K$ , los albedos  $p_v$ , periodos de rotación, entre otros, son parámetros físicos que no se conocen con exactitud para los asteroides del Sistema Solar. En general, estos valores se conocen con certeza para ciertos asteroides y tras ciertas suposiciones se extrapolan para el resto. Por otro lado, al momento de la colisión el campo de eyección de velocidades produce una dispersión de objetos en el espacio de elementos orbitales con un patrón que depende del tamaño de los fragmentos, expulsando más lejos y a mayor velocidad los de menor tamaño, y sobre este esquema, posteriormente, comienzan a actuar

las fuerzas de origen gravitatorio y de origen térmico. Esta dispersión inicial no es tenida en cuenta en nuestras simulaciones.

Cuantificar los desplazamientos medios es importante ya que, la edad de la posible familia podría estimarse calculando cuánto tiempo les llevó a los fragmentos dispersarse, a causa de las fuerzas térmicas de Yarkovsky, hasta obtener la distribución en  $(a, H)$  observada en la actualidad. Para llevar a cabo esta estima sería conveniente realizar integraciones numéricas por periodos de tiempo más largos y además tener presente el campo de eyección de velocidades inicial.

Un método alternativo para estimar la edad de familias de asteroides es el presentado por Vokrouhlický et al., (2006). Estos autores proponen un modelo para comprender cuantitativamente la dispersión de valores hallados en el plano  $(a, H)$  y así inferir el campo de velocidades de eyección original junto con la dispersión ocasionadas por la fuerza térmica de Yarkovsky. Para ello, utilizan una relación paramétrica entre  $H$  y  $a$ ,  $H = (a; p_1, p_2, \dots)$ , donde  $(p_1, p_2, \dots)$  son parámetros. Cuando esta relación funcional es un mapeo uno a uno logrado fijando todos los parámetros menos uno, por ejemplo el  $p_n$ , se puede caracterizar a la familia con una función de distribución  $D(p_n)$  sobre algún intervalo de valores  $p_n$ . Esta función contiene toda la información necesaria para los miembros de la familia.

La forma general paramétrica más simple que puede adoptar esta función es:

$$0,2\beta H = \log \left( \frac{a - a_c}{C} \right) \quad (4.15)$$

donde  $H$  es función de  $a$  y se utilizan tres parámetros  $H = (a; \beta, a_c, C)$ :  $\beta$  es positivo;  $a_c$  es el corrimiento observado del lugar de origen de la familia en  $a$ ; y  $C$  adquiere valores positivos y negativos en un determinado intervalo. Básicamente, Vokrouhlický et al., (2006) proponen fijar el valor de  $\beta$  y  $a_c$ , y considerar una función de densidad  $D(C)$  cuyos valores límites están relacionados con la edad de la familia.

Este fue el método utilizado por Warner et al., (2009) para determinar que la edad de la familia Hungaria era de  $0,5 \times 10^9$  años y se espera utilizarlo como método alternativo para comprar con las estimas que arrojen, a futuro, nuestras simulaciones numéricas.

En resumen, mediante el método de agrupamiento jerárquico y una métrica bidimensional se logró aislar un sub-grupo de asteroides interactuando con la resonancia secular  $\nu_{16} - \nu_5$ . La proyección de estos objetos en el plano  $(a, H)$  es consistente con el patrón en forma de “V” característico de un grupo de asteroides originados a partir de una colisión y que han sido influenciados por las fuerzas térmicas de Yarkovsky a lo largo de millones de años. A partir de esta observación, se realizaron simulaciones numéricas incluyendo en el código N-cuepos las perturbaciones ocasionadas por el efecto Yarkovsky diurno. Utilizando 20 asteroides ficticios pudimos reproducir la dispersión en semieje mayor ocasionada por este efecto. Al comparar las tasas de migración  $|da/dt|$  con las obtenidas por Bottke et al., (2006), encontramos que nuestros resultados son menores en un orden de magnitud. Cuantificar cuánta evolución en  $a$  han tenido los miembros de la posible familia resultaría útil para determinar la edad de la misma.



---

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas futuras

El objetivo de este trabajo ha sido profundizar en el entendimiento que se tiene acerca de la compleja región del espacio de fase en el que habita el grupo de asteroides Hungaria, así como los mecanismos que influyen en la evolución dinámica de sus miembros.

En primera instancia, construimos mapas dinámicos de alta resolución que nos ayudaron a caracterizar la estructura interna del espacio de fases que rodea a la población Hungaria. Implementamos diferentes indicadores de variación de los elementos orbitales: la máxima variación en semieje mayor, excentricidad e inclinación (mapas  $\max(\Delta a)$ ,  $\max(\Delta e)$ ,  $\max(\Delta i)$ , respectivamente). Los mapas se construyeron con las siguientes variantes:

- Incluyendo como planetas perturbadores a La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno; integrando en  $t = 6 \times 10^5$  años; indicadores  $\max(\Delta a)$ ,  $\max(\Delta e)$  y  $\max(\Delta i)$ .
- Incluyendo todos los planetas desde Venus a Neptuno y habiendo incluido la masa de Mercurio en la masa del Sol; integrando en  $t = 6 \times 10^5$  años; indicadores  $\max(\Delta a)$  y  $\max(\Delta e)$ .
- Incluyendo como planetas perturbadores a La Tierra, Marte, Júpiter y Saturno; integrando en  $t = 1 \times 10^6$  años; indicadores  $\max(\Delta a)$  y  $\max(\Delta e)$ .

A partir de ellos podemos observar que:

- Las estructuras dinámicas que se manifiestan en el espacio de fases varían significativamente al utilizar los diferentes indicadores.
- **Mapas  $\max(\Delta a)$ :** el semieje mayor resulta más sensible a las perturbaciones generadas por RMM. Resaltan estructuras verticales que coinciden con las posiciones nominales de RMM con los planetas. Independientemente de la cantidad de planetas perturbadores y del tiempo de integración, la zona de máxima variación del semieje mayor se produce en las inmediaciones del espacio orbital del planeta Marte ( $a_M = 1,52$  UA), mientras que la región central del mapa se comporta como una isla donde prácticamente no existe variación en  $a$ . En la región inferior derecha de estos mapas se hace clara la presencia de la resonancia secular  $\nu_6$  (estructura curva), que es una de las resonancias más influyentes en la distribución de asteroides del cinturón principal. Existen otras estructuras curvas, de baja variación de  $a$ , posiblemente relacionadas con resonancias seculares de más altos órdenes.
- **Mapas  $\max(\Delta e)$ :** la excentricidad tiene mayor sensibilidad a las perturbaciones producidas por resonancias seculares. Estos mapas exponen interesantes y diversas subestructuras del espacio de fases. Se hacen visibles RMM (rectas verticales), y resonancias seculares de bajos órdenes muy influyentes en la excentricidad de los cuerpos, por ejemplo, la  $\nu_5$  en la parte superior del mapa ( $i \sim 30^\circ$ ) y la  $\nu_6$  en la parte inferior derecha. Las subestructuras más llamativas se encuentran en la región central del mapa, donde se observa una zona de variación moderada de la excentricidad interrumpida por estructuras donde la excentricidad es más estable, formando lo que llamamos “espigas”.
- **Mapas  $\max(\Delta i)$ :** nos muestra que prácticamente la mitad del espacio de fases está dominado por la resonancia secular  $\nu_6$  que se encarga de incrementar las inclinaciones de los cuerpos que allí viven en escalas de tiempo muy cortas. En particular, el grupo Hungaria ocupa una región donde la variación en inclinación es moderada.
- **Sobre los tiempos de integración:** al aumentar el tiempo de integración de  $t = 6 \times 10^5$  años a  $t = 1 \times 10^6$  años, se observa que los principales cambios se generan en la zona izquierda del mapa, donde la acción perturbadora del planeta Marte se acentúa. Las estructuras que presentaban los mapas en  $t = 6 \times 10^5$  años se vuelven más difusas, pero a grandes rasgos todas se mantienen,

sobre todo en la región ocupada por los Hungaria. Consideramos entonces que  $t = 6 \times 10^5$  años constituye un intervalo de tiempo razonable para realizar un análisis de las principales estructuras que modelan el espacio de fases.

- **Sobre los perturbadores:** en la región de los asteroides Hungaria la dinámica se encuentra principalmente dominada por la acción perturbadora de la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Trabajar con cuatro planetas en vez de siete, reduce los tiempos de cómputos considerablemente, y además tiene grandes ventajas a la hora de identificar resonancias seculares de altos órdenes en la región.

A continuación, siguiendo los lineamientos de Milani et al., (2010), realizamos un ajuste empírico que nos permitió calcular las posiciones de numerosas resonancias seculares y que presenta un muy buen acuerdo con los resultados obtenidos originalmente por estos autores. Esto nos permitió cotejar las subestructuras observadas en el mapa  $\max(\Delta e)$  con la posición de diferentes resonancias seculares de altos órdenes, dando así, una posible explicación para lo que revelan los mapas. La acción perturbadora de estas nuevas resonancias seculares fueron testeadas, con resultados positivos.

Analizando la distribución del grupo Hungaria en el espacio de frecuencias propias  $(s, g)$  encontramos un grupo de asteroides capturados en la resonancia secular  $\nu_{16} - \nu_5$ . Estos objetos forman parte del grupo que se encuentra a mayores inclinaciones y apartado del *cluster* principal en el espacio semieje mayor vs. inclinación (Ver Figura 4.3c). Algunos autores, entre ellos Milani et al., (2010) y Cañada-Assandri (2012), proponen la existencia de una segunda familia colisional que ocupa la región de más altas inclinaciones. Esta última autora encuentra que la distribución de tipos taxonómicos entre los dos grupos no son consistentes. Sin embargo, en el momento en el que se desarrollaron estos trabajos, la información espectroscópica y polarimétrica útil para determinar tipos taxonómicos estaba disponible solo de forma parcial y esto resultó estadísticamente insuficiente para llegar a una conclusión firme. Impulsados por estas observaciones aplicamos técnicas de agrupamiento jerárquico para determinar la existencia de grupos en las cercanías de la resonancia  $\nu_{16} - \nu_5$ . Encontramos que las métricas estándares más utilizadas por numerosos autores (por ej., Carruba et al., 2007) para encontrar familias de asteroides, no son válidas en la región de los Hungaria, debido a que fueron inicialmente desarrolladas para asteroides del cinturón principal, donde el movimiento medio  $n$  toma valores

más pequeños. Propusimos una métrica bidimensional, donde quitamos la contribución por parte de  $n$ .

El HCM con la métrica bidimensional arrojaron resultados satisfactorios. Encontramos un grupo estadísticamente significativo para una distancia de corte  $d_{4c} = 8,68 \times 10^{-2}$  "/año, cuya distribución coincide con la resonancia secular  $\nu_{16} - \nu_5$ . La distribución en el plano  $(a, H)$  de estos asteroides es consistente con el patrón en forma de V característico de un grupo de asteroides originados a partir de una colisión y que han sido influenciados por las fuerzas térmicas de Yarkovsky a lo largo de millones de años. En otras palabras, encontramos indicios de un nuevo posible grupo colisional en la región.

Finalmente, incorporamos a las integraciones N-cuerpos la fuerza generada por el efecto Yarkovsky diurno. Evolucionamos 20 asteroides ficticios durante  $1 \times 10^7$  años. Acorde a las expectativas, se observó que los asteroides más pequeños migran hacia adentro o hacia afuera de la órbita original más rápidamente que los asteroides de mayor tamaño. Y además, que las fuerzas térmicas afectan en mayor medida a asteroides de bajo albedo. Para los asteroides de prueba se cuantificó la tasa de desplazamiento en semieje mayor, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.1.

Con el propósito de validar nuestros resultados, tomamos las tasas de migración calculadas por Bottke et al., (2006) para asteroides con diámetros de 5 y 12 km. Debido a que estos diámetros no están contemplados dentro de la simulación realizada, efectuamos un segundo experimento incluyendo asteroides con tamaños apropiados. Bottke et al., (2006) encuentra que las tasas de corrimiento típico para asteroides del cinturón principal son de  $|da/dt| \sim 2 \times 10^{-5}$  UA/ $1 \times 10^6$  años, para asteroides de 5 km, mientras que asteroides de 20 km de diámetro tienen un desplazamiento típico de  $|da/dt| \sim 6 \times 10^{-6}$  UA / $1 \times 10^6$  años. Nuestras simulaciones arrojan desplazamientos de  $|da/dt| \sim 2 \times 10^{-6}$  UA / $1 \times 10^6$  años para asteroides con D=5 km; y de  $|da/dt| \sim 5 \times 10^{-7}$  UA / $1 \times 10^6$  años para objetos con D=20 km. Existe un orden de magnitud de diferencia respecto a lo esperado. Esta diferencia puede deberse a la gran cantidad de parámetros libres asociados a la resolución de las ecuaciones para el efecto Yarkovsky. Los parámetros físicos necesarios para cuantificar este efecto incluyen: diámetro, albedo, oblicuidad del eje de rotación, periodo



de rotación, densidad superficial, emisividad, capacidad calorífica, calor específico a presión constante, etc. Todos ellos se fijan realizando suposiciones teóricas, o se miden indirectamente para unos pocos asteroides y luego se extrapola para el resto, haciendo que la incertidumbre en los valores sea alta.

Las perspectivas futuras de este trabajo abarcan:

- Efecto Yarkovsky: correcta determinación de los parámetros físicos para lograr que sean representativos del grupo de estudio.
- Cuantificar los desplazamientos medios en  $a$ , teniendo presente el campo de eyección de velocidades original y así poder realizar una estima de la edad de la familia, calculando cuánto tiempo les llevó a los fragmentos dispersarse, a causa de las fuerzas térmicas de Yarkovsky, hasta obtener la distribución en  $(a, H)$  observada en la actualidad.
- Buscar una relación funcional paramétrica entre  $a$  y  $H$  (Vokrouhlický et al., 2006) que se ajuste a la distribución observada en el plano  $(a, H)$  y cuyos parámetros se relacionan directamente con la edad de la familia.
- Complementar el estudio dinámico de este sub-grupo de asteroides, incorporando información acerca de los tipos taxonómicos, y testear su compatibilidad.



---

# Apéndice A

## Datos del Sistema Solar

Elementos orbitales keplerianos de los planetas del Sistema Solar.

<i>Planeta</i>	masa ( $M_{\odot}$ )	a (UA)	e	i ( $^{\circ}$ )	M ( $^{\circ}$ )	$\omega$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ )
Mercurio	1,66014e-7	0,387098	0,20563	7,0049	252,2508	77,4565	48,3317
Venus	2,44784e-6	0,723331	0,00677	3,3947	181,9797	131,5330	76,6807
Tierra	3,04043e-6	1,000000	0,01671	0,0000	100,4644	102,9472	348,7394
Marte	3,22715e-7	1,523662	0,09341	1,8506	355,4533	336,0409	49,5786
Júpiter	9,54792e-4	5,203363	0,04839	1,3053	34,4044	14,7539	100,5562
Saturno	2,85886e-4	9,537070	0,05415	2,4845	49,9442	92,4320	113,7150
Urano	4,36624e-5	19,191261	0,04717	0,7699	313,2322	170,9642	74,2299
Neptuno	5,15139e-5	30,068963	0,00859	1,7692	304,8800	44,9714	131,7217

Tabla A.1: Masa y elementos orbitales keplerianos de los planetas del Sistema Solar calculados con respecto a la eclíptica media y el equinoccio J2000, válidos para el intervalo de tiempo comprendido entre 1800 DC-2050 DC. Los datos fueron extraídos del sitio web JPL Solar System Dynamics (<http://ssd.jpl.nasa.gov/>).



---

## Apéndice B

# Formulación matemática del efecto Yarkovsky

La aceleración producida por la componente diurna del efecto Yarkovsky puede ser escrita de la forma (Vokrouhlický et al., 2000):

$$\mathbf{a}_{diurna} = \frac{4\alpha}{9} \frac{\Phi(r)}{1+\lambda} G [\sin(\delta) + \cos(\delta) \mathbf{s} \times] \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{s}}{r} \quad (\text{B.1})$$

siendo  $\alpha$  la absorción de la superficie del asteroide en la banda óptica (complementaria al albedo),  $\mathbf{s}$  es el vector unitario del eje de rotación y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición heliocéntrico con  $r = |\mathbf{r}|$ . El factor estándar de la fuerza de radiación en función de  $r$  se define como:

$$\Phi(r) = \frac{3\varepsilon(r)}{4R\rho c} \quad (\text{B.2})$$

con  $\varepsilon(r)$  la radiación solar instantánea a una distancia heliocéntrica  $r$ . La amplitud  $G$  y la fase  $\delta$  vienen dadas por:

$$Ge^{i\delta} = \frac{A(X) + iB(X)}{C(X) + iD(X)} \quad (\text{B.3})$$

donde  $i$  es la unidad compleja, el argumento  $X = \sqrt{2}R/\ell_\omega$  (recordando que para el efecto diurno  $\nu = \omega = \frac{2\pi}{P}$ , siendo  $P$  el periodo orbital) y el parámetro  $\lambda$  se define por  $\lambda = \Theta/X$ . Las funciones auxiliares tienen las siguientes expresiones:

$$A(x) = -(x+2) - e^x [(x-2)\cos(x) - x\sin(x)] \quad (\text{B.4})$$

$$B(x) = -x - e^x [x\cos(x) + (x-2)\sin(x)] \quad (\text{B.5})$$

$$C(x) = A(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \{3(x+2) + e^x [3(x-2)\cos(x) + x(x-3)\sin(x)]\} \quad (\text{B.6})$$

$$D(x) = B(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \{x(x+2) - e^x [x(x-3)\cos(x) - 3(x-2)\sin(x)]\} \quad (\text{B.7})$$

Aunque para valores grandes de  $x$  hemos desarrollado expresiones simplificadas, para calcular la amplitud  $G$  y la fase  $\delta$ , que facilitan su implementación:

$$G^2 \simeq \frac{2(2-2x+x^2)(1+\lambda)^2}{(x^2+4)(x-2)^2\lambda^2 + 2(x-2)(x^2-2x+4)\lambda + 2x^2-4x+4} \quad (\text{B.8})$$

$$\tan \delta \simeq \frac{-(x-2)\lambda x^2}{(x-2)(x^2-2x+4)\lambda + 2x^2-4x+4} \quad (\text{B.9})$$

## B.1. Parámetros físicos

Szurgot (2011), establece una aproximación lineal empírica que relaciona la conductividad térmica  $K$  (W/m.K) de un asteroide con la densidad  $\rho$  ( $kg/m^3$ ) del núcleo:

$$K = A\rho + B \quad (\text{B.10})$$

donde los coeficientes  $A$  y  $B$  son constantes para una dada temperatura. Asumiendo  $T = 100$  K en la región de los Hungaria, se tienen  $A = 2,99 \times 10^{-3}$   $W.m^2/kg.K$  y  $B = -5,84$   $W/m.K$ .

Por otro lado, Magri et al., (2001) proponen una relación entre el albedo radar de los asteroides y su densidad superficial. Shepard et al., (2008) establecen un albedo radar para el cuerpo parental (434)Hungaria de  $0,22 \pm 0,06$ , esto sugiere una densidad superficial acotada entre  $3000$   $kg/m^3 < \rho < 4000$   $kg/m^3$ . Asumiremos que la densidad de los asteroides de estudio coincide con la cota inferior propuesta y además que estos cuerpos no se encuentran diferenciados, es decir, poseen densidad uniforme.

Para el rango de densidades comprendidas entre  $3000$   $kg/m^3$  y  $8000$   $kg/m^3$ , el calor específico a presión constante  $C_p$  (J/kg K) puede ser calculado utilizando la expresión (Szurgot et al., 2012):

## 5. APÉNDICE B. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL EFECTO YARKOVSKY

---

$$C_p = a + \frac{b}{\rho} \quad (\text{B.11})$$

donde  $a = 303 \text{ J/kg.K}$  y  $b = 1,3 \times 10^6 \text{ J/kg.K}$ , son constantes a temperatura ambiente.

Por último, para las simulaciones numéricas se consideraron asteroides con albedos de 0,2 y 0,4; y se utilizó la constante solar  $\varepsilon_* = 1373 \text{ W/m}^2$  a una distancia de 1 UA.





---

# Bibliografía

- [1] Assandri, M. C., & Gil-Hutton, R. 2008, *A&A*, 488, 339.
- [2] Beaugé, C., & Roig, F. 2001, *Icarus*, 153, 391.
- [3] Bottke, W. F. 2002, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 34, 02.01.
- [4] Bottke, W. F., Jr., Vokrouhlický, D., Rubincam, D. P., & Nesvorný, D. 2006b, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 34, 157.
- [5] Bus, S. J., y R. P. Binzel (2002). *Icarus*, 158, 106.
- [6] Cañada-Assandri, M. I. (2012). PhD Thesis, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- [7] Carruba, V., & Michtchenko, T. A. 2007, *A&A*, 475, 1145.
- [8] Carruba, V., Vokrouhlický, D., & Novaković, B. 2018, *Planet. Space Sci.*, 157, 72.
- [9] Carvano, J. M., Lazzaro, D., Mothé-Diniz, T., Angeli, C. A., & Florczak, M. 2001, *Icarus*, 149, 173.
- [10] Cellino, A., Zappala, V., & Tedesco, E. F. 2002, *Meteoritics and Planetary Science*, 37, 1965.
- [11] Cincotta, P. M., & Simó, C. 2000, *A&AS*, 147, 205.
- [12] Correa-Otto, J. A., & Cañada-Assandri, M. 2018, *MNRAS*, 479, 1694.
- [13] Durda, D. D., Bottke, W. F., Nesvorný, D., Asphaug, E., & Richardson, D. C. 2004, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 36, 48.07.
- [14] Farinella, P., & Vokrouhlicky, D. 1999, *Science*, 283, 1507.

- [15] Ferraz-Mello, S., Nesvorný, D., & Michtchenko, T. A. 1998, *Solar System Formation and Evolution*, 149, 65.
- [16] Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Nesvorný, D., Roig, F., & Simula, A. 1998, *Planet. Space Sci.*, 46, 1425.
- [17] Gaffey, M. J., & Kelley, M. S. 2004, *Lunar and Planetary Science Conference*, 35.
- [18] Gil-Hutton, R., Lazzaro, D., & Benavidez, P. 2007, *A&A*, 468, 1109.
- [19] Gradie, J. C., Chapman, C. R., & Williams, J. G. 1979, *Asteroids*, 359.
- [20] Hartmann, W.K. (2005). *En Moons and Planets 5th edn.*(Brooks/Coleeds.), Belmont, CA.
- [21] Hirayama, K. 1918, *AJ*, 31, 185.
- [22] Hirayama, K. 1919, *Annales de l'Observatoire astronomique de Tokyo*.
- [23] Ivezić, Ž., Tabachnik, S., Rafikov, R., et al. 2001, *AJ*, 122, 2749.
- [24] Kirkwood, D. 1885, *Sidereal Messenger*, vol. 4, pp.257-259, 4, 257.
- [25] Knežević, Z., & Milani, A. 2000, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 78, 17.
- [26] Knežević, Z., & Milani, A. 2003, *A&A*, 403, 1165.
- [27] Laskar, J. 1985, *A&A*, 144, 133.
- [28] Laskar, J. 1988, *A&A*, 198, 341.
- [29] Laskar, J. 1990, *Icarus*, 88, 266.
- [30] Laskar, J., Correia, A. C. M., Gastineau, M., et al. 2004b, *Icarus*, 170, 343.
- [31] Lemaître, A. 1994, *75 Years of Hirayama Asteroid Families: The Role of Collisions in the Solar System History*, 63, 140.
- [32] Lemaître, A., & Morbidelli, A. 1994, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60, 29.

- [33] Magri, C., Consolmagno, G. J., Ostro, S. J., Benner, L. A. M., & Beeny, B. R. 2001, *Meteoritics and Planetary Science*, 36, 1697.
- [34] McEachern, F. M., Čuk, M., & Stewart, S. T. 2010, *Icarus*, 210, 644.
- [35] Milani, A., & Knezevic, Z. 1990, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 49, 347.
- [36] Milani, A., Knezević, Z., Novakobić, B., y Cellino, A. (2010). *Icarus*, 207, 769.
- [37] Morbidelli, A., 2001. *Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics*.
- [38] Morrison, D., & Zellner, B. 1979, *Asteroids*, 1090.
- [39] Moulton F. R., 1935. *An introduction to Celestial Mechanics*.
- [40] Murray C. y Dermott S., 1999a. *Solar system dynamics*. Cambridge University Press 1, 5-9.
- [41] Nobili, A. M., Milani, A., & Carpino, M. 1989, *A&A*, 210, 313.
- [42] Rubincam, D. P. 2000, *Icarus*, 148, 2.
- [43] Shepard, M. K., Kressler, K. M., Clark, B. E., et al. 2008, *Icarus*, 195, 220.
- [44] Spitale, J. N., & Greenberg, R. 2001, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 33, 54.03.
- [45] Szebehely, V. 1967, New York: Academic Press, c1967.
- [46] Szurgot, M. 2011, *Meteoritics and Planetary Science Supplement*, 74, 5074.
- [47] Szurgot, M. 2012, *Lunar and Planetary Science Conference*, 43, 2626.
- [48] Tedesco, E. F., Veeder, G. J., Matson, D. L., Chillemi, J. R., & Fowler, J. W. 1989, *BAAS*, 21, 969.
- [49] Tholen, D.J.(1984). PhD Thesis, University of Arizona, USA.
- [50] Vokrouhlický, D., & Farinella, P. 1998, *AJ*, 116, 2032.
- [51] Vokrouhlický, D., & Farinella, P. 1999, *AJ*, 118, 3049.
- [52] Vokrouhlický, D., Milani, A., & Chesley, S. R. 2000, *Icarus*, 148, 118.

- [53] Vokrouhlický, D., Brož, M., Bottke, W. F., Nesvorný, D., & Morbidelli, A. 2006, *Icarus*, 182, 118.
- [54] Warner, B. D., Harris, A. W., Vokrouhlický, D., Nesvorný, D., & Bottke, W. F. 2009, *Icarus*, 204, 172.
- [55] Zappalà, V. 1990, *Nouveaux Développements en Planétologie Dynamique*, 255.
- [56] Zappalà, V., Cellino, A., dell'Oro, A., & Paolicchi, P. 2002, *Asteroids III*, 619.
- [57] Zellner B. 1973. *Bull. Amer. Astron. Soc.*5, 388.